Laporan Tugas Kecil 2 - Strategi Algoritma (IF2211)

Membuat Pustaka untuk Perkalian Polinom dengan Algoritma Divide and Conquer



Oleh:

Muhammad Hasan - 13518012 - K03

TEKNIK INFORMATIKA

SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

SEMESTER 2 TAHUN 2019/2020

Daftar Isi

Daftar Isi	2
BAB 1 - Algoritma Bruteforce dan <i>Divide and Conquer</i> untuk Perkalian Polinom	3
1.1 Algoritma Bruteforce untuk Perkalian Polinom	3
1.2 Algoritma Divide and Conquer untuk Perkalian Polinom	4
BAB 2 – <i>Source Code</i> Program	7
2.1 Checklist Tabel Program	7
2.2 Source Code Program	7
BAB 3 – Screenshot Input-Output Program	13
3.1 Spesifikasi Personal Computer	13
3.2 Screenshot Input-Output Program	13
3.2.1 Test Derajat 5	13
3.2.1 Test Derajat 10	14
3.2.2 Test Derajat 20	14
3.2.3 Test Derajat 50	15

BAB 1 - Algoritma Bruteforce dan *Divide and Conquer* untuk Perkalian Polinom

1.1 Algoritma Bruteforce untuk Perkalian Polinom

Algoritma *bruteforce* dalam mengalikan polinom cukup *straightforward*. Jika kita memiliki dua buah polinom A(x) dan B(x) berderajat n, dengan:

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Maka hasil perkaliannya adalah dengan mengalikan setiap suku dari polinomial *A* dengan polinomial *B*, seperti uraian berikut:

$$\begin{split} A(x)B(x) &= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)B(x) \\ &= a_n x^n B(x) + a_{n-1} x^{n-1} B(x) + \dots + a_0 B(x) \\ &= (a_n b_n x^{2n} + \dots + a_n a_0 x^n) + (a_{n-1} b_n x^{2n-1} + \dots + a_{n-1} b_0 x^{n-1}) + \dots + (a_0 b_n x^n + \dots + a_0 b_0) \\ &= a_n b_n x^{2n} + (a_n b_{n-1} + a_{n-1} b_n) x^{2n-1} + \dots + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0 \end{split}$$

Hasil perkalian itu dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$A(x)B(x) = \sum_{k=0}^{2n} c_k x^k$$

Dengan $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$.

Tentunya, cara *bruteforce* ini dapat dilakukan pada perkalian polinomial yang berbeda derajat. Kemudian, dapat dilihat bahwa pada cara ini, setiap elemen dikalikan pada A dikalikan n kali dengan elemen-elemen pada B, baru kemudian ditambahkan semua. Oleh karena itu, pada algoritma *bruteforce* ini, kita akan mempunyai hasil kompleksitas waktu $O(n^2)$.

1.2 Algoritma Divide and Conquer untuk Perkalian Polinom

Untuk dua polinomial yang berderajat sama, kita dapat mengalikannya dengan Algoritma *Divide and Conquer*. Jika kita memiliki dua buah polinom A(x) dan B(x) berderajat n, dengan:

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Kedua polinomal tersebut dapat kita bagi (*divide*), contohnya untuk polinomal *A*, kita bisa bagi menjadi:

$$A_0(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$$

$$A_1(x) = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} x + \dots + a_n x^{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

sehingga

$$A(x) = A_0(x) + A_1(x)x^{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

Dengan cara yang sama pada polinomal B, kita bisa dapat juga:

$$B_0(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} x^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}$$

$$B_1(x) = b_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + b_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} x + \dots + b_n x^{n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

$$B(x) = B_0(x) + B_1(x) x^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

Dengan cara tersebut, kita bisa dapatkan perkalian polinom A dan polinom B sebagai berikut:

$$A(x)B(x) = \left(A_0(x) + A_1(x)x^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right) \left(B_0(x) + B_1(x)x^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)$$

$$= A_0(x)B_0(x) + A_0(x)B_1(x)x^{\left[\frac{n}{2}\right]} + A_1(x)B_0(x)x^{\left[\frac{n}{2}\right]} + A_1(x)B_1(x)x^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$$

Laporan Tugas Kecil 2 - Strategi Algoritma - Muhammad Hasan (13518012) - K03

Perkalian tersebut dapat kita modifikasi lagi, misalkan:

$$U(x) = A_0(x)B_0(x)$$

$$Z(x) = A_1(x)B_1(x)$$

$$Y(x) = (A_0(x) + A_1(x))(B_0(x) + B_1(x))$$

Dengan ini kita bisa lakukan tahap conquer, sehingga hasil perkalian menjadi:

$$A(x)B(x) = U(x) + (Y(x) - U(x) - Z(x))x^{\left[\frac{n}{2}\right]} + Z(x)x^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$$

Kompleksitas algoritma ini dapat kita hitung sebagai berikut:

Kita akan punya jumlah operasi T(n) didefinisikan sebagai:

$$T(n) = \begin{cases} 1 \text{ (untuk } n = 1) \\ 3T\left(\frac{n}{2}\right) + cn \end{cases}$$

Dengan c suatu konstanta

Misalkan $n = 2^h$, kita akan punya

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + cn$$

$$= 3\left(3T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{cn}{2}\right) + cn$$

$$= 3^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \left(1 + \frac{3}{2}\right)cn$$

$$= 3^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)cn$$

$$\vdots$$

$$= 3^hT\left(\frac{n}{2^h}\right) + \left(\sum_{i=2}^{h-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i\right)cn$$

Laporan Tugas Kecil 2 - Strategi Algoritma - Muhammad Hasan (13518012) - K03

Maka diperoleh $3^h = (2^{\log 3})^h = 2^{h \log 3} = (2^h)^{\log 3} = n^{\log 3} = n^{1.585}$, dan

$$\sum_{i=0}^{h-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^h - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 2\left(\frac{3}{2}\right)^h - 2 = 2n^{\log 3 - 1} - 2$$

Sehingga didapat kompleksitas waktu:

$$T(n) = O\left(n^{\log 3}T(1) + 2cn^{\log 3}\right) = O\left(n^{\log 3}\right) \approx O(n^{1.585})$$

BAB 2 - Source Code Program

2.1 Checklist Tabel Program

Poin	Ya	Tidak
Program berhasil	✓	
dikompilasi		
Program berhasil running	✓	
Program dapat menerima	✓	
input dan menuliskan		
output		
Luaran sudah benar untuk	✓	
semua data uji		

2.2 Source Code Program

Program dibuat dengan menggunakan bahasa pemrograman C++

Berikut adalah *source code* program **polinom.hpp**:

```
#ifndef _POLINOM_HPP_
#define _POLINOM_HPP_

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int jumlah_operasi = 0;

class Polinom {
   protected:
   int derajat;
   deque<int> polinom;

public:
   Polinom() {
    derajat = -1;
}
```

```
polinom.clear();
}
Polinom(int n) {
  derajat = n;
  polinom.resize(n + 1);
  for (int i = 0; i <= derajat; i++) {</pre>
    polinom[i] = rand() % 200 - 100;
  }
}
Polinom(const Polinom& p) {
  polinom = p.polinom;
  derajat = p.derajat;
}
Polinom(const Polinom& p, int s, int e) {
  derajat = e - s;
  polinom.resize(e - s + 1);
  for (int i = s, j = 0; i <= e; i++, j++) {
    polinom[j] = p.polinom[i];
  }
}
Polinom(const deque<int>& p) {
  polinom = p;
  derajat = (int) polinom.size() - 1;
}
Polinom& operator=(const Polinom& p) {
  polinom = p.polinom;
  derajat = p.derajat;
  return *this;
}
void add(int x) {
  derajat++;
  polinom.push_back(x);
}
void cetak_polinom() {
  if (derajat == 0) {
    cout << polinom[0] << endl;</pre>
    return;
```

```
for (int i = 0; i <= derajat; i++) {</pre>
    if (polinom[i] == 0) continue;
    if (i == 0) {
      cout << polinom[i] << " ";</pre>
      continue;
    }
    if (polinom[i] > 0) {
      if (i > 0) cout << "+ ";</pre>
     cout << polinom[i] << "x^" << i << " ";</pre>
    } else if (i == 0) {
      cout << polinom[i] << " ";</pre>
    } else {
      cout << "- " << -polinom[i] << "x^" << i << " ";</pre>
    }
  }
  cout << endl << endl;</pre>
}
friend Polinom operator+(const Polinom& p1, const Polinom& p2) {
  Polinom result;
  result.derajat = max(p1.derajat, p2.derajat);
  result.polinom.resize(result.derajat + 1);
  for (int i = 0; i <= result.derajat; i++) {</pre>
    int c_1 = (i <= p1.derajat ? p1.polinom[i] : 0);</pre>
    int c_2 = (i \le p2.derajat ? p2.polinom[i] : 0);
    result.polinom[i] = c_1 + c_2;
  }
  while (result.derajat >= 0 && result.polinom.back() == 0) {
    result.derajat--;
    result.polinom.pop_back();
  }
  return result;
}
friend Polinom operator-(const Polinom& p1, const Polinom& p2) {
Polinom result;
  result.derajat = max(p1.derajat, p2.derajat);
  result.polinom.resize(result.derajat + 1);
  for (int i = 0; i <= result.derajat; i++) {</pre>
    int c_1 = (i \le p1.derajat ? p1.polinom[i] : 0);
    int c_2 = (i <= p2.derajat ? p2.polinom[i] : 0);</pre>
    result.polinom[i] = c_1 - c_2;
  while (result.derajat >= 0 && result.polinom.back() == 0) {
```

```
result.derajat--;
    result.polinom.pop_back();
  }
  return result;
}
friend Polinom kali x pangkat(Polinom &p, int n) {
  p.derajat += n;
  for (int i = 0; i < n; i++) p.polinom.push_front(0);</pre>
  jumlah_operasi += n + 1;
  return p;
}
friend Polinom hasil_kali_bf(Polinom p1, Polinom p2) {
  Polinom hasil_polinom;
  deque<int> hasil;
  int derajat = p1.derajat;
  int hasil_derajat = p1.derajat + p2.derajat;
  jumlah_operasi += 2;
  for (int i = 0; i <= p1.derajat + p2.derajat; i++) {</pre>
    hasil.push_back(0);
    jumlah_operasi++;
  }
  for (int i = 0; i <= p1.derajat; i++) {</pre>
    for (int j = 0; j <= p2.derajat; j++) {</pre>
      hasil[i + j] += (p1.polinom[i] * p2.polinom[j]);
      jumlah_operasi += 2;
    }
  }
  hasil_polinom.derajat = p1.derajat + p2.derajat;
  jumlah operasi++;
  for (int i = 0; i <= p1.derajat + p2.derajat; i++) {</pre>
    hasil_polinom.polinom.push_back(hasil[i]);
    jumlah_operasi++;
  }
  return hasil_polinom;
}
friend Polinom hasil_kali_dnc(const Polinom &p1, const Polinom &p2) {
  if (p1.derajat == 0) {
   jumlah_operasi++;
```

```
deque<int> dq(1, p1.polinom[0] * p2.polinom[0]);
     return Polinom(dq);
   }
   int len = p1.derajat;
   int mid = (len + 1) / 2;
   int m = len / 2 - (len % 2 == 0);
   jumlah_operasi += 4;
   Polinom A0 = Polinom(p1, 0, m);
   Polinom A1 = Polinom(p1, m + 1, len);
   Polinom B0 = Polinom(p2, 0, m);
   Polinom B1 = Polinom(p2, m + 1, len);
   Polinom Y = hasil kali dnc(A0 + A1, B0 + B1);
   Polinom U = hasil_kali_dnc(A0, B0);
   Polinom Z = hasil_kali_dnc(A1, B1);
   Polinom T = Y - U - Z;
   return U + kali_x_pangkat(T, mid) + kali_x_pangkat(Z, 2 * mid);
 }
};
#endif
```

Berikut adalah *source code* program **main.cpp**:

```
#include <bits/stdc++.h>
#include "polinom.hpp"

using namespace std;

int main() {
    srand(time(0));
    clock_t timer;
    int derajat;

    cout << "Masukkan derajat polinom yang diinginkan : ";
    cin >> derajat;

Polinom A(derajat), B(derajat);
    cout << "Polinom A(x) yang terbuat adalah:" << endl;
    cout << "A(x) = ";</pre>
```

```
A.cetak_polinom();
  cout << "Polinom B(X) yang terbuat adalah:" << endl;</pre>
  cout << "B(x) = ";
  B.cetak_polinom();
  timer = clock();
  int operasi_sekarang = jumlah_operasi;
  Polinom C = hasil_kali_bf(A, B);
  cout << "Hasil kali bruteforce adalah:" << endl;</pre>
  cout << "A(x)B(x) = ";
 C.cetak_polinom();
 int operasi_setelah = jumlah_operasi;
 cout << "Terjadi sebanyak " << operasi_setelah - operasi_sekarang << " jumlah</pre>
 operasi kali dan tambah" << endl;</pre>
  cout << "Waktu penghitungan : " << (1000.0) * (clock() - timer) / CLOCKS_PER_</pre>
SEC << " ms" << endl << endl;
 timer = clock();
  operasi_sekarang = jumlah_operasi;
 Polinom D = hasil_kali_dnc(A, B);
  cout << "Hasil kali Divide and Conquer adalah:\n";</pre>
  cout << "A(x)B(x) = ";
 D.cetak_polinom();
 operasi_setelah = jumlah_operasi;
 cout << "Terjadi sebanyak " << operasi_setelah - operasi_sekarang << " jumlah</pre>
operasi kali dan tambah" << endl;</pre>
 cout << "Waktu penghitungan : " << (1000.0) * (clock() - timer) / CLOCKS_PER_</pre>
SEC << " ms" << endl;</pre>
 return 0;
```

BAB 3 – Screenshot Input-Output Program

3.1 Spesifikasi Personal Computer

Spesifikasi *Personal Computer* (PC) yang digunakan dalam menjalankan program adalah sebagai berikut:

Processor	RAM	HardDrive
Intel® Core™ i7-8550U	DDR3 – 16GB	SSD SATA 3 – 512 GB
CPU @ 1.80 GHz – 1.99		
GHz		

3.2 Screenshot Input-Output Program

Terdapat 4 uji test case sebagai berikut:

3.2.1 Test Derajat 5

```
Masukkan derajat polinom yang diinginkan : 5
Polinom A(x) yang terbuat adalah:
A(x) = -99 + 10x^1 + 9x^2 + 9x^3 + 62x^4 + 63x^5

Polinom B(X) yang terbuat adalah:
B(x) = 19 + 27x^1 - 52x^2 + 16x^3 - 25x^4 + 52x^5

Hasil kali bruteforce adalah:
A(x)B(x) = -1881 - 2483x^1 + 5589x^2 - 1690x^3 + 3588x^4 - 2851x^5 - 1084x^6 - 2041x^7 - 74x^8 + 1649x^9 + 3276x^{10}

Terjadi sebanyak 97 jumlah operasi kali dan tambah
Waktu penghitungan : 6 ms

Hasil kali Divide and Conquer adalah:
A(x)B(x) = -1881 - 2483x^1 + 5589x^2 - 1690x^3 + 3588x^4 - 2851x^5 - 1084x^6 - 2041x^7 - 74x^8 + 1649x^9 + 3276x^{10}

Terjadi sebanyak 117 jumlah operasi kali dan tambah
Waktu penghitungan : 3 ms
```

3.2.1 Test Derajat 10

```
Masukkan derajat polinom yang diinginkan : 10
Polinom A(x) yang terbuat adalah:
A(x) = 35 - 89x^1 - 24x^2 - 36x^3 - 25x^4 + 19x^5 - 43x^6 + 81x^7 - 36x^8 - 79x^9 - 89x^10
 Polinom B(X) yang terbuat adalah:
B(x) = 58 - 97x^{1} + 67x^{2} + 70x^{3} - 38x^{4} - 45x^{5} - 35x^{6} - 16x^{7} + 77x^{8} + 19x^{9} - 30x^{10}
 Hasil kali bruteforce adalah:
A(x)B(x) = 2030 - 8557x^{1} + 9586x^{2} - 3273x^{3} - 7126x^{4} + 1242x^{5} - 4840x^{6} + 13395x^{7} - 3967x^{8} - 2814x^{9} + 3
400x^10 - 1146x^11 - 14458x^12 - 1687x^13 + 4701x^14 + 12196x^15 + 4436x^16 - 7773x^17 - 7274x^18 + 679x^19 +
2670x^20
 Terjadi sebanyak 287 jumlah operasi kali dan tambah
Waktu penghitungan : 32 ms
 Hasil kali Divide and Conquer adalah:
 A(x)B(x) = 2030 - 8557x^{1} + 9586x^{2} - 3273x^{3} - 7126x^{4} + 1242x^{5} - 4840x^{6} + 13395x^{7} - 3967x^{8} - 2814x^{9} + 3840x^{7} + 1242x^{7} + 1242x^{7}
400x^{10} - 1146x^{11} - 14458x^{12} - 1687x^{13} + 4701x^{14} + 12196x^{15} + 4436x^{16} - 7773x^{17} - 7274x^{18} + 679x^{19} +
2670x^20
 Terjadi sebanyak 347 jumlah operasi kali dan tambah
 Waktu penghitungan : 12 ms
```

3.2.2 Test Derajat 20

```
Masukkan derajat polinom yang diinginkan : 20
Polinom A(x) yang terbuat adalah:
A(x) = -75 + 47x^1 + 23x^2 + 79x^3 + 69x^4 + 50x^5 + 53x^6 + 97x^7 - 65x^8 - 1x^9 - 53x^{10} - 22x^{11} - 17x^{12}
   70x^13 - 75x^14 - 44x^15 + 92x^16 + 10x^17 + 78x^18 + 20x^19 - 9x^20
Polinom B(X) yang terbuat adalah:
B(x) = -83 + 14x^1 - 66x^2 - 18x^3 + 10x^4 + 98x^5 + 7x^6 + 40x^7 - 53x^8 + 68x^9 - 20x^{10} + 34x^{11} + 2x^{12} -
43x^13 - 15x^14 + 81x^15 - 51x^16 + 32x^17 - 11x^18 - 80x^19 + 13x^20
Hasil kali bruteforce adalah:
A(x)B(x) = 6225 - 4951x^{1} + 3699x^{2} - 7987x^{3} - 7735x^{4} - 15692x^{5} - 5364x^{6} - 11478x^{7} + 16803x^{8} - 7039x^{9} + 16803x^{8} - 7039x^{8} - 7039x^{
 19479x^{1}0 + 5481x^{1}1 + 18549x^{1}2 + 8960x^{1}3 + 10607x^{1}4 - 8295x^{1}5 + 9930x^{1}6 - 11419x^{1}7 - 8408x^{1}8 - 11528x^{1}8 + 11419x^{1}7 - 11419x^{1}8 + 11418x^{1}8 + 11418x^{1}8 + 11418x^{1}8 + 11418
 ^19 - 17612x^20 + 7341x^21 + 571x^22 - 1499x^23 - 1573x^24 - 3624x^25 - 8405x^26 + 15520x^27 - 1871x^28 - 216x
 ^29 - 1515x^30 + 5370x^31 - 1134x^32 + 14413x^33 - 370x^34 - 7295x^35 + 637x^36 - 6618x^37 - 487x^38 + 980x^39
   - 117x^40
Terjadi sebanyak 967 jumlah operasi kali dan tambah
Waktu penghitungan : 20 ms
Hasil kali Divide and Conquer adalah:
A(x)B(x) = 6225 - 4951x^{1} + 3699x^{2} - 7987x^{3} - 7735x^{4} - 15692x^{5} - 5364x^{6} - 11478x^{7} + 16803x^{8} - 7039x^{9} +
  19479x^10 + 5481x^11 + 18549x^12 + 8960x^13 + 10607x^14 - 8295x^15 + 9930x^16 - 11419x^17 - 8408x^18 - 11528x
 ^19 - 17612x^20 + 7341x^21 + 571x^22 - 1499x^23 - 1573x^24 - 3624x^25 - 8405x^26 + 15520x^27 - 1871x^28 - 216x
 ^29 - 1515x^30 + 5370x^31 - 1134x^32 + 14413x^33 - 370x^34 - 7295x^35 + 637x^36 - 6618x^37 - 487x^38 + 980x^39
    - 117x^40
Terjadi sebanyak 1027 jumlah operasi kali dan tambah
Waktu penghitungan : 17 ms
```

3.2.3 Test Derajat 50

```
Masukkan derajat polinom yang diinginkan : 50
Polinom A(X) yang terbuat adalah:
A(X) = 92, 344Y1 = 947, 624Y3 = 514Y3 + 264Y3 + 624Y5 - 894Y6 + 184Y7 + 884Y8 - 444Y9 + 644Y10 + 454Y11 - 244Y12 + 204Y13 - 984Y14 + 494Y15 - 604Y16 + 144Y17 + 944Y18 + 824Y19 - 1004Y20 + 824Y21 + 444Y22 - 644Y23 - 514Y24 + 784Y25 - 714Y25 - 584Y27 - 104Y28 + 314Y29 + 614Y31 - 924Y32 + 804Y33 + 344Y34 - 464Y35 - 693Y36 + 334Y37 - 874Y38 + 144Y39 + 644Y40 - 284Y41 - 494Y42 - 194Y43 - 644Y44 + 524Y45 + 844Y46 + 744Y47 - 684Y48 + 794Y49 + 674Y59
Polinom B(X) yang terbuat adalah:
B(X) = 80 + 274Y1 - 584Y2 - 574Y3 - 614Y4 + 124Y5 + 424Y6 + 444Y7 + 334Y8 + 484Y9 - 474Y10 - 314Y11 + 914Y12 - 184Y13 + 974Y14 + 604Y15 + 964Y16 + 844Y17 + 124Y18 + 224Y19 + 284Y20 + 804Y11 - 194Y22 + 494Y23 + 204Y24 + 924Y3 + 714Y46 - 414Y7 - 424Y28 + 274Y29 - 694Y30 - 274Y31 - 124Y32 + 255X33 + 824Y34 + 84Y35 + 684Y36 + 514Y37 + 194Y38 - 424Y39 + 634Y41 - 594Y42 + 924Y34 + 714Y44 + 114Y45 - 944Y46 - 494Y47 + 584Y48 - 464Y49 + 364Y59 + 6336X10 + 5253XY11 + 1794Y38 + 4356Y19 - 23453XY20 - 35433XY21 - 2481Y22 - 22566Y33 - 2394Y24 + 18059Y25 - 179514Y36 + 17158Y27 - 4856XY28 - 5388XY29 + 18259 94Y15 + 57424Y16 - 12832XY17 + 1794Y38 + 4336Y19 - 23453XY30 - 35433XY21 - 2481Y22 - 22566Y33 - 2394XY24 + 18059Y25 - 179514Y36 + 17158Y27 - 4856XY28 - 5388XY29 + 18259 94Y16 + 57253XY46 + 23652XY47 - 12214XY48 + 31553XY49 - 256594Y59 + 25424Y51 - 78184Y25 - 8345XY32 + 8057Y58 + 3065Y58 - 10237XY56 - 24691XY69 + 1744Y44 + 15172XY49 + 5715XY59 - 34657XY6 - 25798XY77 + 3224XY8 - 6674XY9 - 10334XY96 + 19574Y98 - 10334XY96 + 13717Y99 - 13134Y11 - 44848XY42 - 2344XY48 - 27458XY79 - 28564Y59 + 18259 94759 - 10334XY96 + 19574Y98 - 10334XY96 + 13717Y99 - 13134Y11 - 44848XY42 - 2344XY48 - 27458XY96 - 10574Y98 - 10584Y98 - 10584XY98 - 10584XY96 - 10574Y98 - 10584XY96 - 10
```