

Институт математики механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного  
федерального университета

На правах рукописи

УДК 517.977

Мироненко Георгий Викторович

Методы теории вязкостных решений в прикладных задачах оптимального  
управления

Специальность 05.13.18 —

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Рохлин Д. Б.

Ростов-на-Дону – 2018

# Содержание

Введение . . . . .	4
1 Расчет оптимальных стратегий выплаты дивидендов, перестрахования и инвестирования в диффузионной модели . . . . .	23
1.1 Постановка задачи . . . . .	23
1.2 Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана . . . . .	26
1.3 Разностная схема . . . . .	28
1.4 Результаты численных расчетов . . . . .	31
2 Регулярные задачи стохастического управления с конечным топливом . . . . .	38
2.1 Введение . . . . .	38
2.2 Характеризация функции Беллмана . . . . .	42
2.3 Оптимальная коррекция стохастической системы . . . . .	51
2.4 Оптимальное отслеживание стохастической системы . . . . .	55
3 Оптимальные стратегии производства и назначения цен в динамической модели фирмы-монополиста . . . . .	61
3.1 Введение . . . . .	61
3.2 Представление функции Беллмана . . . . .	64
3.3 Оптимальные стратегии в случае нулевого начального запаса . . . . .	73
3.4 Оптимальные стратегии в случае положительного начального запаса . . . . .	78
3.5 Случай строго вогнутого мгновенного дохода и линейной функции затрат . . . . .	82
3.6 Пример Арвана-Мозеса . . . . .	83
4 Задача о позиционировании случайного объекта за счет однократного изменения приращений его траектории . . . . .	88
4.1 Введение . . . . .	88
4.2 Постановка задачи и ее сведение к задаче оптимальной остановки . . . . .	89
4.3 Оценка границы области остановки . . . . .	90

4.4 Разностная схема . . . . .	93
Заключение . . . . .	96
Список рисунков . . . . .	97
Список таблиц . . . . .	98
Литература . . . . .	99
А Название первого приложения . . . . .	107
В Очень длинное название второго приложения, в котором продемонстрирована работа с длинными таблицами . . . . .	108
В.1 Подраздел приложения . . . . .	108
В.2 Ещё один подраздел приложения . . . . .	111
В.3 Очередной подраздел приложения . . . . .	111
В.4 И ещё один подраздел приложения . . . . .	111

# Введение

Диссертация подготовлена на кафедре высшей математики и исследования операций Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета и касается применения методов теории вязкостных решений в прикладных задачах оптимального управления

Актуальность темы. Задачи оптимального управления естественным образом возникают в экономике, механике, экологии, менеджменте, финансовой математике и других областях. Динамические задачи оптимальной организации производства, эксплуатации природных ресурсов, назначения цен на товары, торговли рисковыми активами, распределения трудовых ресурсов и капитала, управления механическими системами и другие прикладные задачи требуют развития эффективных методов их решения.

Основным общим подходом к анализу разнообразных задач оптимального управления является метод динамического программирования Беллмана. Данный метод зародился в 1960-х годах работах Р. Беллмана, но его применимость к непрерывным задачам оптимального управления долгое время представлялась весьма ограниченной в связи тем, что функция ценности (функция Беллмана), которая в каждой задаче формально удовлетворяет соответствующему уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB), часто является негладкой. Ситуация изменилась в 1980-х годах в связи с изобретением и дальнейшим бурным развитием теории вязкостных решений: см., в частности, Crandall, Lions [1], Jensen [2], Crandall, Ishii, Lions [3]. Современное состояние теории вязкостных решений отражено в монографиях Fleming, Soner [4], Giga [5], Pham [6] Touz [7], [Koike], Katzourakis [8]. Данная теория не только позволила, в типичных ситуациях, описать функцию Беллмана как единственное вязкостное решение уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, но и дала возможность развить новую схему обоснования сходимости численных методов для широкого класса сложных нелинейных задач: см. Barles, Souganidis [9], Oberman [10]. А именно, если для уравнения HJB справедлива теорема сравнения, то аппроксимирующая схема, обладающая свойствами монотонности, устойчивости и согласованности, является сходящейся.

Таким образом, возникла общая схема исследования широкого класса непрерывных задач оптимального управления, предполагающая характеризацию функции Беллмана как единственного вязкостного решения уравнения НЖВ, доказательство теоремы сравнения, и построение монотонной, устойчивой и согласованной аппроксимирующей схемы. Данная схема является основой многочисленных современных исследований теоретического и прикладного характера. Отметим, несколько недавних работ, в которых рассматриваются конкретные прикладные задачи: торговля парами с нестационарной волатильностью Li, Tourin [11], вычисления цен безразличия неторгуемых активов на основе экспоненциальной полезности Henderson, Liang [12], управлении запасами энергии при случайных ценах в условиях неполной информации Shardin, Szölgényi [13], оптимизации условной стоимостной меры риска (CVaR) в непрерывном времени Miller, Yang [?], оценивания и хеджирования контрактов на энергетических рынках Callegaro [?], , управления диффузионными процессами со случайными дисконтирующими факторами, зависящими от фазовой переменной Lu, Yin, Guo, [?], стратегий торговли в модели с байесовским обновлением параметра Baradel, Bouchard, Dang [?], загрязнения мелкого озера Kossioris, Loulakis, Souganidis [?], добычи нефти и ее налогообложения Pemy [?], инвестирования и выплаты дивидендов в модели с переключением режимов и налогообложением (Xu, Yao, Cheng, 2017), инвестирования-потребления при наличии операционных издержек (Tsai, Fahim, 2018), оценки Европейских опционов в экспоненциальных моделях Леви с марковским модулированием (Momeya, 2018), управления процессом ирригации (Unami, Mohawesh, 2018)

Несколько известных задач, поддающихся анализу с использованием развитых в теории оптимального управления численных методов описаны в недавней обзорной работе Festa et. al. [?]: задача о восстановлении формы трехмерного объекта по закрашке полутонового изображения (shape-from-shading), задача об управлении парусной лодкой, задача о распространении фронта, а также игры среднего поля (mean-field games). Отметим также обзор Neilan, Salgado, Zhang [?], касающийся анализа численных схем для сильно нелинейных уравнений в частных производных на основе теории вязкостных решений.

Развитие описанной методики представляется интересной и актуальной проблемой. Конкретные задачи, рассматриваемые в работе, представляют самостоятельный интерес и, в то же время, служат стимулом для развития и совершенствования данной методики. Они также позволяют лучше понять области ее применимости.

Цель настоящей работы состоит в исследовании конкретных прикладных задач оптимального управления на основе единой методики, основанной на теории вязкостных решений. Такая цель предполагает и развитие указанной методики, включающей (i) обоснование корректности описания функции ценности (функции Беллмана) как единственного вязкостного решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, (ii) аналитическое исследование данного уравнения, (iii) построение и обоснование сходимости разностных схем на основе теоремы сравнения, (iv) проведение компьютерных экспериментов. В работе рассмотрены (1) задача об оптимизации потока дивидендов, перестрахования и инвестирования в диффузионной модели, (2) регулярная задача стохастического оптимального управления с конечным топливом, (3) задача об оптимальных стратегиях производства и назначения цены в динамической модели фирмы-монополиста, (4) задача о позиционировании случайного объекта за счет однократного изменения приращений его траектории. Основная цель при анализе каждой из этих задач состояла в описании структуры оптимального управления.

Научная новизна. (1) В задаче об оптимизации потока дивидендов страховой компании, которая использует стратегии перестрахования и инвестирования, с помощью численных экспериментов установлен ряд нетривиальных свойств оптимальных стратегий, касающихся зависимости барьерной структуры выплаты дивидендов, доли капитала, инвестируемой в рисковый актив, и стратегии перестрахования от случайного фактора, определяющего величину сноса рискового актива. (2) В регулярной задаче стохастического оптимального управления с конечным топливом с использованием стохастического метода Перрона установлено, что функция Беллмана является единственным вязкостным решением задачи Дирихле для соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. На основе этого результата обоснована сходимость построенных разностных схем для задач оптимальной коррекции и оптимального слежения за стохастической системой с устойчивой или неустойчивой точкой равновесия. На основе численных экспериментов дано качественное и количественное описание оптимальных стратегий.

(3) В задаче об оптимальных стратегиях производства и назначения цены в динамической модели фирмы-монополиста с использованием теории вязкостных решений и двойственности Фенхеля получено представление для функции Беллмана, исследована ее регулярность, и дано полное описание оптимальных стратегий без предположения о выпуклости оптимизационной задачи. Из полученных результатов следует, что невыпуклость функции производственных затрат способна объяснить наличие производственных

циклов, но не накопление запасов. Проведен детальный анализ одной из функций затрат, рассматривавшейся Арваном и Мозесом [14] в 1981 году.

(4) В задаче о позиционировании случайного объекта за счет однократного изменения приращений его траектории, для моделей броуновского движения со сносом и геометрического броуновского движения, аналитически получены односторонние оценки области остановки. Точность данных оценок иллюстрируется численными экспериментами, в которых область остановки вычисляется исходя из решения методом конечных разностей уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для соответствующей задачи оптимальной остановки.

Методы исследования. В работе использованы методы теории оптимального управления диффузионными процессами, методы теории вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана, методы выпуклого анализа, численные методы и компьютерные эксперименты.

Научная и практическая ценность работы. Полученные результаты касаются качественного и количественного исследования ряда прикладных задач оптимального управления диффузионными и детерминированными процессами. С теоретической точки зрения представляет интерес развитие методики анализа таких задач (на математическом уровне строгости) на основе теории вязкостных решений. Полученные результаты могут использоваться специалистами в соответствующих предметных областях и служить иллюстративным материалом в учебном процессе в рамках специальных курсов по оптимальному управлению. Практическая ценность рассматриваемой методики состоит в том, что она позволяет получать качественные и количественные результаты о структуре оптимального управления на основе компьютерных экспериментов.

Апробация работы. Результаты, относящиеся к диссертации, излагались на следующих конференциях: .....

Публикации. Результаты работы опубликованы в 4 журнальных статьях в рецензируемых изданиях, входящих в базу данных Scopus (3 статьи) и в список ВАК (1 статья). Имеются также ... публикаций в тезисах международных конференций.

Личный вклад автора. В работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, вклад авторов можно оценить как равный. В частности, компьютерная реализация разностных схем принадлежит соискателю.

Структура работы и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографического списка.

Содержание работы. В главе 1 рассматривается задача об оптимальной выплате дивидендов страховой компанией в диффузионном приближении. Пусть имеется рисковый актив, цена которого  $S$  описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS_t = \mu_2(Y_t)S_t dt + \sigma_2(Y_t)S_t dW_t^2. \quad (0.1)$$

Здесь  $Y$  случайный фактор, динамика которого подчиняется уравнению

$$dY_t = \mu_3(Y_t)dt + \sigma_3(Y_t)dW_t^3. \quad (0.2)$$

Стандартные броуновские движения  $(W^1, W^2, W^3)$  предполагаются независимыми.

Модель резерва страховой компании заимствована из [15, 16]:

$$dR_t = \mu_1(a)dt + \sigma_1(a)dW_t^1, \quad (0.3)$$

где  $W^1$  — стандартное броуновское движение.

Компания может инвестировать средства в данный актив, но объем этих инвестиций  $\theta$  ограничен некоторой постоянной величиной  $\bar{\theta}$ . Пусть, кроме того, компания применяет динамическую стратегию  $\alpha = (\alpha_t)_{t \geq 0}$  перестрахования и выплачивает дивиденды с конечной интенсивностью  $c = (c_t)_{t \geq 0}$ . Приращение капитала  $V$  компании складывается из приращений резерва, инвестированных средств и выплаченных дивидендов:

$$dV_t = (\mu_1(\alpha_t) + \mu_2(Y_t)\theta)dt + \sigma_1(\alpha_t)dW_t^1 + \sigma_2(Y_t)\theta dW_t^2 - c_t dt. \quad (0.4)$$

Обозначим через  $X^{x,u}$  решение системы (1.5) при заданной стратегии управления  $u = (\alpha, \theta, c)$ . Цель компании состоит в максимизации ожидаемой дисконтированной суммы выплаченных дивидендов до момента банкротства:

$$v(x) = \sup_u \mathbb{E} \int_0^{\tau^{x,u}} e^{-\beta t} c_t dt. \quad (0.5)$$

Здесь  $\tau^{x,u} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{x,u} \leq 0\}$ ,  $\beta > 0$  и максимизация ведется по всем прогрессивно измеримым управлениям

$$u_t = (\alpha_t, \theta_t, c_t) \in U := A \times [0, \bar{\theta}] \times [0, \bar{c}].$$

Из теории стохастического оптимального управления (см. [6, 7, 17]) известно, что, по крайней мере формально, функция Беллмана  $v$  в полуплоскости  $G = (0, \infty) \times \mathbb{R}$  удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\begin{aligned} & \beta v(x) - \mu_3(x_2)v_{x_2}(x) - \frac{1}{2}\sigma_3^2(x_2)v_{x_2x_2} - \max_{\theta \in [0, \bar{\theta}]} \{ \mu_2(x_2)\theta v_{x_1}(x) + \frac{1}{2}\sigma_2^2(x_2)\theta^2 v_{x_1x_1} \} \\ & - \max_{c \in [0, \bar{c}]} \{ (1 - v_{x_1}(x))c \} - \sup_{a \in A} \{ \mu_1(a)v_{x_1}(x) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(a)v_{x_1x_1}(x) \} = 0, \end{aligned} \quad (0.6)$$

$$v(0, x_2) = 0.$$



Более точно, данную краевую задачу следует понимать в «вязкостном смысле». Соответствующие определения можно найти в [?, 3, 6, 7].

Предположим теперь, что в нашей задаче выполняется следующее условие невырожденности

$$\underline{\sigma}_1 := \inf_{a \in A} \sigma^1(a) > 0. \quad (0.7)$$

В этом случае справедлив сильный принцип сравнения: для любых субрешения  $u$  и суперрешения  $v$  задачи (2.3) имеет место неравенство  $u \leq v$  на  $G$ . Данный результат является следствием невырожденности диффузии по нормали к границе (см. [18, 19]), что в данном означает (2.5).

Из сильного принципа сравнения вытекает, что функция Беллмана  $v$  непрерывна и является единственным вязкостным решением задачи (2.3): см. [20] (теорема 1 и замечание 1).

Для численного решения задачи рассмотрим прямоугольную сетку

$$\bar{G}_h = \{(ih_1, jh_2) : 0 \leq i \leq I, -J \leq j \leq J\}, \quad Ih_1 = a, \quad Jh_2 = b.$$

Здесь  $I, J, i, j$  — целые числа,  $h = (h_1, h_2)$  — шаг сетки. Узлы  $(ih_1, jh_2)$ ,  $0 < i < I$ ,  $-J < j < J$  назовем внутренними, а остальные узлы — граничными. Множества внутренних и граничных узлов обозначим через  $G_h$  и  $\partial G_h$  соответственно. Каждому внутреннему узлу поставим в соответствие уравнение для сеточной функции  $v_{ij} = v(x_{ij})$ ,  $x_{ij} = (ih_1, jh_2)$ :

$$\begin{aligned} 0 = & \beta v_{ij} - \left( \mu_{3;j}^+ \frac{v_{i,j+1} - v_{ij}}{h_2} - \mu_{3;j}^- \frac{v_{ij} - v_{i,j-1}}{h_2} \right) - \frac{1}{2} \sigma_{3;j}^2 \frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{h_2^2} \\ & - \max_{\theta \in [0, \bar{\theta}]} \left\{ \mu_{2;j}^+ \theta \frac{v_{i+1,j} - v_{ij}}{h_1} - \mu_{2;j}^- \theta \frac{v_{i-1,j} - v_{ij}}{h_1} + \frac{1}{2} \sigma_{2;j}^2 \theta^2 \frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{h_1^2} \right\} \\ & - \max_{c \in [0, \bar{c}]} \left\{ c \left( 1 - \frac{v_{ij} - v_{i-1,j}}{h_1} \right) \right\} \\ & - \max_{a \in A} \left\{ \mu_1^+(a) \frac{v_{i+1,j} - v_{ij}}{h_1} - \mu_1^-(a) \frac{v_{ij} - v_{i-1,j}}{h_1} + \frac{1}{2} \sigma_1^2(a) \frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{h_1^2} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $\mu_{k;j} = \mu_k(jh_2)$ ,  $\sigma_{k;j} = \sigma_k(jh_2)$ ,  $k = 2, 3$ . В граничных узлах ставится условие Дирихле

$$0 = v_{ij}, \quad i \in \{0, I\}, \quad j \in \{-J, \dots, J\}; \quad i \in [0, \dots, I], \quad j \in \{-J, J\}.$$

В терминологии [10] рассматриваемая схема является вырожденной эллиптической, правильной и непрерывной по Липшицу. Из результатов указанной работы следует, что система уравнений (3.1) имеет единственное решение  $v_h$ , совпадающее с неподвижной точкой  $S_\rho$ , и данное решение может быть найдено методом простых итераций.

При проведении численных экспериментов рассматривался частный случай исследуемой модели, в которой волатильность  $\sigma_2$  рискованного актива  $S$  постоянна, а снос  $\mu_2$  подчиняется процессу Орнштейна-Уленбека:

$$\mu_2(Y) = l + k_1 Y, \quad dY = -k_2 Y dt + \sigma_3 dW^3.$$

Здесь  $l$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\sigma_3$  — положительные константы. Как отмечено, напр., в [21, 22] такая модель позволяет описывать черты, присущие рынкам «быков» и «медведей». Кроме того, рассматривался пропорциональный механизм перестрахования рисков в случае дешевого перестрахования (cheap reinsurance):

$$\mu_1(a) = a\bar{\mu}, \quad \sigma_1(a) = a\bar{\sigma} \quad (0.8)$$

Численные расчеты подтверждают хорошо известную «барьерную» структуру оптимальной интенсивности  $c^*$  выплачиваемых дивидендов:

$$c^* = \begin{cases} 0, & x_1 < x^*(x_2) \\ \bar{c}, & x_1 \geq x^*(x_2). \end{cases} \quad (0.9)$$

Кроме указанной барьерной структуры изучено также поведение  $\theta^*$  — оптимального объема капитала, инвестируемого в рискованый актив и  $\alpha^*$  — оптимального уровня перестрахования. Численные эксперименты указывают на ряд нетривиальных свойств оптимальных стратегий.

В главе 2 рассматривается задача управления, в которой требуется как можно дольше удерживать стохастическую систему  $X$  в заданной области  $G$ . Воздействие на систему  $X$  требует расхода ресурса (или топлива). Задача состоит в том, чтобы использовать имеющееся количество ресурса оптимальным образом. В отличие от подавляющего большинства известных работ, мы предполагаем что интенсивность потребления ресурса (топлива) ограничена.

Пусть  $W = (W^1, \dots, W^m)$   $m$ -размерный винеровский процесс, в пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , где  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$  — минимальная пополненная естественная фильтрация процесса  $W$  и управляемый процесс  $X = (X^1, \dots, X^d)$  подчиняется системе стохастических дифференциальных уравнений

$$dX_t = b(X_t, \alpha_t)dt + \sigma(X_t, \alpha_t)dW_t, \quad X_0 = x. \quad (0.10)$$

$\mathbb{F}$ -прогрессивно измеримый процесс  $\alpha \in A = [a, \bar{a}]$ ,  $a \leq 0 \leq \bar{a}$  можно рассматривать как интенсивность потребления ресурса. Перерасход ресурса запрещен, то есть допустимы

только управления  $\alpha \in A$  для которых  $Y_t \geq 0, t \geq 0$ . Мы предполагаем что компоненты вектора сноса  $b$  и матрицы диффузии  $\sigma$  такие, что уравнение (1.1) имеет единственное  $\mathbb{F}$ -согласованное сильное решение на  $[0, \infty)$ . Количество ресурса  $Y$  удовлетворяет уравнению

$$dY_t = -|\alpha_t|dt, \quad Y_0 = y. \quad (0.11)$$

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^d$  открытое множество,  $0 \in G$ . Обозначим через  $\theta^{x,y,\alpha} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{x,y,\alpha} \notin G\}$  время выхода процесса  $X^{x,y,\alpha}$  из области  $G$ . Целевой функционал  $J$  и функцию Беллмана  $v$  определены следующим образом:

$$J(x, y, \alpha) = \mathbb{E} \int_0^{\theta^{x,y,\alpha}} e^{-\beta t} f(X_t^{x,y,\alpha}, \alpha_t) dt, \quad v(x, y) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(x,y)} J(x, y, \alpha), \quad (0.12)$$

где  $\beta > 0$ , и  $f : \mathbb{R}^d \times A \mapsto \mathbb{R}$  ограниченная непрерывная функция.

Рассмотрим семейство  $\mathcal{L}^a$  “инфинитезимальных генераторов” диффузионного процесса  $X$ :

$$\mathcal{L}^a \varphi(x) = b(x, a) \varphi_x(x) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma(x, a) \sigma^T(x, a) \varphi_{xx}(x)).$$

Здесь  $\varphi_x = (\varphi_{x_i})_{i=1}^d$  — градиент и  $\varphi_{xx} = (\varphi_{x_i x_j})_{i,j=1}^d$  — гессиан. Задача исследована при следующих предположениях.

Предположение 1. Существует решение  $\psi \in C_b(\overline{G}) \cap C^2(G)$  задачи Дирихле

$$\beta \psi(x) - \widehat{f}(x) - \mathcal{L}^0 \psi(x) = 0, \quad x \in G; \quad \psi = 0 \quad \text{на} \quad \partial G. \quad (0.13)$$

Предположение 2. Обозначим через  $\bar{v}$  функцию Беллмана задачи с «бесконечным топливом»:

$$\bar{v}(x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \int_0^{\theta^{x,\alpha}} e^{-\beta t} f(X_t^{x,\alpha}, \alpha_t) dt, \quad \theta^{x,\alpha} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{x,\alpha} \notin G\}, \quad (0.14)$$

где  $X^{x,\alpha}$  — решение (1.1). Краевая задача для соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\beta \bar{v} - \sup_{a \in [\underline{a}, \bar{a}]} \{f(x, a) + \mathcal{L}^a \bar{v}\} = 0, \quad x \in G, \quad (0.15)$$

$$\beta \bar{v} - \sup_{a \in [\underline{a}, \bar{a}]} \{f(x, a) + \mathcal{L}^a \bar{v}\} = 0 \quad \text{или} \quad \bar{v} = 0 \quad \text{на} \quad \partial G. \quad (0.16)$$

удовлетворяет свойству сильной единственности.

Предположение 3. Существует константа  $K > 0$  такая, что

$$\sup_{x \in G} \{|f(x, a) - f(x, 0) + \mathcal{L}^a \psi(x) - \mathcal{L}^0(x) \psi|\} \leq K|a|.$$

В лемме 3 установлено, что задача (1.1) – (1.3) сводится к задаче управления до момента выхода из области.

Лемма 1. Если выполняется условие 4, то функция Беллмана (1.3) допускает представление

$$v(x, y) = \sup_{\alpha \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left( \int_0^{T^{x,y,\alpha}} e^{-\beta t} f(X_t^{x,y,\alpha}) dt + e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} \psi(X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}) \right), \quad (0.17)$$

где  $\mathcal{U}$  — множество всех  $\mathbb{F}$ -прогрессивно измеримых стратегий  $\alpha$  со значениями в  $A$ .

Для функции Беллмана  $v$  доказана теорема единственности.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 4-6. Тогда функция Беллмана  $v$  является единственным ограниченным вязкостным решением уравнения

$$\beta v - \sup_{a \in [\underline{a}, \bar{a}]} \{f(x, a) + \mathcal{L}^a v - |a|v_y\} = 0, \quad (x, y) \in \Pi := G \times (0, \infty), \quad (0.18)$$

непрерывным на  $\bar{\Pi}$  и удовлетворяющим граничному условию

$$v = g \quad \text{on } \partial\Pi. \quad (0.19)$$

Здесь непрерывная функция  $g$  на  $\partial\Pi$  определена следующим образом

$$g(0, x) = \psi(x), \quad x \in \bar{G}; \quad g(x, y) = 0, \quad x \in \partial G, \quad y \geq 0. \quad (0.20)$$

Для доказательства теоремы 7 не удастся напрямую применить теорему сравнения [19, теорема 2.1], [23, теорема 2.1]. Мы используем стохастический метод Перрона, разработанный в [24], и адаптированный к задаче управления до момента выхода из области в работе [20]. Этот метод работает с семействами  $\mathcal{V}_-$ ,  $\mathcal{V}_+$  стохастических суб- и суперрешений, которые порождают процессы суб- и супермартингального типа при суперпозиции с фазовым  $X$  процессом, и оценивают функцию Беллмана снизу и сверху:  $u \leq v \leq w$ ,  $u \in \mathcal{V}_-$ ,  $w \in \mathcal{V}_+$ . Сущность стохастического метода Перрона состоит в том, что

$$u_-(x) =: \sup_{u \in \mathcal{V}_-} u(x), \quad w_+(x) =: \inf_{w \in \mathcal{V}_+} w(x)$$

являются соответственно вязкостным супер- и субрешениями уравнения НЖВ, и удовлетворяют граничному условию Дирихле в обобщенном вязкостном смысле: см. [3, определение 7.4] и [20, теоремы 2, 3]. Если справедлив сильный принцип сравнения, обеспечивающий неравенство  $u_- \geq w_+$  на  $\Pi = G \times (0, \infty)$ , то функция  $u_- = v = w_+$  непрерывна на  $\Pi$ . Если, кроме того,  $u_- \geq w_+$  on  $\bar{\Pi}$ , то  $v$  непрерывна на  $\bar{\Pi}$ . Заметим, что основное предположение [20] состоит в справедливости сильного принципа сравнения, означающего, что для любых вязкостного субрешения  $u$  и суперрешения  $w$ , удовлетворяющих граничному условию Дирихле в обобщенном вязкостном смысле, неравенство  $u \leq w$  справедливо на  $\Pi$ .

По-видимому, для рассматриваемой задачи такой результат неизвестен. Для преодоления этой трудности мы строим специальные стохастические суб- и суперрешения, совпадающие на определенных частях границы  $\Pi$ : см. лемму 4 (данная идея заимствована из [25]). Этот прием позволяет заключить, что  $u_- = v = w_+$  на  $\partial\Pi$ . Затем мы применяем стандартный принцип сравнения для вязкостных решений, удовлетворяющих граничному условию Дирихле в обычном смысле, и заключаем, что  $v$  непрерывна на  $\bar{G} \times [0, \infty)$ . Таким образом получено короткое прямое доказательство теоремы 7 без использования принципа динамического программирования.

Первая модель, иллюстрирующая теоретические результаты — это задача оптимальной коррекции:

$$\begin{aligned} dX &= -kXdt + \sigma dW_t - \alpha_t dt, \\ dY &= -|\alpha_t|dt, \end{aligned}$$

где  $\sigma > 0$ ,  $k$  — некоторые константы и  $\alpha_t \in [\underline{a}, \bar{a}]$ ,  $-\underline{a} = \bar{a} > 0$ . Бесконечно малое приращение  $dX$  системы может корректироваться с интенсивностью  $\alpha$ . Цель управления состоит в том, чтобы удерживать систему в интервале  $G = (-l, l)$ ,  $l > 0$  как можно дольше. Случай  $k > 0$  (соотв.,  $k < 0$ ) соответствует устойчивому (соотв., неустойчивому) равновесию 0.

По лемме 3 можно перейти к задаче управления до момента выхода:

$$v(x, y) = \sup_{\alpha \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left( \int_0^{T^{x,y,\alpha}} e^{-\beta t} dt + e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} \psi(X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}) \right),$$

где  $\psi$  — решение задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \beta\psi - 1 + kx\psi_x - \frac{1}{2}\sigma^2\psi_{xx} &= 0, \quad x \in (-l, l) \\ \psi(-l) &= \psi(l) = 0. \end{aligned}$$

Ясно, что условия 1-3 выполняются. По теореме 7 функция  $v$  является единственным ограниченным непрерывным вязкостным решением уравнения

$$\beta v - 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx} + \min_{a \in [\underline{a}, \bar{a}]} \{(kx + a)v_x + |a|v_y\} = 0, \quad (x, y) \in (-l, l) \times (0, \infty), \quad (0.21)$$

удовлетворяющим граничным условиям:

$$v(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [-l, l]; \quad v(-l, y) = v(l, y) = 0, \quad y > 0. \quad (0.22)$$

Для численного решения задачи использовались разностная схема и итерационный метод, аналогичные тем, которые применялись в первой главе. Расчеты показывают, что

оптимальная стратегия имеет вид

$$a^*(x, y) = \begin{cases} \bar{a}, & x < -h(y) \\ 0, & |x| \leq h(y), \\ \underline{a}, & x > h(y), \end{cases} \quad (0.23)$$

где  $h$  — монотонно убывающая положительная функция. Таким образом, область бездействия расширяется при уменьшении  $y$ . Это означает, что регулятор становится менее активным, когда количество ресурса  $Y$  уменьшается. Более интересный и неожиданный эффект касается «немонотонного» поведения области бездействия по отношению к  $k > 0$ . В неустойчивом случае  $k < 0$  область бездействия монотонно сжимается с ростом по  $k$ .

Вторая конкретная модель, рассмотренная в главе 2, касается оптимального отслеживания стохастической системы. Предполагается, что имеется случайная цель  $X^1$ , которую должен отследить управляемый процесс  $X^2$ . Флуктуации  $X^1$  описываются уравнением

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= \mu(X_t^1)dt + \sigma dW_t, \quad \sigma > 0, \\ \mu(x_1) &= -kx_1I_{\{|x_1| \leq b\}} - kbI_{\{x_1 \geq b\}} + kbI_{\{x_1 \leq -b\}}, \quad b > 0. \end{aligned}$$

Случай  $k > 0$  (соотв.,  $k < 0$ ) соответствует устойчивой (соотв., неустойчивой) точке равновесия 0 соответствующей детерминированной системы. Динамика следящего процесса  $X^2$ , управляемого «расходом топлива», не подвержена воздействию шума:

$$dX_t^2 = \alpha_t dt, \quad dY_t = -|\alpha_t|dt, \quad \alpha_t \in [\underline{a}, \bar{a}].$$

Предполагается, что слежение прекращается, если цель «потеряна из виду»:

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : |X_t^1 - X_t^2| \geq l\}, \quad l > 0.$$

Для целевого функционала (1.4) уравнение НЖВ (2.4) принимает вид

$$\beta v - 1 - \mu(x_1)v_{x_1} - \frac{1}{2}\sigma^2 v_{x_1 x_1} + \min_{a \in [\underline{a}, \bar{a}]} \{ |a|v_y - av_{x_2} \} = 0, \quad (x, y) \in G \times (0, \infty),$$

где  $G = \{x : |x_1 - x_2| < l\}$ . Граничные условия (2.16) преобразуются к следующей форме

$$v = 0 \quad \text{на } \partial G \times [0, \infty); \quad v = \psi \quad \text{на } G \times \{0\},$$

где  $\psi$  — решение краевой задачи

$$\beta \psi - 1 - \mu(x_1)\psi_{x_1} - \frac{1}{2}\sigma^2 \psi_{x_1 x_1} = 0, \quad x_1 \in (x_2 - l, x_2 + l), \quad (0.24)$$

$$\psi(x_2 - l, x_2) = \psi(x_2 + l, x_2) = 0. \quad (0.25)$$

Проведены расчеты оптимальных стратегий отслеживания в устойчивом и неустойчивом случаях в переменных

$$z_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}, \quad z_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2},$$

полученных преобразованием поворота. Фактически, данные стратегии также характеризуются областями бездействия.

В третьей главе рассматриваются оптимальные стратегии производства и назначения цен в динамической модели фирмы-монополиста. Предположим, что фирма может производить некоторый товар с интенсивностью  $\alpha_t \in A$ , где  $A$  — замкнутое подмножество  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ . Будучи монополистом, фирма может устанавливать цену  $p_t \geq 0$  за единицу товара. Предполагая, что интенсивность спроса является известной строго убывающей функцией цены:  $q = D(p)$ . Удобно считать, что фирма динамически выбирает интенсивность спроса  $q_t \in Q$ . Множество  $Q \subset \mathbb{R}_+$  предполагается компактным. Уровень товарного запаса  $X$  удовлетворяет уравнению

$$X_t = x + \int_0^t (\alpha_s - q_s) ds, \quad t \geq 0. \quad (0.26)$$

Пусть отложенный спрос недопустим:  $X_t \geq 0$ , и множества  $Q, A$  удовлетворяют следующим условиям:

$$0 \in A \cap Q, \quad A \setminus \{0\} \neq \emptyset, \quad Q \setminus \{0\} \neq \emptyset. \quad (0.27)$$

Решение уравнения (2.1) также будем обозначать через  $X^{x, \alpha, q}$ .

Пусть  $R(q) = qp = qD^{-1}(q)$  — функция мгновенного дохода, и  $C(\alpha)$  — функция мгновенных затрат. Цель фирмы состоит в том, чтобы максимизировать дисконтированную прибыль на бесконечном горизонте:

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} (R(q_t) - C(\alpha_t)) dt, \quad \beta > 0.$$

Предполагается, что  $R : Q \mapsto \mathbb{R}_+$  непрерывна,  $R(0) = 0$ , и  $C : A \mapsto \mathbb{R}_+$  — неубывающая непрерывная функция. Если множество  $A$  является неограниченным, то мы дополнительно предполагаем, что  $C$  — 1-коэрцитивная функция:

$$C(\alpha)/\alpha \rightarrow +\infty, \quad A \ni \alpha \rightarrow +\infty. \quad (0.28)$$

Обозначим через  $\mathcal{A}(x)$  множество всех борелевских функций  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow A$ ,  $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow Q$  таких, что уровень товарного запаса (2.1) неотрицателен. Функция Беллмана  $v$  определяется следующим образом

$$v(x) = \sup_{(\alpha, q) \in \mathcal{A}(x)} \int_0^\infty e^{-\beta t} (R(q_t) - C(\alpha_t)) dt, \quad x \geq 0. \quad (0.29)$$

Введем гамильтониан

$$H(z) = \widehat{R}(z) + \widehat{C}(z), \quad \widehat{R}(z) = \sup_{q \in Q} \{R(q) - qz\}, \quad \widehat{C}(z) = \sup_{\alpha \in A} \{\alpha z - C(\alpha)\}. \quad (0.30)$$

Лемма 2. Предположим, что множество  $A$  компактно. Тогда функция Беллмана  $v$  ограничена и равномерной непрерывна. Кроме того,  $v$  является единственным вязкостным решением с ограничениями (constrained viscosity solution: CVS) уравнения

$$\beta u(x) - H(u'(x)) = 0, \quad x \geq 0, \quad (0.31)$$

в классе ограниченных равномерно непрерывных функций.

Результаты, собранные в этой лемме, доказаны в [26] (теоремы 3.3, 2.1, 2.2). Заметим, что предположение (A3) работы [26], касающееся существования «внутреннего направления», выполняется, так как  $\sup\{\alpha - q : \alpha \in A, q \in Q\} > 0$  в силу (2.2).

Обозначим через  $\mathcal{M}_H = \arg \min_{z \in \mathbb{R}} H(z)$  множество точек минимума  $H$ , а через  $\zeta = \min \mathcal{M}_H \geq 0$  наименьшую точку минимума функции  $H$ .

Теорема 2. Функция Беллмана  $v$  ограничена:

$$v(x) \leq \frac{H(0)}{\beta} = \lim_{y \rightarrow \infty} v(y)$$

и допускает следующее представление:

(i) если  $\zeta = 0$ , то

$$v(x) = H(0)/\beta, \quad (0.32)$$

(ii) если  $\zeta > 0$  то

$$v(x) = \frac{H(\xi(x))}{\beta} = \frac{H(\zeta)}{\beta} + \int_0^x \xi(y) dy, \quad (0.33)$$

где  $\xi(x)$  определяется уравнением

$$x = \Psi(\xi) := - \int_{\xi}^{\zeta} \frac{H'(z)}{\beta z} dz, \quad \xi \in (0, \zeta], \quad x \geq 0.$$

В случае (ii)  $v$  является строго возрастающей и строго вогнутой. Кроме того,  $v'$  абсолютно непрерывна и удовлетворяет условиям  $v'(0) = \zeta$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} v'(x) = 0$ . Наконец,  $v'' < 0$  п.в.

В ходе доказательства теоремы 8 было установлено что, переход от множества  $A$  к  $A \cap [0, c]$  не влияет на функцию Беллмана  $v$  при достаточно больших  $c$ .

Заметим также, что если  $\zeta > 0$ , то оптимальная дисконтированная прибыль не превосходит  $H(0)/\beta$ . Если  $\zeta = 0$ , то дисконтированная прибыль  $H(0)/\beta$  может быть получена



при нулевом начальном запасе. Более того, при этом любой начальный запас  $x > 0$  бесполезен.

Введем понятие овыпукленной задачи:

$$\tilde{v}(x) = \sup_{(\alpha, q) \in \tilde{\mathcal{A}}(x)} \int_0^\infty e^{-\beta t} (\tilde{R}(q_t) - \tilde{C}(\alpha_t)) dt, \quad (0.34)$$

где  $\tilde{\mathcal{A}}(x)$  — множество измеримых по Борелю функций  $\alpha : \mathbb{R}_+ \mapsto \text{co } A$ ,  $q : \mathbb{R}_+ \mapsto \text{co } Q$  таких, что  $X_t^{x, \alpha, q} \geq 0$ . Заметим, что  $\tilde{C}$  по-прежнему удовлетворяет условию (2.3): см. [27, глава E, предложение 1.3.9(ii)].

Введем также ослабленную задачу. Для этого расширим класс стратегий производства и назначения цены. Распределенные управления  $q_t(dy)$  и  $\alpha_t(dy)$  представляют собой отображения отрезка  $[0, \infty)$  в множества вероятностных мер на  $Q$  и  $A$  такие, что функции

$$t \mapsto \int_Q \varphi(y) q_t(dy), \quad t \mapsto \int_A \varphi(y) \alpha_t(dy)$$

измеримы по Борелю для любой непрерывной функции  $\varphi$ . Динамика движения товарного запаса при использовании распределенных управлений определяется следующим образом

$$X_t = x + \int_0^t \int_Q y q_s(dy) ds - \int_0^t \int_A y \alpha_s(dy) ds.$$

Класс  $\mathcal{A}_r(x)$  допустимых распределенных стратегий содержит лишь те, которые удерживают  $X_t$  в неотрицательной области. Соответствующая функция Беллмана определяется следующим образом:

$$v_r(x) = \sup_{(\alpha, q) \in \mathcal{A}_r(x)} \left( \int_0^\infty e^{-\beta t} \int_Q R(y) q_t(dy) dt - \int_0^\infty e^{-\beta t} \int_A C(y) \alpha_t(dy) dt \right). \quad (0.35)$$

Задачу (2.18) будем называть ослабленной.

Теорема 3. Функции Беллмана (2.4), (2.17), (2.18) соответствующие исходной, овыпукленной и ослабленной задачам совпадают:  $v = v_r = \tilde{v}$ .

Равенство  $v = v_r$  для задачи с фазовыми ограничениями в случае компактных множеств состояний и управлений было установлено в [28].

Далее, в главе 3 рассматривается случай нулевого начального запаса:  $X_0 = 0$ . Для любой константы  $\hat{u} \in Q \cap A$  статическая стратегия  $\alpha_t = q_t = \hat{u}$  допустима. Если она оптимальна, то

$$\hat{u} \in \mathcal{M} := \arg \max_{u \in Q \cap A} \{R(u) - C(u)\}. \quad (0.36)$$

Для  $\eta \in \mathbb{R}$  положим

$$\mathcal{M}_R(\eta) = \arg \max_{q \in Q} \{R(q) - \eta q\}, \quad \mathcal{M}_C(\eta) = \arg \max_{\alpha \in A} \{\alpha \eta - C(\alpha)\},$$

и  $\mathcal{M}_\eta = \mathcal{M}_R(\eta) \cap \mathcal{M}_C(\eta)$ .

Теорема 4. Следующие условия эквивалентны.

- (i) Статическая стратегия  $\alpha_t = q_t = \hat{u} \in \mathcal{M}$  является оптимальной.
- (ii)  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$  для некоторого  $\eta \in \mathbb{R}$ .
- (iii)  $\mathcal{M}_\zeta \neq \emptyset$ .

Если  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$ , то  $\eta$  является точкой минимума функции  $H$  и  $\mathcal{M}_\eta = \mathcal{M}$ .

Чтобы дать экономическую интерпретацию условия  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$ , предположим что в некоторой фирме управление производственным цехом и отделом продаж происходит независимо друг от друга. Производственный цех продает товар отделу продаж по некоторой теневой цене  $\eta$  и получает мгновенный доход  $\eta\alpha - C(\alpha)$ . Отдел продаж получает мгновенный доход  $R(q) - \eta q$  продавая товар на рынке. Для каждой возможной цены  $\eta$  отделы пытаются выбрать оптимальные стратегии  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{q}$ . Равновесие  $\hat{\alpha} = \hat{q}$  соответствует теневой цене  $\eta$  такой, что  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$ . По теореме 9 статическая стратегия является оптимальной в точности тогда, когда данное равновесие существует.

Аналогично равновесию механической системы, равновесная теневая цена  $\eta$  может быть определена как точка минимума гамильтониана  $H$ . По теореме 8 наименьшая теневая цена  $\zeta$  совпадает с предельной непрямой полезностью  $v'(0)$  нулевого запаса.

Теорема 5. Предположим что множества  $Q$ ,  $A$  выпуклы, функция  $R$  вогнута и функция  $C$  выпукла. Тогда для любого  $\eta \in \mathcal{M}_H$  имеем  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$ . Следовательно, стационарная стратегия является оптимальной.

По теоремам 10, 11 для овыпукленной задачи (2.17) стационарная стратегия  $\tilde{\alpha}_t = \tilde{q}_t = \tilde{u}$ ,

$$\tilde{u} \in \arg \max \{ \tilde{R}(u) - \tilde{C}(u) : u \in \text{co } Q \cap \text{co } A \}, \quad (0.37)$$

оптимальна для нулевого начального запаса, и

$$\tilde{v}(0) = \frac{\tilde{R}(\tilde{u}) - \tilde{C}(\tilde{u})}{\beta}.$$

Далее, существуют  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\nu \in (0, 1)$ ,  $q^i \in Q$ ,  $\alpha^i \in A$ ,  $i = 1, 2$  такие, что

$$\tilde{u} = \gamma q^1 + (1 - \gamma) q^2 = \nu \alpha^1 + (1 - \nu) \alpha^2, \quad (0.38)$$

$$\tilde{R}(\tilde{u}) = \gamma R(q^1) + (1 - \gamma) R(q^2), \quad \tilde{C}(\tilde{u}) = \nu C(\alpha^1) + (1 - \nu) C(\alpha^2). \quad (0.39)$$

Установлено, что распределенные управления

$$\bar{q}_t(dx) = \gamma \delta_{q^1}(dx) + (1 - \gamma) \delta_{q^2}(dx), \quad \bar{\alpha}_t(dx) = \nu \delta_{\alpha^1}(dx) + (1 - \nu) \delta_{\alpha^2}(dx), \quad (0.40)$$

где  $\delta_a$  — мера Дирака, сконцентрированная в точке  $a$ , являются оптимальными для задачи (2.18) при нулевом начальном запасе.

Для случая положительного начального запаса доказана следующая теорема:

Теорема 6. Пусть  $F \subset (0, \zeta)$  — ко-счетное множество, где выпуклые функции  $\hat{R}$ ,  $\hat{C}$  дифференцируемы. Положим

$$\{\hat{q}(z)\} = \arg \max_{q \in \text{co } Q} \{\tilde{R}(q) - qz\}, \quad \{\hat{\alpha}(z)\} = \arg \max_{\alpha \in \text{co } A} \{\alpha z - \tilde{C}(\alpha)\}, \quad z \in F,$$

$$\hat{u} \in \arg \max(\tilde{R}(u) - \tilde{C}(u) : u \in \text{co } Q \cap \text{co } A).$$

Для заданного начального запаса  $x > 0$  положим

$$\tau = \frac{1}{\beta} \ln \frac{v'(0)}{v'(x)}$$

и определим  $X$  с помощью уравнения

$$v'(X_t) = v'(x)e^{\beta t}, \quad t \in [0, \tau]. \quad (0.41)$$

Далее, положим  $\mathcal{T} = \{t \in [0, \tau] : v'(X_t) \in F\}$  и рассмотрим стратегию

$$\alpha_t^* = \hat{\alpha}(v'(X_t)), \quad q_t^* = \hat{q}(v'(X_t)), \quad t \in \mathcal{T}, \quad (0.42)$$

$$\alpha_t^* = q_t^* = \hat{u}, \quad t > \tau. \quad (0.43)$$

На счетном множестве  $[0, \tau] \setminus \mathcal{T}$  значения  $\alpha_t^*$ ,  $q_t^*$  могут быть определены произвольным образом.

(i) Стратегия (4.4) является оптимальной для овыпукленной задачи (2.17).

(ii) Имеем

$$(\alpha_t^*, q_t^*) \in \text{dom } C \times \text{dom } R, \quad \tilde{C}(\alpha_t^*) = C(\alpha_t^*), \quad \tilde{R}(\alpha_t^*) = R(\alpha_t^*), \quad t \in \mathcal{T}. \quad (0.44)$$

(iii) Существуют  $q^i \in Q$ ,  $\alpha^i \in A$ ,  $i = 1, 2$  и  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\nu \in (0, 1)$  такие, что справедливы равенства (3.8), (3.9). Заменяя (4.5) статическим распределенным управлением

$$\bar{q}(dx) = \gamma \delta_{q^1}(dx) + (1 - \gamma) \delta_{q^2}(dx), \quad \bar{\alpha}(dx) = \nu \delta_{\alpha^1}(dx) + (1 - \nu) \delta_{\alpha^2}(dx), \quad (0.45)$$

получаем решение ослабленной задачи (2.18).

(iv) Если  $\mathcal{M}_\zeta \neq \emptyset$ , то заменяя (4.5) на

$$\hat{u} \in \arg \max_{u \in Q \cap A} (R(u) - C(u)), \quad (0.46)$$

получаем оптимальное решение задачи (2.4).

В заключительной части главы 3 рассматривается пример Арвана-Мозеса, где спрос является линейным, а получаемый мгновенный доход выглядит следующим образом:

$$R(q) = (A - Bq)q, \quad q \in [0, A/B].$$

Функция затрат

$$C(\alpha) = \alpha^3/3 - K\alpha^2 + K^2\alpha, \quad \alpha \geq 0$$

выпукла на  $[0, K]$  и вогнута на  $[K, \infty)$ . Здесь предполагается что  $A, B, K > 0$ . Заметим, что функция  $C$  является строго возрастающей и 1-коэрцитивной. Функция  $R$  строго вогнута.

Оптимальная статическая стратегия для нулевого начального запаса

$$\hat{u} \in \arg \min_{u \in [0, A/B]} (R(u) - \tilde{C}(u))$$

имеет вид

$$\hat{u} = \begin{cases} 0, & A \leq K^2/4, \\ (A - K^2/4)/(2B), & K^2/4 \leq A \leq 3BK + K^2/4, \\ -B + K + \sqrt{B^2 - 2BK + A}, & A \geq 3BK + K^2/4. \end{cases} \quad (0.47)$$

Для  $A \leq K^2/4$  и  $A \geq 3BK + K^2/4$  имеем  $\tilde{C}(\hat{u}) = C(\hat{u})$ . Следовательно, в этих случаях  $\alpha_t = q_t = \hat{u}$  является оптимальным решением исходной задачи (3.3). Если

$$\frac{K^2}{4} < A < 3BK + \frac{K^2}{4}, \quad (0.48)$$

то  $\hat{u}$  принадлежит интервалу  $(0, 3K/2)$ , где  $\tilde{C}$  линейна и  $\tilde{C} < C$ . В этом случае оптимальная распределенная стратегия производства определяется формулами (3.8) – (3.10):

$$\bar{\alpha}_t(dx) = \nu\delta_0 + (1 - \nu)\delta_{3K/2}, \quad (1 - \nu)\frac{3K}{2} = \hat{u} = \left(A - \frac{K^2}{4}\right) \frac{1}{2B}. \quad (0.49)$$

Таким образом, для нулевого начального запаса обычная статическая стратегия не является оптимальной, если и только если выполнено условие (6.2). Для произвольного начального запаса оптимальная стратегия определяется следующим образом.

(i) Если  $A \leq K^2/4$ , то фирма должна оптимально продать начальный запас:

$$\dot{X}_t = -\hat{q}(v'(X_t)) = -\frac{A - v'(X_t)}{2B} < 0, \quad X_t > 0.$$

Производство отсутствует.

(ii) Если  $K^2/4 < A < 3BK + K^2/4$ , то производство начинается после продажи начального запаса, и распределенная производственная стратегия (6.3) должна соответствовать спросу  $\hat{q}(\zeta) = \hat{u} = (A - K^2/4)/2B$ .

(iii) Если  $A \geq K^2/4 + 3BK$ , то производство начинается после того, как уровень товарного запаса падает ниже  $\hat{x}$ :  $v'(\hat{x}) = K^2/4$ . При этом товарный запас продолжает уменьшаться до 0 и стабилизируется на этом уровне. Оптимальные спрос и интенсивность производства соответствующего устойчивого режима равны значению  $\hat{u}$ , определенному в (6.1).

В главе 4 исследуется одна из версий задачи позиционирования объекта, находящегося под воздействием случайных факторов. Рассмотрим некоторый случайный процесс  $S$ , согласованный с естественной фильтрацией  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_s)_{s \in [0, T]}$  винеровского процесса  $W$ . Будем считать, что положение объекта в терминальный момент времени  $T$  имеет вид

$$X_T = X_0 + \gamma_0(S_\tau - S_0) + \gamma_\tau(S_T - S_\tau),$$

где  $\tau$  момент остановки относительно  $\mathbb{F}$ , а  $\gamma_\tau - \mathcal{F}_\tau$  - измеримая случайная величина. Основной пример:  $S$  — цена рискового актива,  $\gamma_0, \gamma_\tau$  — портфель,  $X$  — капитал. Цель состоит в минимизации среднеквадратического отклонения  $X_T$  от заданного фиксированного уровня  $H$ :

$$\mathbb{E}[(X_T - H)^2] \rightarrow \min_{(\gamma_\tau, \tau)}, \quad (0.50)$$

что может рассматриваться, как хеджирование в среднеквадратическом за счет однократного изменения портфеля в выбранный момент времени  $\tau$ .

Данная задача сводится к задаче оптимальной остановки:

$$\mathbb{E} \left[ (\hat{H} - \gamma_0 S_\tau)^2 \left( 1 - \frac{\mathbb{E}((S_T - S_\tau)^2 | \mathcal{F}_\tau)}{\mathbb{E}((S_T - S_\tau)^2)} \right) \right] \rightarrow \min_\tau, \quad (0.51)$$

где  $\hat{H} = H - X_0 + \gamma_0 S_0$ .

Для моделей броуновского движения со сносом и геометрического броуновского движения:

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

положим

$$\phi_1(t) = \frac{\sigma^2}{\mu^2(T-t) + \sigma^2}, \quad \phi_2(t) = \frac{e^{2\mu(T-t)}(e^{\sigma^2(T-t)} - 1)}{e^{(2\mu+\sigma^2)(T-t)} - 2e^{\mu(T-t)} + 1}$$

соответственно. Задача (2.4) принимает вид

$$\mathbb{E}[h(S_\tau)\phi_i(\tau)] \rightarrow \min_\tau, \quad (0.52)$$

где  $h(S_t) = (\hat{H} - \gamma_0 S_t)^2$ , и

Для оценки оптимального момента остановки была использована интегральная форма задачи (2.7):

$$h(S_0)\phi_i(0) + \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau F(t, S_t) dt \right] \rightarrow \min_\tau, \quad (0.53)$$

где  $F(t, s) = h(s)\phi'_i(t) + h'(s)\phi_i(t)\mu(s) + \frac{1}{2}h''(s)\phi_i(t)\sigma^2(s)$ . Было установлено что оптимальный момент останковки  $\hat{\tau}$  удовлетворяет оценке  $\hat{\tau} \geq \tau^*$ , где

$$\tau^* = \inf_t \{t \geq 0 : F(t, S_t) \geq 0\} \wedge T. \quad (0.54)$$

Отметим, что если  $\mu = 0$ , то  $\tau^* = 0$  и  $\gamma_\tau^* = 0$ . При  $\mu \neq 0$  область продолжения, определяющая момент  $\tau^*$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \{(t, s) : F(t, s) \leq 0\} &= \{(t, s) : s_1(t) \leq s \leq s_2(t)\}, \\ s_{1,2}(t) &= \frac{\hat{H}}{\gamma_0} - \frac{\sigma^2}{\mu} - \mu(T-t) \pm \sqrt{\mu^2(T-t)^2 + \sigma^2(T-t)}, \\ s_{1,2}(t) &= \frac{H}{\gamma_0} \frac{\mu\phi_2(t) + \phi'_2(t) \pm \sqrt{\mu^2\phi_2^2(t) - \sigma^2\phi_2(t)\phi'_2(t)}}{(\sigma^2 + 2\mu)\phi_2(t) + \phi'_2(t)} \end{aligned}$$

в случае броуновского движения со сносом и геометрического броуновского движения соответственно.

Для численного решения задачи использовалось уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\min \left\{ v_t - [\mu(x)v_s + \frac{1}{2}\sigma^2(s)v_{ss}], h(s)\phi_i(t) - v \right\} = 0, \quad (t, s) \in G, \quad (0.55)$$

$$v(T, s) = h(s)\phi_i(T) \quad (0.56)$$

для задачи (2.7). Для модели броуновского движения со сносом  $G = [0, T] \times \mathbb{R}$ ,  $\mu, \sigma$  являются константами. В модели геометрического броуновского движения  $G = [0, T] \times [0, +\infty)$ ,  $\mu(s) = \mu s, \sigma(s) = \sigma s$ .

Для проведения расчетов в главе 4 использована разностная схема, обладающая свойствами аппроксимации, монотонности и устойчивости. Данная схема является сходящейся, так как для задачи (4.2) справедлива теорема сравнения. Проведено сравнение рассчитанных областей останковки с оценками, которые определяются формулой (3.2).

# Глава 1

## Расчет оптимальных стратегий выплаты дивидендов, перестрахования и инвестирования в диффузионной модели

### 1.1 Постановка задачи

Задача об оптимальной выплате дивидендов страховой компанией поставлена de Finetti [29]. Ее исследованию в различных постановках посвящено большое количество работ: см. обзоры [30–32]. Мы рассматриваем данную задачу в диффузионном приближении. В такой форме она впервые была поставлена в [33–35]. Следует, однако, отметить, что математически эквивалентная задача исследовалась ранее в работе [36]. В дальнейшем различные аспекты данной задачи были предметом многочисленных исследований. Большое внимание было уделено анализу оптимальных стратегий выплаты дивидендов при наличии возможностей стратегий перестрахования и инвестирования [15, 16, 37–40]. В последнее время был проявлен значительный интерес к моделям с марковским переключением параметров [41–44], позволяющим учитывать влияние внешних случайных факторов.

В настоящей работе предполагается, что страховая компания может использовать стратегию перестрахования и инвестировать капитал в рисковый актив, динамика которого описывается моделью Блэка-Шоулза со случайным сносом. Целью работы является анализ влияния сноса, который колеблется около среднего значения и подчиняется процессу Орнштейна-Уленбека, на оптимальные стратегии выплаты дивидендов, перестрахования и инвестирования. Близкая модель с другим критерием оптимальности рассматривалась в [22].

Точная постановка задачи формулируется ниже в данном разделе. В разделе 2 устанавливается, что оптимальное значение задачи (функция Беллмана) является единственным вязкостным решением соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в полуплоскости. В разделе 3 рассматривается конечно-разностная аппроксимация данного уравнения и дается обоснование ее сходимости. Заключительный раздел 4 посвящен обсуждению численных результатов.

Перейдем к постановке задачи. Следуя рассуждениям [15, 16], будем исходить из модели Крамера-Лундберга для резерва компании:

$$R_t = x + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i.$$

Здесь  $x$  — начальный капитал,  $p$  — скорость поступления премий,  $N_t(\lambda)$  — пуассоновский процесс с постоянной интенсивностью  $\lambda$ , который описывает моменты поступления требований, и, наконец,  $Z_i$  — размер  $i$ -го требования. Предполагается, что случайные величины  $Z_i$  неотрицательны, независимы, одинаково распределены, и имеют конечные математическое ожидание и дисперсию, и кроме того,  $N_t$  и  $Z_i$  независимы.

Пусть страховые премии вычисляются исходя из принципа среднего, тогда

$$pt = (1 + \eta) \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \right) = (1 + \eta)t\lambda \mathbb{E}Z,$$

где  $\eta > 0$  — коэффициент страховой нагрузки. Предположим теперь, что имеется возможность перестраховывать часть рисков, и обозначим через  $Z^a$  величину ответственности страховой компании при поступлении требования размера  $Z$ . Типичными примерами являются пропорциональное перестрахование:  $Z^a = aZ$ ,  $a \in (0, 1)$  или перестрахование эксцедента убытка:  $Z^a = Z \wedge a$ . Если скорость поступления премий  $\hat{p}$  перестраховщика вычисляется также на основе принципа среднего с коэффициентом нагрузки  $\eta k(a)$ , зависящим от  $a$ , то

$$t\hat{p} = (1 + \eta k(a)) \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{N_t} (Z_i - Z_i^a) \right) = t(1 + \eta k(a))\lambda(\mathbb{E}Z - \mathbb{E}Z^a).$$

При этом резерв будет иметь вид

$$R_t = R_0 + (p - \hat{p})t - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i^a = x + (\lambda \mathbb{E}Z^a + \lambda \eta (\mathbb{E}Z - k(a)[\mathbb{E}Z - \mathbb{E}Z^a])t - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i^a.$$

Одна из диффузионных аппроксимаций описана в работах [15, 16], где указано, что процесс  $\eta R_{t/\eta^2}$  при  $\eta \searrow 0$  слабо сходится к броуновскому движению с коэффициентами сноса и диффузии

$$\mu_1(a) = \lambda(\mathbb{E}Z - k(a)[\mathbb{E}Z - \mathbb{E}Z^a]), \quad \sigma_1^2(a) = \lambda \mathbb{E}[(Z^a)^2]$$



в пространстве  $\mathbb{D}$  функций, непрерывных справа и имеющих пределы слева, наделенном топологией Скорохода. Таким образом, приходим к следующей модели резерва [15, 16]:

$$dR_t = \mu_1(a)dt + \sigma_1(a)dW_t^1, \quad (1.1)$$

где  $W^1$  — стандартное броуновское движение.

Далее, пусть имеется рисковый актив, цена которого  $S$  описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS_t = \mu_2(Y_t)S_tdt + \sigma_2(Y_t)S_t dW_t^2. \quad (1.2)$$

Здесь  $Y$  случайный фактор, динамика которого подчиняется уравнению

$$dY_t = \mu_3(Y_t)dt + \sigma_3(Y_t)dW_t^3. \quad (1.3)$$

Стандартные броуновские движения  $(W^1, W^2, W^3)$  предполагаются независимыми. Модель, подобная (1.2), (1.3), рассматривалась в [22].

Предположим, что компания может инвестировать средства в данный актив, но объем этих инвестиций  $\theta$  ограничен некоторой постоянной величиной  $\bar{\theta}$ . Пусть, кроме того, компания применяет динамическую стратегию  $\alpha = (\alpha_t)_{t \geq 0}$  перестрахования и выплачивает дивиденды с конечной интенсивностью  $c = (c_t)_{t \geq 0}$ . Приращение капитала  $V$  компании складывается из приращений резерва, инвестированных средств и выплаченных дивидендов:

$$dV = dR + \theta \frac{dS}{S} - cdt.$$

Поставляя сюда выражения (1.1), (1.2), (1.3), находим

$$dV_t = (\mu_1(\alpha_t) + \mu_2(Y_t)\theta)dt + \sigma_1(\alpha_t)dW_t^1 + \sigma_2(Y_t)\theta dW_t^2 - c_t dt. \quad (1.4)$$

Итак, фазовые переменные  $(V, Y)$  — капитал и внешний случайный фактор — подчиняются системе (1.3), (1.4) стохастических дифференциальных уравнений. Пусть стратегия перестрахования  $\alpha_t \in A$ , стратегия инвестирования  $\theta_t \in [0, \bar{\theta}]$  и интенсивность выплаты дивидендов  $c_t \in [0, \bar{c}]$  прогрессивно измеримы относительно фильтрации, порожденной процессом  $(W^1, W^2, W^3)$ . Здесь  $A$  — компактное подмножество  $\mathbb{R}$ .

Полагая  $X = (V, Y)^T$ ,  $u = (\alpha, \theta, c)^T$ ,  $W = (W^1, W^2, W^3)^T$ , перепишем (1.3), (1.4) в более абстрактной форме

$$dX_t = b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t, \quad X_0 = x, \quad (1.5)$$

$$b = \begin{pmatrix} \mu_1(\alpha) + \mu_2(Y)\theta - c \\ \mu_3(Y) \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1(\alpha) & \sigma_2(Y)\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3(Y) \end{pmatrix}.$$

Для существования сильного решения системы (1.5) на интервале  $[0, \infty)$  наложим на ее коэффициенты стандартные условия Липшица и линейного роста [17, гл. 2, §5]. Как легко видеть, для этого достаточно, чтобы функции  $\mu_2, \sigma_2, \mu_3, \sigma_3$  были непрерывны по Липшицу:

$$|\mu_i(y_1) - \mu_i(y_2)| + |\sigma_i(y_1) - \sigma_i(y_2)| \leq K|y_1 - y_2|, \quad i = 2, 3$$

с константой  $K$ , не зависящей от  $y_1, y_2$ .

Обозначим через  $X^{x,u}$  решение системы (1.5) при заданной стратегии управления  $u = (\alpha, \theta, c)$ . Цель компании состоит в максимизации ожидаемой дисконтированной суммы выплаченных дивидендов до момента банкротства:

$$v(x) = \sup_u \mathbb{E} \int_0^{\tau^{x,u}} e^{-\beta t} c_t dt. \quad (1.6)$$

Здесь  $\tau^{x,u} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{x,u} \leq 0\}$ ,  $\beta > 0$  и максимизация ведется по всем прогрессивно измеримым управлениям

$$u_t = (\alpha_t, \theta_t, c_t) \in U := A \times [0, \bar{\theta}] \times [0, \bar{c}].$$

## 1.2 Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

Из теории стохастического оптимального управления (см. [6, 7, 17]) известно, что, по крайней мере формально, функция Беллмана  $v$  в полуплоскости  $G = (0, \infty) \times \mathbb{R}$  удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\beta v(x) - H(x, v_x(x), v_{xx}(x)) = 0, \quad x \in G \quad (2.1)$$

с гамильтонианом

$$H(x, p, M) = \sup_{(a,c) \in U} \left[ c + b(x, a, c) \cdot p + \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma(x, a, c) \sigma^T(x, a, c) M) \right],$$

$p \in \mathbb{R}^d$ ,  $M \in \mathbb{S}^d$ . Мы используем обозначения  $v_x = (v_{x_i})_{i=1}^n$ ,  $v_{xx} = (v_{x_i x_j})_{i,j=1}^n$  для градиента и гессиана, и  $\mathbb{S}^d$  — для множества  $d \times d$  симметрических матриц. На границе полуплоскости должно выполняться условие Дирихле:

$$v(x) = 0, \quad x \in \partial G. \quad (2.2)$$

Задачу (2.1), (2.2) можно переписать также в виде

$$\begin{aligned} & \beta v(x) - \mu_3(x_2) v_{x_2}(x) - \frac{1}{2} \sigma_3^2(x_2) v_{x_2 x_2} - \max_{\theta \in [0, \bar{\theta}]} \{ \mu_2(x_2) \theta v_{x_1}(x) + \frac{1}{2} \sigma_2^2(x_2) \theta^2 v_{x_1 x_1} \} \\ & - \max_{c \in [0, \bar{c}]} \{ (1 - v_{x_1}(x)) c \} - \sup_{a \in A} \{ \mu_1(a) v_{x_1}(x) + \frac{1}{2} \sigma_1^2(a) v_{x_1 x_1}(x) \} = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$v(0, x_2) = 0.$$

Более точно, данную краевую задачу следует понимать в «вязкостном смысле». Наппомним соответствующие определения [?, 3, 6, 7]. Введем функцию  $F : \overline{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^d \mapsto \mathbb{R}$  по формуле

$$F(x, r, p, M) = \begin{cases} \beta r - H(x, p, M), & x \in G, \\ r, & x \in \partial G. \end{cases}$$

Пусть  $F_*$ ,  $F^*$  полунепрерывная снизу и полунепрерывная сверху оболочки  $F$ . Ограниченная полунепрерывная сверху (соотв., снизу) функция  $u$  называется вязкостным субрешением (соотв., вязкостным суперрешением) задачи (2.1), (2.2), если для любой функции  $\varphi \in C^2(\overline{G})$  и любой точки  $x_0 \in \overline{G}$  локального максимума (соотв., локального минимума) функции  $u - \varphi$  на  $\overline{G}$  выполняется неравенство

$$F_*(x_0, u(x_0), \varphi_x(x_0), \varphi_{xx}(x_0)) \leq 0,$$

$$(\text{соотв., } F^*(x_0, u(x_0), \varphi_x(x_0), \varphi_{xx}(x_0)) \geq 0).$$

Такая форма записи позволяет не разделять уравнение и граничное условие. В частности, условие, определяющее субрешение, может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta u(x_0) - H(x_0, \varphi_x(x_0), \varphi_{xx}(x_0)) &\leq 0, \quad x_0 \in G, \\ \min\{\beta u(x_0) - H(x_0, \varphi_x(x_0), \varphi_{xx}(x_0)), u(x_0)\} &\leq 0, \quad x_0 \in \partial G. \end{aligned}$$

Ограниченная функция  $u$  называется вязкостным решением задачи (2.1), (2.2) если ее полунепрерывная сверху и полунепрерывная снизу оболочки (по отношению к  $\overline{G}$ ) являются соответственно вязкостными суб- и суперрешениями.

Хорошо известно (см. [2, следствие 5.11], [45, раздел 1.1]), что если область  $G$  ограничена, то из свойства непрерывности по Липшицу коэффициентов уравнения и компактности множества  $U$  вытекает, что для любых субрешения  $u$  и суперрешения  $v$  уравнения (2.1) (т.е., формально говоря, задачи (2.1), (2.2) в области  $G$ ), удовлетворяющих условию  $u \leq w$  на  $\partial G$ , имеет место неравенство  $u \leq w$  на  $G$ . При этом говорят, что справедлив принцип сравнения. Отправным пунктом доказательства является так называемое структурное условие, которому удовлетворяет  $F$  (см. также [3], [7, предположение 6.20]). Случай неограниченной области рассмотрен в [46, теорема 7.3], [7, теорема 6.21].

Обозначим через  $\mathcal{U}^-$  (соотв.,  $\mathcal{U}^+$ ) множество вязкостных субрешений  $u$  (соотв., вязкостных суперрешений  $w$ ) уравнения (2.1), для которых  $u \leq 0$  (соотв.,  $w \geq 0$ ) на  $\partial G$ . Заметим, что множества  $\mathcal{U}^-$ ,  $\mathcal{U}^+$  непусты:  $0 \in \mathcal{U}^-$ ,  $\bar{c}/\beta \in \mathcal{U}^+$ . Из принципа сравнения вытекает, что выполняется неравенство

$$\underline{h}(x) := \sup_{u \in \mathcal{U}^-} u(x) \leq \bar{h}(x) := \inf_{w \in \mathcal{U}^+} w(x), \quad x \in \overline{G}. \quad (2.4)$$

Согласно [45] функция  $\underline{h}$  (соотв.,  $\bar{h}$ ) называется нижним (соотв., верхним)  $\epsilon$ -решением задачи (2.1), (2.2). Если неравенство (2.4) является равенством, то функция  $h = \underline{h} = \bar{h}$  называется  $\epsilon$ -решением. Из наличия субрешения  $u = 0$ , удовлетворяющего граничному условию (2.2), вытекает (см. [45, теорема 2]), что  $\epsilon$ -решение существует и совпадает с наименьшим верхним  $\epsilon$ -решением, т.е.  $h \in \mathcal{U}^+$ .

Поставленная задача (1.6) может быть включена в класс задач о максимизации времени выхода вырожденного диффузионного процесса из области, который рассмотрен в [45] (раздел 3.2). Заметим, что сделанное в указанной работе дополнительное предположение об ограниченности коэффициентов  $b, \sigma$  несущественно. В теореме 9 работы [45] установлено, что функция Беллмана  $v$ , определенная формулой (1.6), совпадает с  $\epsilon$ -решением задачи (2.1), (2.2):  $v = h$  на  $\bar{G}$ . В частности, отсюда следует, что  $v$  полунепрерывна снизу.

Предположим теперь, что в нашей задаче выполняется следующее условие невырожденности

$$\underline{\sigma}_1 := \inf_{a \in A} \sigma^1(a) > 0. \quad (2.5)$$

В этом случае справедлив сильный принцип сравнения: для любых субрешения  $u$  и суперрешения  $v$  задачи (2.1), (2.2) имеет место неравенство  $u \leq v$  на  $G$ . Данный результат является следствием невырожденности диффузии по нормали к границе (см. [18, 19]), что в данном означает (2.5). Его доказательство сводится к обычному принципу сравнения, так как из условия (2.5) вытекает, что любые вязкостные субрешение  $u$  и суперрешение  $v$  задачи (2.1), (2.2) удовлетворяют граничным условиям в обычном смысле:  $u \leq 0, v \geq 0$  на  $\partial G$  (см. предложение 1.1 работы [18] и его доказательство).

Наконец, из сильного принципа сравнения вытекает, что функция Беллмана  $v$  непрерывна и является единственным вязкостным решением задачи (2.1), (2.2): см. [20] (теорема 1 и замечание 1).

Заметим, что если условие (2.5) не выполняется, то для вычисления  $v$  могут быть использованы различные схемы аппроксимации: см. [45] (раздел 2).

### 1.3 Разностная схема

Для численного решения задачи рассмотрим прямоугольную сетку

$$\bar{G}_h = \{(ih_1, jh_2) : 0 \leq i \leq I, -J \leq j \leq J\}, \quad Ih_1 = a, \quad Jh_2 = b.$$

Здесь  $I, J, i, j$  — целые числа,  $h = (h_1, h_2)$  — шаг сетки. Узлы  $(ih_1, jh_2)$ ,  $0 < i < I, -J < j < J$  назовем внутренними, а остальные узлы — граничными. Множества внутренних и

граничных узлов обозначим через  $G_h$  и  $\partial G_h$  соответственно. Каждому внутреннему узлу поставим в соответствие уравнение для сеточной функции  $v_{ij} = v(x_{ij})$ ,  $x_{ij} = (ih_1, jh_2)$ :

$$\begin{aligned} 0 = & \beta v_{ij} - \left( \mu_{3;j}^+ \frac{v_{i,j+1} - v_{ij}}{h_2} - \mu_{3;j}^- \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_2} \right) - \frac{1}{2} \sigma_{3;j}^2 \frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{h_2^2} \\ & - \max_{\theta \in [0, \bar{\theta}]} \left\{ \mu_{2;j}^+ \theta \frac{v_{i+1,j} - v_{ij}}{h_1} - \mu_{2;j}^- \theta \frac{v_{i-1,j} - v_{ij}}{h_1} + \frac{1}{2} \sigma_{2;j}^2 \theta^2 \frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{h_1^2} \right\} \\ & - \max_{c \in [0, \bar{c}]} \left\{ c \left( 1 - \frac{v_{ij} - v_{i-1,j}}{h_1} \right) \right\} \\ & - \max_{a \in A} \left\{ \mu_1^+(a) \frac{v_{i+1,j} - v_{ij}}{h_1} - \mu_1^-(a) \frac{v_{ij} - v_{i-1,j}}{h_1} + \frac{1}{2} \sigma_1^2(a) \frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{h_1^2} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $\mu_{k;j} = \mu_k(jh_2)$ ,  $\sigma_{k;j} = \sigma_k(jh_2)$ ,  $k = 2, 3$ . В граничных узлах ставится условие Дирихле

$$0 = v_{ij}, \quad i \in \{0, I\}, \quad j \in \{-J, \dots, J\}; \quad i \in [0, \dots, I], \quad j \in \{-J, J\}.$$

Данную систему уравнений представим в виде

$$0 = F_h(x_{ij}, v_{ij}, (v_{ij} - v_{i'j'})_{x_{i'j'} \in \Gamma(x_{ij})}), \quad x_{ij} \in \bar{G}_h, \quad (3.1)$$

где  $\Gamma(x_{ij})$  — множество узлов, соседних с  $x_{ij}$ :

$$\Gamma(x_{ij}) = \{x_{i+1,j}, x_{i-1,j}, x_{i,j+1}, x_{i,j-1}\} \quad \text{для } x_{ij} \in G_h$$

и  $\Gamma(x_{ij}) = \emptyset$  для  $x_{ij} \in \partial G_h$ .

Выбранный способ аппроксимации первых производных обеспечивает неубывание функций  $F_h$  по всем аргументам, за исключением  $x_{ij}$ . В терминологии [10] это означает, что схема является вырожденной эллиптической. Кроме того, выполняется неравенство

$$F_h(x, r, y) - F_h(x, r', y) = \beta'(r - r') > 0, \quad \beta' = \min\{\beta, 1\} \quad \text{при } r > r',$$

означающее, что схема является правильной (proper) [10]. Далее, построенная схема является непрерывной по Липшицу с константой  $K_h$ :

$$|F_h(x, z) - F_h(x, z')| \leq K_h \|z - z'\|_\infty.$$

Здесь  $\|z\|_\infty = \max\{|z_{ij}| : z_{ij} \in \bar{G}_h\}$ .

Простые оценки, основанные на элементарном неравенстве

$$|\max_{q \in Q} \psi(x, q) - \max_{q \in Q} \psi(y, q)| \leq \max_{q \in Q} |\psi(x, q) - \psi(y, q)|, \quad (3.2)$$

справедливом для непрерывной функции  $\psi$  и компактного множества  $Q$ , показывают, что константа  $K_h$  может быть определена следующим образом:

$$\begin{aligned} K_h = & \beta + \frac{\|\mu_3\|_\infty}{h_2} + \frac{\|\sigma_3^2\|_\infty}{h_2^2} + \frac{\bar{\theta} \|\mu_2\|_\infty + \bar{c} + \sup_{a \in A} |\mu_1(a)|}{h_1} \\ & + \frac{\bar{\theta}^2 \|\sigma_2^2\|_\infty + \sup_{a \in A} |\sigma_1^2(a)|}{h_1^2}. \end{aligned}$$

В работе [10] (теорема 7) показано, что оператор  $S_\rho(v) = v - \rho F_h[v]$ , действующий в пространстве сеточных функций с нормой  $\|\cdot\|_\infty$ , является строгим сжатием при достаточно малых  $\rho$ :

$$\|S_\rho(u) - S_\rho(v)\|_\infty \leq \gamma \|u - v\|_\infty, \quad \gamma = \max\{1 - \rho\beta', \rho K_h\}.$$

Отсюда следует, что система уравнений (3.1) имеет единственное решение  $v_h$ , совпадающее с неподвижной точкой  $S_\rho$ , и оно может быть найдено методом простых итераций:

$$v^{n+1} = S_\rho(v^n), \quad \|v_h - v^n\|_\infty \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

с произвольным начальным приближением  $v^0$ .

Для обоснования сходимости сеточных функций  $v_h$ ,  $h \rightarrow 0$  к функции Беллмана  $v$  воспользуемся методом [9].

Как было отмечено выше, в предположении (2.5) неравенство  $u(x) \leq w(x)$ ,  $x \in \overline{G}$  выполняется для любых вязкостных суб- и суперрешений  $u$  и  $w$  задачи (2.1), (2.2). Таким образом, в терминологии [9], выполняется свойство сильной единственности. Но тогда локально равномерная сходимость  $v_h$  к  $v$  является следствием свойств устойчивости, монотонности и согласованности разностной схемы: [9, теорема 2.1]. Рассмотрим данные свойства более подробно.

Для вырожденных эллиптических правильных схем из неравенства  $F_h[u_h] \leq F_h[w_h]$  вытекает, что  $u_h \leq w_h$  [10, теорема 5]. Поскольку

$$F_h[0] \leq F_h[v_h] = 0 \leq F_h[\bar{c}/\beta],$$

то отсюда вытекают неравенства  $0 \leq v_h \leq \bar{c}/\beta$ , означающие, что выполняется условие устойчивости [9]:

$$\sup_h \|v_h\|_\infty \leq \bar{c}/\beta.$$

Условие монотонности [9] сводится к условию невозрастания функций

$$F_h(x_{ij}, v_{ij}, (v_{ij} - v_{i'j'})_{i'j' \in N(i,j)})$$

по переменным  $v_{i'j'}$ , что вытекает из вырожденной эллиптичности схемы.

Возьмем последовательность сгущающихся сеток на расширяющейся системе прямоугольников, т.е. будем считать, что  $I = I_{h^n}$ ,  $J = J_{h^n}$  зависят от  $h^n = (h_1^n, h_2^n) \rightarrow 0$  таким образом, что  $a^n = I_{h^n} h_1^n \rightarrow \infty$ ,  $b^n = J_{h^n} h_2^n \rightarrow \infty$ . Пусть, кроме того, для любой точки замкнутой полуплоскости  $x \in \overline{G}$  существует последовательность  $x_{i_n j_n} \in \overline{G}_{h_n}$ :  $x_{i_n j_n} \rightarrow x$ .

Чтобы установить согласованность схемы по [9] нужно доказать, что для любых бесконечно гладкой равномерно ограниченной функции  $\varphi \in C_b^\infty(\overline{G})$  и последовательности  $\xi_n \searrow 0$  справедливы неравенства

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_{i_n j_n}, \varphi(x_{i_n j_n}) + \xi_n, (\varphi(x_{i_n j_n}) - \varphi(y))_{y \in \Gamma(x_{i_n j_n})}) \geq F_*(x, \varphi(x), \varphi_x(x), \varphi_{xx}(x)), \quad (3.4)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F(x_{i_n j_n}, \varphi(x_{i_n j_n}) + \xi_n, (\varphi(x_{i_n j_n}) - \varphi(y))_{y \in \Gamma(x_{i_n j_n})}) \leq F^*(x, \varphi(x), \varphi_x(x), \varphi_{xx}(x)). \quad (3.5)$$

Обозначения  $F_*$ ,  $F^*$  введены в разделе 2.

Простые, но громоздкие вычисления, основанные на формуле Тейлора и неравенстве (3.2), позволяют установить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{i_n j_n}, \varphi(x_{i_n j_n}) + \xi_n, (\varphi(x_{i_n j_n}) - \varphi(y))_{y \in \Gamma(x_{i_n j_n})}) = F(x, \varphi(x), \varphi_x(x), \varphi_{xx}(x)), \quad (3.6)$$

если последовательность  $(x_{i_n j_n})$  состоит из внутренних точек полуплоскости  $\overline{G}$ . Если же данная последовательность состоит из граничных точек, то равенство (3.6) выполняется тривиальным образом. Отсюда легко следуют неравенства (3.4), (3.5).

## 1.4 Результаты численных расчетов

При проведении численных экспериментов рассматривался частный случай исследуемой модели, в которой волатильность  $\sigma_2$  рискового актива  $S$  постоянна, а снос  $\mu_2$  подчиняется процессу Орнштейна-Уленбека:

$$\mu_2(Y) = l + k_1 Y, \quad dY = -k_2 Y dt + \sigma_3 dW^3.$$

Здесь  $l, k_1, k_2, \sigma_3$  — положительные константы. Как отмечено, напр., в [21, 22] такая модель позволяет описывать черты, присущие рынкам «быков» и «медведей».

Кроме того, рассматривался пропорциональный механизм перестрахования рисков в случае дешевого перестрахования (cheap reinsurance) [15]:  $Z^a = aZ$ ,  $k(a) = 1$ . При этом, в предположении  $\lambda = 1$ ,

$$\mu_1(a) = a\bar{\mu}, \quad \sigma_1(a) = a\bar{\sigma}, \quad (4.1)$$

где  $\bar{\mu} = EZ$ ,  $\bar{\sigma}^2 = EZ^2$ .

Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров:  $l = 0.05$ ,  $k_1 = 0.05$ ,  $\sigma_2 = 0.4$ ,  $\sigma_3 = 0.5$ ,  $\bar{\mu} = 0.2$ ,  $\bar{\sigma} = 0.5$ ,  $\bar{c} = 5$ ,  $\bar{\theta} = 20$ ,  $\beta = 0.05$ . В качестве множества  $A$  допустимых уровней перестрахования  $\alpha$  был выбран интервал  $[\varepsilon, 1]$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Для анализа влияния на оптимальное решение скорости возврата процесса  $Y$  к равновесному

значению 0 рассматривались значения параметра  $k_2 = 0.1, 1, 10$ . Кроме того, рассматривался случай  $\mu_3 = 0, \sigma_3 = 0$ , что соответствует одномерной модели с фиксированным уровнем внешнего случайного фактора  $Y_t = Y_0 = x_2$ .

Расчеты проводились в прямоугольнике  $[0, \bar{x}_1] \times [\underline{x}_2, \bar{x}_2]$ ,  $\bar{x}_1 = 9, \underline{x}_2 = -5, \bar{x}_2 = 20$  на сетке с шагами  $h_1 = 0.05, h_2 = 0.042$ . Таким образом, сетка состояла из  $180 * 600$  узлов с учетом граничных. Параметр  $\rho$  в методе простых итераций (3.3) определялся по формуле  $\rho = 1/(2K_h)$ . В качестве начальных приближений выбирались  $\underline{v}^0 = 0$  и  $\bar{v}^0 = \bar{c}/\beta$ , которые являются грубыми оценками оптимального значения решения  $v_h$  задачи (3.1) снизу и сверху соответственно. Заметим, что из монотонности схемы ([10, теорема 6]) вытекает, что неравенство  $\underline{v}^n \leq \bar{v}^n$  между соответствующими приближениями сохраняется при всех  $n$ .

Алгоритм отработывал число итераций необходимое, чтобы максимальная относительная погрешность

$$\max_{ij} \frac{|\underline{v}_{ij}^n - \bar{v}_{ij}^n|}{\underline{v}_{ij}^n}$$

между приближениями не превышала 2%. При рассматриваемых параметрах для одномерной задачи с параметром  $x_2$  для этого требуется это около 4.5 миллионов итераций, а для двумерного — от 6 до 8 миллионов итераций в зависимости от значения параметра  $k_2$ .

Для программирования использовался язык «Си». Расчеты проводились на процессоре «Intel Core i5-3230M» с тактовой частотой 2.6 ГГц. При обычном запуске программы на один эксперимент затрачивалось от 11 до 20 часов. Однако, так как данный процессор может одновременно работать с четырьмя потоками, то, используя технику параллельного программирования, удалось ускорить работу алгоритма примерно в 3.8 раза. При этом на самый длительный эксперимент затрачивалось чуть более 5 часов.

На представленных ниже рисунках сплошная линия, отмеченная цифрой 1, соответствует одномерной задаче ( $\mu_3 = \sigma_3 = 0$ ) с параметром  $Y_t = x_2$ . Цифры 2, 3, 4 и соответствующие им линии относятся к значениям параметра  $k_2 = 0.1, 1, 10$ .

Из представленных на рис. 1.1 графиков, видно что функция Беллмана  $v$  является возрастающей и вогнутой по  $x_1$ . Типичная картина, состоит в том, что при малых  $x_2$  функция Беллмана двумерной задаче мажорирует функцию Беллмана одномерной задачи, а при больших  $x_2$  — наоборот. Переходная область определяется уровнем  $\mu_2 = l$ , а данные свойства — «притягиванием»  $Y$  к нулевому уровню в двумерной задаче. Напри-



мер, если  $x_2 < 0$ , то в одномерной задаче эта ситуация не изменится, а в двумерной снос  $\mu_2$  увеличится, что создает более благоприятную ситуацию для инвестирования.

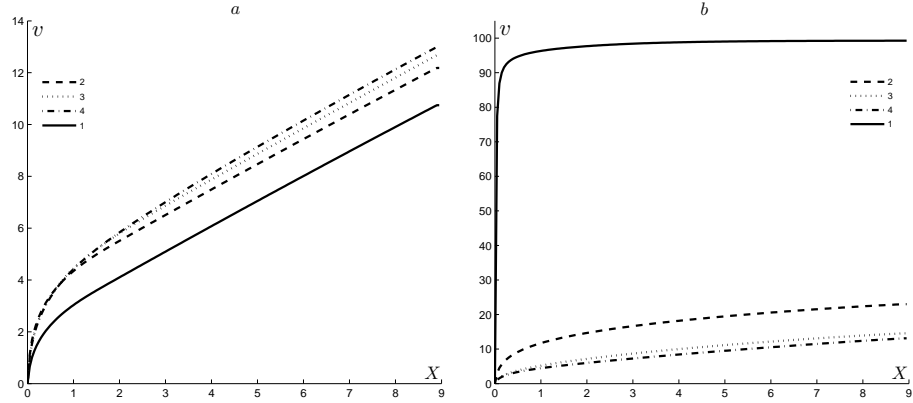


Рисунок 1.1: Графики сечений функции Беллмана  $v(\cdot, x_2)$ , (a)  $x_2 = -1.88$ , (b)  $x_2 = 4.58$ .

Не приводя соответствующих графиков, отметим, что по переменной  $x_2$  наблюдается монотонный рост функции  $v$  и ярко выраженная выпуклость в одномерном случае. Сверхлинейный рост  $v$  по  $x_2$  можно объяснить тем, что вместе с  $x_2$  растёт оптимальное значение  $\theta^*$ .

Перейдем к рассмотрению оптимальных стратегий. Численные расчеты подтверждают хорошо известную «барьерную» структуру оптимальной интенсивности  $c^*$  выплачиваемых дивидендов:

$$c^* = \begin{cases} 0, & x_1 < x^*(x_2) \\ \bar{c}, & x_1 \geq x^*(x_2). \end{cases} \quad (4.2)$$

График линии переключения  $x^*(x_2)$  представлен на рис. 1.2. При  $\mu_2(x_2) < 0$  (т.е.  $x_2 < -1$ ) в одномерной задаче линия переключения не зависит от  $x_2$ . Это объясняется тем что при этом  $\theta^* = 0$ , и коэффициенты уравнения (2.3) не зависят от  $x_2$ . Далее, все графики линий переключения имеют точку глобального максимума. Это можно объяснить спецификой модели Блэка-Шоулза, а именно тем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_t = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu_2(x_2) < \sigma_2^2(x_2)/2 \\ +\infty & \text{при } \mu_2(x_2) > \sigma_2^2(x_2)/2 \end{cases}$$

при фиксированном  $x_2$ . Если значения параметра  $x_2$  превосходят корень уравнения  $\mu_2(x_2) = \sigma_2^2(x_2)/2$  (точка  $\hat{x}_2 = 0.68$  на рис. 1.2), то рисковый актив становится «слишком

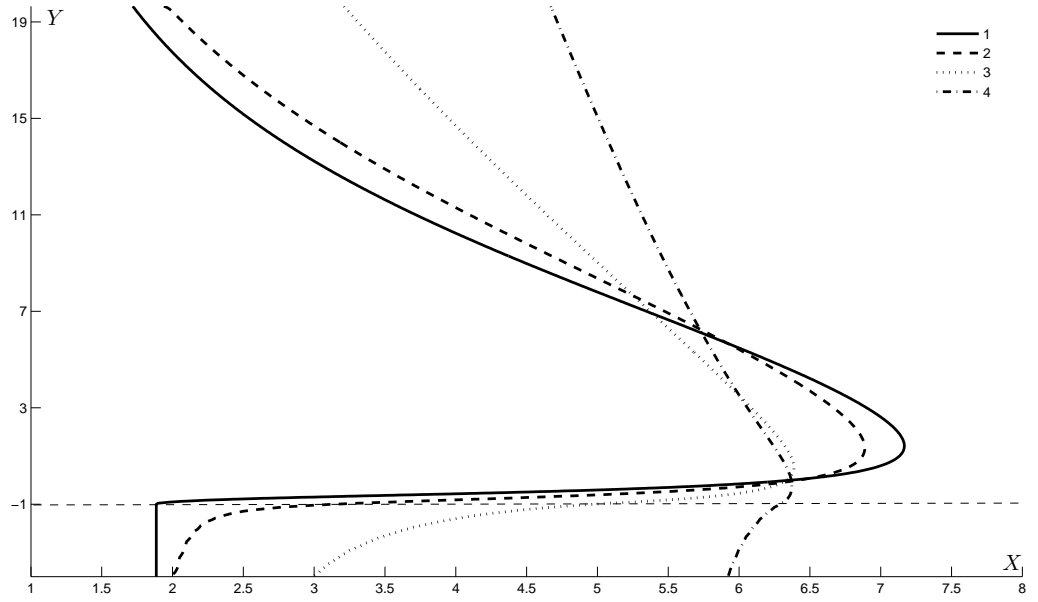


Рисунок 1.2: График линии переключения  $x^*(x_2)$  оптимальной стратегии  $s^*$  выплаты дивидендов

хорошим». При дальнейшем увеличении  $x_2$  это позволяет постепенно снижать уровень капитала фирмы, начиная с которого производится выплата дивидендов. Можно ожидать, что  $x^*(x_2) \rightarrow 0$  при  $x_2 \rightarrow +\infty$ . Отметим также, что двумерный эффект выражается в том, что при увеличении  $k_2$  график  $x^*(x_2)$  становится более пологим и приближается к прямой  $x_1 = x^*(0)$ .

Теперь рассмотрим поведение  $\theta^*$  — оптимального объема капитала, инвестируемого в рисковый актив. Численные результаты показывают, что для любого фиксированного

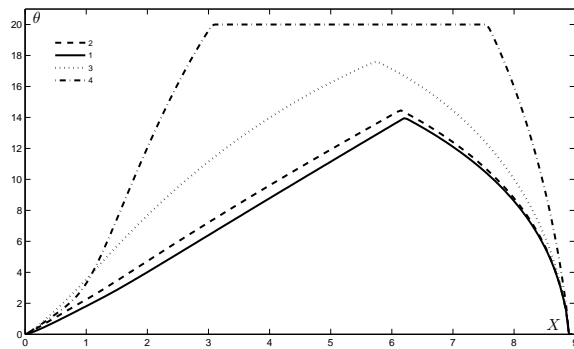


Рисунок 1.3: Графики сечений  $\theta^*(\cdot, x_2)$  при  $x_2 = 5$ .

значения  $x_2$  с  $\mu_2(x_2) > 0$  функция  $x_1 \mapsto \theta^*(x_1, x_2)$  возрастает на интервале  $[0, x^*(x_2)]$  и

убывает при  $x_1 > x^*(x_2)$  (в случае  $k_2 = 10$  на рис. 1.3 имеется плоский участок графика, что соответствует достижению  $\theta^*$  максимально допустимого значения  $\bar{\theta}$ ). Интересный эффект падения  $\theta^*$  при  $x_1 > x^*(x_2)$  по-видимому не описан в литературе применительно к данной задаче. Его можно объяснить тем, что увеличение капитала  $V$  в данной области не приводит к увеличению скорости выплаты дивидендов. Как следствие меняется стратегия: увеличение капитала перестает быть приоритетом, что приводит к снижению волатильности оптимального портфеля.

Представляет интерес также поведение функции  $x_2 \mapsto \theta^*(x_1, x_2)$ . Типичные графики

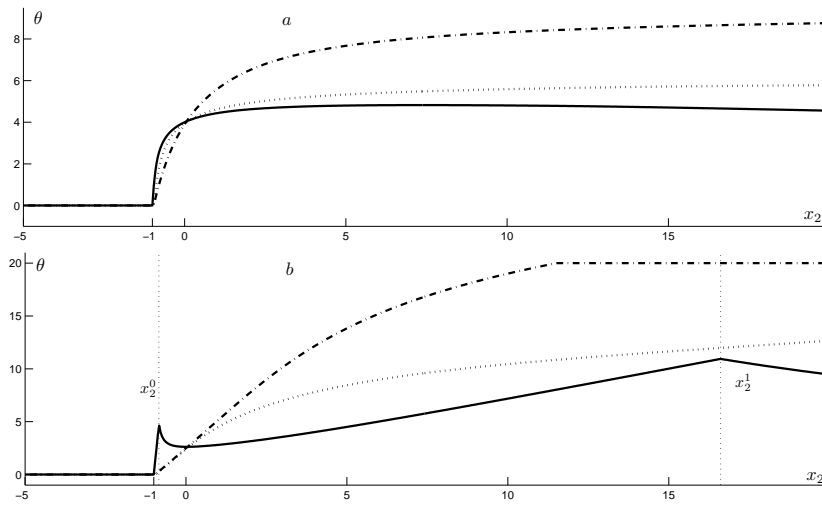


Рисунок 1.4: Графики сечений  $\theta^*(x_1, \cdot)$  при (a)  $x_1 = 8.65$ , (b)  $x_1 = 5$ .

представлены на рисунке 1.4. С качественной точки зрения свойства данной функции, определяются числом пересечений прямой, проходящей через точку  $x_1$  и параллельной оси  $x_2$ , с границей области выплаты дивидендов. Особенно ярко данный эффект проявляется в одномерной модели с параметром  $x_2$ . На рисунке 1.4(a) представлен случай, когда кривая  $x_1 = x^*(x_2)$ , соответствующая одномерной модели, не пересекается с прямой  $x_1 = 8.65$ , а на рисунке 1.4(б) — случай, когда имеются два корня  $x_2^0, x_2^1$  уравнения  $x^*(x_2) = 5$ .

Двумерные эффекты состоят в сглаживании графиков и увеличении значений функции  $\theta^*$  с ростом  $k_2$ . При этом монотонность функции  $\theta^*(x_1, \cdot)$  в области невыплаты дивидендов можно объяснить сглаживанием, а увеличение  $\theta^*$  с ростом  $k_2$  — желанием компании максимально использовать «хорошие» условия на рынке, пока они не вернулись к обычному уровню.

Рассмотрим, наконец, оптимальный уровень перестрахования. На представленных на рис. 1.5 графиках выделено два случая. При  $\mu_2(x_2) \leq 0$  поведение  $\alpha^*$  соответствует описанному в работе [15]: имеется точка  $\hat{x} \in (0, x^*)$  такая, что  $\alpha^*$  возрастает по  $x_1$  на интервале

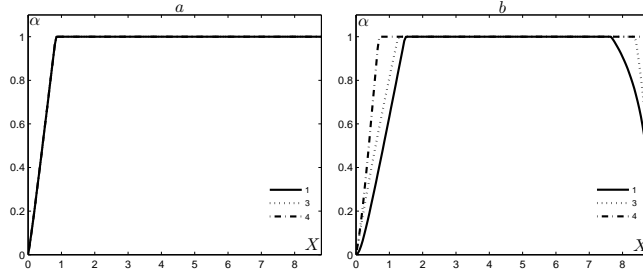


Рисунок 1.5: Графики сечений  $\alpha^*(\cdot, x_2)$  при (a)  $x_2 = -4.17$ , (b)  $x_2 = 18.92$ .

$(0, \hat{x})$  и  $\alpha^* = 1$  при  $x_1 \geq \hat{x}$ . На рис. 1.5(a) представлен одномерный случай. В двумерном случае, для любого значения параметра  $k_2$  график остается тем же. Причина состоит в том, что в области  $\mu_2(x_2) \leq 0$  не задействован инвестиционный портфель:  $\theta^* = 0$ .

При  $\mu_2(x_2) > 0$  возникает эффект падения  $\alpha^*$  при больших значениях  $x_1$ : рис. 1.5(b). То, что этот эффект реален и не связан с искажениями, которые вносятся искусственным

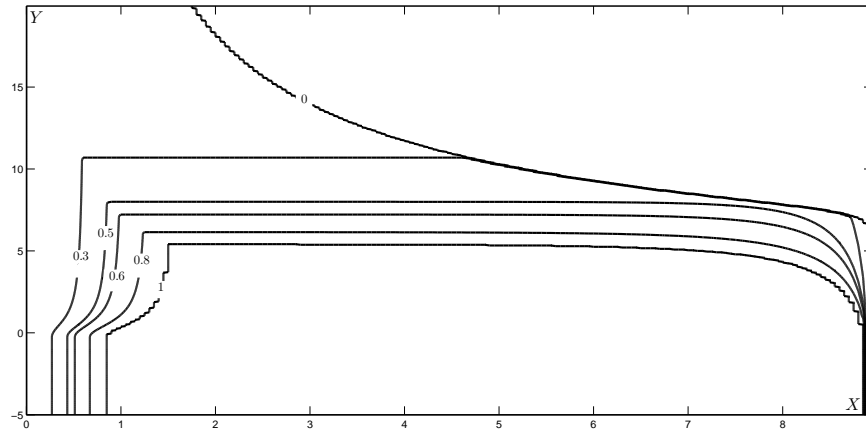


Рисунок 1.6: Линии уровня  $\alpha^*$ , в случае одномерной модели с параметром  $x_2$ .

граничным условием  $v(\bar{x}_1, x_2) = 0$ , подтверждается линиями уровня  $\alpha^*$ , соответствующими одномерной задаче с параметром  $x_2$ : см. рис. 1.6. Заметим, что функция  $x_2 \mapsto \alpha^*(x_1, x_2)$  является убывающей и  $\max_{x_1} \alpha^*(x_1, x_2) < 1$  при больших значениях  $x_2$ . Убывание  $\alpha^*$  по  $x_2$ , означает, что при увеличении  $x_2$  страховая компания постепенно превращается в инвестиционную. В двумерном случае (который не представлен на рисунках) ситуация сложнее.

В частности, монотонное убывание функции  $\alpha^*$  по  $x_2$  наблюдается лишь при достаточно больших значениях  $x_1$ .

## Глава 2

# Регулярные задачи стохастического управления с конечным топливом

### 2.1 Введение

Рассмотрим задачу управления, в которой требуется как можно дольше удерживать стохастическую систему  $X$  в заданной области  $G$ . Воздействие на систему  $X$  требует расхода ресурса (или топлива). Задача состоит в том, чтобы использовать имеющееся количество ресурса оптимальным образом.

Изучение диффузионных стохастических задач управления с конечным топливом было начато в [47], где рассматривалась задача о приближении космического аппарата к случайной цели. Впоследствии задачи с конечным топливом разрабатывались почти исключительно в парадигме сингулярного стохастического управления [47, 48]. При этом подходе всегда оптимально удерживать систему в так называемой «области бездействия». Существенный шаг был сделан в [49]. В указанной статье изучалась задача оптимального отслеживания броуновского движения процессом, вариация которого ограничена заданным начальным запасом топлива. Было получено явное решение для квадратического дисконтированного критерия в случае бесконечного горизонта. В частности, было отмечено, что оптимальная область бездействия расширяется с уменьшением количества доступного топлива.

Более общие задачи такого рода изучались впоследствии, например, в [50–52]. Случай конечного горизонта рассмотрен, в работах [53–55]. Весьма общие результаты, касающиеся характеристики функции Беллмана и существование оптимальных стратегий управления, были получены в [56–59]. Многие работы были мотивированы приложениями. Отметим

задачи оптимальной коррекции движения [60], управления спутником [61–63], достижения цели игроком [64, 65], оптимальной ликвидации и оптимального исполнения транзакций [66–69].

В отличие от подавляющего большинства известных работ, мы предполагаем что интенсивность потребления ресурса (топлива) ограничена. Фактически, только [66, 68] из перечисленных выше работ используют аналогичное предположение. Ограничиваясь классическими управлениями, мы приходим к более простым математическим задачам, которые, тем не менее, способны описывать интересные эффекты и имеют широкий диапазон возможных приложений. С формальной точки зрения мы работаем с нелинейным параболическим уравнением Гамильтона-Якоби-Беллмана (Hamilton-Jacobi-Bellman: HJB) и классическими управлениями, вместо вариационного неравенства и сингулярных управлений. Несмотря на эти отличия, в обоих случаях в фазовом пространстве имеется область бездействия  $\Pi_{na}$ . Когда фазовая переменная находится в этой области оптимальная стратегия состоит в том, чтобы не расходовать топливо. Сингулярные управления способны удерживать систему в области  $\Pi_{na}$ . Используемые нами классические управления лишь создают снос в сторону  $\Pi_{na}$ .

Для того, чтобы дать точную формулировку нашей задачи рассмотрим стандартный  $m$ -размерный винеровский процесс  $W = (W^1, \dots, W^m)$ , определенный на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , где  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$  — минимальная пополненная естественная фильтрация процесса  $W$ . Пусть управляемый процесс  $X = (X^1, \dots, X^d)$  подчиняется системе стохастических дифференциальных уравнений

$$dX_t = b(X_t, \alpha_t)dt + \sigma(X_t, \alpha_t)dW_t, \quad X_0 = x. \quad (1.1)$$

Входящий сюда  $\mathbb{F}$ -прогрессивно измеримый процесс  $\alpha \in A = [a, \bar{a}]$ ,  $a \leq 0 \leq \bar{a}$  можно рассматривать как интенсивность потребления ресурса. Мы предполагаем что компоненты вектора сноса  $b : \mathbb{R}^d \times A \mapsto \mathbb{R}^d$  и матрицы диффузии  $\sigma : \mathbb{R}^d \times A \mapsto \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$  непрерывны и удовлетворяют неравенству

$$|b(x, a) - b(y, a)| + |\sigma(x, a) - \sigma(y, a)| \leq K|x - y|,$$

где константа  $K$  не зависит от  $a$ . Заметим, что это неравенство влечет также условие линейного роста:

$$|b(x, a)| + |\sigma(x, a)| \leq K'(1 + |x|).$$

Таким образом, существует единственное  $\mathbb{F}$ -согласованное сильное решение (1.1) на  $[0, \infty)$ : см. [70] (Глава 2). Количество ресурса  $Y$  удовлетворяет уравнению

$$dY_t = -|\alpha_t|dt, \quad Y_0 = y. \quad (1.2)$$

Процесс  $\alpha$  назовем допустимым, и будем использовать обозначение  $\alpha \in \mathcal{A}(x, y)$ , если  $Y_t \geq 0$ ,  $t \geq 0$ . Допустимость означает, что перерасход ресурса запрещен. Решение (1.1), (1.2) обозначим через  $X^{x,y,\alpha}, Y^{x,y,\alpha}$ .

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^d$  открытое множество. Нам будет удобно предположить, что  $0 \in G$ . В общем случае мы не накладываем на  $G$  условия ограниченности. Обозначим через  $\theta^{x,y,\alpha} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{x,y,\alpha} \notin G\}$  время выхода процесса  $X^{x,y,\alpha}$  из области  $G$ . Определим целевой функционал  $J$  и функцию Беллмана  $v$  следующим образом:

$$J(x, y, \alpha) = \mathbb{E} \int_0^{\theta^{x,y,\alpha}} e^{-\beta t} f(X_t^{x,y,\alpha}, \alpha_t) dt, \quad v(x, y) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(x,y)} J(x, y, \alpha), \quad (1.3)$$

где  $\beta > 0$ , и  $f : \mathbb{R}^d \times A \mapsto \mathbb{R}$  ограниченная непрерывная функция. Заметим, что при  $f = 1$  получается риск-чувствительный (risk-sensitive) критерий:

$$J(x, y, \alpha) = \frac{1}{\beta} (1 - \mathbb{E} e^{-\beta \theta^{x,y,\alpha}}), \quad (1.4)$$

связанный с максимизацией ожидаемого времени  $\mathbb{E} \theta^{x,y,\alpha}$  до выхода из области  $G$ . Минимизация  $\mathbb{E} e^{-\beta \theta^{x,y,\alpha}}$ , по сравнению с максимизацией  $\mathbb{E} \theta^{x,y,\alpha}$ , порождает стратегии управления, для которых вероятность раннего выхода из области  $G$  меньше (см. [71, 72]).

Как уже отмечалось выше, соответствующим образом сформулированные задачи такого рода встречаются в различных приложениях. Приведем ещё один пример, который послужил стимулом при написании данной главы. Пусть  $X$  описывает обменный курс внутренней и внешней валюты. Национальный банк, являющийся регулятором, пытается поддержать национальную валюту и удерживать  $X$  выше уровня  $l$ . Доступное количество иностранной валюты, которая может быть продана на рынке соответствует  $Y$ . Математически эта проблема очень похожа на ту, которая рассматривалась в работе [61]. Однако, использование регулярных стратегий управления (с ограниченной интенсивностью интервенций) может привести к тому, что процесс  $X$  выйдет из области  $G = (l, \infty)$  до того момента, когда ресурс («топливо») будет полностью израсходован. В рамках нашей модели центральный банк выбирает остановку интервенций при наступлении момента  $\theta$ , рассматривая это как сигнал к понижению уровня  $l$  или изменению валютной политики. Следует заметить, что существует обширная литература, рассматривающая вопросы регулирования обменных курсов. Не вдаваясь в дальнейшее обсуждение, отметим только, что



доминирующая парадигма состоит в моделировании валютных интервенций с помощью импульсного управления: см., например, [?, 73], и указанные там ссылки.

Данная глава организована следующим образом. В разделе 2.2 задача (1.1)–(1.3) сводится к задаче управления до момента выхода из области. Далее, из общей теории вытекает, что функция Беллмана (1.3) является вязкостным решением соответствующего уравнения НЖВ. Однако, сразу не является очевидным, что  $v$  непрерывна или принимает граничные условия непрерывным образом. Для доказательства непрерывности  $v$  на  $\bar{\Pi} = \bar{G} \times [0, \infty)$  мы применяем стохастический метод Перрона [24], адаптированный к задаче управления до момента выхода из области в работе [20]. Этот метод работает с семействами  $\mathcal{V}_-$ ,  $\mathcal{V}_+$  стохастических суб- и суперрешений, которые порождают процессы суб- и супермартингального типа при суперпозиции с фазовым процессом, и оценивают функцию Беллмана снизу и сверху:  $u \leq v \leq w$ ,  $u \in \mathcal{V}_-$ ,  $w \in \mathcal{V}_+$ . Сущность стохастического метода Перрона состоит в том, что

$$u_-(x) =: \sup_{u \in \mathcal{V}_-} u(x), \quad w_+(x) := \inf_{w \in \mathcal{V}_+} w(x)$$

являются соответственно вязкостным супер- и субрешениями уравнения НЖВ, и удовлетворяют граничному условию Дирихле в обобщенном вязкостном смысле: см. [3, определение 7.4] и [20, теоремы 2, 3]. Если справедлив сильный принцип сравнения, обеспечивающий неравенство  $u_- \geq w_+$  на  $\Pi = G \times (0, \infty)$ , то функция  $u_- = v = w_+$  непрерывна на  $\Pi$ . Если, кроме того,  $u_- \geq w_+$  on  $\bar{\Pi}$ , то  $v$  непрерывна на  $\bar{\Pi}$ .

Заметим, что основное предположение [20] состоит в справедливости сильного принципа сравнения, означающего, что для любых вязкостного субрешения  $u$  и суперрешения  $w$ , удовлетворяющих граничному условию Дирихле в обобщенном вязкостном смысле, неравенство  $u \leq w$  справедливо на  $\Pi$ . По-видимому, для рассматриваемой задачи такой результат неизвестен. Для преодоления этой трудности мы строим специальные стохастические суб- и суперрешения, совпадающие на определенных частях границы  $\Pi$ : см. лемму 4 (данная идея заимствована из [25]). Этот прием позволяет заключить, что  $u_- = v = w_+$  на  $\partial\Pi$ . Затем мы применяем стандартный принцип сравнения для вязкостных решений, удовлетворяющих граничному условию Дирихле в обычном смысле, и заключаем, что  $v$  непрерывна на  $\bar{G} \times [0, \infty)$ : теорема 7.

Наши условия 4-6 носят аналитический характер. Они касаются корректности краевых задач для уравнений НЖВ, соответствующих задачам с бесконечным топливом и без топлива, а также наличия некоторых «хороших» свойств решений последних.

В разделах 2.3 и 2.4 представлены компьютерные эксперименты для задач оптимальной коррекции и оптимального отслеживания простой стохастической системы с устойчивым или неустойчивым равновесием. Данные эксперименты выявили некоторые нетривиальные свойства оптимальных стратегий. Теорема 7 позволяет обосновать сходимость соответствующих конечно-разностных схем. Сами схемы заимствованы из [10].

## 2.2 Характеризация функции Беллмана

Для открытого множества  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F(x, u(x), u_x(x), u_{xx}(x)) = 0, \quad x \in \mathcal{O}, \quad (2.1)$$

где  $u_x$  — градиент и  $u_{xx}$  — гессиан. Предполагается что функция  $F : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n$  непрерывна и удовлетворяет свойству монотонности:

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, Y) \quad \text{если } r \leq s \text{ и } X - Y \text{ является неотрицательно определенной.}$$

Здесь  $\mathbb{S}^n$  — множество симметричных  $n \times n$  матриц.

Пусть  $g$  — непрерывная функция на  $\partial\mathcal{O}$ . Мы рассматриваем два варианта граничных условий:

$$u = g \text{ on } \partial\mathcal{O}, \quad (2.2)$$

$$u = g \text{ or } F(x, u, u_x, u_{xx}) = 0 \text{ on } \partial\mathcal{O}. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.1), как и граничные условия (2.2), (2.3), следует понимать в вязкостном смысле (классической ссылкой является [3]). Напомним что ограниченная полунепрерывная сверху функция  $u$  называется вязкостным субрешением по отношению к уравнению (2.1) и граничному условию (2.3) (соотв., (2.2)), если для любых  $z \in \overline{\mathcal{O}}$ ,  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$  таких, что  $z$  — точка локального максимума функции  $u - \varphi$  на  $\overline{\mathcal{O}}$ , выполняются неравенства

$$F(z, u(z), \varphi_x(z), \varphi_{xx}(z)) \leq 0 \quad \text{для } z \in \mathcal{O},$$

$$u(z) \leq g(z) \text{ или } F(z, u(z), \varphi_x(z), \varphi_{xx}(z)) \leq 0 \quad \text{для } z \in \partial\mathcal{O},$$

$$(\text{соотв., } u(z) \leq g(z) \quad \text{для } z \in \partial\mathcal{O}).$$

Понятие вязкостного суперрешения определяется симметрично. Следует рассмотреть ограниченную полунепрерывную снизу функцию  $u$ , и предположив, что  $z$  точка локального минимума функции  $u - \varphi$  на  $\overline{\mathcal{O}}$ , постулировать обратные неравенства.

Ограниченная функция  $u$  называется вязкостным решением задачи (2.1), (2.3) (или (2.1), (2.2)), если ее полунепрерывная сверху и полунепрерывная снизу оболочки:

$$u^*(x) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup \{u(y) : y \in B_\varepsilon(x) \cap \overline{\mathcal{O}}\}, \quad u_*(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf \{u(y) : y \in B_\varepsilon(x) \cap \overline{\mathcal{O}}\}$$

являются соответственно вязкостным суб- и суперрешениями этих уравнений. Здесь  $B_\varepsilon(x)$  — открытый шар в  $\mathbb{R}^n$  радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $x$ . Следуя [9], будем говорить, (2.1), (2.3) удовлетворяет сильному свойству единственности, если для любой пары вязкостных суб- и суперрешений  $u, w$  уравнений (2.1), (2.3) на множестве  $\overline{\mathcal{O}}$  справедливо неравенство  $u \leq w$ .

Рассмотрим семейство  $\mathcal{L}^a$  «инфинитезимальных генераторов» диффузионного процесса  $X$ :

$$\mathcal{L}^a \varphi(x) = b(x, a) \varphi_x(x) + \frac{1}{2} \text{Tr} (\sigma(x, a) \sigma^T(x, a) \varphi_{xx}(x))$$

и уравнение НЖВ, соответствующее задаче (2.1)-(2.3):

$$\beta v - H(x, v_x, v_y, v_{xx}) = 0, \quad (x, y) \in \Pi := G \times (0, \infty), \quad (2.4)$$

$$H(x, v_x, v_y, v_{xx}) = \sup_{a \in [\underline{a}, \overline{a}]} \{f(x, a) + \mathcal{L}^a v - |a|v_y\}.$$

Целью данного раздела является доказательство того, что функция Беллмана (1.3) является единственным непрерывным вязкостным решением задачи (2.4) с соответствующими граничными условиями (см. теорему 7). Это требует некоторой подготовительной работы.

Обозначим через  $C^2(G)$  множество дважды непрерывно дифференцируемых функций на  $G$ , и через  $C_b(\overline{G})$  — множество непрерывных ограниченных функций на  $\overline{G}$ . Положим  $\widehat{f}(x) = f(x, 0)$ .

Предположение 4. Существует решение  $\psi \in C_b(\overline{G}) \cap C^2(G)$  задачи Дирихле

$$\beta \psi(x) - \widehat{f}(x) - \mathcal{L}^0 \psi(x) = 0, \quad x \in G; \quad \psi = 0 \quad \text{на} \quad \partial G. \quad (2.5)$$

Легко показать, что такое решение единственно и допускает вероятностное представление

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \mathbb{E} \int_0^{\widehat{\theta}^x} e^{-\beta t} \widehat{f}(\widehat{X}_t^x) dt, \quad \widehat{\theta}^x = \inf\{t \geq 0 : \widehat{X}_t^x \notin G\}, \\ d\widehat{X}_t^x &= b(\widehat{X}_t^x, 0) dt + \sigma(\widehat{X}_t^x, 0) dW_t, \quad \widehat{X}_t^x = x \end{aligned}$$

(см. [74], глава. II, теорема 2.1 и замечание 1 после неё). Отметим, что здесь  $\psi$  совпадает с функцией Беллмана задачи без топлива.

Можно заметить, что (1.1)-(1.3) сочетает черты задачи об управлении до выхода из области и задачи с фазовыми ограничениями. Оказывается однако, что она эквивалентна чистой задаче управления до момента выхода из области. Пусть  $T^{x,y,\alpha}$  — момент выхода процесса  $(X^{x,y,\alpha}, Y^{x,y,\alpha})$  из открытого множества  $G \times (0, \infty)$ . Для моментов остановки  $\tau \leq \sigma$  со значениями в  $[0, \infty]$  обозначим через  $[\tau, \sigma]$  стохастический интервал  $\{(\omega, t) \in \Omega \times [0, \infty) : \tau(\omega) \leq t \leq \sigma(\omega)\}$ .

Лемма 3. Если выполняется условие 4, то функция Беллмана (1.3) допускает представление

$$v(x, y) = \sup_{\alpha \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left( \int_0^{T^{x,y,\alpha}} e^{-\beta t} f(X_t^{x,y,\alpha}) dt + e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} \psi(X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}) \right), \quad (2.6)$$

где  $\mathcal{U}$  — множество всех  $\mathbb{F}$ -прогрессивно измеримых стратегий  $\alpha$  со значениями в  $A$ .

Доказательство. Заметим, что  $T^{x,y,\alpha} = \theta^{x,y,\alpha} \wedge \inf\{t \geq 0 : Y_t^{x,y,\alpha} = 0\}$ , и любая допустимая стратегия  $\alpha \in \mathcal{A}(x, y)$  должна стать равной 0, как только топливо  $Y^{x,y,\alpha}$  «израсходуется»:  $\alpha_t = 0, t \in (T^{x,y,\alpha}, \theta^{x,y,\alpha}]$ . Следовательно, функционал (1.3) допускает представление

$$\begin{aligned} J(x, y, \alpha) &= \mathbb{E} \int_0^{T^{x,y,\alpha}} e^{-\beta t} f(X_t^{x,y,\alpha}, \alpha_t) dt \\ &+ \mathbb{E} \left( I_{\{T^{x,y,\alpha} < \theta^{x,y,\alpha}\}} \mathbb{E} \left( \int_{T^{x,y,\alpha}}^{\theta^{x,y,\alpha}} e^{-\beta t} \widehat{f}(X_t^{x,y,\alpha}) dt \middle| \mathcal{F}_{T^{x,y,\alpha}} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

На стохастическом интервале  $[\![T^{x,y,\alpha}, \theta^{x,y,\alpha}]\!]$  имеем

$$X_t^{x,y,\alpha} = \xi + \int_{T^{x,y,\alpha}}^t b(X_s^{x,y,\alpha}, 0) ds + \int_{T^{x,y,\alpha}}^t \sigma(X_s^{x,y,\alpha}, 0) dW_s, \quad \xi = X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}.$$

Для решения  $\psi$  задачи Дирихле (2.5) по формуле Ито находим

$$\begin{aligned} e^{-\beta t} \psi(X_t^{x,y,\alpha}) &= e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} \psi(\xi) + \int_{T^{x,y,\alpha}}^t e^{-\beta s} (\mathcal{L}^0 \psi - \beta \psi)(X_s^{x,y,\alpha}) ds + M_t \\ &= e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} \psi(\xi) - \int_{T^{x,y,\alpha}}^t e^{-\beta s} \widehat{f}(X_s^{x,y,\alpha}) ds + M_t \quad \text{on } [\![T^{x,y,\alpha}, \theta^{x,y,\alpha}]\!], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $M_t = \int_{T^{x,y,\alpha}}^t e^{-\beta s} \psi_x(X_s^{x,y,\alpha}) \cdot \sigma(X_s^{x,y,\alpha}, 0) dW_s$  — локальный мартингал. Последнее равенство показывает, однако, что  $M$  ограничен. Следовательно,  $M$  является равномерно интегрируемым непрерывным мартингалом, и  $M_{T^{x,y,\alpha}} = 0$  на  $\{T^{x,y,\alpha} < \theta^{x,y,\alpha}\}$ . Для любого момента остановки  $\tau$  такого, что

$$T^{x,y,\alpha} \leq \tau < \theta^{x,y,\alpha} \quad \text{на } \{T^{x,y,\alpha} < \theta^{x,y,\alpha}\}, \quad (2.9)$$

вычисляя условное математическое ожидание, из (2.8) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( e^{-\beta \tau} \psi(X_\tau^{x,y,\alpha}) I_{\{T^{x,y,\alpha} < \theta^{x,y,\alpha}\}} \middle| \mathcal{F}_{T^{x,y,\alpha}} \right) &= e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} \psi(\xi) I_{\{T^{x,y,\alpha} < \theta^{x,y,\alpha}\}} \\ &- I_{\{T^{x,y,\alpha} < \theta^{x,y,\alpha}\}} \mathbb{E} \left( \int_{T^{x,y,\alpha}}^\tau e^{-\beta s} \widehat{f}(X_s^{x,y,\alpha}) ds \middle| \mathcal{F}_{T^{x,y,\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Рассмотрим расширяющуюся последовательность  $G_n$  компактных множеств таких, что  $\cup_{n \geq 1} G_n = G$ , и положим

$$\tau_n = T^{x,y,\alpha} \vee \inf\{t \geq 0 : X_t^{x,y,\alpha} \notin G_n\}.$$

Ясно что,  $\tau_n \nearrow \theta^{x,y,\alpha}$  и  $\tau_n$  удовлетворяют условию (2.9), наложенному на  $\tau$ . Кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\beta \tau_n} \psi(X_{\tau_n}^{x,y,\alpha}) I_{\{T^{x,y,\alpha} < \theta^{x,y,\alpha}\}} = 0 \quad \text{п.н.}$$

в силу граничного условия (2.5) и ограниченности функции  $\psi$ . Из неравенства

$$\mathbb{E} \left| \mathbb{E} \left( e^{-\beta \tau_n} \psi(X_{\tau_n}^{x,y,\alpha}) I_{\{T^{x,y,\alpha} < \theta^{x,y,\alpha}\}} \middle| \mathcal{F}_{T^{x,y,\alpha}} \right) \right| \leq \mathbb{E} \left| e^{-\beta \tau_n} \psi(X_{\tau_n}^{x,y,\alpha}) I_{\{T^{x,y,\alpha} < \theta^{x,y,\alpha}\}} \right|$$

и теоремы о мажорируемой сходимости следует, что

$$\mathbb{E} \left( e^{-\beta \tau_n} \psi(X_{\tau_n}^{x,y,\alpha}) I_{\{T^{x,y,\alpha} < \theta^{x,y,\alpha}\}} \middle| \mathcal{F}_{T^{x,y,\alpha}} \right) \rightarrow 0 \quad \text{in } L^1.$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что эта подпоследовательность сходится с вероятностью 1. Далее, из (2.10) находим

$$I_{\{T^{x,y,\alpha} < \theta^{x,y,\alpha}\}} \mathbb{E} \left( \int_{T^{x,y,\alpha}}^{\theta^{x,y,\alpha}} e^{-\beta s} \widehat{f}(X_s^{x,y,\alpha}) ds \middle| \mathcal{F}_{T^{x,y,\alpha}} \right) = I_{\{T^{x,y,\alpha} < \theta^{x,y,\alpha}\}} e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} \psi(\xi).$$

Это завершает доказательство, так как (2.7) принимает вид

$$J(x, y, \alpha) = \mathbb{E} \left( \int_0^{T^{x,y,\alpha}} e^{-\beta t} f(X_t^{x,y,\alpha}, \alpha_t) dt + I_{\{T^{x,y,\alpha} < \theta^{x,y,\alpha}\}} e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} \psi(X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}) \right),$$

эквивалентный представлению (2.6) ввиду граничного условия (2.5).  $\square$

Обозначим через  $\bar{v}$  функцию Беллмана задачи с «бесконечным топливом»:

$$\bar{v}(x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \int_0^{\theta^{x,\alpha}} e^{-\beta t} f(X_t^{x,\alpha}, \alpha_t) dt, \quad \theta^{x,\alpha} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{x,\alpha} \notin G\}, \quad (2.11)$$

где  $X^{x,\alpha}$  — решение (1.1). Рассмотрим соответствующее уравнение НЖВ и граничные условия:

$$\beta \bar{v} - \sup_{a \in [\underline{a}, \bar{a}]} \{f(x, a) + \mathcal{L}^a \bar{v}\} = 0, \quad x \in G, \quad (2.12)$$

$$\beta \bar{v} - \sup_{a \in [\underline{a}, \bar{a}]} \{f(x, a) + \mathcal{L}^a \bar{v}\} = 0 \quad \text{или} \quad \bar{v} = 0 \quad \text{на} \quad \partial G. \quad (2.13)$$

Функция Беллмана  $\bar{v}$  задачи управления до момента выхода из области (2.11) не обязана принимать свои граничные значения непрерывным образом при отсутствии дополнительных условий. Более того, в общем случае,  $\bar{v}$  не может быть охарактеризована как единственное вязкостное решение уравнения НЖВ (2.12), если граничное условие Дирихле понимается в классическом смысле:  $\bar{v} = 0$  на  $\partial G$ . Но для дальнейших целей нам потребуется условие, обеспечивающее это свойство (см. также [20], замечание 1).

Предположение 5. Краевая задача (2.12), (2.13) удовлетворяет свойству сильной единственности.

Укажем простое достаточное условие, обеспечивающее справедливость условия 5. Пусть  $\partial G$  принадлежит классу  $C^2$ . Обозначим через  $n(x)$  единичную внешнюю нормаль к  $\partial G$  в точке  $x$ . Условие 5 будет выполнено, если матрица коэффициентов диффузии не вырождается по нормали на границе:

$$\sigma(x, a)n(x) \neq 0, \quad (x, a) \in \partial G \times A. \quad (2.14)$$

В самом деле, пусть  $u, w$  ограниченные вязкостные суб- и суперрешения (2.12), (2.13). Согласно утверждению 4.1 из [19] обобщенное граничное условие Дирихле (2.13) удовлетворяется в обычном смысле:  $u \leq 0 \leq w$  на  $\partial G$ . Таким образом, мы можем применить теорему сравнения [46, Theorem 7.3], [58, Theorem 4.2] (для, возможно, неограниченной области  $G$ ), и получить неравенство  $u \leq w$  на  $\bar{G}$ .

Предположение 6. Существует константа  $K > 0$  такая, что

$$\sup_{x \in G} \{|f(x, a) - f(x, 0) + \mathcal{L}^a \psi(x) - \mathcal{L}^0(x)\psi|\} \leq K|a|.$$

Это условие удовлетворяется, например, если  $f$  непрерывна по Липшицу,  $\mathcal{L}^0$  является строго эллиптическим, и  $G$  — ограниченная область с границей класса Гёльдера  $C^{2,\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . Действительно, согласно классической теории Шаудера,  $\psi \in C^{2,\alpha}(\bar{G})$  (см. [75], теорема 6.14) и, в частности, производные функции  $\psi$  до второго порядка включительно равномерно ограничены в  $G$ . Заметим, что условие 4 также верно в этом случае.

Определим непрерывную функцию  $g$  на  $\partial\Pi$  следующим образом

$$g(0, x) = \psi(x), \quad x \in \bar{G}; \quad g(x, y) = 0, \quad x \in \partial G, \quad y \geq 0. \quad (2.15)$$

Теорема 7. Если условия 4-6 верны, то функция Беллмана  $v$  является единственным ограниченным вязкостным решением (2.4), которое непрерывно на  $\bar{\Pi}$  и удовлетворяет граничному условию

$$v = g \quad \text{on } \partial\Pi. \quad (2.16)$$

Особенность уравнения (2.4) состоит в том, каким образом оно вырождается в граничных точках  $(x, 0)$ . Данное вырождение не позволяет напрямую применить теорему сравнения [19, теорема 2.1], [23, теорема 2.1]. Можно, однако, применить результаты [58] после некоторой подготовительной работы. Мы следуем другому пути, используя стохастический метод Перрона, разработанный в [24]. С использованием результата [20] это

позволяет дать короткое прямое доказательство теоремы 7 без использования принципа динамического программирования.

Пусть  $\tau$  — момент остановки, и  $(\xi, \eta)$  — ограниченный  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримый случайный вектор со значениями в  $\bar{\Pi}$ . Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение (1.1) с рандомизированным начальным условием  $(\tau, \xi, \eta)$ :

$$X_t = \xi I_{\{t \geq \tau\}} + \int_\tau^t b(X_s, \alpha_s) ds + \int_\tau^t \sigma(X_s, \alpha_s) dW_s, \quad (2.17)$$

$$Y_t = \eta I_{\{t \geq \tau\}} - \int_\tau^t |\alpha_s| ds. \quad (2.18)$$

Как известно, см. [70] (Глава 2), для любого  $\alpha \in \mathcal{U}$  задача (2.17), (2.18) имеет потраекторно единственное сильное решение  $(X^{\tau, \xi, \eta, \alpha}, Y^{\tau, \xi, \eta, \alpha})$ . Для согласования этого обозначения с предыдущим, мы опускаем индекс  $\tau$ , например для  $\tau = 0$ :  $X^{0, x, y, \alpha} = X^{x, y, \alpha}$ .

Для непрерывной функции  $u$  на  $\bar{\Pi}$  определим процесс

$$Z_t^{\tau, \xi, \eta, \alpha}(u) = \int_\tau^t e^{-\beta s} f(X_s^{\tau, \xi, \eta, \alpha}, \alpha_s) ds + e^{-\beta t} u(X_t^{\tau, \xi, \eta, \alpha}, Y_t^{\tau, \xi, \eta, \alpha}).$$

Определение 1. Функция  $u \in C(\bar{\Pi})$ , такая что  $u(\cdot, y)$  ограничена, называется стохастическим субрешением (2.4), (2.16), если  $u \leq g$  на  $\partial\Pi$  и для любого рандомизированного начального условия  $(\tau, \xi, \eta)$  существует  $\alpha \in \mathcal{U}$  такое, что

$$\mathbb{E}(Z_\rho^{\tau, \xi, \eta, \alpha}(u) | \mathcal{F}_\tau) \geq Z_\tau^{\tau, \xi, \eta, \alpha}(u) = e^{-\beta \tau} u(\xi, \eta)$$

для любого момента остановки  $\rho \in [\tau, T^{\tau, \xi, \eta, \alpha}]$ .

Определение 2. Функция  $w \in C(\bar{\Pi})$ , такая что  $w(\cdot, y)$  ограничена, называется стохастическим суперрешением (2.4), (2.16), если  $w \geq g$  на  $\partial\Pi$  и

$$\mathbb{E}(Z_\rho^{\tau, \xi, \eta, \alpha}(w) | \mathcal{F}_\tau) \leq Z_\tau^{\tau, \xi, \eta, \alpha}(w) = e^{-\beta \tau} w(\xi, \eta)$$

для любого рандомизированного начального условия  $(\tau, \xi, \eta)$ , управляющего процесса  $\alpha \in \mathcal{U}$  и момента остановки  $\rho \in [\tau, T^{\tau, \xi, \eta, \alpha}]$ .

Данные версии стохастических полурешений приспособлены для задач управления до момента выхода из области (см. [20]). В настоящем контексте нам не требуется предположения об ограниченности  $u, w$  по  $y$ , так как для любого начального условия  $(\xi, \eta)$  процесс  $Y^{\tau, \xi, \eta, \alpha}$  остается ограниченным до момента  $T^{\tau, \xi, \eta, \alpha}$  выхода из  $\Pi$ . Заметим, что значения  $(X_\infty^{\tau, \xi, \eta, \alpha}, Y_\infty^{\tau, \xi, \eta, \alpha})$  могут быть заданы произвольным образом.

Обозначим множества стохастических суб- и суперрешений через  $\mathcal{V}_-$  и  $\mathcal{V}_+$  соответственно. Любое стохастическое субрешение  $u$  ограничивает функцию Беллмана  $v$  снизу, а любое стохастическое суперрешение  $w$  — сверху:

$$u_- := \sup_{u \in \mathcal{V}^-} u \leq v \leq w_+ := \inf_{w \in \mathcal{V}^+} w \quad \text{на } \bar{\Pi}. \quad (2.19)$$

Действительно, положим  $\tau = 0, \xi = x, \eta = y$  и  $\rho = T^{x,y,\alpha}$  в определении 1:

$$\begin{aligned} Z_0^{x,y,\alpha}(u) = u(x, y) &\leq \mathbb{E} \int_0^{T^{x,y,\alpha}} e^{-\beta s} f(X_s^{x,y,\alpha}, \alpha_s) ds \\ &+ \mathbb{E} (e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} u(X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}, Y_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha})) \leq v(x, y). \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из представления (2.6) так как

$$e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} u(X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}, Y_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}) \leq e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} g(X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}, Y_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}) = e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} \psi(X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}).$$

Аналогично, согласно определению 2 имеем

$$\begin{aligned} Z_0^{x,y,\alpha}(w) = w(x, y) &\geq \mathbb{E} \int_0^{T^{x,y,\alpha}} e^{-\beta s} f(X_s^{x,y,\alpha}, \alpha_s) ds \\ &+ \mathbb{E} (e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} w(X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}, Y_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha})) \end{aligned}$$

для всех  $\alpha \in \mathcal{U}$ . Следовательно,  $w(x, y) \geq v(x, y)$ , так как

$$e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} w(X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}, Y_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}) \geq e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} g(X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}, Y_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}) = e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} \psi(X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}).$$

Лемма 4. Пусть  $u(x, y) = \psi(x)$ ,  $w(x, y) = \psi(x) + cy$ . При выполнении условий ??, ?? имеем  $u \in \mathcal{V}_-$ ,  $w \in \mathcal{V}_+$  при достаточно большом  $c > 0$ . Кроме того, функция  $\bar{w}(x, y) := \bar{v}(x)$ , определенная в (2.11), является стохастическим суперрешением при выполнении условия 2.

Доказательство. (i) Как и для (2.8), в силу формулы Ито и определения  $\psi$ , имеем

$$Z_t^{\tau,\xi,\eta,0}(u) = \int_\tau^t e^{-\beta s} f(X_s^{\tau,\xi,\eta,0}, 0) ds + e^{-\beta t} \psi(X_t^{\tau,\xi,\eta,0}) = e^{-\beta \tau} \psi(\xi) + M_t \quad (2.20)$$

на  $[\tau, T^{\tau,\xi,\eta,0}]$ , где  $M_t = \int_\tau^t e^{-\beta s} \psi_x(X_s^{\tau,\xi,\eta,0}) \cdot \sigma(X_s^{\tau,\xi,\eta,0}, 0) dW_s$  — локальный мартингал. Поскольку  $M_\tau = 0$  on  $\{\tau < T^{\tau,\xi,\eta,0}\}$ , и, как следует из (2.20),  $M$  ограничен, то

$$\mathbb{E}(Z_\rho^{\tau,\xi,\eta,0}(u) | \mathcal{F}_\tau) I_{\{\tau < T^{\tau,\xi,\eta,0}\}} = e^{-\beta \tau} \psi(\xi) I_{\{\tau < T^{\tau,\xi,\eta,0}\}}$$

для момента остановки  $\rho$ , удовлетворяющего неравенству

$$\tau \leq \rho < T^{\tau,\xi,\eta,0} \quad \text{на } \{\tau < T^{\tau,\xi,\eta,0}\}. \quad (2.21)$$



Кроме того, поскольку любой  $\mathbb{F}$ -момент остановки является предсказуемым (см. [76, Proposition 16.22]), то можно распространить (2.21) на момент остановки  $\rho \leq T^{\tau, \xi, \eta, 0}$  по соображениям непрерывности.

Из этого следует, что  $u$  является стохастическим субрешением:

$$\mathbb{E}(Z_\rho^{\tau, \xi, \eta, 0}(u) | \mathcal{F}_\tau) = e^{-\beta\tau} \psi(\xi) = Z_\tau^{\tau, \xi, \eta, 0}(u), \quad \rho \in [\tau, T^{\tau, \xi, \eta, 0}], \quad (2.22)$$

так как на  $\{\tau = T^{\tau, \xi, \eta, 0}\}$  это неравенство выполняется тривиальным образом. Заметим, что управление  $\alpha = 0$ , обеспечивающее (2.22), не зависит от  $(\tau, \xi, \eta)$ , хотя такая зависимость допускается определением 1.

(ii) Для доказательства того, что  $w = \psi(x) + cu$  является стохастическим суперрешением (2.1), (2.2), мы также применяем формулу Ито:

$$\begin{aligned} Z_t^{\tau, \xi, \eta, \alpha}(w) &= e^{-\beta t} w(\xi, \eta) + N_t + M_t \quad \text{on } [\tau, T^{\tau, \xi, \eta, 0}], \\ N_t &= \int_\tau^t e^{-\beta s} f(X_s^{\tau, \xi, \eta, \alpha}, \alpha_s) ds \\ &\quad + \int_\tau^t e^{-\beta s} (\mathcal{L}^\alpha \psi(X_s^{\tau, \xi, \eta, \alpha}) - \beta \psi(X_s^{\tau, \xi, \eta, \alpha}) - |\alpha_s|c - \beta c Y_s^{\tau, \xi, \eta, \alpha}) ds, \\ M_t &= \int_\tau^t e^{-\beta s} \psi_x(X_s^{\tau, \xi, \eta, \alpha}) \cdot \sigma(X_s^{\tau, \xi, \eta, \alpha}, \alpha_s) dW_s. \end{aligned}$$

По условию 6 существует константа  $K > 0$  такая, что

$$|f(x, a) + \mathcal{L}^a \psi(x) - \beta \psi(x)| = |f(x, a) - f(x, 0) + \mathcal{L}^a \psi(x) - \mathcal{L}^0 \psi(x)| \leq K|a|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |N_t| &\leq \int_\tau^t e^{-\beta s} (K|\alpha_s| + c|\alpha_s| + \beta c\eta) ds \leq K', \\ N_t &\leq \int_\tau^t e^{-\beta s} (K - c)|\alpha_s| ds \leq 0 \quad \text{для } c \geq K. \end{aligned}$$

Значит локальный мартингал  $M$  равномерно ограничен на  $[\tau, T^{\tau, \xi, \eta, \alpha}]$  и

$$\mathbb{E}(Z_\rho^{\tau, \xi, \eta, \alpha}(w) | \mathcal{F}_\tau) I_{\{\tau < T^{\tau, \xi, \eta, \alpha}\}} \leq e^{-\beta\tau} w(\xi, \eta) I_{\{\tau < T^{\tau, \xi, \eta, \alpha}\}}$$

для момента остановки  $\rho$ , удовлетворяющего (2.21) с  $T^{\tau, \xi, \eta, \alpha}$  вместо  $T^{\tau, \xi, \eta, 0}$ . Как и в доказательстве части (i), это неравенство можно распространить на момент остановки  $\rho \leq T^{\tau, \xi, \eta, \alpha}$  и получить неравенство

$$\mathbb{E}(Z_\rho^{\tau, \xi, \eta, \alpha}(w) | \mathcal{F}_\tau) \leq e^{-\beta\tau} w(\xi, \eta),$$

означающее, что  $w$  — стохастическое суперрешение.

(iii) Согласно [20] (см. теорему 1 и замечание 1)  $\bar{v} \in C(\bar{G})$  является единственным ограниченным вязкостным решением (2.12), (2.13) и удовлетворяет граничному условию  $\bar{v} = 0$  на  $\partial\bar{G}$ . Обозначим через  $X^{\tau,\xi,\alpha}$  решение (1.1) с рандомизированным начальным условием  $(\tau, \xi)$ , и через  $\theta^{\tau,\xi,\alpha}$  — момент выхода  $X^{\tau,\xi,\alpha}$  из  $G$ . Заметим, что функция  $w \in C_b(\bar{G})$  является стохастическим суперрешением (2.12), (2.13), если

$$\mathbb{E} \left( \int_{\tau}^{\rho} e^{-\beta s} f(X_s^{\tau,\xi,\alpha}, \alpha_s) ds + e^{-\beta \rho} w(X_{\rho}^{\tau,\xi,\alpha}) \middle| \mathcal{F}_{\tau} \right) \leq e^{-\beta \tau} w(\xi)$$

для любых рандомизированного начального условия  $(\tau, \xi)$ , управляющего процесса  $\alpha \in \mathcal{U}$  и момента остановки  $\rho \in [\tau, \theta^{\tau,\xi,\alpha}]$ . Рассуждения [20] показывают, что существует убывающая последовательность стохастических суперрешений  $\bar{w}_n$  (2.12), (2.13), сходящаяся к  $\bar{v}$ . Отсюда легко следует, что  $\bar{v}$  также является стохастическим суперрешением (2.12), (2.13). Далее, поскольку  $\bar{v}$  не зависит от  $y$  и  $\bar{v} \geq \psi$  (и, следовательно,  $\bar{v} \geq g$  на  $\partial\Pi$ ), из определения 2 вытекает, что  $\bar{v}$  является стохастическим суперрешением (2.4), (2.16).  $\square$

Доказательство теоремы 7. По лемме 4 существует пара  $u, w$  стохастических суб- и суперрешений такая, что

$$u = \psi = w \quad \text{на } G \times \{0\},$$

и существует другая пара  $u, \bar{v}$ , удовлетворяющая условиям

$$u = 0 = \bar{v} \quad \text{на } \partial G \times [0, \infty).$$

Из определения (2.19) функций  $u_-, w_+$  вытекает, что

$$u_- = w_+ \quad \text{на } \partial\Pi. \tag{2.23}$$

В работе [20] (теоремы 2, 3) было доказано, что  $u_-$  (соотв.,  $w_+$ ) является вязкостным суперрешением (соотв., вязкостным субрешением) уравнения (2.4). Функция  $v$  расположена между ними: см. (2.19). Из (2.23) и определения стохастических полурешений вытекает, что

$$u_- = v = w_+ = g \quad \text{на } \partial\Pi.$$

Из теоремы сравнения (см. [46, теорема 7.3], [58, теорема 4.2], [7, теорема 6.21] для случая неограниченной области) и (2.23) вытекает, что неравенство  $u_- \geq w_+$  верно на  $\Pi$ . Учитывая это неравенство с (2.19), заключаем, что

$$u_- = v = w_+ \quad \text{на } \bar{\Pi}.$$

Следовательно,  $v$  является непрерывным на  $\bar{\Pi}$  вязкостным решением (2.4) и удовлетворяет граничному условию (2.16) в обычном смысле. Единственность непрерывного вязкостного решения вытекает из той же теоремы сравнения.  $\square$

Замечание 1. Теорема 7 может быть приспособлена к случаю конечного горизонта  $\tilde{T}$ . В этом случае следует рассмотреть расширенный управляемый процесс  $\tilde{X} = (t, X)$  и область  $\tilde{G} = (0, \tilde{T}) \times G$  вместо  $X$  и  $G$ . Уравнение НЖВ  $\tilde{G} \times (0, \infty)$  исследуется схожим образом. Соответствующие параболические уравнения (2.5), (2.12) могут рассматриваться как вырожденные эллиптические: см., напр., [77] относительно линейного случая, и [23, Corollary 3.1] относительно сильной теоремы сравнения в нелинейном случае. Последняя нужна, чтобы сделать условие 2 конструктивным.

Замечание 2. Условие Дирихле  $v(x, 0) = \psi(x)$ ,  $x \in \bar{G}$ , где  $\psi$  — функция Беллмана задачи без топлива, весьма естественно и обычно используется в задачах управления с конечным топливом (см., напр., [4, VIII.6]). Однако, некоторые авторы используют другое условие, которое типично для задач с фазовыми ограничениями: см. [57, 66].

Замечание 3. Идея использования стохастических полурешений, удовлетворяющих искомым граничным условиям (см. лемму 4), с целью сведения доказательства теоремы 7 к стандартной теореме сравнения, заимствована из [25].

## 2.3 Оптимальная коррекция стохастической системы

Рассмотрим простую одномерную ( $d = 1$ ) управляемую систему

$$\begin{aligned} dX &= -kXdt + \sigma dW_t - \alpha_t dt, \\ dY &= -|\alpha_t|dt, \end{aligned}$$

где  $\sigma > 0$ ,  $k$  — некоторые константы и  $\alpha_t \in [\underline{a}, \bar{a}]$ . Случай  $k > 0$  (соотв.,  $k < 0$ ) соответствует устойчивому (соотв., неустойчивому) равновесию 0. Бесконечно малое приращение  $dX$  системы может корректироваться с интенсивностью  $\alpha$ . Цель управления состоит в том, чтобы удерживать систему в интервале  $G = (-l, l)$ ,  $l > 0$  как можно дольше. Более точно, мы рассматриваем риск-чувствительный критерий вида (1.4). По лемме 3 можно перейти к задаче управления до момента выхода:

$$v(x, y) = \sup_{\alpha \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left( \int_0^{T^{x,y,\alpha}} e^{-\beta t} dt + e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} \psi(X_{T^{x,y,\alpha}}^{x,y,\alpha}) \right),$$

где  $\psi$  — решение задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \beta\psi - 1 + kx\psi_x - \frac{1}{2}\sigma^2\psi_{xx} &= 0, \quad x \in (-l, l) \\ \psi(-l) &= \psi(l) = 0. \end{aligned}$$

Ясно, что условия 1-3 выполняются. По теореме 7  $v$  является единственным ограниченным непрерывным вязкостным решением уравнения

$$\beta v - 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx} + \min_{a \in [\underline{a}, \bar{a}]} \{(kx + a)v_x + |a|v_y\} = 0, \quad (x, y) \in (-l, l) \times (0, \infty), \quad (3.1)$$

удовлетворяющим граничным условиям:

$$v(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [-l, l]; \quad v(-l, y) = v(l, y) = 0, \quad y > 0. \quad (3.2)$$

Для численного решения задачи (3.1), (3.2) рассмотрим равномерную сетку

$$\bar{\Pi}_h = \{x_{ij} = (ih_1, jh_2) : -I \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J\}, \quad Ih_1 = l, \quad Jh_2 = \bar{y},$$

где  $I, J, i, j$  — целые,  $h = (h_1, h_2)$  — шаги сетки, и  $\bar{y}$  соответствует искусственной верхней границе. Положим  $\Pi_h = \{x_{ij} : -I < i < I, \quad 0 < j \leq J\}$  и обозначим через  $\partial\Pi_h = \bar{\Pi}_h \setminus \Pi_h$  «параболическую границу» сетки. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} & \beta v_{i,j} - 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_1^2} + \min_{a \in [\underline{a}, \bar{a}]} \left\{ (kx_{i,j} + a)^+ \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_1} \right. \\ & \left. - (kx_{i,j} + a)^- \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_1} + |a| \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_2} \right\} = 0, \quad x_{ij} \in \Pi_h; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$v_{ij} - g(x_{ij}) = 0, \quad x_{ij} \in \partial\Pi_h \quad (3.4)$$

для сеточной функции  $v_{ij} = v_h(x_{ij})$ . Функция  $g$  определена в (2.15). Уравнения (3.3), (3.4) могут быть представлены в виде

$$F_h(x_{ij}, v_{ij}, (v_{ij} - v_{i'j'})_{x_{i'j'} \in \Gamma(x_{ij})}) = 0, \quad x_{ij} \in \bar{\Pi}_h, \quad (3.5)$$

где  $\Gamma(x_{ij})$  — множество соседей  $x_{ij}$ :

$$\Gamma(x_{ij}) = \{x_{i+1,j}, x_{i-1,j}, x_{i,j-1}\}, \quad x_{ij} \in \Pi_h; \quad \Gamma(x_{ij}) = \emptyset, \quad x_{ij} \in \partial\Pi_h.$$

Функция  $F_h$  не убывает по каждой переменной, кроме  $x_{ij}$ . В терминологии [10] схема (3.5) называется вырожденной эллиптической. Неравенство

$$F_h(x, r, y) - F_h(x, r', y) = \beta'(r - r') > 0, \quad \beta' = \min\{\beta, 1\} \quad \text{для } r > r'$$

означает, что схема является правильной [10]. Далее, данная схема непрерывна по Липшицу с константой  $K_h$ :

$$\begin{aligned} & |F_h[x, z] - F_h[x, z']| \leq K_h \|z - z'\|_\infty, \\ & K_h = \max\{1, \beta\} + \frac{\sigma^2}{h_1^2} + \frac{|k|l + \bar{a}}{h_1} + \frac{\bar{a}}{h_2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Мы используем обозначение  $F_h[x, v_h]$  для левой части (3.5), и  $\|z\|_\infty = \max\{|z_{ij}| : z_{ij} \in \bar{\Pi}_h\}$ . Доказательство(3.6) основано на элементарном неравенстве

$$|\max_{q \in Q} \phi(x, q) - \max_{q \in Q} \phi(y, q)| \leq \max_{q \in Q} |\phi(x, q) - \phi(y, q)|,$$

которое справедливо для любых непрерывной функции  $\phi$  и компактного множества  $Q$ .

В работе [10] (теорема 7) показано, что оператор  $S_\rho(v) = v - \rho F_h[x, v]$  является строгим сжатием в пространстве сеточных функций, наделенном нормой  $\|\cdot\|_\infty$ , при достаточно малом  $\rho$ :

$$\|S_\rho(u) - S_\rho(v)\|_\infty \leq \gamma \|u - v\|_\infty, \quad \gamma = \max\{1 - \rho\beta', \rho K_h\}.$$

Следовательно, (3.5) имеет единственное решение  $v_h$ , совпадающее с неподвижной точкой  $S_\rho$ , и оно может быть аппроксимировано итерациями

$$v^{n+1} = S_\rho(v^n), \quad \|v_h - v^n\|_\infty \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

с произвольным  $v^0$ .

Теорема 7 позволяет обосновать сходимость сеточной функции  $v_h$ ,  $h \rightarrow 0$  к функции Беллмана  $v$ , опираясь на метод Барля-Зуганидиса [9, теорема 2.1]. Для этого достаточно проверить свойства устойчивости, монотонности и согласованности конечно-разностной схемы (3.5) (см. определения в [9]).

Свойство монотонности означает, что функция  $F_h$  в (3.5) является невозрастающей по  $v_{i,j'}$ . Данное свойство вытекает из того факта, что схема является вырожденной эллиптической. Далее, поскольку  $0 \leq \psi \leq 1/\beta$ , то справедливы неравенства

$$F_h[x, 0] \leq F_h[x, v_h] = 0 \leq F_h[x, 1/\beta],$$

из которых вытекает свойство устойчивости:  $0 \leq v_h \leq 1/\beta$  согласно [10, теорема 5]. Доказательство свойства согласованности основано на формуле Тейлора: см., напр., [78], где можно найти простой пример. Здесь мы не рассматриваем дальнейшие детали.

Численные эксперименты проводились для следующего набора параметров:  $\beta = 0.1$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $l = 1$ ,  $\bar{y} = 40$ ,  $\bar{a} = -\underline{a} = 10$ . Для анализа влияния интенсивности притяжения (отталкивания) на оптимальные стратегии рассматривались значения  $k \in [-10, 10]$ . Расчеты проводились на сетке  $200 \times 200$ , покрывающей прямоугольник  $[-1, 1] \times [0, 40]$ .

В итерационном методе (3.7) возьмем  $\rho = 1/(2K_h)$  и  $\underline{v}^0 = 0$ ,  $\bar{v}^0 = 1/\beta$  в качестве начальных значений. Легко видеть, что

$$S_\rho(\underline{v}^0) - \underline{v}^0 = -\rho F_h[x, \underline{v}^0] \geq 0, \quad S_\rho(\bar{v}^0) - \bar{v}^0 = -\rho F_h[x, \bar{v}^0] \leq 0.$$

Из свойства монотонности оператора  $S_\rho$  ([10, теорема 6]) вытекает, что итерации с такими начальными значениями сходятся монотонно:  $\underline{v}^n \uparrow v_h$ ,  $\bar{v}^n \downarrow v_h$ . Итерации производились до тех пор, пока

$$\max_{ij} (\bar{v}_{ij}^n - \underline{v}_{ij}^n) / \underline{v}_{ij}^n \leq \varepsilon = 0.01. \quad (3.8)$$

Обычно для этого требуется около 400 тысяч шагов.

Для  $k = 2$  график и линии уровня функции Беллмана представлены на рис. 2.1. Ясно что,  $v$  симметрична относительно оси  $x = 0$  и возрастает по  $y$ .

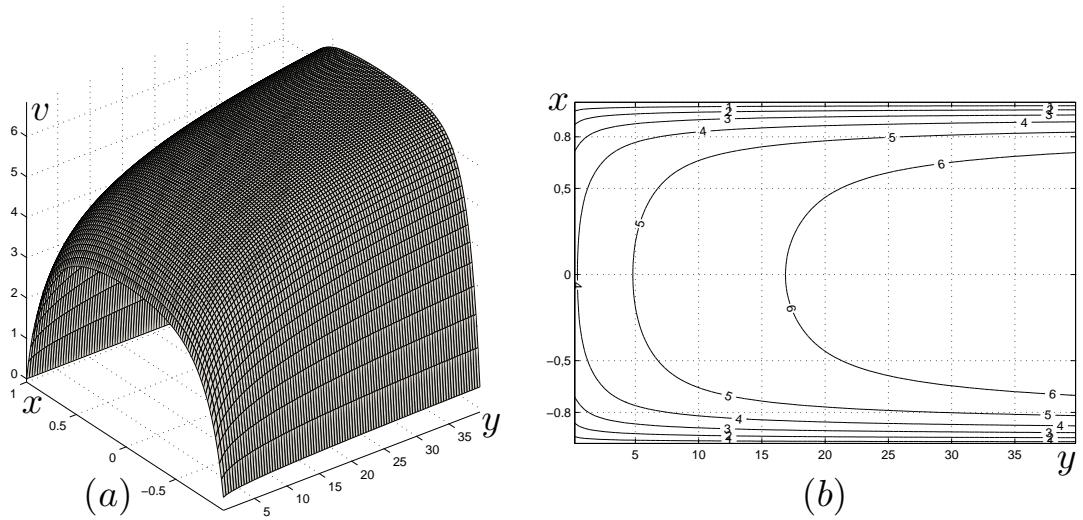


Рисунок 2.1: Функция Беллмана (a) и её линии уровня (b) при  $k = 2$ .

Линии переключения оптимальных стратегий  $\alpha^*$ , соответствующие оптимальным значениям  $a$  в (3.3), показаны на рис. 2.2. Средняя область, содержащая точку равновесия, является областью бездействия  $\Pi_{na}$ , где  $\alpha^* = 0$ . В ее дополнении имеем  $\alpha^* = -10$  вблизи верхней границы  $x = l$ , и  $\alpha^* = 10$  вблизи нижней границы  $x = -l$ .

Область бездействия расширяется при уменьшении  $y$ . Это означает, что регулятор становится менее активным, когда количество ресурса  $Y$  уменьшается. Более интересный и неожиданный эффект касается «немонотонного» поведения области бездействия по отношению к  $k$ . Экспериментально было установлено, что  $\Pi_{na}$  расширяется при увеличении  $k$  от 0 до 3.5. Таким образом, регулятор менее вовлечен в процесс стабилизации системы, которая становится более устойчивой сама по себе. Но, для  $k > 3.5$  наблюдается обратная картина: область бездействия сужается при дальнейшем увеличении  $k$ !

Заметим, что  $v(x, y)$  определяет полезность текущего состояния  $(x, y)$ . Производные  $v_x$ ,  $v_y$  можно рассматривать как маргинальные полезности «положения» и «топлива». Из рис. 3.1 ясно, что маргинальная полезность топлива убывает при увеличении количества

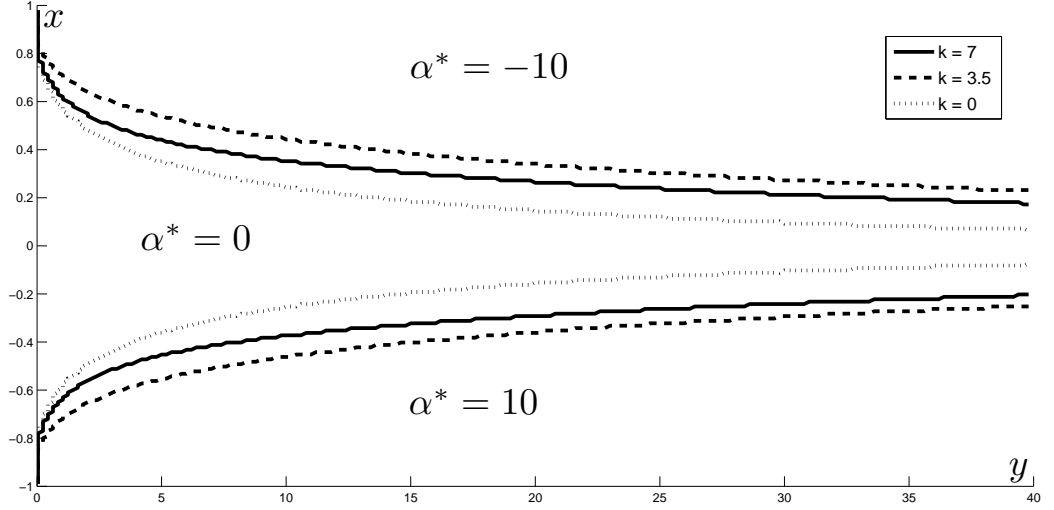


Рисунок 2.2: Оптимальное управление в устойчивом случае.

топлива (т.е.,  $v$  вогнута по  $y$ ). Маргинальная полезность положения положительна при  $x \in (-l, 0)$  и отрицательна при  $x \in (0, l)$ . Абсолютные значения  $v_x$  малы вблизи  $x = 0$  и велики вблизи границ. Из (3.1) следует, что область бездействия  $\Pi_{na}$  соответствует неравенству  $v_y > |v_x|$ , т.е., регулятор не потребляет топлива, когда маргинальная полезность последнего достаточно велика. Для малых  $y$ , с точки зрения регулятора, топливо стоит дорого, а значит область бездействия велика. Заметим также, что когда  $k$  увеличивается ситуация становится более благоприятной, и  $v_y$ ,  $|v_x|$  должны стать меньше. Неясно, однако, как эти свойства влияют на поведение  $\Pi_{na}$ .

Оптимальные стратегии для неустойчивого случая  $k < 0$  представлены на рис. 2.3. Здесь области бездействия значительно меньше. Это неудивительно, так как неустойчивую систему около точки равновесия удерживать сложнее. В противоположность устойчивому случаю, здесь  $\Pi_{na}$  сжимается монотонно по  $k$ . Кроме того, функция Беллмана  $v$  в этом случае меньше. Мы не приводим здесь график  $v$ , так он выглядит аналогично рис. 2.1(а).

## 2.4 Оптимальное отслеживание стохастической системы

Рассмотрим случайную цель  $X^1$ , которую должен отследить управляемый процесс  $X^2$ . Флуктуации of  $X^1$  описываются уравнением

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= \mu(X_t^1)dt + \sigma dW_t, \quad \sigma > 0, \\ \mu(x_1) &= -kx_1I_{\{|x_1| \leq b\}} - kbI_{\{x_1 \geq b\}} + kbI_{\{x_1 \leq -b\}}, \quad b > 0 \end{aligned}$$

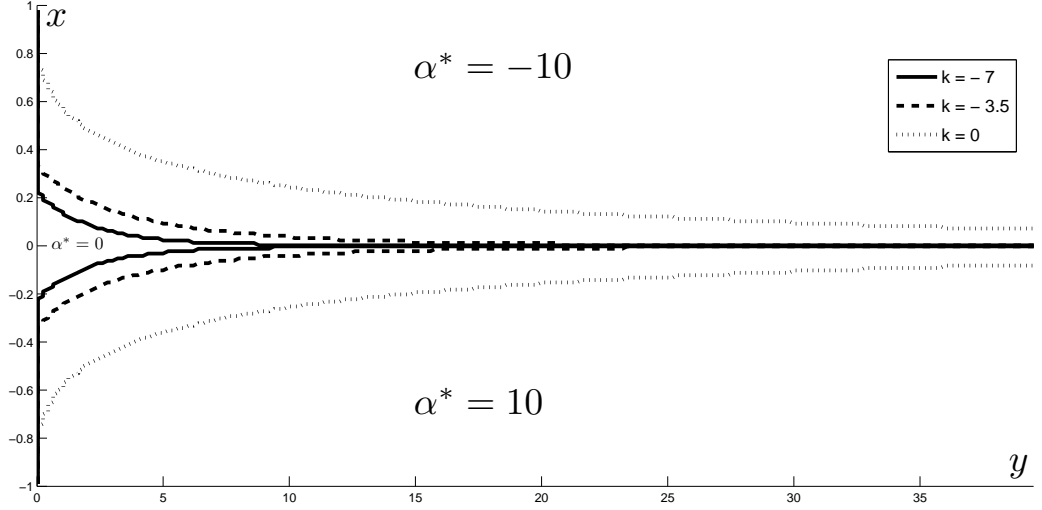


Рисунок 2.3: Оптимальное управление в неустойчивом случае.

Случай  $k > 0$  (соотв.,  $k < 0$ ) соответствует устойчивой (соотв., неустойчивой) точке равновесия 0 соответствующей детерминированной системы. Динамика следящего процесса  $X^2$ , управляемого «расходом топлива», не подвержена воздействию шума:

$$dX_t^2 = \alpha_t dt, \quad dY_t = -|\alpha_t| dt, \quad \alpha_t \in [\underline{a}, \bar{a}].$$

Предполагается, что слежение прекращается, если цель «потеряна из виду»:

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : |X_t^1 - X_t^2| \geq l\}, \quad l > 0.$$

Для целевого функционала (1.4) уравнение НЖВ (2.4) принимает вид

$$\beta v - 1 - \mu(x_1)v_{x_1} - \frac{1}{2}\sigma^2 v_{x_1 x_1} + \min_{a \in [\underline{a}, \bar{a}]} \{a|v_y - av_{x_2}\} = 0, \quad (x, y) \in G \times (0, \infty),$$

где  $G = \{x : |x_1 - x_2| < l\}$ . Граничные условия (2.16) преобразуются к следующей форме

$$v = 0 \quad \text{на } \partial G \times [0, \infty); \quad v = \psi \quad \text{на } G \times \{0\},$$

где  $\psi$  — решение краевой задачи

$$\beta \psi - 1 - \mu(x_1)\psi_{x_1} - \frac{1}{2}\sigma^2 \psi_{x_1 x_1} = 0, \quad x_1 \in (x_2 - l, x_2 + l), \quad (4.1)$$

$$\psi(x_2 - l, x_2) = \psi(x_2 + l, x_2) = 0. \quad (4.2)$$

Проверим выполнение условий 4-6. Пусть  $\psi_1, \psi_2 \in C^2(\mathbb{R})$  — система фундаментальных решений обыкновенного линейного дифференциального уравнения (4.1). Тогда

$$\psi(x_1, x_2) = C_1(x_2)\psi_1(x_1) + C_2(x_2)\psi_2(x_1) + 1/\beta,$$



где константы  $C_1, C_2$  однозначно определяются граничными условиями (4.2). Отсюда следует, что  $\psi \in C^2(G)$  и условие 4 выполнено. Условие 2 выполняется, так как справедливо (2.14). Для проверки условия 6 достаточно показать, что функция  $\psi$  и её производные до второго порядка включительно равномерно ограничены на  $G$ . Но это свойство следует из того факта, что при достаточно больших  $|x|$  функция  $\mu$  постоянна,  $\psi = \varphi(x_1 - x_2)$ , где  $\varphi(z)$  определяется следующим образом:

$$\beta\varphi - 1 - \mu\varphi_z - \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{zz} = 0, \quad z \in (-l, l); \quad \varphi(-l) = \varphi(l) = 0.$$

Для численного решения задачи, как и в предыдущем примере, мы используем монотонную конечно-разностную схему:

$$\begin{aligned} 0 &= \beta v_{i,j,k} - 1 - k\mu^+(x_{ijk}) \frac{v_{i+1,j,k} - v_{i,j,k}}{h_1} + k\mu^+(x_{ijk}) \frac{v_{i,j,k} - v_{i-1,j,k}}{h_1} \\ &\quad - \sigma^2 \frac{v_{i-1,j,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i+1,j,k}}{2h_1^2} \\ &\quad + \min_{a \in [\underline{a}, \bar{a}]} \left\{ |a| \frac{v_{i,j,k} - v_{i,j,k-1}}{h_3} - a^+ \frac{v_{i,j+1,k} - v_{i,j,k}}{h_2} + a^- \frac{v_{i,j,k} - v_{i,j-1,k}}{h_2} \right\}, \quad x_{ijk} \in \Pi_h; \\ 0 &= v_{ijk} - g(x_{ijk}), \quad x_{ijk} \in \partial\Pi_h. \end{aligned}$$

Шаги  $h_1, h_2$  выбраны таким образом, что точки сетки  $x_{ijk} = (ih_1, jh_2, kh_3)$ ,  $(i, j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$  с  $j = \max\{j' : x_{ij'k} \in \Pi\}$  и  $j = \min\{j' : x_{ij'k} \in \Pi\}$ , принадлежат  $\partial\Pi$ . Сетка  $\bar{\Pi}_h$  представляет из себя подмножество точек  $\{x_{ijk} = (ih_1, jh_2, kh_3) \in \bar{\Pi}(r, \bar{y}) : (i, j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+\}$ , где множество  $\bar{\Pi}(r, \bar{y}) = \{|x_1 - x_2| \leq l, |x_1 + x_2| \leq r, y \in [0, \bar{y}]\}$  вырезано из  $\bar{G} \times [0, \infty]$ . Значения  $r, \bar{y}$  определяют искусственную границу. Как и в разделе 2.3, через  $\partial\Pi_h$  мы обозначаем те точки  $\bar{\Pi}_h$ , которые принадлежат границе множества  $\Pi$ . Другие точки сетки отнесены к  $\Pi_h$ .

Исследование данной схемы проводится аналогично разделу 2.3. Сходимость ее решения  $v_h$  к функции Беллмана  $v$  вытекает из теоремы ?? согласно методу Барля-Зуганидеса. Сеточная функция  $v_h$  находится при помощи итераций (3.7). Начальные приближения  $\underline{v}^0 = 0, \bar{v}^0 = 1/\beta$ , и критерий остановки остаются прежними.

Удобно сделать преобразование поворота

$$z_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}, \quad z_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$$

и представить результаты в новых переменных  $(z_1, z_2)$ . Рассмотрим область  $\{(z_1, z_2, y) : z_1 \in (-2, 2), z_2 \in (-40, 40), y \in (0, 10)\}$ , соответствующую  $l = 4/\sqrt{2}, r = 80/\sqrt{2}, \bar{y} = 10$ . В экспериментах были использованы следующие параметры:  $\beta = 0.1, \sigma = 0.8, b = 2.5, \bar{a} = -\underline{a} = 1$ . Сетка содержала  $2000 \times 100 \times 50$  узлов. При  $\varepsilon = 0.01$  в (3.8) итерации обычно останавливались после 10 тысяч шагов.

Линии переключения оптимального управления в устойчивом ( $k = 0.3$ ) и неустойчивом ( $k = -0.3$ ) случаях показаны на рис. 2.4 и 2.5 соответственно (при  $y = 1$ ).

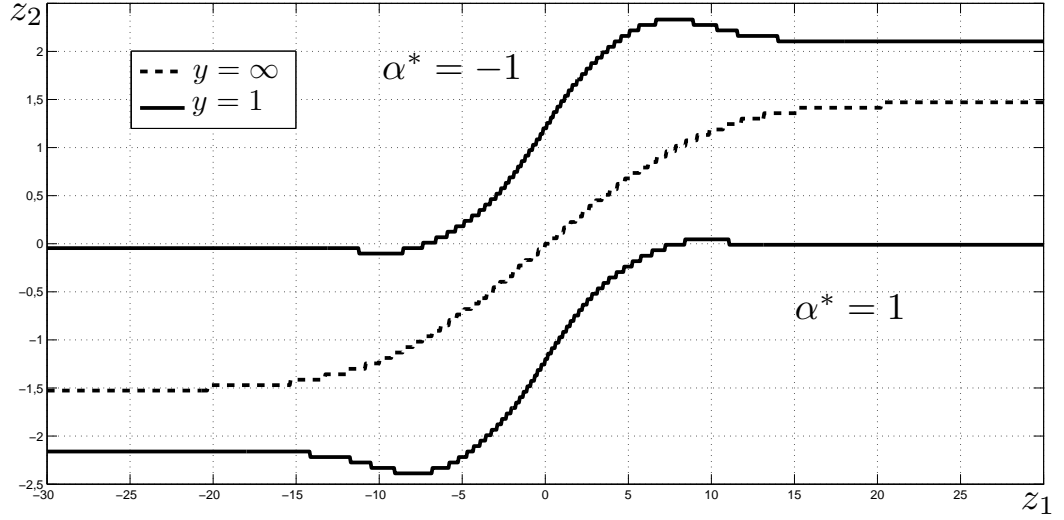


Рисунок 2.4: Оптимальное управление в устойчивом случае,  $k = 0.3$ .

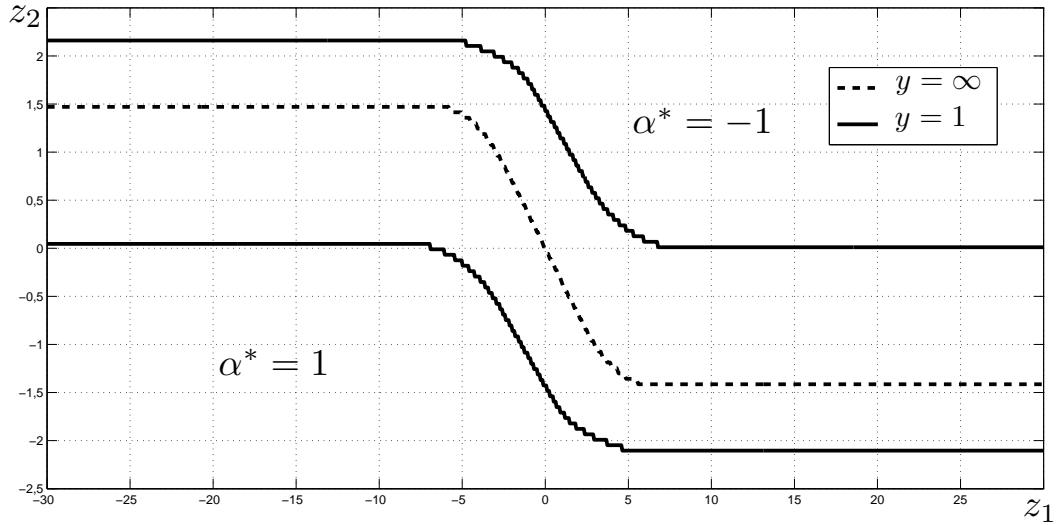


Рисунок 2.5: Оптимальное управление в неустойчивом случае,  $k = -0.3$ .

Области между сплошными линиями соответствуют множествам бездействия. Пунктирные линии определяют переключения оптимального управления для задачи (2.12), (2.13) с бесконечным топливом (здесь множества бездействия пусты). Поскольку функция  $\mu$  постоянна при  $|x_1| > b$ , линии переключения стабилизируются при достаточно больших  $|z_1|$ . Кроме того, для больших  $z_1 > 0$  область бездействия расположена выше (соотв., ниже) линии  $z_2 = 0$  в устойчивом (соотв., неустойчивом) случае. Причина состоит в том, что

в устойчивом случае, при  $\alpha = 0$ , точка  $(Z_t^1, Z_t^2) = (X_t^1 + X_0^2, X_t^1 - X_0^2)/\sqrt{2}$  при больших  $Z_0^1 > 0$ , в среднем, движется от верхней границы полосы  $(z_1, z_2) \in \mathbb{R} \times (-l, l)$  к ее нижней границе. В неустойчивом случае имеется противоположная тенденция. Для  $z_1 < 0$  соответствующие картины могут быть получены при помощи отражения относительно начала координат.

Примеры графиков и линий уровня функций Беллмана  $v$  в устойчивом и неустойчивом случаях представлены на рис. 2.6 и 2.7.

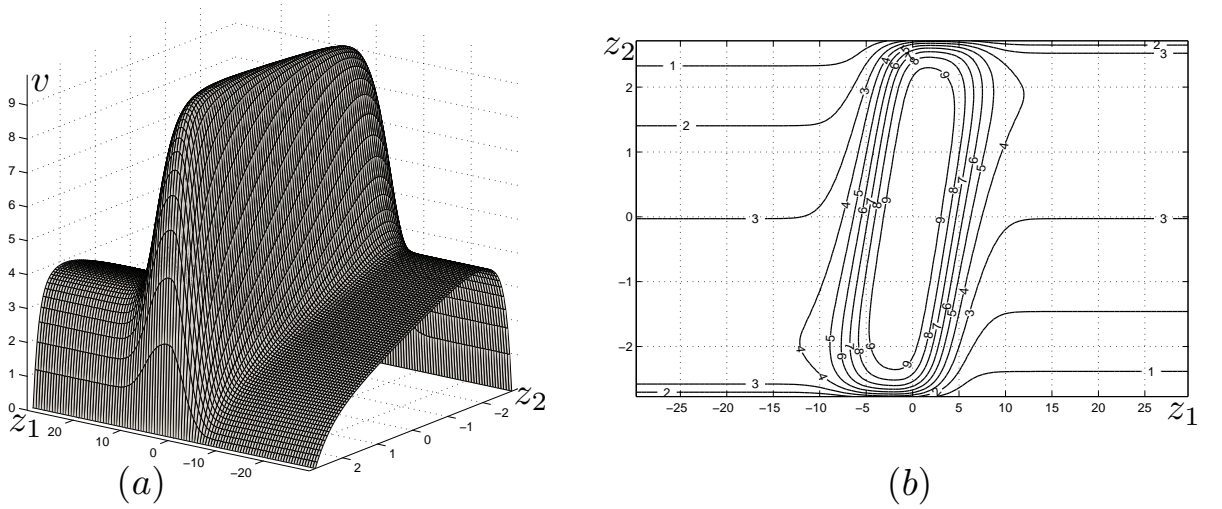


Рисунок 2.6: Функция Беллмана(a) и её линии уровня (b) при  $k = 0.3$ .

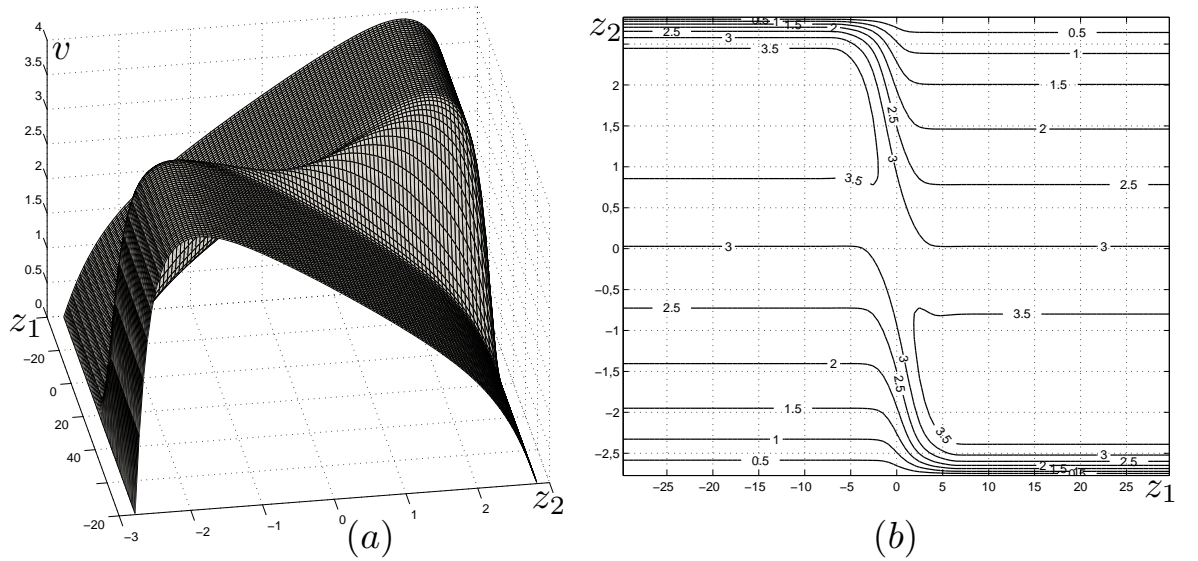


Рисунок 2.7: Функция Беллмана(a) и её линии уровня (b) при  $k = -0.3$ .

Для фиксированных  $z_1, y$  функции Беллмана достигают своих максимумов по  $z_2$  в областях бездействия. Глобальный максимум в устойчивом случае достигается в нуле. Однако, в неустойчивом случае, точки максимума функции  $v$  расположены тех частях областей бездействия, где  $|z_1|$  достаточно велико и  $v$  почти константа по  $z_1$ .

## Глава 3

# Оптимальные стратегии производства и назначения цен в динамической модели фирмы-монополиста

### 3.1 Введение

В последние десятилетия в экономической литературе наметился значительный интерес к моделям фирм, которые координируют стратегии производства и назначения цены на продукцию: см. обзоры [79–81]. В этих моделях возможность влиять на спрос с помощью выбора цены может значительно изменять оптимальные уровни запасов. В данной главе изучаются оптимальные стратегии фирмы, максимизирующей прибыль в рамках детерминированной модели с непрерывным временем.

Предположим, что фирма может производить некоторый товар с интенсивностью  $\alpha \geq 0$ . Пусть  $C(\alpha)$  — соответствующие затраты на производство. Будучи монополистом, фирма может установить любую цену  $p \geq 0$  за единицу товара. Спрос  $q = D(p)$  считается известной строго убывающей функцией цены. Элементарная, но естественная задача состоит в максимизации мгновенной прибыли:

$$R(q) - C(q) \rightarrow \max_{q \geq 0}, \quad R(q) = qD^{-1}(q). \quad (1.1)$$

Эта простая модель монополии хорошо известна: см., например, [82, Глава 14]. Для положительного оптимального решения  $\hat{q}$  уравнения (1.1) предельный доход  $R'(\hat{q})$  совпадает с предельными затратами  $C'(\hat{q})$ .

В данной главе нас интересует обобщение этой модели на случай непрерывного времени. Мы предполагаем что фирма может непрерывно производить и продавать некоторый

товар. Цель фирмы состоит в максимизации дисконтированного дохода в случае бесконечного горизонта. Предполагается, что отложенный спрос недопустим, т.е. уровень запаса товара должен быть неотрицательным. Предварительная формулировка соответствующей задачи оптимального управления состоит в следующем:

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta t} (R(q_t) - C(\alpha_t)) dt \rightarrow \max, \quad (1.2)$$

$$\dot{X}_t = \alpha_t - q_t, \quad X_0 = x \geq 0; \quad X_t \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

Назовем эту задачу выпуклой, если функция  $R$  выпукла, а  $C$  — вогнута.

В отличие от существующей литературы, мы не вводим затраты на хранение. Причина связана со структурой оптимальных стратегий: даже без учета таких затрат оптимальный запас продукции монотонно убывает, достигает нуля за конечное время и навсегда остается на этом уровне. Фактически, фирме не нужен склад. Следует правда отметить, что в случае невыпуклой функции затрат  $C$  может потребоваться использовать распределенные (рандомизированные) стратегии производства, чтобы удерживать товарный запас  $X$  на нулевом уровне и удовлетворить оптимальный спрос. На практике вместо распределенных управлений можно использовать приближенно оптимальные стратегии, соответствующие производственным циклам, при которых запас колеблется вблизи 0. Таким образом, существует потребность в «небольшом» складе.

Первая модель производства/назначения цены с непрерывным временем того же типа, что и (1.2), (1.3), была предложена в [83]. Горизонт в [83] конечен, а кривая спроса линейна (и зависит от времени). В 1980-х данное направление исследований было продолжено в [84–86]. Работы [84, 86] также были направлены на изучение конечного горизонта, при этом дисконтирование даже не вводилось. В [85] был рассмотрен случай бесконечного горизонта, но вместо фазового ограничения  $X_t \geq 0$  авторы рассматривали штрафную функцию. До работы [85] модель с бесконечным горизонтом рассматривалась в [14, 87]. Хотя работы [14, 87] не являются математически строгими, они содержат интересные экономические идеи. В частности, авторы подчеркивают, что если функция затрат невыпукла, то возможность хранить продукцию может привести к превосходству циклической производственной стратегии над статической. Пример из [87] анализируется ниже.

Наиболее близкой к рассматриваемой постановке задачи является работа [88]. Хотя модель [88] предполагает строго положительные затраты на хранение и относится к случаю конечного горизонта, ряд ключевых выводов остаются верными и для нашей модели. В предположении выпуклости задачи, было установлено, что оптимальная стратегия обычно распадается на три стадии: (i) продается избыточный запас, (ii) производство запущено,

но продажи преобладают и запас по-прежнему уменьшается, (iii) запас ликвидирован, интенсивности производства и продаж равны и максимизируют мгновенную прибыль (1.1). Было подчеркнуто, что накопление запаса не является оптимальным, а оптимальные траектории производства и цены являются неубывающими.

В заключительных замечаниях работы [88] предлагается рассмотреть невыпуклые функции затрат с целью объяснения явления накопления товарного запаса. Фактически, это в точности является предметом работы, представленной в данной главе. Наши выводы носят смешанный характер: в сочетании с дисконтированием невыпуклости могут объяснить производственные циклы, но не накопление товарных запасов.

Другой мотивацией настоящего исследования являются эмпирические наблюдения, указывающие на то, что нередко фирмы «действуют в области убывающих предельных затрат» (см. [89]). Как отмечено в [89], невыпуклости функции производственных затрат могут объяснить «волатильность производства относительно цен». Хорошо известная идея проста. Пусть, например, существуют три возможных уровня интенсивности производства:  $\alpha \in \{0, 1, 2\}$  с затратами  $C(0) = 0$ ,  $C(1) = 1$ ,  $C(2) = 3/2$ . Легко видеть, что для того, чтобы произвести две единицы товара за две единицы времени, лучше производить с интенсивностью  $\alpha = 2$  на первом временном интервале и ничего не производить на втором, чем производить одну единицу на каждом временном интервале. Если интенсивность спроса равна одной единице, то фирме требуется склад. В рассматриваемой динамической модели приближенная оптимальная стратегия аналогичного характера будет приведена ниже.

Работа построена следующим образом. В разделе 3.2 выводится представление функции Беллмана и исследуется ее регулярность (теорема 8). Доказано, что функция Беллмана  $v$  непрерывно дифференцируема и строго вогнута, даже если задача не является выпуклой. Отметим, что переход к вогнутой (соотв., выпуклой) оболочке функции  $R$  (соотв.,  $C$ ) не меняет гамильтониана и, следовательно, функцию Беллмана. Та же функция Беллмана соответствует задаче с рандомизированными управлениями (теорема 9).

Случай нулевого начального запаса рассматривается в разделе 3.3. Для выпуклой задачи оптимальность статической стратегии  $\alpha_t = q_t = \hat{u}$ , где  $\hat{u}$  максимизирует мгновенную прибыль (1.1), была доказана в [88]. В теореме 10 приводится необходимое и достаточное условие оптимальности этой стратегии в общем случае. Чтобы дать экономическую интерпретацию этого условия разделим фирму на отделы производства и продаж. Статическая стратегия  $\hat{u}$  является оптимальной тогда и только тогда, когда существует «теневая цена»  $\eta$  такая, что интенсивность  $\hat{u}$  оптимальна для обоих отделов, продающих товар по этой

цене. Наименьшая теневая цена совпадает с наименьшей точкой минимума гамильтониана и с предельной непрямой полезностью  $v'(0)$  нулевого запаса. Конечно, данное условие выполняется для выпуклой задачи (теорема 11). Если это условие нарушается, мы строим оптимальную распределенную стратегию (теорема 12) и приближенно оптимальную обычную стратегию, которая индуцирует циклическое изменение уровня торгового запаса.

В разделе 3.4 мы даем полное описание оптимальных стратегий для положительного начального запаса  $x > 0$  (теорема 13). Здесь имеются две основных стадии. На первой стадии запас строго убывает и достигает нуля. Длительность  $\tau$  этой стадии конечна и вычислена явно. Она зависит только от отношения предельных значений  $v'(0)$ ,  $v'(x)$  непрямой полезности  $v$  и коэффициента дисконтирования  $\beta$ . На второй стадии запас удерживается на нулевом уровне с помощью распределенных или обычных стратегий производства и продажи, рассмотренных в разделе 3.3. Следует отметить, что использование распределенных стратегий может потребоваться только на второй стадии.

В разделе 3.5 мы рассматриваем простой пример выпуклой задачи с линейной функцией затрат  $C(\alpha) = c\alpha$ ,  $\alpha \in [0, \bar{\alpha}]$ . Процесс производства должен начаться до того как запас продукции закончится, если и только если цена  $c$  за единицу продукции меньше чем наименьшая теневая цена  $\zeta$ .

В разделе 3.6 мы рассматриваем пример [14], где функция спроса  $D$  является линейной, а функция затрат  $C$  вогнута для малых значений  $\alpha$  и выпукла для больших. Согласно [14, 87] имеются три основных случая. (i) Фирма не существует, т.е. оптимально просто продать весь начальный запас товара. Стадия производства не начинается. (ii) За стадией чистой продажи следуют производственные циклы (т.е. распределенная стратегия производства). (iii) Производство запускается до того как запас товара будет исчерпан, и обычная статическая стратегия является оптимальной, когда запас закончится. По сравнению с [14], мы указываем точные значения параметров, соответствующие этим случаям.

## 3.2 Представление функции Беллмана

Предположим, что фирма может производить некоторый товар с интенсивностью  $\alpha_t \in A$ , где  $A$  — замкнутое подмножество  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ . Будучи монополистом, фирма может устанавливать цену  $p_t \geq 0$  за единицу товара. Предполагая, что интенсивность спроса является известной строго убывающей функцией цены:  $q = D(p)$ , удобно считать, что фирма динамически выбирает интенсивность спроса  $q_t \in Q$ . Множество  $Q \subset \mathbb{R}_+$  пред-



полагается компактным. Уровень товарного запаса  $X$  удовлетворяет уравнению

$$X_t = x + \int_0^t (\alpha_s - q_s) ds, \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

Пусть отложенный спрос недопустим:  $X_t \geq 0$ , и множества  $Q$ ,  $A$  удовлетворяют следующим условиям:

$$0 \in A \cap Q, \quad A \setminus \{0\} \neq \emptyset, \quad Q \setminus \{0\} \neq \emptyset. \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.1) также будем обозначать через  $X^{x,\alpha,q}$ .

Пусть  $R(q) = qp = qD^{-1}(q)$  — функция мгновенного дохода, и  $C(\alpha)$  — функция мгновенных затрат. Цель фирмы состоит в том, чтобы максимизировать дисконтированную прибыль на бесконечном горизонте:

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} (R(q_t) - C(\alpha_t)) dt, \quad \beta > 0.$$

Предполагается, что  $R : Q \mapsto \mathbb{R}_+$  непрерывна,  $R(0) = 0$ , и  $C : A \mapsto \mathbb{R}_+$  — неубывающая непрерывная функция. Если  $A$  является неограниченным, то мы дополнительно предполагаем, что  $C$  — 1-коэрцитивная функция:

$$C(\alpha)/\alpha \rightarrow +\infty, \quad A \ni \alpha \rightarrow +\infty. \quad (2.3)$$

Обозначим через  $\mathcal{A}(x)$  множество всех борелевских функций  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow A$ ,  $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow Q$  таких, что уровень товарного запаса (2.1) неотрицателен. Функция Беллмана  $v$  определяется следующим образом

$$v(x) = \sup_{(\alpha,q) \in \mathcal{A}(x)} \int_0^\infty e^{-\beta t} (R(q_t) - C(\alpha_t)) dt, \quad x \geq 0. \quad (2.4)$$

Введем гамильтониан

$$H(z) = \widehat{R}(z) + \widehat{C}(z), \quad \widehat{R}(z) = \sup_{q \in Q} \{R(q) - qz\}, \quad \widehat{C}(z) = \sup_{\alpha \in A} \{\alpha z - C(\alpha)\}. \quad (2.5)$$

Заметим, что функции  $\widehat{R}$ ,  $\widehat{C}$  выпуклы и конечны на  $\mathbb{R}$ . Следовательно, они непрерывны. Напомним (см. [26]), что ограниченная равномерно непрерывная функция  $u : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  называется вязкостным решением с ограничениями (constrained viscosity solution: CVS) уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB)

$$\beta u(x) - H(u'(x)) = 0, \quad x \geq 0, \quad (2.6)$$

если для любого  $x > 0$  (соотв.,  $x \geq 0$ ) и для любой тестовой функции  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+)$  таких, что  $x$  — точка минимума (соотв., максимума) функции  $u - \varphi$  на  $(0, \infty)$  (соотв., на  $[0, \infty)$ ), верно неравенство:

$$\beta u(x) - H(\varphi'(x)) \geq 0 \quad (\text{соотв., } \leq 0)$$

Заметим, что в работе [26] рассматривается задача минимизации, и данное выше определение в соответствующим образом модифицировано. Используя терминологию вязкостных решений, можно перефразировать это определение, сказав что  $u$  является вязкостным суперрешением (2.6) на  $(0, \infty)$  и вязкостным субрешением на  $[0, \infty)$ .

Легко видеть, что функция  $u \in C^1(\mathbb{R}_+)$  является CVS уравнения (2.6), если и только если

$$\beta u(x) = H(u'(x)), \quad x > 0, \quad (2.7)$$

$$\beta u(0) \leq H(z), \quad z \geq u'(0). \quad (2.8)$$

Под  $u'(0)$  подразумевается правая производная. Чтобы получить последнее неравенство достаточно рассмотреть тестовую функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую условиям  $\varphi(0) = u(0)$ ,  $\varphi'(0) = z > u'(0)$ .

Результаты, собранные в следующей лемме, доказаны в [26] (теоремы 3.3, 2.1, 2.2).

**Лемма 5.** Предположим, что множество  $A$  компактно. Тогда функция Беллмана  $v$  ограничена и равномерной непрерывна. Кроме того,  $v$  является единственным CVS уравнения НЖВ (2.6) в классе ограниченных равномерно непрерывных функций.

Заметим, что предположение (A3) работы [26], касающееся существования «внутреннего направления», выполняется, так как  $\sup\{\alpha - q : \alpha \in A, q \in Q\} > 0$  в силу (2.2).

Обозначим через  $\mathcal{M}_H = \arg \min_{z \in \mathbb{R}} H(z)$  множество точек минимума  $H$ .

**Лемма 6.** Множество  $\mathcal{M}_H \subset \mathbb{R}_+$  непусто, замкнуто и выпукло.

**Доказательство.** Множество  $\mathcal{M}_H$  является замкнутым и выпуклым вследствие непрерывности и выпуклости  $H$ . Для  $z < 0$  имеем

$$\widehat{R}(z) > \widehat{R}(0), \quad \widehat{C}(z) = -C(0) = \widehat{C}(0),$$

так как  $R$  неотрицательна,  $R(0) = 0$ , и  $C$  — неубывающая функция. Таким образом,  $H$ , суженная на  $(-\infty, 0]$ , достигает строгого глобального минимума в точке  $z = 0$ . Для  $z > 0$  имеем

$$\widehat{R}(z) \geq R(0), \quad \widehat{C}(z) \geq \alpha z - C(\alpha)$$

для любого  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \in A$ . Таким образом,  $H(z) \rightarrow +\infty$ ,  $z \rightarrow +\infty$ . Отсюда следует, что  $\emptyset \neq \mathcal{M}_H \subset \mathbb{R}_+$ . □

Пусть  $I$  — интервал (т.е. выпуклое множество) в  $\mathbb{R}$ . Напомним, что функция  $\psi : I \mapsto \mathbb{R}$ , называется абсолютно непрерывной, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что

$$\sum_{i=1}^k |\psi(b_i) - \psi(a_i)| < \varepsilon$$

для любых дизъюнктивных интервалов  $(a_i, b_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  таких, что  $[a_i, b_i] \subset I$ , и  $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta$ . Множество абсолютно непрерывных функций обозначим  $AC(I)$ . Функция  $\psi : I \mapsto \mathbb{R}$  называется локально абсолютно непрерывной, если  $\psi \in AC([a, b])$  для любого  $[a, b] \subset I$ . Любая локально абсолютно непрерывная функция  $\psi$  является почти всюду (п.в.) дифференцируемой, и может быть восстановлена по её производной с помощью интеграла Лебега (см., например, [90, Theorem 3.30]):

$$\psi(x) = \psi(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^x \psi'(y) dy, \quad \bar{x}, x \in I.$$

Когда мы пишем «п.в.», мы всегда имеем ввиду «почти всюду относительно меры Лебега».

Будем использовать следующий хорошо известный результат (см. [91] (Глава IX, упражнение 13) или [92, теорема 2]):

Лемма 7. Пусть  $\psi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  — непрерывная и строго монотонная функция. Тогда  $\psi^{-1}$  абсолютно непрерывна, если и только если  $\psi' \neq 0$  п.в. на  $(a, b)$ .

Обозначим через  $\zeta = \min \mathcal{M}_H \geq 0$  наименьшую точку минимума функции  $H$ .

Теорема 8. Функция Беллмана  $v$  ограничена:

$$v(x) \leq \frac{H(0)}{\beta} = \lim_{y \rightarrow \infty} v(y)$$

и допускает следующее представление:

(i) если  $\zeta = 0$ , то

$$v(x) = H(0)/\beta, \tag{2.9}$$

(ii) если  $\zeta > 0$  то

$$v(x) = \frac{H(\xi(x))}{\beta} = \frac{H(\zeta)}{\beta} + \int_0^x \xi(y) dy, \tag{2.10}$$

где  $\xi(x)$  определяется уравнением

$$x = \Psi(\xi) := - \int_{\xi}^{\zeta} \frac{H'(z)}{\beta z} dz, \quad \xi \in (0, \zeta], \quad x \geq 0.$$

В случае (ii)  $v$  является строго возрастающей и строго вогнутой. Кроме того,  $v'$  абсолютно непрерывна и удовлетворяет условиям  $v'(0) = \zeta$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} v'(x) = 0$ . Наконец,  $v'' < 0$  п.в.

Доказательство. Проверим сначала, что (2.9), (2.10) являются CVS уравнения (2.6). Если  $\zeta = 0$ , то (2.9) удовлетворяет (2.7), (2.8). Следовательно, (2.9) является CVS уравнения (2.6).

Предположим что  $\zeta > 0$ . Поскольку  $H$  выпукла, то её производная  $H'$  существует на множестве  $G = (0, \zeta) \setminus D$ , где  $D$  не более чем счётно, и  $H'$  неубывающая на  $G$  функция: см. [93] (теорема 25.3). Далее,  $H'(x) \leq 0$ ,  $x \in G$ , так как  $H$  убывает на  $(0, \zeta)$ . Если  $H'(x) = 0$  для некоторого  $x \in G$ , то  $x < \zeta$  является точкой минимума функции  $H$ . Следовательно,  $H'(x) < 0$ ,  $x \in G$ .

Рассмотрим следующую непрерывную строго убывающую функцию

$$\Psi(\xi) = - \int_{\xi}^{\zeta} \frac{H'(z)}{\beta z} dz, \quad \xi \in (0, \zeta].$$

Имеем  $\Psi(\zeta) = 0$ ,

$$\Psi(0+) = - \lim_{\xi \searrow 0} \int_{\xi}^{\zeta} \frac{H'(s)}{\beta s} ds = +\infty,$$

так как  $H'$  п.в. ограничена сверху отрицательной константой в правой окрестности 0. Отсюда следует, что формула

$$x = \Psi(\xi)$$

корректно определяет обратную функцию  $\xi = \Psi^{-1} : \mathbb{R}_+ \mapsto (0, \zeta]$ , которая является строго убывающей и непрерывной.

Кроме того, так как  $\Psi'(\xi) < 0$  п.в. на  $(0, \zeta)$ , функция  $\xi(x) = \Psi^{-1}(x)$  является локально абсолютно непрерывной на  $\mathbb{R}_+$  по лемме 7. Но так как  $\xi$  монотонна и ограничена, то  $\xi \in AC(\mathbb{R}_+)$ . По лемме 7 заключаем также, что  $\xi'(x) < 0$  п.в. на  $(0, \infty)$ , так как  $\Psi = \xi^{-1}$  локально абсолютно непрерывна на  $(0, \zeta]$ .

Далее, по следствию 3.50 из [90], можно применить правило дифференцирования сложной функции:

$$1 = \frac{d}{dx} \Psi(\xi(x)) = \frac{H'(\xi(x))}{\beta \xi(x)} \xi'(x) \quad \text{п.в. на } (0, \infty). \quad (2.11)$$

Функция  $H(\xi)$  абсолютно непрерывна как суперпозиция абсолютно непрерывной функции  $\xi$  и непрерывной по Липшицу функции  $H$  (напомним, что  $H$  выпукла). Следовательно,

$$H(\xi(x)) = H(\zeta) + \int_0^x \frac{d}{dy} H(\xi(y)) dy.$$

По правилу дифференцирования сложной функции и формуле (2.11) находим

$$H(\xi(x)) = H(\zeta) + \int_0^x \xi'(y) H'(\xi(y)) dy = H(\zeta) + \beta \int_0^x \xi(y) dy.$$

Теперь легко видеть, что

$$u(x) = \frac{H(\zeta)}{\beta} + \int_0^x \xi(y) dy = \frac{H(\xi(x))}{\beta}$$

является CVS уравнения (2.6). В самом деле,  $u'(x) = \xi(x)$ ,  $x > 0$  и

$$\beta u(x) - H(u'(x)) = \beta u(x) - H(\xi(x)) = 0, \quad x > 0.$$

Граничное условие (2.8) выполняется в силу определения  $\zeta$ :

$$\beta u(0) = H(\zeta) \leq H(z) \quad \text{for all } z.$$

Заметим, что  $u$  является строго возрастающей, так как  $u' = \xi > 0$ , и строго вогнутой, так как  $\xi$  — строго убывающая (см. [27], глава В, теорема 4.1.4). Далее, если  $\zeta > 0$ , то

$$u(x) \leq \lim_{y \rightarrow \infty} u(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{H(\xi(y))}{\beta} = \frac{H(0)}{\beta}.$$

Другие свойства производных (2.10), упомянутые в формулировке теоремы 8, очевидным образом следуют из определения функции  $\xi$ .

Мы доказали что формулы (2.9), (2.10) определяют некоторое CVS уравнения (2.6). Если  $A$  компактно, то (2.9), (2.10) определяют функцию Беллмана (2.4) в силу результата о единственности, сформулированного в лемме 5.

В общем случае положим  $A_c = A \cap [0, c]$ , и обозначим через  $H_c$ ,  $v_c$  соответствующие гамильтониан и функцию Беллмана. Для  $z \leq 0$  имеем  $H_c(z) = H(z) = -C(0)$ . Пусть

$$\hat{\alpha}(z) \in \arg \max_{\alpha \in A} \{z\alpha - C(\alpha)\}, \quad z > 0.$$

Если  $\hat{\alpha}(z) > 0$ , то неравенство

$$-C(0) \leq \hat{\alpha}(z) \left( z - \frac{C(\hat{\alpha}(z))}{\hat{\alpha}(z)} \right)$$

и условие коэрцитивности (2.3) гарантируют, что  $\hat{\alpha}(z)$ ,  $z \in [0, \bar{z}]$  ограничена сверху для любого фиксированного  $\bar{z} > 0$ . Таким образом, для любого  $\bar{z} > 0$  существует  $\bar{c} > 0$  такое, что

$$\sup_{\alpha \in A} \{z\alpha - C(\alpha)\} = \sup_{\alpha \in A_c} \{z\alpha - C(\alpha)\}$$

и  $H_c(z) = H(z)$  для  $|z| \leq \bar{z}$ ,  $c \geq \bar{c}$ . Полагая  $\bar{z} > \zeta$ , в силу выпуклости функции  $H$  заключаем, что  $\zeta$  является наименьшей точкой минимума  $H_c$  при достаточно большом  $c$ .

Поскольку выражения (2.9), (2.10) зависят только от значений гамильтониана на отрезке  $[0, \zeta]$ , то они определяют CVS уравнения (2.6) с гамильтонианами  $H$  и  $H_c$  для  $c \geq \bar{c}$ . Но

по лемме 5  $v_c$  является единственным CVS уравнения (2.6) с гамильтонианом  $H_c$ . Отсюда следует, что функции (2.9), (2.10) совпадают с  $v_c$ ,  $c \geq \bar{c}$ .

Ясно, что  $v_c \leq v$ . Остается доказать обратное неравенство. Для любой допустимой стратегии  $(\alpha, q) \in \mathcal{A}(x)$  имеем

$$\frac{d}{dt}(e^{-\beta t}v_c(X_t)) = e^{-\beta t}(-\beta v_c(X_t) + (\alpha_t - q_t)v'_c(X_t)) \quad \text{п.в.}, \quad (2.12)$$

где  $X$  определяется (2.1). Из уравнения HJB (2.7) находим

$$\beta v_c(X_t) \geq R(q_t) - q_t v'_c(X_t) + \alpha_t v'_c(X_t) - C(\alpha_t) \quad \text{п.в.} \quad (2.13)$$

Заметим, что равенство (2.7) справедливо при  $x = 0$  в силу свойства непрерывности. Из (2.12), (2.13) получаем неравенство

$$-\frac{d}{dt}(e^{-\beta t}v_c(X_t)) \geq e^{-\beta t}(R(q_t) - C(\alpha_t)) \quad \text{п.в.}$$

Отсюда следует что

$$v_c(x) - e^{-\beta T}v_c(X_T) \geq \int_0^T e^{-\beta t}(R(q_t) - C(\alpha_t)) dt$$

для любого  $T > 0$ . Так как  $v_c$  ограничена, то

$$v_c(x) \geq \int_0^\infty e^{-\beta t}(R(q_t) - C(\alpha_t)), \quad (\alpha, q) \in \mathcal{A}(x).$$

Таким образом,  $v_c \geq v$ . □

В ходе доказательства было установлено что, переход от множества  $A$  к  $A \cap [0, c]$  не влияет на функцию Беллмана  $v$  при достаточно больших  $c$ .

Заметим также, что если  $\zeta > 0$ , то оптимальная дисконтированная прибыль не превосходит  $H(0)/\beta$ . Если  $\zeta = 0$ , то дисконтированная прибыль  $H(0)/\beta$  может быть получена при нулевом начальном запасе. Более того, любой начальный запас  $x > 0$  бесполезен.

Для функции  $f : \mathbb{R} \mapsto (-\infty, +\infty]$  обозначим через  $f^* : \mathbb{R} \mapsto (-\infty, +\infty]$  её преобразование Юнга-Фенхеля:

$$f^*(z) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{zx - f(x)\},$$

и через  $\text{co } f$  — её выпуклую оболочку:

$$(\text{co } f)(x) = \inf\{\delta f(x_1) + (1 - \delta)f(x_2) : \delta \in [0, 1], x_i \in \text{dom } f, \delta x_1 + (1 - \delta)x_2 = x\},$$

где  $\text{dom } f = \{x : f(x) < \infty\}$ . Для  $G \subset \mathbb{R}$  обозначим через  $\text{co } G$  пересечение всех интервалов, содержащих  $G$ . Следующий результат содержится в работе [94] (глава X, предложение 1.5.4).

Лемма 8. Пусть  $G \subset \mathbb{R}$  — непустое замкнутое множество и  $f : G \mapsto \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Пусть  $f(x) = +\infty$ ,  $x \notin G$  и предположим, что  $f$  1-коэрцитивна:  $f(x)/|x| \rightarrow +\infty$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\text{co } f = f^{**}, \quad \text{dom}(\text{co } f) = \text{co } G,$$

и для любого  $x \in \text{co } G$  существуют  $x_1, x_2 \in G$  и  $\delta \in (0, 1)$  такие, что

$$x = \delta x_1 + (1 - \delta)x_2, \quad (\text{co } f)(x) = \delta f(x_1) + (1 - \delta)f(x_2). \quad (2.14)$$

Функции  $C$ ,  $-R$  удовлетворяют условиям леммы 8. Пусть  $C(\alpha) = +\infty$ ,  $\alpha \notin A$  и  $R(q) = -\infty$ ,  $q \notin Q$ . Для унификации системы обозначений, обозначим через

$$\tilde{C} = C^{**} = \text{co } C$$

замкнутую выпуклую оболочку функции  $C$  и через

$$\tilde{R} = -(-R)^{**} = -\text{co}(-R)$$

— замкнутую вогнутую оболочку функции  $R$ .

Сравнивая данные обозначения с предыдущими:

$$\begin{aligned} \hat{C}(z) &= C^*(z) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{xz - C(x)\} = C^{***}(z) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{xz - \tilde{C}(x)\}, \\ \hat{R}(z) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \{R(x) - xz\} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{x \cdot (-z) - (-R(x))\} = (-R)^*(-z) \\ &= (-R)^{***}(-z) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{x \cdot (-z) - (-R)^{**}(x)\} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{\tilde{R}(x) - xz\}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

закключаем, что гамильтониан (2.5) может быть представлен следующим образом:

$$H(z) = C^*(z) + (-R)^*(-z) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{xz - \tilde{C}(x)\} + \sup_{x \in \mathbb{R}} \{\tilde{R}(x) - xz\}. \quad (2.16)$$

Введем овыпукленную задачу:

$$\tilde{v}(x) = \sup_{(\alpha, q) \in \tilde{\mathcal{A}}(x)} \int_0^\infty e^{-\beta t} (\tilde{R}(q_t) - \tilde{C}(\alpha_t)) dt, \quad (2.17)$$

где  $\tilde{\mathcal{A}}(x)$  — множество измеримых по Борелю функций  $\alpha : \mathbb{R}_+ \mapsto \text{co } A$ ,  $q : \mathbb{R}_+ \mapsto \text{co } Q$  таких, что  $X_t^{x, \alpha, q} \geq 0$ . Заметим, что  $\tilde{C}$  по-прежнему удовлетворяет условию (2.3): см. [27, глава E, предложение 1.3.9(ii)]. Ясно, что  $v \leq \tilde{v}$ . Но, так как гамильтониан для овыпукленной задачи такой же, как и для исходной (см. (2.16)), то по теореме 8 имеем  $\tilde{v} = v$ .

Расширим класс стратегий производства и назначения цены. Распределенные управления  $q_t(dy)$  и  $\alpha_t(dy)$  представляют собой отображения отрезка  $[0, \infty)$  в множества вероятностных мер на  $Q$  и  $A$  такие, что функции

$$t \mapsto \int_Q \varphi(y) q_t(dy), \quad t \mapsto \int_A \varphi(y) \alpha_t(dy)$$

измеримы по Борелю для любой непрерывной функции  $\varphi$ . Динамика движения товарного запаса при использовании распределенных управлений определяется следующим образом

$$X_t = x + \int_0^t \int_Q y q_s(dy) ds - \int_0^t \int_A y \alpha_s(dy) ds.$$

Класс  $\mathcal{A}_r(x)$  допустимых распределенных стратегий содержит лишь те, которые удерживают  $X_t$  в неотрицательной области. Соответствующая функция Беллмана определяется следующим образом:

$$v_r(x) = \sup_{(\alpha, q) \in \mathcal{A}_r(x)} \left( \int_0^\infty e^{-\beta t} \int_Q R(y) q_t(dy) dt - \int_0^\infty e^{-\beta t} \int_A C(y) \alpha_t(dy) dt \right). \quad (2.18)$$

Задачу (2.18) будем называть ослабленной.

Заметим, что допустимая распределенная стратегия  $(\alpha_t(dx), q_t(dx))$  индуцирует допустимую обычную стратегию

$$\left( \int_A x \alpha_s(dx), \int_Q x q_s(dx) \right) \in (\text{co } A, \text{co } Q)$$

для овыпукленной задачи (2.17). Следовательно, из неравенство Йенсена вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\beta s} \left( \int_Q R(x) q_s(dx) - \int_A C(x) \alpha_s(dx) \right) ds \\ & \leq \int_0^\infty e^{-\beta s} \left( R \left( \int_Q x q_s(dx) \right) - C \left( \int_A x \alpha_s(dx) \right) \right) ds \leq \tilde{v}(x), \end{aligned}$$

так как  $\tilde{C} \leq C$ ,  $\tilde{R} \geq R$ . Таким образом,  $v_r \leq \tilde{v}$ , и очевидное неравенство  $v \leq v_r$  приводит к следующему результату.

**Теорема 9.** Функции Беллмана (2.4), (2.17), (2.18) соответствующие исходной, овыпукленной и ослабленной задачам совпадают:  $v = v_r = \tilde{v}$ .

Равенство  $v = v_r$  для задачи с фазовыми ограничениями в случае компактных множеств состояний и управлений было установлено в [28].



### 3.3 Оптимальные стратегии в случае нулевого начального запаса

В этом разделе мы рассмотрим случай нулевого начального запаса:  $X_0 = 0$ . Для любой константы  $\hat{u} \in Q \cap A$  статическая стратегия  $\alpha_t = q_t = \hat{u}$  допустима. Если она оптимальна, то

$$\hat{u} \in \mathcal{M} := \arg \max_{u \in Q \cap A} \{R(u) - C(u)\}. \quad (3.1)$$

Для  $\eta \in \mathbb{R}$  положим

$$\mathcal{M}_R(\eta) = \arg \max_{q \in Q} \{R(q) - \eta q\}, \quad \mathcal{M}_C(\eta) = \arg \max_{\alpha \in A} \{\alpha \eta - C(\alpha)\},$$

и  $\mathcal{M}_\eta = \mathcal{M}_R(\eta) \cap \mathcal{M}_C(\eta)$ . Напомним, что  $\zeta$  — наименьшая точка минимума  $H$ .

Теорема 10. Следующие условия эквивалентны.

- (i) Статическая стратегия  $\alpha_t = q_t = \hat{u} \in \mathcal{M}$  является оптимальной.
- (ii)  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$  для некоторого  $\eta \in \mathbb{R}$ .
- (iii)  $\mathcal{M}_\zeta \neq \emptyset$ .

Если  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$ , то  $\eta$  является точкой минимума функции  $H$  и  $\mathcal{M}_\eta = \mathcal{M}$ .

Доказательство. По теореме 8 имеем

$$\beta v(0) = H(\zeta) \leq H(\eta) = \sup_{q \in Q} \{R(q) - \eta q\} + \sup_{\alpha \in A} \{\alpha \eta - C(\alpha)\}, \quad \eta \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

(ii)  $\implies$  (i). Для любого  $\hat{u} \in \mathcal{M}_\eta$  из (3.2) находим

$$v(0) \leq (R(\hat{u}) - C(\hat{u}))/\beta = \int_0^\infty e^{-\beta t} (R(\hat{u}) - C(\hat{u})) dt. \quad (3.3)$$

Таким образом,  $\alpha_t = q_t = \hat{u}$  является оптимальной стратегией и  $\hat{u} \in \mathcal{M}$ .

(i)  $\implies$  (iii). Если статическая стратегия  $\alpha_t = q_t = \hat{u}$  оптимальна, то

$$R(\hat{u}) - C(\hat{u}) = \beta \int_0^\infty e^{-\beta t} (R(\hat{u}) - C(\hat{u})) dt = \beta v(0) = H(\zeta).$$

Если  $\hat{u} \notin \mathcal{M}_\zeta$ , то получаем противоречие:

$$H(\zeta) = \hat{R}(\zeta) + \hat{C}(\zeta) > R(\hat{u}) - \zeta \hat{u} + \zeta \hat{u} - C(\hat{u}) = R(\hat{u}) - C(\hat{u}).$$

(iii)  $\implies$  (ii) очевидно.

Пусть  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$ . Заметим, что для  $\hat{u} \in \mathcal{M}_\eta$  справедливо  $H(\eta) = R(\hat{u}) - C(\hat{u})$ . Отсюда следует, что неравенство в (3.2) не может быть строгим, так как из этого вытекало бы строгое неравенство в (3.3). Таким образом, если  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$ , то  $H(\eta) = H(\zeta)$ , и  $\eta$  является точкой минимума функции  $H$ .

Пусть  $\bar{u} \in \mathcal{M}_\eta$ . Тогда

$$R(u) - \eta u \leq R(\bar{u}) - \eta \bar{u}, \quad \eta u - C(u) \leq \eta \bar{u} - C(\bar{u}) \quad (3.4)$$

для любого  $u \in Q \cap A$ . После суммирования получаем

$$R(u) - C(u) \leq R(\bar{u}) - C(\bar{u}).$$

Следовательно,  $\bar{u} \in \mathcal{M}$ .

Теперь возьмем некоторое  $u \in \mathcal{M}$ . Если  $u \notin \mathcal{M}_\eta$ , то по крайней мере одно из неравенств (3.1) является строгим, и после суммирования получаем противоречие с определением  $u$ :

$$R(u) - C(u) < R(\bar{u}) - C(\bar{u}).$$

Таким образом, оба неравенства (3.4) являются, фактически, равенствами, и  $u \in \mathcal{M}_\eta$  вместе с  $\bar{u}$ .  $\square$

Чтобы дать экономическую интерпретацию условия  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$ , предположим что в некоторой фирме управление производственным цехом и отделом продаж происходит независимо друг от друга. Производственный цех продает товар отделу продаж по некоторой теневой цене  $\eta$  и получает мгновенный доход  $\eta\alpha - C(\alpha)$ . Отдел продаж получает мгновенный доход  $R(q) - \eta q$  продавая товар на рынке. Для каждой возможной цены  $\eta$  отделы пытаются выбрать оптимальные стратегии  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{q}$ . Равновесие  $\hat{\alpha} = \hat{q}$  соответствует теневой цене  $\eta$  такой, что  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$ . По теореме 9 статическая стратегия является оптимальной в точности тогда, когда данное равновесие существует.

Аналогично равновесию механической системы, равновесная теневая цена  $\eta$  может быть определена как точка минимума гамильтониана  $H$ . По теореме 8 наименьшая теневая цена  $\zeta$  совпадает с предельной непрямой полезностью  $v'(0)$  нулевого запаса.

Для функции  $f : \mathbb{R} \mapsto (-\infty, +\infty]$  обозначим через  $\partial f$  её субдифференциал в точке  $z$ :

$$\partial f(z) = \{\gamma \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(z) + \gamma(x - z), \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Для любой полунепрерывной снизу выпуклой функции  $f \not\equiv +\infty$  верно (см. [93, теорема 23.5] или [95, предложение 11.3]), что

$$\arg \max_{x \in \mathbb{R}} \{zx - f(x)\} = \partial f^*(z). \quad (3.5)$$

Теорема 11. Предположим что множества  $Q$ ,  $A$  выпуклы, функция  $R$  вогнута и функция  $C$  выпукла. Тогда для любого  $\eta \in \mathcal{M}_H$  имеем  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$ . Следовательно, стационарная стратегия является оптимальной.

Доказательство. Из определения  $R$ ,  $C$  вытекает, что каждое из множеств  $\mathcal{M}_R(\eta)$ ,  $\mathcal{M}_C(\eta)$  непусто при любом  $\eta$ . Если  $g(x) = f(-x)$ , то  $\partial g(x) = -\partial f(-x)$ . Используя формулу Моро-Рокафеллара (см. [93, теорема 23.8] или [96, теорема 3.6.3]), из (2.16) находим

$$0 \in \partial H(\eta) = \partial C^*(\eta) - \partial(-R)^*(-\eta) = \{x - y : x \in \partial C^*(\eta), y \in \partial(-R)^*(-\eta)\} \quad (3.6)$$

в точке  $\eta$  минимума функции  $H$ . Более того, в силу (3.5) имеем

$$\partial(-R)^*(-\eta) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}} \{-x\eta - (-R(x))\} = \arg \max_{x \in \mathbb{R}} \{R(x) - \eta x\} = \mathcal{M}_R(\eta),$$

$$\partial C^*(\eta) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}} \{x\eta - C(x)\} = \mathcal{M}_C(\eta).$$

Следовательно, соотношение (3.6) эквивалентно условию  $0 \in \mathcal{M}_C(\eta) - \mathcal{M}_R(\eta)$ , и  $\mathcal{M}_\eta = \mathcal{M}_C(\eta) \cap \mathcal{M}_R(\eta) \neq \emptyset$ .  $\square$

Для выпуклой задачи, рассмотренной в теореме 11, оптимальность стационарной стратегии более прямым методом была доказана в [88] (предложение 1).

Статическая стратегия, максимизирующая мгновенную прибыль, является стратегией  $\hat{q}$ , максимизирующей значение вогнутой функции дохода  $R(q)$  на  $[0, \bar{q} \wedge \bar{\alpha}]$ , где  $\bar{q} \wedge \bar{\alpha} = \min\{\bar{q}, \bar{\alpha}\}$ . Очевидно, что  $\hat{q} < \bar{\alpha}$ , если  $\bar{q} < \bar{\alpha}$ . Однако, в теореме 10 утверждается что  $\hat{\alpha} = \hat{q}$  является оптимальным.

Чтобы дать простую иллюстрацию данного результата рассмотрим случай постоянных затрат:  $C(\alpha) = c > 0$ ,  $\alpha \in [0, \bar{\alpha}]$ . Кажется естественным, что только максимальная интенсивность производства  $\alpha_t = \bar{\alpha}$  является оптимальной в данном случае, так как, в сравнении с другими производственными стратегиями, мы получаем дополнительный товар даром. Пусть  $Q = [0, \bar{q}]$ ,  $\bar{q} > 0$ . Статическая стратегия, максимизирующая мгновенный доход совпадает со стратегией  $\hat{q}$ , максимизирующей вогнутую функцию прибыли  $R(q)$  на  $[0, \bar{q} \wedge \bar{\alpha}]$ , где  $\bar{q} \wedge \bar{\alpha} = \min\{\bar{q}, \bar{\alpha}\}$ . Ясно, что  $\hat{q} < \bar{\alpha}$ , если  $\bar{q} < \bar{\alpha}$ . Однако, теорема 10 утверждает, что  $\hat{\alpha} = \hat{q}$  оптимальны.

Объяснение данного «парадокса» состоит в том, что фактически оптимальная скорость продажи  $\hat{q}$  покрывается любой скоростью производства  $\alpha \geq \hat{q}$ . Дополнительная продукция, произведенная при использовании максимальной интенсивности  $\bar{\alpha}$  не продается и остается неиспользованной.

Для невыпуклой задачи возможно, что  $\mathcal{M}_\zeta = \emptyset$  и не существует оптимальной стационарной стратегии вида (3.1). Конкретный пример будет рассмотрен в разделе 3.6. Наша следующая цель состоит в описании оптимальных стратегий в этом случае.

По теоремам 10, 11 для овыпукленной задачи (2.17) стационарная стратегия  $\tilde{\alpha}_t = \tilde{q}_t = \tilde{u}$ ,

$$\tilde{u} \in \arg \max \{ \tilde{R}(u) - \tilde{C}(u) : u \in \text{co } Q \cap \text{co } A \}, \quad (3.7)$$

оптимальна для нулевого начального запаса, и

$$\tilde{v}(0) = \frac{\tilde{R}(\tilde{u}) - \tilde{C}(\tilde{u})}{\beta}.$$

Далее, по лемме 4 существуют  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\nu \in (0, 1)$ ,  $q^i \in Q$ ,  $\alpha^i \in A$ ,  $i = 1, 2$  такие, что

$$\tilde{u} = \gamma q^1 + (1 - \gamma) q^2 = \nu \alpha^1 + (1 - \nu) \alpha^2, \quad (3.8)$$

$$\tilde{R}(\tilde{u}) = \gamma R(q^1) + (1 - \gamma) R(q^2), \quad \tilde{C}(\tilde{u}) = \nu C(\alpha^1) + (1 - \nu) C(\alpha^2). \quad (3.9)$$

Рассмотрим распределенные управления

$$\bar{q}_t(dx) = \gamma \delta_{q^1}(dx) + (1 - \gamma) \delta_{q^2}(dx), \quad \bar{\alpha}_t(dx) = \nu \delta_{\alpha^1}(dx) + (1 - \nu) \delta_{\alpha^2}(dx), \quad (3.10)$$

где  $\delta_a$  — мера Дирака, сконцентрированная в точке  $a$ . Эти управления допустимы для ослабленной задачи (2.18), так как

$$\int_0^t \int_Q x \bar{q}_s(dx) ds - \int_0^t \int_A x \bar{\alpha}_s(dx) ds = t(\gamma q^1 + (1 - \gamma) q^2 - \nu \alpha^1 - (1 - \nu) \alpha^2) = 0.$$

На основании теоремы 9 следующее простое вычисление показывает что стратегия (3.10) является оптимальной:

$$\begin{aligned} v_r(0) &\geq \int_0^\infty e^{-\beta s} \left( \int_Q R(x) \bar{q}_s(dx) - \int_A C(x) \bar{\alpha}_s(dx) \right) ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\beta s} \left( \tilde{R}(\tilde{u}) - \tilde{C}(\tilde{u}) \right) ds = \tilde{v}(0). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 12. (i) Пусть  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{R}$  — выпуклая и вогнутая оболочки  $C$ ,  $R$ . Тогда  $\tilde{u}$ , определенная в (3.7), является оптимальной статической стратегией для овыпукленной задачи (2.17) с нулевым начальным запасом.

(ii) Существуют  $q^i \in Q$ ,  $\alpha^i \in A$ ,  $i = 1, 2$  и  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\nu \in (0, 1)$  такие что (3.8), (3.9) справедливы. Распределенная статическая стратегия (3.10) дает решение задачи (2.18) с нулевым начальным запасом.

Стратегия (3.10) распределяет цену (соотв., интенсивность производства) между двумя уровнями, которые определяются значением  $\widehat{u}$ , вычисленным для овыпукленной задачи, и положением  $R$  (соотв.,  $C$ ) относительно её вогнутой (соотв., выпуклой) оболочки.

Рандомизация стратегий производства и продажи товаров, подразумеваемая распределенными управлениями, вряд ли может быть реализована практически. Поэтому, имеет смысл построить обычную приближенно оптимальную стратегию  $(\alpha^\varepsilon, q^\varepsilon) \in \mathcal{A}(0)$ . Мы будем использовать следующее уточнение леммы 8: см. [94] (глава X, теоремы 1.5.5, 1.5.6).

Лемма 9. Пусть предположения леммы 8 выполняются. Если для данного  $x \in \text{co } G$  точки  $x_1, x_2$  в (2.14) различны, то  $\text{co } f$  аффинна на  $(x_1, x_2)$  и, в дополнение к (2.14), справедливы равенства

$$(\text{co } f)(x_i) = f(x_i), \quad sx - (\text{co } f)(x) = sx_i - f(x_i), \quad s \in \partial(\text{co } f)(x), \quad i = 1, 2.$$

Для  $\tilde{u}$ , определенного в (3.7), по теоремам 10, 11 имеем

$$\tilde{u} \in \arg \max_{q \in \text{co } Q} \{\tilde{R}(q) - q\zeta\}, \quad \tilde{u} \in \arg \max_{\alpha \in \text{co } A} \{\alpha\zeta - \tilde{C}(\alpha)\}.$$

Отсюда следует что  $\zeta \in \partial\tilde{C}(\tilde{u})$  и, по лемме 9, существуют  $\nu \in (0, 1)$ ,  $\alpha^i \in A$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяющие (3.8), такие, что

$$\alpha^i \zeta - C(\alpha^i) = \tilde{u} \zeta - \tilde{C}(\tilde{u}), \quad i = 1, 2. \quad (3.11)$$

Аналогично, существуют  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $q^i \in Q$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяющие (3.8), такие, что

$$R(q^i) - q^i \zeta = \tilde{R}(\tilde{u}) - \tilde{u} \zeta, \quad i = 1, 2. \quad (3.12)$$

Из (3.11), (3.12) для любого  $\varkappa \in [0, 1]$  получаем

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\tilde{u}) - \tilde{C}(\tilde{u}) &= \varkappa(R(q^1) - C(\alpha^2)) + (1 - \varkappa)(R(q^2) - C(\alpha^1)) \\ &\quad + (\varkappa(\alpha^2 - q^1) + (1 - \varkappa)(\alpha^1 - q^2))\zeta. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Можно считать, что  $\alpha^2 \geq \alpha^1$ ,  $q^2 \geq q^1$  и либо  $\alpha^2 > \alpha^1$ , либо  $q^2 > q^1$ , так как иначе  $\alpha^1 = \alpha^2 = q^1 = q^2 = \tilde{u}$ , и обычная стационарная стратегия  $\alpha_t = q_t = \tilde{u}$  является оптимальной.

Положим  $\tau_i = \varepsilon i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$  и

$$\alpha_t^\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha^2 I_{[\tau_i, \tau_i + \varkappa \varepsilon)}(t) + \alpha^1 I_{[\tau_i + \varkappa \varepsilon, \tau_{i+1})}(t)), \quad (3.14)$$

$$q_t^\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} (q^1 I_{[\tau_i, \tau_i + \varkappa \varepsilon)}(t) + q^2 I_{[\tau_i + \varkappa \varepsilon, \tau_{i+1})}(t)), \quad (3.15)$$

$$\varkappa = \frac{q^2 - \alpha^1}{q^2 - \alpha^1 + \alpha^2 - q^1} \in (0, 1).$$

Функция  $\int_{\tau_i}^t (\alpha_s^\varepsilon - q_s^\varepsilon) ds$  возрастает на  $[\tau_i, \tau_i + \varkappa\varepsilon]$  и убывает на  $[\tau_i + \varkappa\varepsilon, \tau_{i+1}]$ . Она неотрицательна на  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ , так как

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\alpha_s^\varepsilon - q_s^\varepsilon) ds = \varkappa\varepsilon(\alpha^2 - q^1) + (1 - \varkappa)\varepsilon(\alpha^1 - q^2) = 0$$

по определению  $\varkappa$ . Таким образом,  $(\alpha^\varepsilon, q^\varepsilon) \in \mathcal{A}(0)$ .

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (R(q_t^\varepsilon) - C(\alpha_t^\varepsilon)) dt &= \frac{R(q^1) - C(\alpha^2)}{\beta} (e^{-\beta\tau_i} - e^{-\beta(\tau_i + \varkappa\varepsilon)}) \\ &\quad + \frac{R(q^2) - C(\alpha^1)}{\beta} (e^{-\beta(\tau_i + \varkappa\varepsilon)} - e^{-\beta\tau_{i+1}}). \end{aligned}$$

Суммируя данные выражения, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\beta t} (R(q_t^\varepsilon) - C(\alpha_t^\varepsilon)) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon}} \left( \frac{R(q^1) - C(\alpha^2)}{\beta} (1 - e^{-\beta\varkappa\varepsilon}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{R(q^2) - C(\alpha^1)}{\beta} (e^{-\beta\varkappa\varepsilon} - e^{-\beta\varepsilon}) \right) \\ &= \frac{R(q^1) - C(\alpha^2)}{\beta} \varkappa + \frac{R(q^2) - C(\alpha^1)}{\beta} (1 - \varkappa) = \frac{\tilde{R}(\tilde{u}) - \tilde{C}(\tilde{u})}{\beta} = \tilde{v}(0), \end{aligned}$$

здесь в предпоследнем равенстве использовано (3.13).

Итак, стратегия (3.14), (3.15) является приближенно оптимальной:

$$v(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\beta t} (R(q_t^\varepsilon) - C(\alpha_t^\varepsilon)) dt.$$

Заметим также, что при этой стратегии уровень запаса  $X_t$  демонстрирует циклическое поведение и  $0 \leq X_t \leq \varkappa(\alpha^2 - q^1)\varepsilon$ .

### 3.4 Оптимальные стратегии в случае положительного начального запаса

Полное описание оптимальных стратегий дано в теореме 13. В доказательстве этой теоремы мы используем следующий результат.

Лемма 10. Пусть  $f$  удовлетворяет предположениям леммы 8, и пусть  $F$  — ко-счетное множество, где функция  $f^*$  является дифференцируемой. С учетом (3.5) положим

$$\{\hat{x}(z)\} = \{(f^*)'(z)\} = \arg \max_{x \in \mathbb{R}} \{xz - \text{co } f(x)\}, \quad z \in F.$$

Тогда

$$\widehat{x}(z) \in \text{dom } f, \quad \text{co } f(\widehat{x}(z)) = f(\widehat{x}(z)) \quad (4.1)$$

для  $z \in F$ .

Доказательство. Если (4.1) не выполняется, то из леммы 9 следует, что  $\text{co } f$  является аффинной в окрестности  $\widehat{x}(z)$ . Следовательно, множество  $\arg \max_{x \in \mathbb{R}} \{xz - \text{co } f(x)\}$  содержит эту окрестность, и  $z \notin F$ .  $\square$

Если  $\zeta = 0$ , то, по теореме 8,  $v$  является константой. Этот случай в некотором смысле тривиален, так как оптимальная стратегия для нулевого начального запаса  $X_0 = 0$  сохраняет это свойство и для  $X_0 > 0$ . Поэтому, мы будем предполагать что  $\zeta > 0$ .

Выпуклые функции  $\widehat{R}, \widehat{C}$  дифференцируемы ко-счетном подмножестве  $F$  отрезка  $(0, \zeta)$ . Следовательно, в силу (3.5) мы заключаем, что каждое из множеств

$$\widetilde{\mathcal{M}}_R(z) = \arg \max_{q \in \text{co } Q} \{\widetilde{R}(q) - qz\}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_C(z) = \arg \max_{\alpha \in \text{co } A} \{\alpha z - \widetilde{C}(\alpha)\}$$

содержит ровно одну точку:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_R(z) &= \arg \max_{q \in \text{co } Q} \{\widetilde{R}(q) - qz\} = \arg \max_{x \in \mathbb{R}} \{-zx - (-\widetilde{R}(x))\} = \partial(-\widetilde{R})^*(-z) \\ &= -\partial\widehat{R}(z) = \{-\widehat{R}'(z)\}, \\ \widetilde{\mathcal{M}}_C(z) &= \arg \max_{\alpha \in \text{co } A} \{z\alpha - \widetilde{C}(\alpha)\} = \partial C^*(z) = \{\widehat{C}'(z)\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

для  $z \in F$ . В (4.2) мы использовали равенство  $\widehat{R}(z) = (-R)^*(-z) = (-\widetilde{R})^*(-z)$ : см. (2.15).

Теорема 13. Пусть  $F \subset (0, \zeta)$  — ко-счетное множество, где выпуклые функции  $\widehat{R}, \widehat{C}$  дифференцируемы. Положим

$$\begin{aligned} \{\widehat{q}(z)\} &= \arg \max_{q \in \text{co } Q} \{\widetilde{R}(q) - qz\}, \quad \{\widehat{\alpha}(z)\} = \arg \max_{\alpha \in \text{co } A} \{\alpha z - \widetilde{C}(\alpha)\}, \quad z \in F, \\ \widehat{u} &\in \arg \max \{\widetilde{R}(u) - \widetilde{C}(u) : u \in \text{co } Q \cap \text{co } A\}. \end{aligned}$$

Для заданного начального запаса  $x > 0$  положим

$$\tau = \frac{1}{\beta} \ln \frac{v'(0)}{v'(x)}$$

и определим  $X$  уравнением

$$v'(X_t) = v'(x)e^{\beta t}, \quad t \in [0, \tau]. \quad (4.3)$$

Далее, положим  $\mathcal{T} = \{t \in [0, \tau] : v'(X_t) \in F\}$  и рассмотрим стратегию

$$\alpha_t^* = \widehat{\alpha}(v'(X_t)), \quad q_t^* = \widehat{q}(v'(X_t)), \quad t \in \mathcal{T}, \quad (4.4)$$

$$\alpha_t^* = q_t^* = \widehat{u}, \quad t > \tau. \quad (4.5)$$

На счетном множестве  $[0, \tau] \setminus \mathcal{T}$  значения  $\alpha_t^*$ ,  $q_t^*$  могут быть определены произвольным образом.

(i) Стратегия (4.4) является оптимальной для овыпукленной задачи (2.17).

(ii) Имеем

$$(\alpha_t^*, q_t^*) \in \text{dom } C \times \text{dom } R, \quad \widetilde{C}(\alpha_t^*) = C(\alpha_t^*), \quad \widetilde{R}(\alpha_t^*) = R(\alpha_t^*), \quad t \in \mathcal{T}. \quad (4.6)$$

(iii) Существуют  $q^i \in Q$ ,  $\alpha^i \in A$ ,  $i = 1, 2$  и  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\nu \in (0, 1)$  такие, что справедливы равенства (3.8), (3.9). Заменяя (4.5) статическим распределенным управлением

$$\bar{q}(dx) = \gamma \delta_{q^1}(dx) + (1 - \gamma) \delta_{q^2}(dx), \quad \bar{\alpha}(dx) = \nu \delta_{\alpha^1}(dx) + (1 - \nu) \delta_{\alpha^2}(dx), \quad (4.7)$$

получаем решение ослабленной задачи (2.18).

(iv) Если  $\mathcal{M}_\zeta \neq \emptyset$ , то заменяя (4.5) на

$$\widehat{u} \in \arg \max_{u \in Q \cap A} (R(u) - C(u)), \quad (4.8)$$

получаем оптимальное решение задачи (2.4).

Доказательство. Поскольку  $H$  дифференцируема на  $F$  и  $v' : (0, \infty) \mapsto (0, \zeta)$  является биекцией, то  $H'(v'(x))$  корректно определена на ко-счетном множестве  $(v')^{-1}(F) \subset (0, \infty)$ . Вторая производная  $v''$  существует п.в. на интервале  $(0, \infty)$ . По правилу дифференцирования сложной функции (см. [90, следствие 3.48]) из уравнения НЖВ следует что

$$\beta v'(x) = H'(v'(x))v''(x) \quad \text{п.в. на } (0, \infty). \quad (4.9)$$

Положим  $\widehat{q}(z) = -\widehat{R}'(z)$ ,  $\widehat{\alpha}(z) = \widehat{C}'(z)$ ,  $z \in F$ . Тогда

$$H'(z) = \widehat{R}'(z) + \widehat{C}'(z) = -\widehat{q}(z) + \widehat{\alpha}(z) < 0, \quad z \in F. \quad (4.10)$$

Формально используя  $\widehat{q}(v'(x))$ ,  $\widehat{\alpha}(v'(x))$  как управления с обратной связью, с помощью формул (4.9), (4.10) получаем

$$dt = \frac{dX_t}{\widehat{\alpha}(v'(X_t)) - \widehat{q}(v'(X_t))} = \frac{dX_t}{H'(v'(X_t))} = \frac{1}{\beta} d(\ln v'(X_t)).$$

Используя начальное условие  $X_0 = x$ , после интегрирования находим

$$t = \frac{1}{\beta} \ln \frac{v'(X_t)}{v'(x)}. \quad (4.11)$$

Функция

$$y \mapsto \frac{1}{\beta} \ln \frac{v'(y)}{v'(x)} : [0, x] \mapsto [0, \tau]$$



является биективной. Определим функцию  $t \mapsto X_t : [0, \tau] \mapsto [0, x]$  уравнением (4.3), которое идентично (4.11). Поскольку  $v'' < 0$  п.в., из леммы 7 следует, что строго убывающая функция  $t \mapsto X_t$  абсолютно непрерывна.

Докажем теперь что стратегия (4.4), (4.5) является оптимальной для овыпукленной задачи (2.17). Так как  $v'$  абсолютно непрерывна (см. теорему 8), то функция  $\ln v'(y)$  также абсолютно непрерывна на отрезке  $[0, x]$ . Следовательно,

$$\ln v'(x) - \ln v'(y) = \int_y^x \frac{d}{dz} \ln v'(z) dz = \int_y^x \frac{v''(z)}{v'(z)} dz = \beta \int_y^x \frac{dz}{H'(v'(z))}, \quad y \in [0, x]$$

и

$$\frac{1}{\beta} \ln \frac{v'(x)}{v'(X_t)} = -t = - \int_{X_t}^x \frac{dz}{H'(v'(z))}, \quad t \in [0, \tau]. \quad (4.12)$$

Из (4.12) по правилу дифференцирования сложной функции [90, следствие 3.48] следует, что

$$\dot{X}_t = H'(v'(X_t)) = \hat{\alpha}(v'(X_t)) - \hat{q}(v'(X_t)) = \alpha_t^* - q_t^* \quad \text{п.в. на } [0, \tau].$$

Здесь мы используем (4.10) и (4.4). Для  $t > \tau$  соотношение  $\dot{X}_t = \alpha_t^* - q_t^* = 0$  выполняется очевидным образом. Мы заключаем, что стратегия  $(\alpha^*, q^*)$  допустима, так как она порождает неотрицательный фазовый процесс  $X = X^{x, \alpha^*, q^*}$ .

Чтобы доказать оптимальность стратегии  $(\alpha^*, q^*)$  достаточно установить, что функция

$$W(t) = \int_0^t e^{-\beta s} (\tilde{R}(q_s^*) - \tilde{C}(\alpha_s^*)) ds + e^{-\beta t} v(X_t^{x, \alpha^*, q^*}) \quad (4.13)$$

является константой, так как в этом случае

$$W(0) = v(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = \int_0^\infty e^{-\beta s} (\tilde{R}(q_s^*) - \tilde{C}(\alpha_s^*)) ds.$$

Дифференцируя (4.13), в силу (4.4) получаем

$$\begin{aligned} \dot{W} &= e^{-\beta t} \left( \tilde{R}(q_t^*) - \tilde{C}(\alpha_t^*) - \beta v(X_t^{x, \alpha^*, q^*}) + v'(X_t^{x, \alpha^*, q^*})(\alpha_t^* - q_t^*) \right) \\ &= e^{-\beta t} \left( -\beta v(X_t^{x, \alpha^*, q^*}) + \hat{R}(v'(X_t^{x, \alpha^*, q^*})) + \hat{C}(v'(X_t^{x, \alpha^*, q^*})) \right) \\ &= e^{-\beta t} \left( -\beta v(X_t^{x, \alpha^*, q^*}) + H(v'(X_t^{x, \alpha^*, q^*})) \right) = 0 \quad \text{п.в. на } (0, \tau). \end{aligned}$$

Для  $t > \tau$  имеем  $X_t^{x, \alpha^*, q^*} = 0$ ,  $\alpha_t^* = q_t^* = \hat{u}$  и

$$W(t) = \int_0^\tau e^{-\beta s} (\tilde{R}(q_s^*) - \tilde{C}(\alpha_s^*)) ds + \frac{1}{\beta} e^{-\beta \tau} (\tilde{R}(\hat{u}) - \tilde{C}(\hat{u})),$$

так как  $-e^{-\beta t} (\tilde{R}(\hat{u}) - \tilde{C}(\hat{u}))/\beta + e^{-\beta t} v(0) = 0$  в силу оптимальности  $\hat{u}$  для нулевого начального запаса: см. теорему 11.

Так как  $v'(X_t) \in F$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , то по лемме 10 заключаем, что соотношения (4.6) справедливы. Отсюда вытекает, что

$$v(x) = \int_0^\tau e^{-\beta s} (R(q_s^*) - C(\alpha_s^*)) ds + e^{-\beta \tau} v(0)$$

так как  $W$  — константа. Из теорем 12 и 11 следует, что стратегии (4.4), (4.7) и (4.4), (4.8) (при условии  $\mathcal{M}_\zeta \neq \emptyset$ ) дают то же самое значение целевого функционала, что и (4.4), (4.5). Следовательно, они являются оптимальными для задач (2.18) и (2.4) соответственно.  $\square$

Заметим, что в силу (4.10) фазовый процесс  $X^{x, \alpha^*, q^*}$ , порожденный (4.4), является строго убывающим на  $(0, \tau)$ . В случае  $\mathcal{M}_\zeta = \emptyset$  можно использовать также приближенно оптимальную стратегию (3.14), (3.15) на  $(\tau, \infty)$  вместо оптимальной распределенной стратегии (4.7)

### 3.5 Случай строго вогнутого мгновенного дохода и линейной функции затрат

Пусть  $Q = [0, \bar{q}]$ ,  $A = [0, \bar{\alpha}]$ ,  $\bar{q}, \bar{\alpha} > 0$ . Предположим что  $R$  дифференцируема и строго вогнута, и пусть  $C = c\alpha$ ,  $c > 0$ . Оптимальная стратегия полностью описывается функциями  $\hat{q}(v'(x))$ ,  $\hat{\alpha}(v'(x))$  и значением  $\hat{u}$ , указанным в теореме 13.

Имеем

$$H(z) = \sup_{q \in [0, \bar{q}]} (R(q) - qz) + \sup_{\alpha \in [0, \bar{\alpha}]} (\alpha z - C(\alpha)) = \hat{R}(z) + \bar{\alpha}(z - c)^+, \quad x^+ = \max\{0, x\}.$$

Так как  $\mathcal{M}_R(z)$  содержит в точности один элемент  $\hat{q}(z)$ , то функция  $\hat{R}$  является непрерывно дифференцируемой (см. [93, теорема 25.5]), и  $\hat{q}(z) = -\hat{R}'(z)$  — непрерывна.

Если  $R'(0) \leq 0$ , то  $\hat{q}(z) = 0$ ,  $z \geq 0$ , и  $\zeta = \min \mathcal{M}_H = \{0\}$ . Из теоремы 8 следует, что  $v(x) = H(0)/\beta = 0$ , и задача тривиальна. Таким образом, мы можем предполагать, что  $R'(0) > 0$ .

Вычисление оптимальной статической стратегии (3.1) для нулевого оптимального запаса несложно:

$$\{\hat{u}\} = \arg \max_{u \in [0, \bar{\alpha} \wedge \bar{q}]} (R(u) - cu) = \begin{cases} 0, & R'(0) \leq c, \\ (R')^{-1}(c), & R'(0) > c, R'(\bar{\alpha} \wedge \bar{q}) < c, \\ \bar{\alpha} \wedge \bar{q}, & R'(\bar{\alpha} \wedge \bar{q}) \geq c. \end{cases}$$

Далее, из формулы

$$H'(z) = \begin{cases} -\widehat{q}(z), & z \in (0, c), \\ \bar{\alpha} - \widehat{q}(z), & z > c \end{cases} \quad (5.1)$$

следует, что  $\widehat{q}$  — неубывающая функция, так как  $H$  выпукла. Ясно, что  $\lim_{z \rightarrow +\infty} \widehat{q}(z) = 0$  (и  $\widehat{q}(z) = 0$  для достаточно больших  $z$ , если  $R'(0) < +\infty$ ). Из (5.1) заключаем, что

$$\zeta = \min \mathcal{M}_H = \inf\{z \geq 0 : \widehat{q}(z) = 0\} \wedge \inf\{z \geq c : \widehat{q}(z) \leq \bar{\alpha}\} > 0.$$

Функция  $\widehat{q}(v'(x))$ ,  $x \in (0, \infty)$  является неубывающей и

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \widehat{q}(v'(x)) &= \widehat{q}(v'(0)) = \widehat{q}(\zeta) = \widehat{u}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \widehat{q}(v'(x)) &= \widehat{q}(0) = \arg \max_{q \in [0, \bar{q}]} R(q) \end{aligned}$$

в силу теорем 8 и 10.

Функция  $\widehat{\alpha}(v'(x))$ ,  $x \in (0, \infty)$  является кусочно-постоянной:

$$\widehat{\alpha}(v'(x)) = \begin{cases} \bar{\alpha}, & v'(x) > c, \\ 0, & v'(x) < c. \end{cases}$$

В частности,  $\widehat{\alpha}(v'(x)) = 0$ ,  $x > 0$ , если  $\zeta = v'(0) < c$ . Заметим, что в противоположном случае, когда стоимость производства  $c$  ниже чем предельная непрямая полезность нулевого запаса:  $\zeta = v'(0) > c$ , производство должно запускаться, когда запас товара уменьшится до уровня  $\widehat{x} > 0$ , определяемого уравнением  $v'(\widehat{x}) = c$ . Однако, после запуска производства уровень товарного запаса продолжает уменьшаться и достигает нуля за конечное время  $\tau$ .

Из (4.9) следует, что  $v$  дважды непрерывно дифференцируема на  $(0, \widehat{x}) \cup (\widehat{x}, +\infty)$ , и  $v'' = \beta v' / H'(v')$  на этом множестве. Однако,  $v''$  не является непрерывной в точке  $\widehat{x}$ :

$$v''(\widehat{x} + 0) = \frac{\beta c}{H'(c+)} \neq v''(\widehat{x} - 0) = \frac{\beta c}{H'(c-)}.$$

Таким образом, в предположениях теоремы 8 функция  $v''$  может быть разрывной.

### 3.6 Пример Арвана-Мозеса

В примере [14] спрос является линейным, следовательно получаемый мгновенный доход выглядит следующим образом:

$$R(q) = (A - Bq)q, \quad q \in [0, A/B].$$

Функция затрат

$$C(\alpha) = \alpha^3/3 - K\alpha^2 + K^2\alpha, \quad \alpha \geq 0$$

выпукла на  $[0, K]$  и вогнута на  $[K, \infty)$ . Здесь предполагается что  $A, B, K > 0$ . Имеем,

$$R'(q) = A - 2Bq, \quad R''(q) = -2B,$$

$$C'(\alpha) = (\alpha - K)^2, \quad C''(\alpha) = 2(\alpha - K).$$

Заметим, что функция  $C$  строго возрастающая и 1-коэрцитивна. Функция  $R$  строго вогнута.

Возьмем наибольшее  $s$ , для которого  $s\alpha \leq C(\alpha)$ ,  $\alpha \geq 0$ . Тогда

$$s = \inf_{\alpha \geq 0} \{\alpha^2/3 - K\alpha + K^2\} = \frac{K^2}{4},$$

где инфимум достигается при  $\alpha_0 = 3K/2$ . Легко видеть, что

$$\tilde{C}(\alpha) = (\text{co } C)(\alpha) = \begin{cases} K^2\alpha/4, & \alpha \in [0, 3K/2], \\ C(\alpha), & \alpha \geq 3K/2. \end{cases}$$

Для овыпукленной задачи (2.17) оптимальная статическая стратегия для нулевого начального запаса имеет вид

$$\hat{u} \in \arg \min_{u \in [0, A/B]} (R(u) - \tilde{C}(u)).$$

Из равенств

$$R'(u) - \tilde{C}'(u) = \begin{cases} A - 2Bu - K^2/4, & u < 3K/2, \\ A - 2Bu - (u - K)^2, & u > 3K/2 \end{cases}$$

следует, что

$$\hat{u} = \begin{cases} 0, & A \leq K^2/4, \\ (A - K^2/4)/(2B), & K^2/4 \leq A \leq 3BK + K^2/4, \\ -B + K + \sqrt{B^2 - 2BK + A}, & A \geq 3BK + K^2/4. \end{cases} \quad (6.1)$$

Для  $A \leq K^2/4$  и  $A \geq 3BK + K^2/4$  имеем  $\tilde{C}(\hat{u}) = C(\hat{u})$ . Следовательно, в этих случаях  $\alpha_t = q_t = \hat{u}$  является оптимальным решением исходной задачи (3.3). Если

$$\frac{K^2}{4} < A < 3BK + \frac{K^2}{4}, \quad (6.2)$$

то  $\hat{u}$  принадлежит интервалу  $(0, 3K/2)$ , где  $\tilde{C}$  линейна и  $\tilde{C} < C$ . В этом случае оптимальная распределенная стратегия производства определяется формулами (3.8) – (3.10):

$$\bar{\alpha}_t(dx) = \nu\delta_0 + (1 - \nu)\delta_{3K/2}, \quad (1 - \nu)\frac{3K}{2} = \hat{u} = \left(A - \frac{K^2}{4}\right) \frac{1}{2B}. \quad (6.3)$$

Таким образом, для нулевого начального запаса обычная статическая стратегия не является оптимальной, если и только если выполнено условие (6.2). В этом случае вместо распределенной стратегии (6.3) можно использовать приближенно оптимальную стратегию (3.14), (3.15). При использовании этой стратегии запас остается близким к 0:  $X_t \leq b\varepsilon$ ,  $b > 0$ , и демонстрирует циклическое поведение накопления-сокращения, описанное в [14]. Однако, оно может не производить дисконтированную прибыль близкую к оптимальной, если циклы накопления-сокращения не малы. Также интересно отметить, что условие

$$K^2 < A < 3BK + \frac{K^2}{4},$$

весьма похожее на (6.2), было указано в работе [14].

Пусть  $z \geq 0$ . Обозначим через  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{q}$  точки максимума функций

$$z\alpha - \tilde{C}(\alpha) \rightarrow \max_{\alpha \geq 0}, \quad R(q) - zq \rightarrow \max_{q \in [0, A/B]}.$$

Имеем,

$$\hat{\alpha}(z) = \begin{cases} 0, & z \in [0, K^2/4), \\ K + \sqrt{z}, & z > K^2/4, \end{cases} \quad \hat{q}(z) = \begin{cases} (A - z)/(2B), & z \in [0, A], \\ 0, & z \geq A, \end{cases} \quad (6.4)$$

и  $\hat{\alpha}(K^2/4) \in [0, 3K/2]$ . Найдем наименьшую точку минимума  $\zeta = \min \mathcal{M}_H$  гамильтониана

$$\begin{aligned} H(z) &= \sup_{q \in [0, A/B]} \{(A - Bq)q - zq\} + \sup_{\alpha \geq 0} \{z\alpha - \tilde{C}(\alpha)\} \\ &= \frac{(z - A)^2}{4B} I_{\{z < A\}} + (z\hat{\alpha}(z) - C(\hat{\alpha}(z))) I_{\{z > K^2/4\}}, \quad z \geq 0. \end{aligned}$$

Если  $A \leq K^2/4$ , то  $\zeta = A$ . В противном случае, рассмотрим

$$H'(z) = \frac{z - A}{2B} + \hat{\alpha}(z) = \frac{z - A}{2B} + K + \sqrt{z}, \quad z \in \left(\frac{K^2}{4}, A\right).$$

Поскольку  $\lim_{z \nearrow A} H'(z) > 0$ , то отсюда следует, что  $\zeta \in (K^2/4, A)$ , если и только если

$$\lim_{z \searrow K^2/4} H'(z) = \frac{1}{2B} \left( \frac{K^2}{4} - A + 3BK \right) < 0$$

При этом условии  $\zeta$  определяется уравнением  $H'(\zeta) = 0$ ,  $\zeta \in (K^2/4, A)$ . В противном случае,  $\zeta = K^2/4$ . Объединяя все случаи, рассмотренные выше, получаем

$$\zeta = \begin{cases} A, & A \leq K^2/4, \\ K^2/4, & K^2/4 \leq A \leq K^2/4 + 3BK, \\ (-B + \sqrt{B^2 - 2BK + A})^2, & A \geq K^2/4 + 3BK. \end{cases}$$

Заметим, что эти три случая совпадают со случаями, указанными в (6.1).

Рассмотрим стратегии с обратной связью  $\widehat{q}(v'(x))$ ,  $\widehat{\alpha}(v'(x))$ , определенные в теореме 13. Так как  $v'(x) \leq v'(0) = \zeta$  и  $\zeta \leq A$  для любого набора параметров, то справедливо следующее равенство

$$\widehat{q}(v'(x)) = \frac{A - v'(x)}{2B}, \quad x > 0.$$

Следовательно,  $\widehat{q}(v'(x))$ ,  $x > 0$  является строго возрастающей положительной функцией.

Кроме того, легко видеть, что

$$\lim_{x \searrow 0} \widehat{q}(v'(x)) = \frac{A - \zeta}{2B} = \widehat{u}.$$

Если  $A \leq K^2/4 + 3BK$ , то  $\zeta \leq K^2/4$  и

$$\widehat{\alpha}(v'(x)) = 0, \quad x > 0.$$

Если  $A > K^2/4 + 3BK$ , то  $v'(0) = \zeta > K^2/4$ , и существует единственная точка  $\widehat{x} > 0$  такая, что  $v'(\widehat{x}) = K^2/4$ . В этом случае

$$\widehat{\alpha}(v'(x)) = \begin{cases} K + \sqrt{v'(x)}, & x < \widehat{x}, \\ 0, & x > \widehat{x}. \end{cases}$$

Таким образом, имеются три случая.

(i) Если  $A \leq K^2/4$ , то фирма должна оптимально продать начальный запас:

$$\dot{X}_t = -\widehat{q}(v'(X_t)) = -\frac{A - v'(X_t)}{2B} < 0, \quad X_t > 0.$$

Производство не отсутствует.

(ii) Если  $K^2/4 < A < K^2/4 + 3BK$ , то производство начинается после продажи начального запаса, и распределенная производственная стратегия (6.3) должна соответствовать спросу  $\widehat{q}(\zeta) = \widehat{u} = (A - K^2/4)/2B$ .

(iii) Если  $A \geq K^2/4 + 3BK$ , то производство начинается после того, как уровень товарного запаса падает ниже  $\widehat{x}$ . При этом товарный запас продолжает уменьшаться до 0 и стабилизируется на этом уровне. Оптимальные спрос и интенсивность производства соответствующего устойчивого режима равны значению  $\widehat{u}$ , определенному в (6.1).

Наконец, чтобы проиллюстрировать результат теоремы 10 покажем, что  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$ , если и только если выполняется условие (6.2). Пусть  $\varphi(\alpha, z) = z\alpha - C(\alpha)$ . Рассматривая

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\alpha, z) = z - (\alpha - K)^2, \quad \alpha > 0,$$

закключаем, что  $\varphi(\cdot, z)$  имеет две локальных точки максимума  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = K + \sqrt{z}$  при  $z \in (0, K^2)$  и точку глобального максимума  $\alpha_2 = K + \sqrt{z}$  при  $z \geq K^2$ . Далее,

$$\frac{d}{dz}\varphi(\alpha_2(z), z) = \alpha_2(z) + (z - (\alpha_2(z) - K)^2)\alpha_2'(z) = \alpha_2(z) > 0, \quad z > 0$$

и  $\varphi(\alpha_2(K^2/4), K^2/4) = \varphi(3K/2, K^2/4) = 0$ . Отсюда следует что

$$\varphi(\alpha_1(z), \eta) = 0 > \varphi(\alpha_2(z), z) \iff z < K^2/4$$

и

$$\mathcal{M}_C(z) = \arg \max_{\alpha \geq 0} (z\alpha - C(\alpha)) = \begin{cases} 0, & z \in [0, K^2/4), \\ \{0, 3K/2\}, & z = K^2/4, \\ K + \sqrt{z}, & z > K^2/4. \end{cases}$$

Ясно, что  $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$ ,  $\eta \geq 0$ , если и только если  $\hat{q}(\eta) \notin \mathcal{M}_C(\eta)$ ,  $\eta \geq 0$ , где  $\hat{q}(\eta)$  определяется уравнением (6.4). Легко видеть, что этот случай имеет место, если и только если  $A > K^2/4$

и

$$\hat{q}(K^2/4) = \frac{A - K^2/4}{2B} < \frac{3K}{2},$$

что равносильно правому неравенству (6.2). Таким образом, из теоремы 10 опять следует, что не существует оптимальной обычной стационарной стратегии для нулевого начального товарного запаса, если и только если выполнены неравенства (6.2).

## Глава 4

# Задача о позиционировании случайного объекта за счет однократного изменения приращений его траектории

### 4.1 Введение

В работе рассматривается одна из версий задачи позиционирования объекта, находящегося под воздействием случайных факторов. Цель состоит в том, чтобы минимизировать отклонение терминального положения объекта от заданного положения за счет однократного изменения величины приращений соответствующего случайного процесса в выбранный момент времени. При этом предполагается, что можно изменить интенсивность влияния случайных факторов, а также «направление» влияния. В качестве примера можно привести изменение положения паруса лодки, находящейся под воздействием случайного ветра. Другой пример - задача хеджирования европейского опциона в средне-квадратическом при условии, что портфель может быть изменен лишь один раз (отметим, что подобная задача при  $n$  - кратном изменении портфеля рассматривалась в работах [1], [2]). В следующем разделе приводится постановка задачи и указывается, что она сводится к задаче оптимальной остановки. При этом требуется определить лишь оптимальное время изменения приращений процесса, а величина изменения определяется автоматически. В разделе 4.3 получены нижние оценки границы области продолжения в случаях, когда рассматриваемый процесс представляет собой броуновское движение со сносом и геометрическое броуновское движение. В разделе 4.4 приводятся результаты численных расчетов, которые сопоставляются с указанными оценками.



## 4.2 Постановка задачи и ее сведение к задаче оптимальной остановки

Считая, что у рассматриваемого объекта нет внутренних источников энергии, мы отождествляем воздействующий на него случайный процесс с самим объектом. Рассмотрим диффузионный процесс

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \quad S_0 = \text{const},$$

где  $W$  — стандартный винеровский процесс. Будем считать, что положение объекта имеет вид

$$X_T = X_0 + \gamma_0(S_\tau - S_0) + \gamma_\tau(S_T - S_\tau).$$

Здесь  $X_0, \gamma_0$  — начальные положение и интенсивность воздействия, а стратегия изменения интенсивности воздействия представлена парой  $(\gamma_\tau, \tau)$ , где  $\tau$  момент остановки относительно естественной фильтрации  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_s)_{s \in [0, T]}$  винеровского процесса,  $\gamma_\tau$  —  $\mathcal{F}_\tau$  — измеримая случайная величина (в финансовой интерпретации  $X$  — капитал игрока,  $\gamma$  — его портфель,  $S$  — цена рискованного актива). Цель состоит в минимизации среднеквадратического отклонения положения объекта от заданного фиксированного уровня  $H$  в терминальный момент времени  $T$ :

$$\mathbb{E}[(X_T - H)^2] \rightarrow \min_{(\gamma_\tau, \tau)}. \quad (2.1)$$

Данная задача сводится к задаче оптимальной остановки. Действительно, используя представление процесса  $X_T$  и телескопическое свойство условного математического ожидания, находим:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_T - H)^2] &= \mathbb{E}[(X_0 + \gamma_0(S_\tau - S_0) + \gamma_\tau(S_T - S_\tau) - H)^2] = \\ &= \mathbb{E}[(S_T - S_\tau)^2 | \mathcal{F}_\tau] \gamma_\tau^2 - 2(\gamma_0(S_\tau - S_0) - \hat{H}) \mathbb{E}[(S_T - S_\tau) | \mathcal{F}_\tau] \gamma_\tau \\ &\quad + (\gamma_0 S_\tau - \hat{H})^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\hat{H} = H - X_0 + \gamma_0 S_0$ . Если  $\mathbb{E}[(S_T - S_\tau)^2 | \mathcal{F}_\tau] > 0$ , то функция (2.2) имеет единственный минимум по  $\gamma_\tau$ , который достигается в точке

$$\gamma_\tau^* = (\hat{H} - \gamma_0 S_\tau) \frac{\mathbb{E}[(S_T - S_\tau) | \mathcal{F}_\tau]}{\mathbb{E}[(S_T - S_\tau)^2 | \mathcal{F}_\tau]}. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2), получаем задачу оптимальной остановки:

$$\mathbb{E} \left[ (\hat{H} - \gamma_0 S_\tau)^2 \left( 1 - \frac{\mathbb{E}[(S_T - S_\tau)^2 | \mathcal{F}_\tau]}{\mathbb{E}[(S_T - S_\tau)^2 | \mathcal{F}_\tau]} \right) \right] \rightarrow \min_{\tau}. \quad (2.4)$$

Заметим, что если  $\mathbb{E}((S_T - S_\tau)^2 | \mathcal{F}_\tau) = 0$ , то выражение (2.4) соответствует (2.2) с учетом обычного соглашения  $0/0 = 0$ . Преобразуем выражение (2.4) для моделей броуновского движения со сносом и геометрического броуновского движения. В первом случае  $dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((S_T - S_\tau) | \mathcal{F}_\tau) &= \mu(T - \tau), \\ \mathbb{E}((S_T - S_\tau)^2 | \mathcal{F}_\tau) &= (\mu(T - \tau))^2 + \sigma^2(T - \tau).\end{aligned}\quad (2.5)$$

Во втором  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((S_T - S_\tau) | \mathcal{F}_\tau) &= S_\tau(e^{\mu(T-\tau)} - 1), \\ \mathbb{E}((S_T - S_\tau)^2 | \mathcal{F}_\tau) &= S_\tau^2(e^{(2\mu+\sigma^2)(T-\tau)} - 2e^{\mu(T-\tau)} + 1).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Здесь  $\mu \in \mathbb{R}$  и  $\sigma > 0$  — некоторые константы. В обоих случаях задача (2.4) принимает вид

$$\mathbb{E}[h(S_\tau)\phi(\tau)] \rightarrow \min_\tau, \quad (2.7)$$

где  $h(S_t) = (\hat{H} - \gamma_0 S_t)^2$ , а

$$\phi(t) = \frac{\sigma^2}{\mu^2(T-t) + \sigma^2} \quad (2.8)$$

для модели броуновского движения со сносом, и

$$\phi(t) = \frac{e^{2\mu(T-t)}(e^{\sigma^2(T-t)} - 1)}{e^{(2\mu+\sigma^2)(T-t)} - 2e^{\mu(T-t)} + 1} \quad (2.9)$$

для модели геометрического броуновского движения. Заметим, что функция (2.9) имеет устранимую особенность в точке  $T$ .

### 4.3 Оценка границы области остановки

Для оценки областей остановки перейдем к интегральной форме задачи (2.7). Для этого, применим к  $h(S_\tau)\phi(\tau)$  интегральную формулу Ито в пределах от 0 до  $\tau$ :

$$\begin{aligned}h(S_\tau)\phi(\tau) &= h(S_0)\phi(0) + \int_0^\tau h(S_t)\phi'(t)dt + \int_0^\tau h'(S_t)\phi(t)dS_t \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\tau h''(S_t)\phi(t)\sigma^2(S_t)dt = h(S_0)\phi(0) + \int_0^\tau h(S_t)\phi'(t) \\ &+ h'(S_t)\phi(t)\mu(S_t) + \frac{1}{2}h''(S_t)\phi(t)\sigma^2(S_t)dt + \int_0^\tau h'(S_t)\phi(t)\sigma(S_t)dW_t\end{aligned}$$

Заметим, что  $\mathbb{E} \int_0^T (h'(S_t))^2 \sigma^2(S_t) \phi^2(t) dt < \infty$ , так как  $(h'(S_t))^2 \sigma^2(S_t)$  является полиномом не более чем четвертой степени от случайной величины  $S_t$ , и  $\phi(t)$  — непрерывная функция.

Следовательно, процесс  $M_t = \int_0^t h'(S_t)\sigma(S_t)\phi(t)dW_t$  является мартингалом, и  $EM_t = 0$ . Таким образом, задача (2.7) принимает вид

$$h(S_0)\phi(0) + E \left[ \int_0^\tau F(t, S_t)dt \right] \rightarrow \min_\tau, \quad (3.1)$$

где

$$F(t, s) = h(s)\phi'(t) + h'(s)\phi(t)\mu(s) + \frac{1}{2}h''(s)\phi(t)\sigma^2(s). \quad (3.2)$$

Пусть  $\tau$  любой момент остановки. Положим

$$\tau^* = \inf_t \{t \geq 0 : F(t, S_t) \geq 0\} \wedge T.$$

Тогда  $\int_0^\tau F(t, S_t)dt \geq \int_0^{\tau^*} F(t, S_t)dt$  на множестве  $\{\tau < \tau^*\}$ , и справедливо неравенство

$$\int_0^{\tau \vee \tau^*} F(t, S_t)dt \leq \int_0^\tau F(t, S_t)dt.$$

Это позволяет сузить интервал поиска оптимального момента  $\tau$  с  $[0, T]$  до  $[\tau^*, T]$ . Рассмотрим «область продолжения»  $\mathcal{C} = \{(t, s) : F(t, s) \leq 0\}$ , определяющую момент остановки  $\tau^*$ . Сразу заметим, что если  $\mu = 0$ , то  $\tau^* = 0$  так как  $F(t, s) > 0$  для модели броуновского движения со сносом, и  $F(t, s) > 0$  при  $s > 0$  для модели геометрического броуновского движения. Отметим также, что при этом  $\gamma_\tau^* = 0$  при любом  $\tau$  в силу (2.3) и (2.5), (2.6). Далее рассматривается случай  $\mu \neq 0$ . Для исследуемых моделей, функция  $F(t, s)$  является квадратической:  $F(t, s) = a(t)s^2 + b(t)s + c(t)$ . В случае броуновского движения со сносом имеем:

$$\begin{aligned} a(t) &= \gamma_0^2 \phi'(t) > 0, \\ b(t) &= 2\gamma_0^2 \mu \phi(t) - 2H\gamma_0 \phi'(t), \\ c(t) &= (\gamma_0^2 \sigma^2 - 2H\gamma_0 \mu) \phi(t) + H^2 \phi'(t). \end{aligned}$$

Вычислим дискриминант

$$\begin{aligned} D(t) &= b^2(t) - 4a(t)c(t) = (2\gamma_0^2 \mu \phi(t) - 2H\gamma_0 \phi'(t))^2 \\ &\quad - 4\gamma_0^2 \phi'(t)[(\gamma_0^2 \sigma^2 - 2H\gamma_0 \mu) \phi(t) + H^2 \phi'(t)] \\ &= 4\gamma_0^4 [\mu^2 \phi^2(t) - \sigma^2 \phi(t) \phi'(t)]. \end{aligned}$$

Заметив, что  $\phi^2(t) = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \phi'(t)$ , получаем

$$D = 4\gamma_0^4 \sigma^2 \phi'(t) [1 - \phi(t)] \geq 0.$$

Таким образом, уравнение  $F(t, s) = 0$  имеет два вещественных корня  $s_1(t) < s_2(t)$ ,  $t < T$ ;  $s_1(T) = s_2(T)$ , а область продолжения, определяющая момент  $\tau^*$ , имеет вид

$$\mathcal{C} = \{(t, s) : F(t, s) \leq 0\} = \{(t, s) : s_1(t) \leq s \leq s_2(t)\}.$$

Функции  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  монотонны на всем интервале  $[0, T]$ . Действительно,

$$\begin{aligned} s_{1,2}(t) &= \frac{-b(t) \pm \sqrt{D(t)}}{2a(t)} = \frac{\hat{H}}{\gamma_0} - \frac{\mu\phi(t)}{\phi'(t)} \pm \sigma \sqrt{\frac{1 - \phi(t)}{\phi'(t)}} = \\ &= \frac{\hat{H}}{\gamma_0} - \frac{\sigma^2}{\mu} - \mu(T - t) \pm \sqrt{\mu^2(T - t)^2 + \sigma^2(T - t)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Следовательно,

$$s'_{1,2}(t) = \mu \mp \frac{1}{2} \frac{2\mu^2(T - t) + \sigma^2}{\sqrt{\mu^2(T - t)^2 + \sigma^2(T - t)}}; \quad (3.4)$$

Из неравенства

$$\left(\mu(T - t) + \frac{\sigma^2}{2\mu}\right)^2 = \mu^2(T - t)^2 + \sigma^2(T - t) + \frac{\sigma^4}{4\mu^2} > \mu^2(T - t)^2 + \sigma^2(T - t)$$

вытекает, что  $s'_1(t) < 0$ ,  $s'_2(t) > 0$  при  $\mu > 0$  и  $s'_1(t) > 0$ ,  $s'_2(t) < 0$  при  $\mu < 0$ . Для геометрического броуновского движения со сносом:

$$\begin{aligned} a(t) &= \gamma_0^2((\sigma^2 + 2\mu)\phi(t) + \phi'(t)), \\ b(t) &= -2\hat{H}\gamma_0(\mu\phi(t) + \phi'(t)), \quad c(t) = H^2\phi'(t), \end{aligned}$$

Рассмотрим дискриминант

$$D(t) = b^2(t) - 4a(t)c(t) = 4H^2\gamma_0^2\phi(t)[\mu^2\phi(t) - \sigma^2\phi'(t)].$$

Границы области  $\mathcal{C}$  имеют вид

$$s_{1,2}(t) = \frac{H}{\gamma_0} \frac{\mu\phi(t) + \phi'(t) \pm \sqrt{\mu^2\phi^2(t) - \sigma^2\phi(t)\phi'(t)}}{(\sigma^2 + 2\mu)\phi(t) + \phi'(t)}. \quad (3.5)$$

С использованием правила Лопиталья, после простых, но громоздких вычислений находим, что  $D(T) = \lim_{t \rightarrow T} D(t) = 0$ . Таким образом,  $s_1(T) = s_2(T)$ . Численные эксперименты показывают, что, как и в случае броуновского движения со сносом, верхняя граница области  $\mathcal{C}$  является графиком монотонно убывающей функции, а нижняя — графиком монотонно возрастающей функции.

## 4.4 Разностная схема

Введем функцию Беллмана

$$v(t, s) = \inf_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E} [h(S_\tau^{t,s})\phi(\tau)] \quad (4.1)$$

где  $\mathcal{T}_t$  множество моментов остановки, со значениями на интервале  $[t, T]$ , и  $S^{t,s}$  удовлетворяет условию  $S_t^{t,s} = s$ . Согласно общей теории оптимальной остановки  $v$  является вязкостным решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\min \left\{ v_t - [\mu(x)v_s + \frac{1}{2}\sigma^2(s)v_{ss}], h(s)\phi(t) - v \right\} = 0, \quad (t, s) \in G, \quad (4.2)$$

см., напр., [3, теорема 7.7]. Кроме того, очевидно, что  $v$  удовлетворяет граничному условию:

$$v(T, s) = h(s)\phi(T). \quad (4.3)$$

Используемые здесь и далее понятия теории вязкостных решений являются стандартными и изложены во многих источниках: см., в частности, [4], [5], [3]. Для модели броуновского движения со сносом,  $G = [0, T] \times \mathbb{R}$ ,  $\mu, \sigma$  являются константами. В модели геометрического броуновского движения,  $G = [0, T] \times [0, +\infty)$ ,  $\mu(s) = \mu s$ ,  $\sigma(s) = \sigma s$ . Исходя из (4.1), нетрудно показать, что функция  $v$ , как и  $h$  имеет квадратичный рост:  $v(t, s) \leq c(1 + s^2)$ .

Напомним, что если для любых (полу)непрерывного сверху) вязкостного субрешения  $u$  и (полу)непрерывного снизу) вязкостного суперрешения  $v$ , удовлетворяющих условию полиномиального роста, и таких что  $u(T, s) \leq v(T, s)$ , справедливо неравенство  $u(t, s) \leq v(t, s)$ ,  $(t, s) \in G$ , то говорят что имеет место теорема сравнения. Для задачи (4.2) (4.3) теорема сравнения может быть доказана с использованием методов [3, Теорема 7.8].

Как известно (см. [6]) наличие теоремы сравнения гарантирует сходимость разностной схемы, при условии что последняя обладает свойствами аппроксимации, монотонности и устойчивости. Не вдаваясь в подробности, отметим лишь что приводимая ниже схема (относящаяся к известному классу схем [7]) обладает указанными свойствами. Проверка этого утверждения осуществляется стандартными средствами.

Рассмотрим прямоугольную сетку

$$\begin{aligned} \overline{G}_h &= \{(ih_1, jh_2) : 0 \leq i \leq I, J_{\min} \leq j \leq J_{\max}\}, \\ Ih_1 &= T, \quad h_2 J_{\min} = S_{\min}, \quad h_2 J_{\max} = S_{\max}. \end{aligned}$$

Здесь  $I, J, i, j$  — целые числа,  $h = (h_1, h_2)$  — шаг сетки. Узлы

$$z_{ij} = (ih_1, jh_2), \quad 0 \leq i < I, \quad J_{\min} < j < J_{\max}$$

назовем внутренними, а остальные узлы — граничными. Множества внутренних и граничных узлов обозначим через  $G_h$  и  $\partial G_h$  соответственно. Каждому внутреннему узлу поставим в соответствие уравнение для сеточной функции  $v_{ij} = v(z_{ij})$ :

$$0 = \min \left\{ \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_1} + \mu(s_j) \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{h_2} + \frac{\sigma^2(s_j)}{2} \frac{v_{i+1,j+1} - 2v_{i+1,j} + v_{i+1,j-1}}{h_2^2}, h(s_j)\phi(ih_1) - v_{i,j} \right\}.$$

Здесь  $s_j = jh_2$ , а уравнение справедливо как для случая броуновского движения со сносом, так и для геометрического броуновского движения соответственно. Отметим, что выбранный способ аппроксимации первой производной по пространственной переменной обеспечивает монотонность данной (явной) схемы. В граничных узлах ставится условие Дирихле

$$v_{ij} = h(s_j)\phi(ih_1), \quad z_{ij} = (ih_1, jh_2) \in \partial G_h. \quad (4.4)$$

Перейдем к описанию численных экспериментов. Для модели броуновского движения со сносом задача решалась при следующих входных данных:  $T = 10$ ,  $H = 4$ ,  $X_0 = 1$ ,  $S_0 = 10$ ,  $\gamma_0 = 2$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\sigma = 0.4$ . Граница области остановки (пунктирная линия) и её нижняя оценка (сплошная линия) представлены на рис. 4.1.

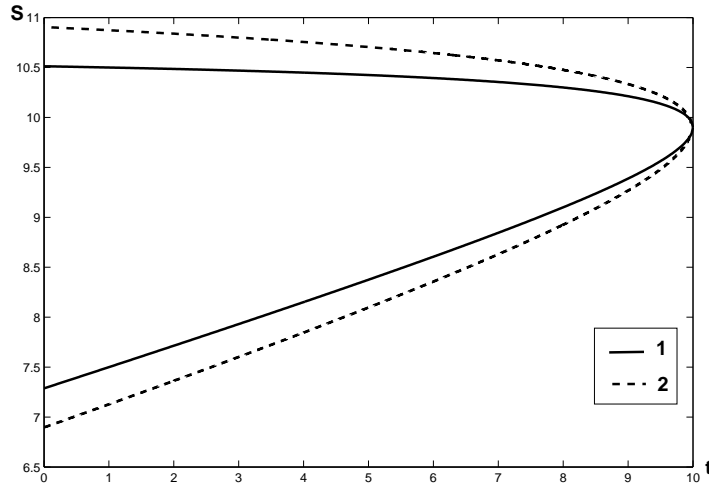


Рисунок 4.1: Граница области остановки и её нижняя оценка (3.3) для модели броуновского движения со сносом.

Можно отметить, что полученная в результате численных расчетов граница качественно ведет себя так же, как и её нижняя оценка. Величина погрешности зависит от параметров, но приведенная на рис. 4.1 картина является типичной. Отметим, что выражения

$$s_{1,2}(0) - S_0 = \frac{H - X_0}{\gamma_0} - \frac{\sigma^2}{\mu} - \mu T \pm \sqrt{\mu^2 T^2 + \sigma^2 T} \quad (4.5)$$

имеют при малых  $\mu \neq 0$  одинаковый знак, то есть  $S_0$  не попадает в область продолжения  $\mathcal{C}$ . Данный вывод подтверждается численными расчетами.

Для модели геометрического броуновского движения картина несимметрична и, в типичном случае, верхняя граница области остановки оценивается менее точно чем нижняя. Соответствующие графики, для входных данных:  $T = 10, H = 4, X_0 = 1, S_0 = 15, \gamma_0 = 0.2, \mu = 0.1, \sigma = 0.4$ , представлены на 4.2.

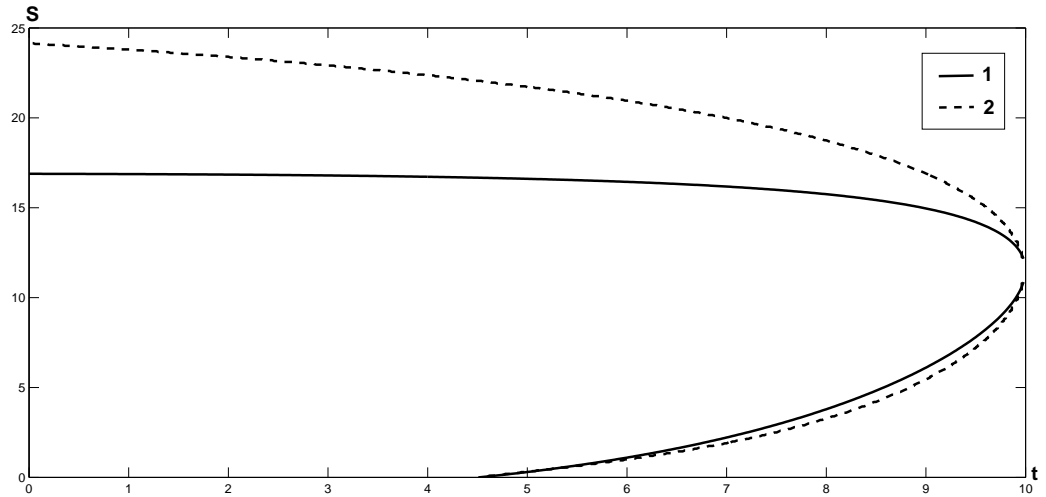


Рисунок 4.2: Граница области остановки и её нижняя оценка (3.5) для модели геометрического броуновского движения.

Отметим, что область остановки определяется лишь той частью границы, которая находится выше оси абсцисс. Таким образом, проведенные эксперименты позволяют сделать вывод о том, что полученные в разделе 4.3 оценки дают удовлетворительное качественное описание оптимальных областей остановки.

# Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. На основе анализа ...
2. Численные исследования показали, что ...
3. Математическое моделирование показало ...
4. Для выполнения поставленных задач был создан ...

И какая-нибудь заключающая фраза.



# Список рисунков

1.1	Графики сечений функции Беллмана $v(\cdot, x_2)$ , (a) $x_2 = -1.88$ , (b) $x_2 = 4.58$ . . .	33
1.2	График линии переключения $x^*(x_2)$ оптимальной стратегии $c^*$ выплаты дивидендов . . . . .	34
1.3	Графики сечений $\theta^*(\cdot, x_2)$ при $x_2 = 5$ . . . . .	34
1.4	Графики сечений $\theta^*(x_1, \cdot)$ при (a) $x_1 = 8.65$ , (b) $x_1 = 5$ . . . . .	35
1.5	Графики сечений $\alpha^*(\cdot, x_2)$ при (a) $x_2 = -4.17$ , (b) $x_2 = 18.92$ . . . . .	36
1.6	Линии уровня $\alpha^*$ , в случае одномерной модели с параметром $x_2$ . . . . .	36
2.1	Функция Беллмана (a) и её линии уровня (b) при $k = 2$ . . . . .	54
2.2	Оптимальное управление в устойчивом случае. . . . .	55
2.3	Оптимальное управление в неустойчивом случае. . . . .	56
2.4	Оптимальное управление в устойчивом случае, $k = 0.3$ . . . . .	58
2.5	Оптимальное управление в неустойчивом случае, $k = -0.3$ . . . . .	58
2.6	Функция Беллмана(a) и её линии уровня (b) при $k = 0.3$ . . . . .	59
2.7	Функция Беллмана(a) и её линии уровня (b) при $k = -0.3$ . . . . .	59
4.1	Граница области остановки и её нижняя оценка (3.3) для модели броуновского движения со сносом. . . . .	94
4.2	Граница области остановки и её нижняя оценка (3.5) для модели геометрического броуновского движения. . . . .	95

## Список таблиц

# Литература

1. Crandall Michael G, Lions P.-L. Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations // Mathematics of Computation. 1984. T. 43, № 167. С. 1–19.
2. Jensen R. Uniqueness criteria for viscosity solutions of fully nonlinear elliptic partial differential equations // Indiana University mathematics journal. 1989. Vol. 38(3). P. 629–667.
3. Crandall M., Ishii H., Lions P.-L. User's guide to viscosity solutions of second-order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. T. 27, № 1. С. 1–67.
4. Fleming W. H., Soner H. M. Controlled Markov processes and viscosity solutions. 2nd изд. New York: Springer, 2006.
5. Giga Yoshikazu. Surface evolution equations: A level set approach. Springer Science & Business Media, 2006. Т. 99.
6. Pham H. Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications. Berlin: Springer, 2009.
7. Touzi N. Optimal stochastic control, stochastic target problems, and backward SDE. Fields Institute Monographs, 29. New York: Springer, 2013.
8. Katzourakis Nikos. An introduction to viscosity solutions for fully nonlinear PDE with applications to calculus of variations in  $L^\infty$ . Springer, 2014.
9. Barles G., Souganidis P. E. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations // Asymptot. Anal. 1991. Т. 4. С. 271–283.
10. Oberman A. Convergent Difference Schemes for Degenerate Elliptic and Parabolic Equations: Hamilton-Jacobi Equations and Free Boundary Problems // SIAM J. Numer. Anal. 2006. Т. 44, № 2. С. 879–895.

11. Li Thomas Nanfeng, Tourin Agnes. Optimal pairs trading with time-varying volatility // International Journal of Financial Engineering. 2016. T. 3, № 03. C. 1650023.
12. Henderson V., Liang G. A Multidimensional Exponential Utility Indifference Pricing Model with Applications to Counterparty Risk // SIAM Journal on Control and Optimization. 2016. T. 54, № 2. C. 690–717.
13. Shardin Anton A, Szölgyenyi Michaela. Optimal control of an energy storage facility under a changing economic environment and partial information // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2016. T. 19, № 04. C. 1650026.
14. Arvan L., Moses L.N. Inventory Investment and the Theory of the Firm. University of Illinois at Urbana-Champaign, Working paper No. 756, 31 pages.
15. S. Asmussen B. H., Taksar M. Optimal risk control and dividend distribution policies. example of excess-of loss reinsurance for an insurance corporation // Finance and Stochastics. 2000. Vol. 4(3). P. 299–324.
16. Højgaard B., Taksar M. Optimal dynamic portfolio selection for a corporation with controllable risk and dividend distribution policy // Quantitative Finance. 2004. Vol. 4(3). P. 315–327.
17. Крылов Н.В. Управляемые процессы диффузионного типа. Москва: Наука, 1977.
18. Barles G., Burdeau J. The Dirichlet problem for semilinear second-order degenerate elliptic equations and applications to stochastic exit time control problems // Comm. Partial Differential Equations. 1995. Vol. 20(1-2). P. 129–178.
19. Barles G., Rouy E. A strong comparison result for the Bellman equation arising in stochastic exit time control problems and its applications // Commun. Part. Diff. Eq. 1998. T. 22. C. 1995–2033.
20. Rokhlin D. B. Verification by stochastic Perron's method in stochastic exit time control problems // J. Math. Anal. Appl. 2014. T. 419, № 1. C. 433–446.
21. Rishel R. Optimal portfolio management with partial observations and power utility function // Stochastic analysis, control, optimization and applications, Springer. 1999. T. in Honor of W.H. Fleming.

22. Z. Liang K. Y., Guo J. Optimal proportional reinsurance and investment in a stock market with Ornstein–Uhlenbeck process // Insurance: Mathematics and Economics. 2011. Vol. 49(2). P. 207–215.
23. Chaumont S. Uniqueness to elliptic and parabolic Hamilton-Jacobi-Bellman equations with non-smooth boundary // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. 2004. T. 339. C. 555–560.
24. Bayraktar E., Sîrbu M. Stochastic Perron’s method for Hamilton-Jacobi-Bellman equations // SIAM J. Control Optim. 2013. T. 51, № 6. C. 4274–4294.
25. Bayraktar E., Zhang Y. Stochastic Perron’s Method for the Probability of Lifetime Ruin Problem Under Transaction Costs // SIAM J. Control Optim. 2015. T. 53, № 1. C. 91–113.
26. Soner H.M. Optimal control with state-space constraint. I // SIAM J. Control Optim. 1986. T. 24, № 3. C. 552–561.
27. Hiriart-Urruty J.-B., Lemaréchal C. Fundamentals of convex analysis. Berlin: Springer, 2001.
28. Loreti P. Some properties of constrained viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations // SIAM J. Control Optim. 1987. T. 25, № 5. C. 1244–1252.
29. Finetti B. D. Su un’impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio // Transactions of the XVth international congress of Actuaries. 1957. Vol. 2(1). P. 433–443.
30. Taksar M. Optimal risk and dividend distribution control models for an insurance company // Mathematical Methods of Operations Research. 2000. Vol. 51(1). P. 1–42.
31. Albrecher H., Thonhauser S. Optimality results for dividend problems in insurance // RACSAM-Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matematicas. 2009. Vol. 103(2). P. 295–320.
32. Avanzi B. Strategies for dividend distribution: A review // North American Actuarial Journal. 2009. Vol. 13(2). P. 217–251.
33. Radner R., Shepp L. Risk vs. profit potential: A model for corporate strategy // Journal of economic dynamics and Control. 1996. Vol. 20(8). P. 1373–1393.
34. Жанблан-Пике М., Ширяев. А.Н. Оптимизация потока дивидендов. // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50(2). С. 25–46.

35. Asmussen S., Taksar M. Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out // Insurance: Mathematics and Economics. 1997. Vol. 20(1). P. 1–15.
36. S.E. Shreve J. L., Gaver D. Optimal consumption for general diffusions with absorbing and reflecting barriers // SIAM Journal on Control and Optimization. 1984. Vol. 22(1). P. 55–75.
37. Højgaard B., Taksar M. Controlling risk exposure and dividends payout schemes: insurance company example // Mathematical Finance. 1999. Vol. 9(2). P. 153–182.
38. A. Cadenillas T. Choulli M. T., Zhang L. Classical and impulse stochastic control for the optimization of the dividend and risk policies of an insurance firm // Mathematical Finance. 2006. Vol. 16(1). P. 181–202.
39. Meng H., Siu T. On optimal reinsurance, dividend and reinvestment strategies // Economic Modelling. 2011. Vol. 28(1). P. 211–218.
40. Pelsser A., Laeven R. Optimal dividends and alm under unhedgeable risk // Insurance: Mathematics and Economics. 2013. Vol. 53(3). P. 515–523.
41. Sotomayor L., Cadenillas A. Classical and singular stochastic control for the optimal dividend policy when there is regime switching // Insurance: Mathematics and Economics. 2011. Vol. 48(3). P. 344–354.
42. Jiang Z., Pistorius M. Optimal dividend distribution under Markov regime switching // Finance and Stochastics. 2012. Vol. 16(3). P. 449–476.
43. Zhu J., Chen F. Dividend optimization for regime-switching general diffusions // Insurance: Mathematics and Economics. 2013. Vol. 53(2). P. 439–456.
44. Zhu J. Dividend optimization for a regime-switching diffusion model with restricted dividend rates // Astin Bulletin. 2014. Vol. 44(2). P. 459–494.
45. Bardi M., Bottacin S. On the Dirichlet problem for nonlinear degenerate elliptic equations and applications to optimal control // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. 1998. Vol. 56. P. 13–39.
46. Ishii H. On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDE's // Commun. Pur. Appl. Math. 1989. T. 42, № 1. C. 15–45.

47. Bather J., Chernoff H. Sequential decisions in the control of a space-ship (finite fuel) // J. Appl. Prob. 1967. T. 4, № 3. C. 584–604.
48. Bather J. A., Chernoff H. Sequential decisions in the control of a spaceship // Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. T. 3. 1967. C. 181–207.
49. Beneš V. E., Shepp L. A., Witsenhausen H. S. Some solvable stochastic control problems // Stochastics. 1980. T. 4, № 1. C. 39–83.
50. Karatzas I., Shreve S. E. Equivalent models for finite-fuel stochastic control // Stochastics. 1986. T. 18, № 3-4. C. 245–276.
51. Bridge D. S., Shreve S. E. Multi-dimensional finite-fuel singular stochastic control // Applied Stochastic Analysis / под ред. I. Karatzas, D. Ocone. Springer Berlin Heidelberg, 1992. T. 177 из Lecture Notes in Control and Information Sciences. C. 38–58.
52. Finite-fuel singular control with discretionary stopping / I. Karatzas, D. Ocone, H. Wang [и др.] // Stochastics. 2000. T. 71, № 1-2. C. 1–50.
53. Karatzas I. Probabilistic aspects of finite-fuel stochastic control // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1985. T. 82, № 17. C. 5579–5581.
54. Chow P.-L., Menaldi J., Robin M. Additive control of stochastic linear systems with finite horizon // SIAM J. Control Optim. 1985. T. 23, № 6. C. 858–899.
55. El Karoui N., Karatzas I. Probabilistic aspects of finite-fuel, reflected follower problems // Acta Appl. Math. 1988. T. 11, № 3. C. 223–258.
56. Dufour F., Miller B. M. Generalized solutions in nonlinear stochastic control problems // SIAM J. Control Optim. 2002. T. 40, № 6. C. 1724–1745.
57. Motta M., Sartori C. Finite fuel problem in nonlinear singular stochastic control // SIAM J. Control Optim. 2007. T. 46, № 4. C. 1180–1210.
58. Motta M., Sartori C. Uniqueness of solutions for second order Bellman-Isaacs equations with mixed boundary conditions // Discret. Contin. Dyn. S. 2008. T. 20, № 4. C. 739–765.
59. Motta M., Sartori C. Uniqueness results for boundary value problems arising from finite fuel and other singular and unbounded stochastic control problems // Discret. Contin. Dyn. S. 2008. T. 21, № 2. C. 513–535.

60. Chernous'ko F. L. Self-similar solutions of the Bellman equation for optimal correction of random disturbances // J. Appl. Math. Mech.-USS. 1971. T. 35, № 2. C. 291–300.
61. Jacka S. D. A finite fuel stochastic control problem // Stochastics. 1983. T. 10, № 2. C. 103–113.
62. Jacka S. D. Keeping a satellite aloft: two finite fuel stochastic control models // J. App. Prob. 1999. T. 36, № 1. C. 1–20.
63. Jacka S. Avoiding the origin: a finite-fuel stochastic control problem // Ann. Appl. Probab. 2002. C. 1378–1389.
64. Sudderth W. D., Weerasinghe A. P. N. A bang-bang strategy for a finite fuel stochastic control problem // Adv. Appl. Prob. 1992. T. 24, № 3. C. 589–603.
65. Weerasinghe A. P. N. A finite fuel stochastic control problem on a finite time horizon // SIAM J. Control Optim. 1992. T. 30, № 6. C. 1395–1408.
66. Pemy M., Zhang Q., Yin G. Liquidation of a large block of stock // Journal of Bank. Financ. 2007. T. 31, № 5. C. 1295–1305.
67. Gatheral J., Schied A. Optimal trade execution under geometric Brownian motion in the Almgren and Chriss framework // Int. J. Theoretical Appl. Finance. 2011. T. 14, № 03. C. 353–368.
68. Bian B., Wu N., Zheng H. Optimal liquidation in a finite time regime switching model with permanent and temporary pricing impact. Preprint arXiv:1212.3145v2 [q-fin.PM], 17 pages.
69. Becherer D., Bilarev T., Frentrup P. Multiplicative limit order markets with transient impact and zero spread. Preprint arXiv:1501.01892 [math.OC], 37 pages.
70. Krylov N. V. Controlled diffusion processes. New York: Springer, 1980.
71. Dupuis P., McEneaney W. M. Risk-sensitive and robust escape criteria // SIAM J. Control Optim. 1997. T. 35, № 6. C. 2021–2049.
72. Clark J. M. C., Vinter R. B. Stochastic exit time problems arising in process control // Stochastics. 2012. T. 84, № 5-6. C. 667–681.



73. Impulse control with random reaction periods: A central bank intervention problem / A. Bensoussan, H. Long, S. Perera [и др.] // *Oper. Res. Lett.* 2012. Т. 40, № 6. С. 425–430.
74. Freidlin M. I. *Functional integration and partial differential equations*. Princeton: Princeton University Press, 1985.
75. Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin: Springer, 2001.
76. Bass R.F. *Stochastic processes*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
77. Krylov N. V. *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1996. Т. 12.
78. Tourin A. *Introduction to finite differences methods // Optimal Stochastic Control, Stochastic Target Problems, and Backward SDE*. New York: Springer, 2013. С. 201–212.
79. Eliashberg J., Steinberg R. *Marketing-production joint decision-making // Marketing / под ред. J. Eliashberg, G.L. Lilien*. Amsterdam: Elsevier Science, 1993. Т. 5 из *Handbooks in operations research and management science*. С. 65–103.
80. Yano C.A., Gilbert S.M. *Coordinated Pricing and Production/Procurement Decisions: A Review // Managing Business Interfaces / под ред. A.K. Chakravarty, J. Eliashberg*. New York: Springer, 2004. Т. 16 из *International Series in Quantitative Marketing*. С. 65–103.
81. Chen X., Simchi-Levi D. *Joint Pricing and Inventory Management // The Oxford Handbook of Pricing Management / под ред. Ö. Özer, R. Phillips*. Oxford: Oxford University Press, 2012. С. 784–824.
82. Varian H.R. *Microeconomic analysis*. New York: W. W. Norton, 1992.
83. Pekelman D. *Simultaneous Price-Production Decisions // Oper. Res.* 1974. Т. 22, № 4. С. 788–794.
84. Thompson G.L., Sethi S.P., Teng J.T. *Strong planning and forecast horizons for a model with simultaneous price and production decisions // Eur. J. Oper. Res.* 1984. Т. 16, № 3. С. 378–388.
85. Feichtinger G., Hartl R. *Optimal pricing and production in an inventory model // Eur. J. Oper. Res.* 1985. Т. 19, № 1. С. 45–56.

86. Eliashberg J., Steinberg R. Marketing-production decisions in an industrial channel of distribution // *Manage. Sci.* 1987. T. 33, № 8. C. 981–1000.
87. Arvan L., Moses L.N. Inventory Investment and the Theory of the Firm // *Am. Econ. Rev.* 1982. T. 72, № 1. C. 186–193.
88. Chazal M., Jouini E., Tahraoui R. Production planning and inventories optimization with a general storage cost function // *Nonlinear Anal.-Theor.* 2003. T. 54, № 8. C. 1365–1395.
89. Ramey V.A. Nonconvex Costs and the Behavior of Inventories // *J. Polit. Econ.* 1991. T. 99, № 2. C. 306–334.
90. Leoni G. A first course in Sobolev spaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2009.
91. Natanson I.P. Theory of functions of a real variable. New York: Frederick Ungar, 2009.
92. Villani A. On Lusin's condition for the inverse function // *Rend. Circ. Mat. Palermo.* 1984. T. 33, № 3. C. 331–335.
93. Rockafellar R.T. Convex Analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970.
94. Hiriart-Urruty J.-B., Lemaréchal C. Convex analysis and minimization algorithms II. Advanced theory and bundle methods. Berlin: Springer, 1993.
95. Rockafellar R.T., Wets R.J.-B. Variational analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
96. Auslender A., Teboulle M. Asymptotic cones and functions in optimization and variational inequalities. New York: Springer, 2003.

# Приложение А

## Название первого приложения

Некоторый текст.

## Приложение В

Очень длинное название второго приложения,  
в котором продемонстрирована работа с  
длинными таблицами

### В.1 Подраздел приложения

Вот размещается длинная таблица:

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
&INP			
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ ) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ ) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ ) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ ) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ )
продолжение следует			

(продолжение)			
Параметр	Умолч.	Тип	Описание
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ )
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ )
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ )
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ )
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ )
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ )
mars kick	0	int	1: генерация белого шума
	1	int	2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
продолжение следует			

(продолжение)			
Параметр	Умолч.	Тип	Описание
mars	0	int	1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
kick	1	int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ( $p_s = const$ )
mars	0	int	1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора 1: инициализация модели для планеты Марс
&SURFPAR			
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ ) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ ) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ ) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ ) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ ) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ ) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ ) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
продолжение следует			

(продолжение)			
Параметр	Умолч.	Тип	Описание
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ ) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ( $p_s = const$ ) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс

## В.2 Ещё один подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения!

## В.3 Очередной подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения!

## В.4 И ещё один подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения!