На правах рукописи

Мироненко Георгий Викторович

Методы теории вязкостных решений в прикладных задачах оптимального управления

05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону
2018

Работа выполнена на кафедре высшей математики и исследования операций института математики механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

доктор физико-математических наук, профессор Рохлин Дмитрий Борисович

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:
доктор физико-математических наук, профессор –

кандидат технических наук, доцент Котенко Владимир Владимирович

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

Защита состоится “____”________________ 200__ г. в ____ час. ____ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.208.25 Южного федерального университета по адресу: 347928, Ростовская область, г. Таганрог, ул. Чехова 2, ауд._.

Отзывы на автореферат просьба направлять по адресу: 347928, Ростовская область, г. Таганрог, пер. Некрасовский 44, Технологический институт Южного федерального университета в г. Таганроге, Ученому секретарю диссертационного совета Д 212.208.25 Брюхомицкому Ю.А.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке ЮФУ по адресу: 344007, Ростовская область, г. Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 148.

Автореферат разослан “____”________________ 200__ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.208.25,
к.т.н. Брюхомицкий Ю.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования.

Задачи оптимального управления естественным образом возникают в экономике, механике, экологии, менеджменте, финансовой математике и других областях. Динамические задачи оптимальной организации производства, эксплуатации природных ресурсов, назначения цен на товары, торговли рисковыми активами, распределения трудовых ресурсов и капитала, управления механическими системами и другие прикладные задачи требуют развития эффективных методов их решения.

Основным общим подходом к анализу разнообразных задач оптимального управления является метод динамического программирования Беллмана. Данный метод зародился в 1960-х годах в работах Р. Беллмана, но его применимость к непрерывным задачам оптимального управления долгое время представлялась весьма ограниченной в связи тем, что функция ценности (функция Беллмана), которая в каждой задаче формально удовлетворяет соответствующему уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB), часто является негладкой. Ситуация изменилась в 1980-х годах в связи с изобретением и дальнейшим бурным развитием теории вязкостных решений: см., в частности, Crandall, Lions[1], Jensen[2], Crandall, Ishii, Lions[3]. Современное состояние теории вязкостных решений отражено в монографиях Fleming, Soner[4], Giga[5], Pham[6] Touzi[7], [Koike], Katzourakis[8]. Данная теория не только позволила, в типичных ситуациях, описать функцию Беллмана как единственное вязкостное решение уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, но и дала возможность развить новую схему обоснования сходимости численных методов для широкого класса сложных нелинейных задач: см. Barles, Souganidis[9], Oberman[10]. А именно, если для уравнения HJB справедлива теорема сравнения, то аппроксимирующая схема, обладающая свойствами монотонности, устойчивости и согласованности, является сходящейся.

Таким образом, возникла общая схема исследования широкого класса непрерывных

---

[1] Michael G Crandall и P.-L. Lions. “Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations”. В: *Mathematics of Computation* 43.167 (1984), с. 1—19.

[2] R. Jensen. “Uniqueness criteria for viscosity solutions of fully nonlinear elliptic partial differential equations”. Англ. В: Indiana University mathematics journal 38(3) (1989), с. 629—667.

[3] M. Crandall, H. Ishii и P.-L. Lions. “User’s guide to viscosity solutions of second-order partial differential equations”. В: *Bull. Amer. Math. Soc.* 27.1 (1992), с. 1—67

[4] W. H. Fleming и H. M. Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions.* 2nd. New York: Springer, 2006.

[5] Yoshikazu Giga. *Surface evolution equations: A level set approach.* Т. 99. Springer Science & Business Media, 2006.

[6] H. Pham. Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications. Berlin: Springer, 2009

[7] N. Touzi. *Optimal stochastic control, stochastic target problems, and backward SDE.* Fields Institute Monographs, 29. New York: Springer, 2013

[8] Nikos Katzourakis. *An introduction to viscosity solutions for fully nonlinear PDE with applications to calculus of variations in $L\infty$.* Springer, 2014.

[9] G. Barles и P. E. Souganidis. “Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations”. В: *Asymptot. Anal.* 4 (1991), с. 271—283.

[10] A. Oberman. “Convergent Difference Schemes for Degenerate Elliptic and Parabolic Equations: Hamilton-Jacobi Equations and Free Boundary Problems”. В: *SIAM J. Numer. Anal.* 44.2 (2006), с. 879—895

задач оптимального управления, предполагающая характеризацию функции Беллмана как единственного вязкостного решения уравнения HJB, доказательство теоремы сравнения, и построение монотонной, устойчивой и согласованной аппроксимирующей схемы. Данная схема является основой многочисленных современных исследований теоретического и прикладного характера. Отметим, несколько недавних работ, в которых рассматриваются конкретные прикладные задачи: торговля парами с нестационарной волатильностью Li, Tourin[11], вычисления цен безразличия неторгуемых активов на основе экспоненциальной полезности (Henderson, Liang, 2016), управлении запасами энергии при случайных ценах в условиях неполной информации Shardin, Szölgyenyi[12], оптимизации условной стоимостной меры риска (CVaR) в непрерывном времени Miller, Yang[13], оценивания и хеджирования контрактов на энергетических рынках Callegaro[14], , управления диффузионными процессами со случайными дисконтирующими факторами, зависящими от фазовой переменной Lu, Yin, Guo,[15], стратегий торговли в модели с байесовским обновлением параметра Baradel, Bouchard, Dang[16], загрязнения мелкого озера Kossioris, Loulakis, Souganidis[17], добычи нефти и ее налогообложения Pemy[18], инвестирования и выплаты дивидендов в модели с переключением режимов и налогообложением (Xu, Yao, Cheng, 2017), инвестирования-потребелния при наличии операционных издержек (Tsai, Fahim, 2018), оценки Европейских опционов в эксопненциальных моделях Леви с марковским модулированием (Momeya, 2018), управления процессом ирригации (Unami, Mohawesh, 2018) .

Несколько известных задач, поддающихся анализу с использованием развитых в теории оптимального управления численных методов описаны в недавней обзорной работе работе Festa et. al.[19]: задача о восстановлении формы трехмерного объекта по

[11] Thomas Nanfeng Li и Agnes Tourin. “Optimal pairs trading with time-varying volatility”. В: *International Journal of Financial Engineering* 3.03 (2016), с. 1650023.

[12] Anton A Shardin и Michaela Szölgyenyi. “Optimal control of an energy storage facility under a changing economic environment and partial information”. В: *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 19.04 (2016), с. 1650026.

[13] Christopher W Miller и Insoon Yang. “Optimal control of conditional value-at-risk in continuous time”. В: *SIAM Journal on Control and Optimization* 55.2 (2017), с. 856—884.

[14] Giorgia Callegaro и др. “Utility indifference pricing and hedging for structured contracts in energy markets”. В: *Mathematical Methods of Operations Research* 85.2 (2017), с. 265—303. ISSN: 1432-5217. DOI: 10.1007/s00186-016-0569-6. URL: https://doi.org/10.1007/s00186-016-0569-6.

[15] Xianggang Lu, G. Yin и Xianping Guo. “Infinite Horizon Controlled Diffusions with Randomly Varying and State-Dependent Discount Cost Rates”. В: *Journal of Optimization Theory and Applications* 172.2 (2017), с. 535—553. ISSN: 1573-2878. DOI: 10.1007/s10957-016-0898-x. URL: https://doi.org/10.1007/s10957-016-0898-x.

[16] N. Baradel, B. Bouchard и N. M. Dang. “Optimal Trading with Online Parameter Revisions”. В: *Market Microstructure and Liquidity* 02.03n04 (2016), с. 1750003. DOI: 10.1142/S2382626617500034. eprint: http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S2382626617500034. URL: http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S2382626617500034.

[17] George T Kossioris, Michail Loulakis и Panagiotis E Souganidis. “The Deterministic and Stochastic Shallow Lake Problem”. В: *arXiv preprint arXiv:1712.04210* (2017).

[18] Moustapha Pemy. “Optimal Oil Production and Taxation in Presence of Global Disruptions”. В: *arXiv preprint arXiv:1704.04714* (2017).

[19] Adriano Festa и др. “Hamilton–Jacobi–Bellman Equations”. В: *Optimal Control: Novel Directions and Applications*. Под ред. Daniela Tonon, Maria Soledad Aronna и Dante Kalise. Cham: Springer International Publishing, 2017, с. 127—261. ISBN: 978-3-319-60771-9. DOI: 10.1007/978-3-319-60771-9_2. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-60771-9_2.

закраске полутонового изображения (shape-from-shading), задача об управлении парусной лодкой, задача о распространении фронта, а также игры среднего поля (mean-field games). Отметим также обзор Neilan, Salgado, Zhang[20], касающийся анализа численных схем для сильно нелинейных уравнений в частных производных на основе теории вязкостных решений.

Развитие описанной методики представляется интересной и актуальной проблемой. Конкретные задачи, рассматриваемые в работе, представляют самостоятельный интерес и, в то же время, служат стимулом для развития и совершенствования данной методики. Они также позволяют лучше понять области ее применимости.

Научная и практическая ценность работы. Полученные результаты касаются качественного и количественного исследования ряда прикладных задач оптимального управления диффузионными и детерминированными процессами. С теоретической точки зрения представляет интерес развитие методики анализа таких задач (на математическом уровне строгости) на основе теории вязкостных решений. Полученные результаты могут использоваться специалистами в соответствующих предметных областях и служить иллюстративном материалом в учебном процессе в рамках специальных курсов по оптимальному управлению. Практическая ценность рассматриваемой методики состоит в том, что она позволяет получать качественные и количественные результаты о структуре оптимального управления на основе компьютерных экспериментов.

Областью исследования является определенный класс прикладных задач оптимального управления диффузионными и детерминированными процессами.

Предметом исследования является методика решения задач оптимального управления, основанная на теории вязкостных решений.

Цель работы состоит в исследовании конкретных прикладных задач оптимального управления на основе единой методики, основанной на теории вязкостных решений. Такая цель предполагает и развитие указанной методики, включающей (i) обоснование корректности описания функции ценности (функции Беллмана) как единственного вязкостного решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, (ii) аналитическое исследование данного уравнения, (iii) построение и обоснование сходимости разностных схем на основе теоремы сравнения, (iv) проведение компьютерных экспериментов. В работе рассмотрены (1) задача об оптимизации потока дивидендов, перестрахования и инвестирования в диффузионной модели, (2) регулярная задача стохастического оптимального управления с конечным топливом, (3) задача об оптимальных стратегиях производства и назначения цены в динамической модели фирмы-монополиста, (4) задача о позиционировании случайного объекта за счет однократного изменения приращений его траектории. Основная цель при анализе каждой из этих задач состояла в описании структуры оптимального управления.

Методы исследования. В работе использованы методы теории оптимального управления диффузионными процессами, методы теории вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана, методы выпуклого анализа, численные методы и компьютерные эксперименты.

Научная новизна.

[20] Michael Neilan, Abner J. Salgado и Wujun Zhang. “Numerical analysis of strongly nonlinear PDEs”. В: *Acta Numerica* 26 (2017), с. 137—303. DOI: 10.1017/S0962492917000071.

(1) В задаче об оптимизации потока дивидендов страховой компании, которая использует стратегии перестрахования и инвестирования, с помощью численных экспериментов установлен ряд нетривиальных свойств оптимальных стратегий, касающихся зависимости барьерной структуры выплаты дивидендов, доли капитала, инвестируемой в рисковый актив, и стратегии перестрахования от случайного фактора, определяющего величину сноса рискового актива.

(2) В регулярной задаче стохастического оптимального управления с конечным топливом с использованием стохастического метода Перрона установлено, что функция Беллмана является единственным вязкостным решением задачи Дирихле для соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. На основе этого результата обоснована сходимость построенных разностных схем для задач оптимальной коррекции и оптимального слежения за стохастической системой с устойчивой или неустойчивой точкой равновесия. На основе численных экспериментов дано качественное и количественное описание оптимальных стратегий.

(3) В задаче об оптимальных стратегиях производства и назначения цены в динамической модели фирмы-монополиста с использованием теории вязкостных решений и двойственности Юнга-Фенхеля получено представление для функции Беллмана, исследована ее регулярность, и дано полное описание оптимальных стратегий без предположения о выпуклости оптимизационной задачи. Из полученных результатов следует, что невыпуклость функции производственных затрат способна объяснить наличие производственных циклов, но не накопление запасов. Проведен детальный анализ одной из функций затрат, рассматривавшейся Арваном и Мозесом [21].

(4) В задаче о позиционировании случайного объекта за счет однократного изменения приращений его траектории для моделей броуновского движения со сносом и геометрического броуновского движения аналитически получены односторонние оценки области остановки. Точность данных оценок иллюстрируется численными экспериментами, в которых область остановки вычисляется исходя из решения методом конечных разностей уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для соответствующей задачи оптимальной остановки.

На защиту выносятся

(1) Описание оптимальных стратегий выплаты дивидендов, перестрахования и инвестирования в диффузионной модели, полученное с помощью компьютерных экспериментов.

(2) Доказательство того, что в регулярной задаче стохастического оптимального управления с конечным топливом функция Беллмана является единственным вязкостным решением задачи Дирихле для соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Полученное с помощью компьтерных экспериментов описание

[21] L. Arvan и L.N. Moses. “Inventory Investment and the Theory of the Firm”. University of Illinois at Urbana-Champaign, Working paper No. 756, 31 pages. 1981

оптимальных стратегий в стохастических задачах оптимальной коррекции и оптимального слежения в случаях, когда рассматриваемая система имеет устойчивую или неустойчивую точку равновесия.

(3) Аналитическое описание описание оптимальных стратегий оптимальных стратегий производства и назначения цены в динамической модели фирмы-монополиста. Анализ примера Арвана-Мозеса.

(4) Односторонняя оценка и численный расчет области остановки в задаче о позиционировании случайного объекта за счет однократного изменения приращений его траектории.

Достоверность результатов обеспечивается их строгим математическим обоснованием, сопоставлением с результатами других авторов, использованием численных экспериментов.

Апробация диссертационной работы. Результаты, относящиеся к диссертации, излагались на следующих конференциях

(1) International Conference ”Advanced Finance and Stochastics”, Moskow, Russia,2014;

(2) International 6th Workshop ”Nonlinear PDEs and Financial Mathematics”, Zittaau, Germany, 2015

(3) Международная Российско-Китайская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и физики», Нальчик, 2015

(4) Пятая международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения V”, Ростов-на-Дону, 2015

(5) Шестая международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VI”, Ростов-на-Дону, 2016

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 4 работах (полный список приведен в конце реферата) опубликованных в рецензируемых изданиях, входящих в базу данных Scopus (3 статьи) и в список ВАК (1 статья). Имеются также 5 публикаций в тезисах международных конференций.

Личный вклад автора. В работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, вклад авторов можно оценить как равный. В частности, компьютерная реализация разностных схем принадлежит соискателю.

Структура работы и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографического списка. **В первой главе** рассматривается задача об оптимальной выплате дивидендов страховой компанией в диффузионном приближении. Пусть имеется рисковый актив, цена которого S описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS_t = \mu_2(Y_t)S_t dt + \sigma_2(Y_t)S_t dW_t^2.$$

Здесь Y случайный фактор, динамика которого подчиняется уравнению

$$dY_t = \mu_3(Y_t)dt + \sigma_3(Y_t)dW_t^3. \tag{1}$$

Стандартные броуновские движения (W^1, W^2, W^3) предполагаются независимыми.

Модель резерва страховой компании заимствована из[22],[23]:

$$dR_t = \mu_1(a)dt + \sigma_1(a)dW_t^1,$$

где W^1 — стандартное броуновское движение.

Компания может инвестировать средства в данный актив, но объем этих инвестиций θ ограничен некоторой постоянной величиной $\overline{\theta}$. Пусть, кроме того, компания применяет динамическую стратегию $\alpha = (\alpha_t)_{t\geq 0}$ перестрахования и выплачивает дивиденды с конечной интенсивностью $c = (c_t)_{t\geq 0}$. Приращение капитала V компании складывается из приращений резерва, инвестированных средств и выплаченных дивидендов:

$$dV_t = (\mu_1(\alpha_t) + \mu_2(Y_t)\theta)dt + \sigma_1(\alpha_t)dW_t^1 + \sigma_2(Y_t)\theta dW_t^2 - c_t dt. \tag{2}$$

Обозначим через $X^{x,u}$ решение системы (1), (2) при заданной стратегии управления $u = (\alpha, \theta, c)$. Цель компании состоит в максимизации ожидаемой дисконтированной суммы выплаченных дивидендов до момента банкротства:

$$v(x) = \sup_u \mathsf{E} \int_0^{\tau^{x,u}} e^{-\beta t} c_t dt.$$

Здесь $\tau^{x,u} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{x,u} \leq 0\}$, $\beta > 0$ и максимизация ведется по всем прогрессивно измеримым управлениям

$$u_t = (\alpha_t, \theta_t, c_t) \in U := A \times [0, \overline{\theta}] \times [0, \overline{c}].$$

Из теории стохастического оптимального управления (см.[24], [6], [7]) известно, что, по крайней мере формально, функция Беллмана v в полуплоскости $G = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\begin{aligned}
&\beta v(x) - \mu_3(x_2)v_{x_2}(x) - \frac{1}{2}\sigma_3^2(x_2)v_{x_2x_2} - \max_{\theta\in[0,\overline{\theta}]}\{\mu_2(x_2)\theta v_{x_1}(x) + \frac{1}{2}\sigma_2^2(x_2)\theta^2 v_{x_1x_1}\} \\
&\qquad - \max_{c\in[0,\overline{c}]}\{(1 - v_{x_1}(x))c\} - \sup_{a\in A}\{\mu_1(a)v_{x_1}(x) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(a)v_{x_1x_1}(x)\} = 0, \qquad (3) \\
&v(0, x_2) = 0.
\end{aligned}$$

[22]B. Højgaard S. Asmussen и M. Taksar. “Optimal risk control and dividend distribution policies. example of excess-of loss reinsurance for an insurance corporation”. Англ. В: Finance and Stochastics 4(3) (2000), с. 299—324.

[23]B. Højgaard и M. Taksar. “Optimal dynamic portfolio selection for a corporation with controllable risk and dividend distribution policy”. Англ. В: Quantitative Finance 4(3) (2004), с. 315—327.

[24]Н.В. Крылов. Управляемые процессы диффузионного типа. Москва: Наука, 1977.

Более точно, данную краевую задачу следует понимать в «вязкостном смысле». Соответствующие определения можно найти в [3], [6], [7],[25].

Предположим теперь, что в нашей задаче выполняется следующее условие невырожденности

$$\underline{\sigma}_1 := \inf_{a\in A} \sigma^1(a) > 0. \tag{4}$$

В этом случае справедлив *сильный принцип сравнения*: для любых субрешения u и суперрешения v задачи (3) имеет место неравенство $u \le w$ на G. Данный результат является следствием невырожденности диффузии по нормали к границе (см.[26], [27]), что в данном означает (4).

Из сильного принципа сравнения вытекает, что функция Беллмана v непрерывна и является единственным вязкостным решением задачи (3): см. [28] (теорема 1 и замечание 1).

Для численного решения задачи рассмотрим прямоугольную сетку

$$\overline{G}_h = \{(ih_1, jh_2) : 0 \le i \le I, -J \le j \le J\}, \quad Ih_1 = a, \quad Jh_2 = b.$$

Здесь I, J, i, j — целые числа, $h = (h_1, h_2)$ — шаг сетки. Узлы (ih_1, jh_2), $0 < i < I$, $-J < j < J$ назовем внутренними, а остальные узлы — граничными. Множества внутренних и граничных узлов обозначим через G_h и ∂G_h соответственно. Каждому внутреннему узлу поставим в соответствие уравнение для сеточной функции $v_{ij} = v(x_{ij})$, $x_{ij} = (ih_1, jh_2)$:

$$\begin{aligned}
0 = \beta v_{ij} &- \left(\mu^+_{3;j} \frac{v_{i,j+1} - v_{ij}}{h_2} - \mu^-_{3;j} \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_2}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2_{3;j} \frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{h_2^2} \\
&- \max_{\theta\in[0,\overline{\theta}]} \left\{\mu^+_{2;j}\theta \frac{v_{i+1,j} - v_{ij}}{h_1} - \mu^-_{2;j}\theta \frac{v_{i-1,j} - v_{i,j}}{h_1} + \frac{1}{2}\sigma^2_{2;j}\theta^2 \frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{h_1^2}\right\} \\
&- \max_{c\in[0,\overline{c}]} \left\{c\left(1 - \frac{v_{ij} - v_{i-1,j}}{h_1}\right)\right\} \\
&- \max_{a\in A} \left\{\mu^+_1(a) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_1} - \mu^-_1(a) \frac{v_{ij} - v_{i-1,j}}{h_1} + \frac{1}{2}\sigma^2_1(a) \frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{h_1^2}\right\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\mu_{k;j} = \mu_k(jh_2)$, $\sigma_{k;j} = \sigma_k(jh_2)$, $k = 2, 3$. В граничных узлах ставится условие Дирихле

$$0 = v_{ij}, \quad i \in \{0, I\}, \ j \in \{-J, \dots, J\}; \quad i \in [0, \dots, I], \quad j \in \{-J, J\}.$$

В терминологии [10] рассматриваемая схема является вырожденной эллиптической, правильной и непрерывной по Липшицу. Из результатов указанной работы следует, что

[25]**Jak10**.

[26]G. Barles и J. Burdeau. "The Dirichlet problem for semilinear second-order degenerate elliptic equations and applications to stochastic exit time control problems". Англ. В: Comm. Partial Differential Equations 20(1-2) (1995), с. 129—178.

[27] G. Barles и E. Rouy. "A strong comparison result for the Bellman equation arising in stochastic exit time control problems and its applications". В: *Commun. Part. Diff. Eq.* 22 (1998), с. 1995—2033

[28] D. B. Rokhlin. "Verification by stochastic Perron's method in stochastic exit time control problems". В: *J. Math. Anal. Appl.* 419.1 (2014), с. 433—446

система уравнений (5) имеет единственное решение v_h, совпадающее с неподвижной точкой S_ρ, и данное решение может быть найдено методом простых итераций.

При проведении численных экспериментов рассматривался частный случай исследуемой модели, в которой волатильность σ_2 рискового актива S постоянна, а снос μ_2 подчиняется процессу Орнштейна-Уленбека:

$$\mu_2(Y) = l + k_1 Y, \quad dY = -k_2 Y dt + \sigma_3 dW^3.$$

Здесь l, k_1, k_2, σ_3 — положительные константы. Как отмечено, напр., в[29],[30] такая модель позволяет описывать черты, присущие рынкам «быков» и «медведей». Кроме того, рассматривался пропорциональный механизм перестрахования рисков в случае дешевого перестрахования (cheap reinsurance):

$$\mu_1(a) = a\overline{\mu}, \quad \sigma_1(a) = a\overline{\sigma} \tag{6}$$

.

Численные расчеты подтверждают хорошо известную «барьерную» структуру оптимальной интенсивности c^* выплачиваемых дивидендов:

$$c^* \;=\; \begin{cases} 0, & x_1 < x^*(x_2) \\ \bar{c}, & x_1 \geq x^*(x_2). \end{cases} \tag{7}$$

График линии переключения $x^*(x_2)$ представлен на рис. 1. При $\mu_2(x_2) < 0$ (т.е. $x_2 < -1$) в одномерной задаче линия переключения не зависит от x_2. Это объясняется тем что при этом $\theta^* = 0$, и коэффициенты уравнения (3) не зависят от x_2. Далее, все графики линий переключения имеют точку глобального максимума. Это можно объяснить спецификой модели Блэка-Шоулза, а именно тем, что

$$\lim_{t\to\infty} S_t = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mu_2(x_2) < \sigma_2^2(x_2)/2 \\ +\infty & \text{при} \quad \mu_2(x_2) > \sigma_2^2(x_2)/2 \end{cases}$$

при фиксированном x_2. Если значения параметра x_2 превосходят корень уравнения $\mu_2(x_2) = \sigma_2^2(x_2)/2$ (точка $\widehat{x}_2 = 0.68$ на рис. 1), то рисковый актив становится «слишком хорошим». При дальнейшем увеличении x_2 это позволяет постепенно снижать уровень капитала фирмы, начиная с которого производится выплата дивидендов. Можно ожидать, что $x^*(x_2) \to 0$ при $x_2 \to +\infty$. Отметим также, что двумерный эффект выражается в том, что при увеличении k_2 график $x^*(x_2)$ становится более пологим и приближается к прямой $x_1 = x^*(0)$.

В работе также изучалось поведение θ^* — оптимального объема капитала, инвестируемого в рисковый актив, α^* — оптимальный уровень перестрахования.

Во второй главе рассматривается задача управления, в которой требуется как можно дольше удерживать стохастическую систему X в заданной области G. Воздействие на систему X требует расхода ресурса (или топлива). Задача состоит в том, чтобы использовать имеющееся количество ресурса оптимальным образом. В отличие от

[29] R. Rishel. “Optimal portfolio management with partial observations and power utility function”. В: Stochastic analysis, control, optimization and applications, Springer in Honor of W.H. Fleming (1999).

[30] K.C. Yuen Z. Liang и J. Guo. “Optimal proportional reinsurance and investment in a stock market with Ornstein–Uhlenbeck process”. Англ. В: Insurance: Mathematics and Economics 49(2) (2011), с. 207—215.

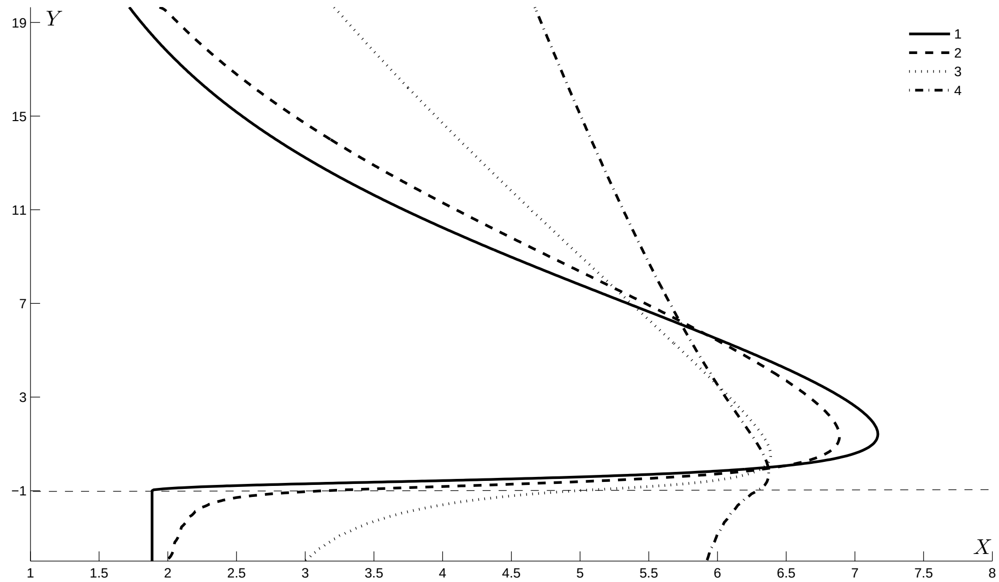

Рис. 1: График линии переключения $x^*(x_2)$ оптимальной стратегии c^* выплаты дивидендов

подавляющего большинства известных работ, мы предполагаем что интенсивность потребления ресурса (топлива) ограничена.

Пусть $W = (W^1, \dots W^m)$ m-размерный винеровский процесс, в пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, где $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ — минимальная пополненная естественная фильтрация процесса W и управляемый процесс $X = (X^1, \dots, X^d)$ подчиняется системе стохастических дифференциальных уравнений

$$dX_t = b(X_t, \alpha_t)dt + \sigma(X_t, \alpha_t)dW_t, \quad X_0 = x. \tag{8}$$

$\mathbb{F}$-прогрессивно измеримый процесс $\alpha \in A = [\underline{a}, \overline{a}]$, $\underline{a} \leq 0 \leq \overline{a}$ можно рассматривать как интенсивность потребления ресурса. В задаче перерасход ресурса запрещен, то есть допустимо только $\alpha \in A : Y_t \geq 0, t \geq 0$. Мы предполагаем что компоненты вектора сноса $b : \mathbb{R}^d \times A \mapsto \mathbb{R}^d$ и матрицы диффузии такие, что уравнение (8) имеет единственное $\mathbb{F}$-согласованное сильное решение на $[0, \infty)$. Количество ресурса Y удовлетворяет уравнению

$$dY_t = -|\alpha_t|dt, \quad Y_0 = y. \tag{9}$$

Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ открытое множество, $0 \in G$. Обозначим через $\theta^{x,y,\alpha} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{x,y,\alpha} \notin G\}$ время выхода процесса $X^{x,y,\alpha}$ из области G. Целевой функционал J и функция Беллмана v определены следующим образом:

$$J(x, y, \alpha) = \mathsf{E} \int_0^{\theta^{x,y,\alpha}} e^{-\beta t} f(X_t^{x,y,\alpha}, \alpha_t)\, dt, \qquad v(x, y) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(x,y)} J(x, y, \alpha), \tag{10}$$

где $\beta > 0$, и $f : \mathbb{R}^d \times A \mapsto \mathbb{R}$ ограниченная непрерывная функция.

В главе сделаны следующие предположения относительно рассматриваемой задачи

Предположение 1. *Существует решение $\psi \in C_b(\overline{G}) \cap C^2(G)$ задачи Дирихле*

$$\beta\psi(x) - \widehat{f}(x) - \mathcal{L}^0\psi(x) = 0,\ x \in G; \quad \psi = 0 \ \ \textit{на} \ \ \partial G.$$

Предположение 2. *Обозначим через $\overline{v}$ функцию Беллмана задачи с «бесконечным топливом»:*

$$\overline{v}(x) = \sup_{\alpha\in\mathcal{U}} \mathsf{E}\int_0^{\theta^{x,\alpha}} e^{-\beta t} f(X_t^{x,\alpha}, \alpha_t)\, dt, \qquad \theta^{x,\alpha} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{x,\alpha} \notin G\},$$

где $X^{x,\alpha}$ — решение (8). Рассмотрим соответствующее уравнение HJB и граничные условия:

$$\beta\overline{v} - \sup_{a\in[\underline{a},\overline{a}]} \{f(x,a) + \mathcal{L}^a\overline{v}\} = 0, \quad x \in G, \tag{11}$$

$$\beta\overline{v} - \sup_{a\in[\underline{a},\overline{a}]} \{f(x,a) + \mathcal{L}^a\overline{v}\} = 0 \quad \textit{или} \quad \overline{v} = 0 \quad \textit{на} \ \ \partial G. \tag{12}$$

Краевая задача (11), (12) удовлетворяет свойству сильной единственности.

Предположение 3. *Существует константа $K > 0$ такая, что*

$$\sup_{x\in G}\left\{|f(x,a) - f(x,0) + \mathcal{L}^a\psi(x) - \mathcal{L}^0(x)\psi|\right\} \leq K|a|.$$

На основе предположения 1 была сформулирована и доказана лемма о том что задача (8)–(10) сводится к задаче управления до момента выхода из области.

Лемма 1. *Если выполняется условие 1, то функция Беллмана (10) допускает представление*

$$v(x,y) = \sup_{\alpha\in\mathcal{U}} \mathsf{E}\left(\int_0^{T^{x,y,\alpha}} e^{-\beta t} f(X_t^{x,y,\alpha})\, dt + e^{-\beta T^{x,y,\alpha}}\psi(X^{x,y,\alpha}_{T^{x,y,\alpha}})\right),$$

где $\mathcal{U}$ — множество всех $\mathbb{F}$-прогрессивно измеримых стратегий α со значениями в A.

Также для функции Беллмана v доказана теорема единственности

Теорема 1. *Если условия 1-3 верны, то функция Беллмана v является единственным ограниченным вязкостным решением уравнения HJB,*

$$\beta v - H(x, v_x, v_y, v_{xx}) = 0, \quad (x,y) \in \Pi := G \times (0,\infty), \tag{13}$$

$$H(x, v_x, v_y, v_{xx}) = \sup_{a\in[\underline{a},\overline{a}]} \{f(x,a) + \mathcal{L}^a v - |a|v_y\},$$

которое непрерывно на $\overline{\Pi}$ и удовлетворяет граничному условию

$$v = g \quad \text{on } \partial\Pi. \tag{14}$$

Здесь непрерывная функция g на $\partial\Pi$ определена следующим образом

$$g(0,x) = \psi(x), \quad x \in \overline{G}; \quad g(x,y) = 0,\ x \in \partial G,\ y \geq 0.$$

А $\mathcal{L}^a$ является семейством «инфинитезимальных генераторов» диффузионного процесса X:

$$\mathcal{L}^a\varphi(x) = b(x,a)\varphi_x(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma(x,a)\sigma^T(x,a)\varphi_{xx}(x)).$$

Особенность уравнения (13) состоит в том, каким образом оно вырождается в граничных точках $(x, 0)$. Данное вырождение не позволяет напрямую применить теорему сравнения [теорема 2.1][27], [теорема 2.1][31]. Можно, однако, применить результаты[32] после некоторой подготовительной работы. Мы следуем другому пути, используя стохастический метод Перрона, разработанный в[33] и адаптированный к задаче управления до момента выхода из области в работе [28]. Этот метод работает с семействами $\mathcal{V}_-$, $\mathcal{V}_+$ стохастических суб- и суперрешений, которые порождают процессы суб- и супермартингального типа при суперпозиции с фазовым процессом, и оценивают функцию Беллмана снизу и сверху: $u \leq v \leq w$, $u \in \mathcal{V}_-$, $w \in \mathcal{V}_+$. Сущность стохастического метода Перрона состоит в том, что

$$u_-(x) =: \sup_{u \in \mathcal{V}_-} u(x), \quad w_+(x) := \inf_{w \in \mathcal{V}_+} w(x)$$

являются соответственно вязкостным супер- и субрешениями уравнения HJB, и удовлетворяют граничному условию Дирихле в обобщенном вязкостном смысле: см. [определение 7.4][3] и [теоремы 2, 3][28]. Если справедлив сильный принцип сравнения, обеспечивающий неравенство $u_- \geq w_+$ на $\Pi = G \times (0, \infty)$, то функция $u_- = v = w_+$ непрерывна на Π. Если, кроме того, $u_- \geq w_+$ on $\overline{\Pi}$, то v непрерывна на $\overline{\Pi}$. Заметим, что основное предположение [28] состоит в справедливости сильного принципа сравнения, означающего, что для любых вязкостного субрешения u и суперрешения w, удовлетворяющих граничному условию Дирихле в обобщенном вязкостном смысле, неравенство $u \leq w$ спаведливо на Π. По-видимому, для рассматриваемой задачи такой результат неизвестен. Для преодоления этой трудности мы строим специальные стохастические суб- и суперрешения, совпадающие на определенных частях границы Π(данная идея заимствована из[34]). Этот прием позволяет заключить, что $u_- = v = w_+$ на $\partial \Pi$. Затем мы применяем стандартный принцип сравнения для вязкостных решений, удовлетворяющих граничному условию Дирихле в обычном смысле, и заключаем, что v непрерывна на $\overline{G} \times [0, \infty)$. Таким образом мы получаем короткое прямое доказательство теоремы 1 без использования принципа динамического программирования.

Первая модель, иллюстрирующая теоретические результаты это задача оптимальной коррекции:

$$\begin{aligned} dX &= -kX dt + \sigma dW_t - \alpha_t dt, \\ dY &= -|\alpha_t| dt, \end{aligned}$$

где $\sigma > 0$, k — некоторые константы и $\alpha_t \in [\underline{a}, \overline{a}]$. Случай $k > 0$ (соотв., $k < 0$) соответствует устойчивому (соотв., неустойчивому) равновесию 0. Бесконечно малое приращение dX системы может корректироваться с интенсивностью α. Цель управления

[31] S. Chaumont. “Uniqueness to elliptic and parabolic Hamilton-Jacobi-Bellman equations with non-smooth boundary”. В: *C.R. Math. Acad. Sci. Paris.* 339 (2004), с. 555—560.

[32] M. Motta и C. Sartori. “Uniqueness of solutions for second order Bellman-Isaacs equations with mixed boundary conditions”. В: *Discret. Contin. Dyn. S.* 20.4 (2008), с. 739—765.

[33] E. Bayraktar и M. Sîrbu. “Stochastic Perron’s method for Hamilton-Jacobi-Bellman equations”. В: *SIAM J. Control Optim.* 51.6 (2013), с. 4274—4294.

[34] E. Bayraktar и Y. Zhang. “Stochastic Perron’s Method for the Probability of Lifetime Ruin Problem Under Transaction Costs”. В: *SIAM J. Control Optim.* 53.1 (2015), с. 91—113.

состоит в том, чтобы удерживать систему в интервале $G = (-l, l)$, $l > 0$ как можно дольше. По лемме 1 можно перейти к задаче управления до момента выхода:

$$v(x,y) = \sup_{\alpha \in \mathcal{U}} \mathsf{E} \left(\int_0^{T^{x,y,\alpha}} e^{-\beta t}\, dt + e^{-\beta T^{x,y,\alpha}} \psi(X^{x,y,\alpha}_{T^{x,y,\alpha}}) \right),$$

где ψ — решение задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\beta\psi - 1 + kx\psi_x - \frac{1}{2}\sigma^2\psi_{xx} = 0, \quad x \in (-l, l)$$
$$\psi(-l) = \psi(l) = 0.$$

Ясно, что условия 1-3 выполняются. По теореме 1 v является единственным ограниченным непрерывным вязкостным решением уравнения

$$\beta v - 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx} + \min_{a \in [\underline{a}, \overline{a}]} \{(kx + a)v_x + |a|v_y\} = 0, \quad (x,y) \in (-l,l) \times (0, \infty), \tag{15}$$

удовлетворяющим граничным условиям:

$$v(x,0) = \psi(x),\ x \in [-l,l]; \quad v(-l,y) = v(l,y) = 0,\ y > 0.$$

Для численного решения задачи использовался итерационный метод, указанный выше при описании результатов первой главы. Эксперименты проводились для следующего набора параметров: $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.8$, $l = 1$, $\overline{y} = 40$, $\overline{a} = -\underline{a} = 10$. Для анализа влияния интенсивности притяжения (отталкивания) на оптимальные стратегии рассматривались значения $k \in [-10, 10]$. Расчеты проводились на сетке 200×200, покрывающей прямоугольник $[-1,1] \times [0,40]$.

Линии переключения оптимальных стратегий α^* показаны на рис. 2. Средняя область, содержащая точку равновесия, является областью бездействия Π_{na}, где $\alpha^* = 0$. В ее дополнении имеем $\alpha^* = -10$ вблизи верхней границы $x = l$, и $\alpha^* = 10$ вблизи нижней границы $x = -l$.

Область бездействия расширяется при уменьшении y. Это означает, что регулятор становится менее активным, когда количество ресурса Y уменьшается. Более интересный и неожиданный эффект касается «немонотонного» поведения области бездействия по отношению к k. Экспериментально было установлено, что Π_{na} расширяется при увеличения k от 0 до 3.5. Таким образом, регулятор менее вовлечен в процесс стабилизации системы, которая становится более устойчивой сама по себе. Но, для $k > 3.5$ наблюдается обратная картина: область бездействия сужается при дальнейшем увеличении k!

Оптимальные стратегии для неустойчивого случая $k < 0$ представлены на рис. 3. Здесь области бездействия значительно меньше. Это неудивительно, так как неустойчивую систему около точки равновесия удерживать сложнее. В противоположность устойчивому случаю, здесь Π_{na} сжимается монотонно по k. Кроме того, функция Беллмана v в этом случае меньше.

Вторая модель, рассмотренная в главе это задача об оптимальном отслеживании стохастической системы. В задаче рассматривается случайная цель X^1, которую должен отследить управляемый процесс X^2. Флуктуации of X^1 описываются уравнением

$$\begin{aligned} dX^1_t &= \mu(X^1_t)dt + \sigma dW_t, \quad \sigma > 0, \\ \mu(x_1) &= -kx_1 I_{\{|x_1| \le b\}} - kbI_{\{x_1 \ge b\}} + kbI_{\{x_1 \le -b\}}, \quad b > 0 \end{aligned}$$

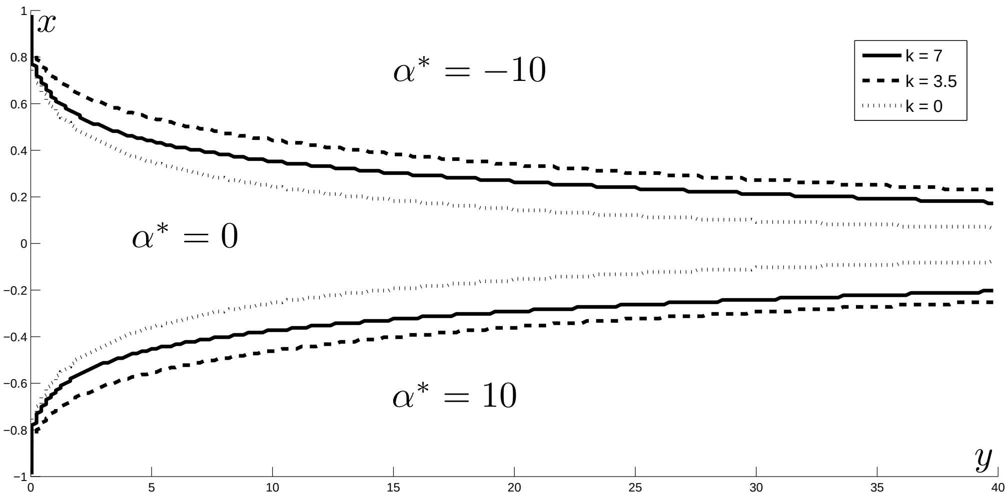

Рис. 2: Оптимальное управление в устойчивом случае.

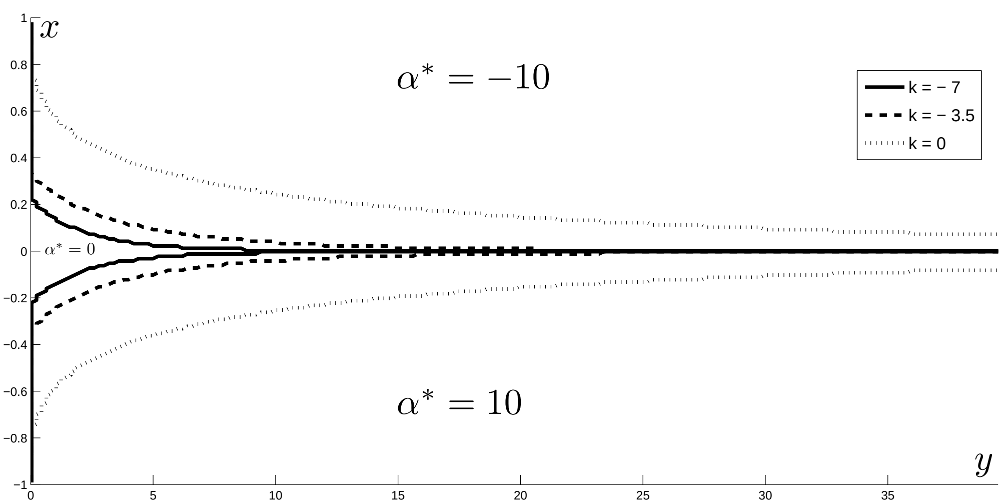

Рис. 3: Оптимальное управление в неустойчивом случае.

Случай $k > 0$ (соотв., $k < 0$) соответствует устойчивой (соотв., неустойчивой) точке равновесия 0 соответствующей детерминированной системы. Динамика следящего процесса X^2, управляемого «расходом топлива», не подвержена воздействию шума:

$$dX_t^2 = \alpha_t dt, \quad dY_t = -|\alpha_t| dt, \quad \alpha_t \in [\underline{a}, \overline{a}].$$

Предполагается, что слежение прекращается, если цель «потеряна из виду»:

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : |X_t^1 - X_t^2| \geq l\}, \quad l > 0.$$

Для целевого функционала (10) уравнение HJB (13) принимает вид

$$\beta v - 1 - \mu(x_1)v_{x_1} - \frac{1}{2}\sigma^2 v_{x_1x_1} + \min_{a\in[\underline{a},\overline{a}]}\{|a|v_y - av_{x_2}\} = 0, \quad (x,y)\in G\times(0,\infty),$$

где $G = \{x : |x_1 - x_2| < l\}$. Граничные условия (14) преобразуются к следующей форме

$$v = 0 \quad \text{на } \partial G\times[0,\infty); \quad v = \psi \quad \text{на } G\times\{0\},$$

где ψ — решение краевой задачи

$$\begin{aligned} &\beta\psi - 1 - \mu(x_1)\psi_{x_1} - \frac{1}{2}\sigma^2\psi_{x_1x_1} = 0, \quad x_1\in(x_2 - l, x_2 + l),\\ &\psi(x_2 - l, x_2) = \psi(x_2 + l, x_2) = 0. \end{aligned}$$

Удобно сделать преобразование поворота

$$z_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}, \quad z_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$$

и представить результаты в новых переменных (z_1, z_2). Рассмотрим область $\{(z_1, z_2, y) : z_1\in(-2,2), z_2\in(-40,40), y\in(0,10)\}$, соответствующую $l = 4/\sqrt{2}$, $r = 80/\sqrt{2}$, $\overline{y} = 10$. В экспериментах были использованы следующие параметры: $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.8$, $b = 2.5$, $\overline{a} = -\underline{a} = 1$. Сетка содержала $2000\times100\times50$ узлов. При $\varepsilon = 0.01$ итерации обычно останавливались после 10 тысяч шагов.

Линии переключения оптимального управления в устойчивом ($k = 0.3$) и неустойчивом ($k = -0.3$) случаях показаны на рис. 4 и 5 соответственно (при $y = 1$).

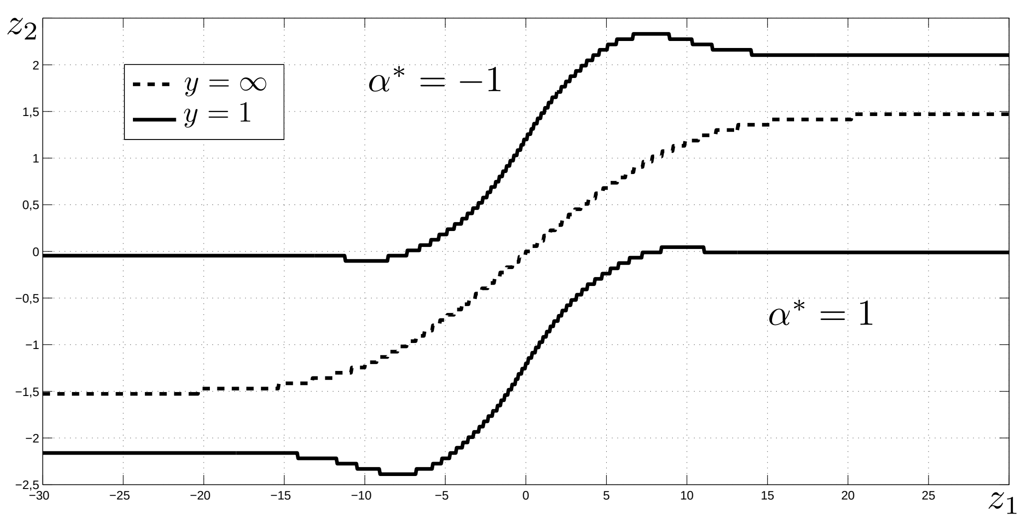

Рис. 4: Оптимальное управление в устойчивом случае, $k = 0.3$.

Области между сплошными линиями соответствуют множествам бездействия. Пунктирные линии определяют переключения оптимального управления для задачи (11),

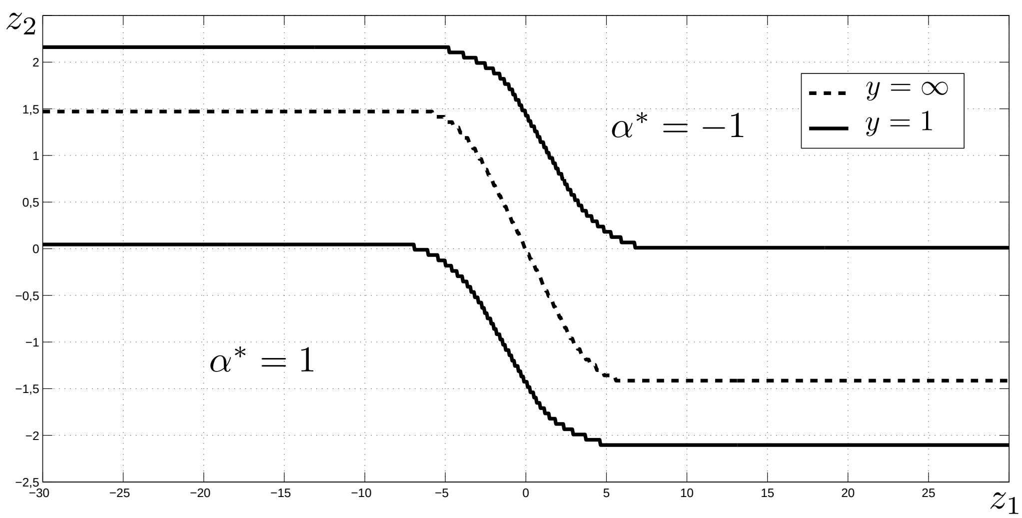

Рис. 5: Оптимальное управление в неустойчивом случае, $k=-0.3$.

(12) с бесконечным топливом (здесь множества бездействия пусты). Поскольку функция μ постоянна при $|x_1|>b$, линии переключения стабилизируются при достаточно больших $|z_1|$. Кроме того, для больших $z_1>0$ область бездействия расположена выше (соотв., ниже) линии $z_2=0$ в устойчивом (соотв., неустойчивом) случае. Причина состоит в том, что в устойчивом случае, при $\alpha=0$, точка $(Z_t^1,Z_t^2)=(X_t^1+X_0^2,X_t^1-X_0^2)/\sqrt{2}$ при больших $Z_0^1>0$, в среднем, движется от верхней границы полосы $(z_1,z_2)\in\mathbb{R}\times(-l,l)$ к ее нижней границе. В неустойчивом случае имеется противоположная тенденция. Для $z_1<0$ соответствующие картины могут быть получены при помощи отражения относительно начала координат.

В третьей главе рассматриваются оптимальные стратегии производства и назначения цен в динамической модели фирмы-монополиста. Предположим, что фирма может производить некоторый товар с интенсивностью $\alpha_t\in A$, где A — замкнутое подмножество $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$. Будучи монополистом, фирма может устанавливать цену $p_t\ge 0$ за единицу товара. Предполагая, что интенсивность спроса является известной строго убывающей функцией цены: $q=D(p)$, удобно считать, что фирма динамически выбирает интенсивность спроса $q_t\in Q$. Множество $Q\subset\mathbb{R}_+$ предполагается компактным. Уровень товарного запаса X удовлетворяет уравнению

$$X_t=x+\int_0^t(\alpha_s-q_s)\,ds,\quad t\ge 0. \tag{16}$$

Пусть отложенный спрос недопустим: $X_t\ge 0$, и множества Q, A удовлетворяют следующим условиям:

$$0\in A\cap Q,\quad A\backslash\{0\}\neq\emptyset,\quad Q\backslash\{0\}\neq\emptyset. \tag{17}$$

Решение уравнения (16) также будем обозначать через $X^{x,\alpha,q}$.

Пусть $R(q)=qp=qD^{-1}(q)$ — функция мгновенного дохода, и $C(\alpha)$ — функция мгновенных затрат. Цель фирмы состоит в том, чтобы максимизировать дисконтированную прибыль на бесконечном горизонте:

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}(R(q_t) - C(\alpha_t))\,dt, \quad \beta > 0.$$

Предполагается, что $R : Q \mapsto \mathbb{R}_+$ непрерывна, $R(0) = 0$, и $C : A \mapsto \mathbb{R}_+$ — неубывающая непрерывная функция. Если A является неограниченным, то мы дополнительно предполагаем, что C — 1-коэрцитивная функция:

$$C(\alpha)/\alpha \to +\infty, \quad A \ni \alpha \to +\infty. \tag{18}$$

Обозначим через $\mathcal{A}(x)$ множество всех борелевских функций $\alpha : \mathbb{R}_+ \to A$, $q : \mathbb{R}_+ \to Q$ таких, что уровень товарного запаса (16) неотрицателен. Функция Беллмана v определяется следующим образом

$$v(x) = \sup_{(\alpha,q)\in\mathcal{A}(x)} \int_0^\infty e^{-\beta t}(R(q_t) - C(\alpha_t))\,dt, \quad x \geq 0. \tag{19}$$

Введем гамильтониан

$$H(z) = \widehat{R}(z) + \widehat{C}(z), \quad \widehat{R}(z) = \sup_{q\in Q}\{R(q) - qz\}, \quad \widehat{C}(z) = \sup_{\alpha\in A}\{\alpha z - C(\alpha)\}. \tag{20}$$

Лемма 2. *Предположим, что множество A компактно. Тогда функция Беллмана v ограничена и равномерной непрерывна. Кроме того, v является единственным* вязкостным решением с ограничениями (constrained viscosity solution: CVS) *уравнения HJB*

$$\beta u(x) - H(u'(x)) = 0, \quad x \geq 0,$$

в классе ограниченных равномерно непрерывных функций.

Результаты, собранные в этой лемме, доказаны в [35] (теоремы 3.3, 2.1, 2.2). Заметим, что предположение (A3) работы [35], касающееся существования «внутреннего направления», выполняется, так как $\sup\{\alpha - q : \alpha \in A, q \in Q\} > 0$ в силу (17).

Обозначим через $\mathcal{M}_H = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} H(z)$ множество точек минимума H, а через $\zeta = \min \mathcal{M}_H \geq 0$ наименьшую точку минимума функции H.

Теорема 2. *Функция Беллмана v ограничена:*

$$v(x) \leq \frac{H(0)}{\beta} = \lim_{y\to\infty} v(y)$$

и допускает следующее представление:

(i) если $\zeta = 0$, то

$$v(x) = H(0)/\beta,$$

[35] H.M. Soner. “Optimal control with state-space constraint. I”. В: *SIAM J. Control Optim.* 24.3 (1986), с. 552—561

(ii) если $\zeta > 0$ то

$$v(x) = \frac{H(\xi(x))}{\beta} = \frac{H(\zeta)}{\beta} + \int_0^x \xi(y)\,dy,$$

где $\xi(x)$ определяется уравнением

$$x = \Psi(\xi) := -\int_\xi^\zeta \frac{H'(z)}{\beta z}\,dz, \quad \xi \in (0,\zeta], \quad x \geq 0.$$

В случае (ii) v является строго возрастающей и строго вогнутой. Кроме того, v' абсолютно непрерывна и удовлетворяет условиям $v'(0) = \zeta$, $\lim_{x\to\infty} v'(x) = 0$. Наконец, $v'' < 0$ п.в.

В ходе доказательства было установлено что, переход от множества A к $A \cap [0,c]$ не влияет на функцию Беллмана v при достаточно больших c.

Заметим также, что если $\zeta > 0$, то оптимальная дисконтированная прибыль не превосходит $H(0)/\beta$. Если $\zeta = 0$, то дисконтированная прибыль $H(0)/\beta$ может быть получена при нулевом начальном запасе. Более того, любой начальный запас $x > 0$ бесполезен.

Введем понятие *овыпукленной задачи*:

$$\widetilde{v}(x) = \sup_{(\alpha,q)\in\widetilde{\mathcal{A}}(x)} \int_0^\infty e^{-\beta t}(\widetilde{R}(q_t) - \widetilde{C}(\alpha_t))\,dt, \tag{21}$$

где $\widetilde{\mathcal{A}}(x)$ — множество измеримых по Борелю функций $\alpha : \mathbb{R}_+ \mapsto \operatorname{co} A$, $q : \mathbb{R}_+ \mapsto \operatorname{co} Q$ таких, что $X_t^{x,\alpha,q} \geq 0$. Заметим, что $\widetilde{C}$ по-прежнему удовлетворяет условию (18): см. [глава E, предложение 1.3.9(ii)][36].

Введем также ослабленную задачу. Для этого расширим класс стратегий производства и назначения цены. *Распределенные управления* $q_t(dy)$ и $\alpha_t(dy)$ представляют собой отображения отрезка $[0,\infty)$ в множества вероятностных мер на Q и A такие, что функции

$$t \mapsto \int_Q \varphi(y)\,q_t(dy), \qquad t \mapsto \int_A \varphi(y)\,\alpha_t(dy)$$

измеримы по Борелю для любой непрерывной функции φ. Динамика движения товарного запаса при использовании распределенных управлений определяется следующим образом

$$X_t = x + \int_0^t \int_Q y\,q_s(dy)ds - \int_0^t \int_A y\,\alpha_s(dy)ds.$$

Класс $\mathcal{A}_r(x)$ допустимых распределенных стратегий содержит лишь те, которые удерживают X_t в неотрицательной области. Соответствующая функция Беллмана определяется следующим образом:

$$v_r(x) = \sup_{(\alpha,q)\in\mathcal{A}_r(x)} \left(\int_0^\infty e^{-\beta t}\int_Q R(y)\,q_t(dy)dt - \int_0^\infty e^{-\beta t}\int_A C(y)\,\alpha_t(dy)dt\right). \tag{22}$$

Задачу (22) будем называть *ослабленной*.

[36] J.-B. Hiriart-Urruty и C. Lemaréchal. *Fundamentals of convex analysis*. Berlin: Springer, 2001.

Теорема 3. *Функции Беллмана (19), (21), (22) соответствующие исходной, овыпукленной и ослабленной задачам совпадают:* $v = v_r = \widetilde{v}$.

Равенство $v = v_r$ для задачи с фазовыми ограничениями в случае компактных множеств состояний и управлений было установлено в[37].

Далее, в главе рассматривается случай нулевого начального запаса: $X_0 = 0$. Для любой константы $\widehat{u} \in Q \cap A$ *статическая стратегия* $\alpha_t = q_t = \widehat{u}$ допустима. Если она оптимальна, то

$$\widehat{u} \in \mathcal{M} := \arg\max_{u \in Q \cap A} \{R(u) - C(u)\}.$$

Для $\eta \in \mathbb{R}$ положим

$$\mathcal{M}_R(\eta) = \arg\max_{q \in Q} \{R(q) - \eta q\}, \qquad \mathcal{M}_C(\eta) = \arg\max_{\alpha \in A} \{\alpha\eta - C(\alpha)\},$$

и $\mathcal{M}_\eta = \mathcal{M}_R(\eta) \cap \mathcal{M}_C(\eta)$. В разделе доказываются следующие теоремы:

Теорема 4. *Следующие условия эквивалентны.*

(i) *Статическая стратегия* $\alpha_t = q_t = \widehat{u} \in \mathcal{M}$ *является оптимальной.*

(ii) $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$ *для некоторого* $\eta \in \mathbb{R}$.

(iii) $\mathcal{M}_\zeta \neq \emptyset$.

Если $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$, *то* η *является точкой минимума функции* H *и* $\mathcal{M}_\eta = \mathcal{M}$.

Теорема 5. *Предположим что множества* Q, A *выпуклы, функция* R *вогнута и функция* C *выпукла. Тогда для любого* $\eta \in \mathcal{M}_H$ *имеем* $\mathcal{M}_\eta \neq \emptyset$. *Следовательно, стационарная стратегия является оптимальной.*

По теоремам 4, 5 для овыпукленной задачи (21) стационарная стратегия $\widetilde{\alpha}_t = \widetilde{q}_t = \widetilde{u}$,

$$\widetilde{u} \in \arg\max\{\widetilde{R}(u) - \widetilde{C}(u) : u \in \operatorname{co} Q \cap \operatorname{co} A\},$$

оптимальна для нулевого начального запаса, и

$$\widetilde{v}(0) = \frac{\widetilde{R}(\widetilde{u}) - \widetilde{C}(\widetilde{u})}{\beta}.$$

Далее, существуют $\gamma \in (0,1)$, $\nu \in (0,1)$, $q^i \in Q$, $\alpha^i \in A$, $i = 1, 2$ такие, что

$$\widetilde{u} = \gamma q^1 + (1-\gamma) q^2 = \nu\alpha^1 + (1-\nu)\alpha^2, \tag{23}$$

$$\widetilde{R}(\widetilde{u}) = \gamma R(q^1) + (1-\gamma) R(q^2), \quad \widetilde{C}(\widetilde{u}) = \nu C(\alpha^1) + (1-\nu) C(\alpha^2). \tag{24}$$

На основании теоремы 3, следующие распределенные управления

$$\overline{q}_t(dx) = \gamma\delta_{q^1}(dx) + (1-\gamma)\delta_{q^2}(dx), \quad \overline{\alpha}_t(dx) = \nu\delta_{\alpha^1}(dx) + (1-\nu)\delta_{\alpha^2}(dx), \tag{25}$$

где δ_a — мера Дирака, сконцентрированная в точке a, являются оптимальными.

Для случая положительного начального запаса, для описания оптимальных стратегий, в работе сформулирована и доказана следующая теорема:

[37] P. Loreti. “Some properties of constrained viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations”. В: *SIAM J. Control Optim.* 25.5 (1987), с. 1244—1252.

Теорема 6. *Пусть $F \subset (0,\zeta)$ — ко-счетное множество, где выпуклые функции $\widehat{R}$, $\widehat{C}$ дифференцируемы. Положим*

$$\{\widehat{q}(z)\} = \arg\max_{q\in \operatorname{co} Q}\{\widetilde{R}(q) - qz\}, \quad \{\widehat{\alpha}(z)\} = \arg\max_{\alpha\in \operatorname{co} A}\{\alpha z - \widetilde{C}(\alpha)\}, \quad z \in F,$$

$$\widehat{u} \in \arg\max(\widetilde{R}(u) - \widetilde{C}(u) : u \in \operatorname{co} Q \cap \operatorname{co} A).$$

Для заданного начального запаса $x > 0$ положим

$$\tau = \frac{1}{\beta}\ln\frac{v'(0)}{v'(x)}$$

и определим X уравнением

$$v'(X_t) = v'(x)e^{\beta t}, \quad t \in [0,\tau].$$

Далее, положим $\mathcal{T} = \{t \in [0,\tau] : v'(X_t) \in F\}$ и рассмотрим стратегию

$$\alpha_t^* = \widehat{\alpha}(v'(X_t)), \quad q_t^* = \widehat{q}(v'(X_t)), \quad t \in \mathcal{T}, \tag{26}$$

$$\alpha_t^* = q_t^* = \widehat{u}, \quad t > \tau. \tag{27}$$

На счетном множестве $[0,\tau]\backslash\mathcal{T}$ значения α_t^*, q_t^* могут быть определены произвольным образом.

(i) Стратегия (26) является оптимальной для овыпукленной задачи (21).

(ii) Имеем

$$(\alpha_t^*, q_t^*) \in \operatorname{dom} C \times \operatorname{dom} R, \quad \widetilde{C}(\alpha_t^*) = C(\alpha_t^*), \quad \widetilde{R}(\alpha_t^*) = R(\alpha_t^*), \quad t \in \mathcal{T}.$$

(iii) Существуют $q^i \in Q$, $\alpha^i \in A$, $i = 1,2$ и $\gamma \in (0,1)$, $\nu \in (0,1)$ такие, что справедливы равенства (23), (24). Заменяя (27) статическим распределенным управлением

$$\overline{q}(dx) = \gamma\delta_{q^1}(dx) + (1-\gamma)\delta_{q^2}(dx), \quad \overline{\alpha}(dx) = \nu\delta_{\alpha^1}(dx) + (1-\nu)\delta_{\alpha^2}(dx), \tag{28}$$

получаем решение ослабленной задачи (22).

(iv) Если $\mathcal{M}_\zeta \neq \emptyset$, то заменяя (27) на

$$\widehat{u} \in \arg\max_{u\in Q\cap A}(R(u) - C(u)),$$

получаем оптимальное решение задачи (19).

В конце главы рассматривается пример Арвана-Мозеса, где спрос является линейным, следовательно получаемый мгновенный доход выглядит следующим образом:

$$R(q) = (A - Bq)q, \quad q \in [0, A/B].$$

Функция затрат

$$C(\alpha) = \alpha^3/3 - K\alpha^2 + K^2\alpha, \quad \alpha \geq 0$$

выпукла на $[0, K]$ и вогнута на $[K, \infty)$. Здесь предполагается что $A, B, K > 0$. Имеем,

$$R'(q) = A - 2Bq, \quad R''(q) = -2B,$$

$$C'(\alpha) = (\alpha - K)^2, \quad C''(\alpha) = 2(\alpha - K).$$

Заметим, что функция C строго возрастающая и 1-коэрцитивна. Функция R строго вогнута.

Оптимальная статическая стратегия для нулевого начального запаса имеет вид

$$\widehat{u} \in \arg\min_{u \in [0, A/B]} (R(u) - \widetilde{C}(u)).$$

$$\widehat{u} = \begin{cases} 0, & A \leq K^2/4, \\ (A - K^2/4)/(2B), & K^2/4 \leq A \leq 3BK + K^2/4, \\ -B + K + \sqrt{B^2 - 2BK + A}, & A \geq 3BK + K^2/4. \end{cases} \tag{29}$$

Для $A \leq K^2/4$ и $A \geq 3BK + K^2/4$ имеем $\widetilde{C}(\widehat{u}) = C(\widehat{u})$. Следовательно, в этих случаях $\alpha_t = q_t = \widehat{u}$ является оптимальным решением исходной задачи. Если

$$\frac{K^2}{4} < A < 3BK + \frac{K^2}{4}, \tag{30}$$

то $\widehat{u}$ принадлежит интервалу $(0, 3K/2)$, где $\widetilde{C}$ линейна и $\widetilde{C} < C$. В этом случае оптимальная распределенная стратегия производства определяется формулами (23) – (25):

$$\overline{\alpha}_t(dx) = \nu\delta_0 + (1 - \nu)\delta_{3K/2}, \quad (1 - \nu)\frac{3K}{2} = \widehat{u} = \left(A - \frac{K^2}{4}\right)\frac{1}{2B}. \tag{31}$$

Таким образом, для нулевого начального запаса обычная статическая стратегия не является оптимальной, если и только если выполнено условие (30). В этом случае вместо распределенной стратегии (31) можно использовать приближенно оптимальную стратегию. При использовании этой стратегии запас остается близким к 0: $X_t \leq b\varepsilon$, $b > 0$, и демонстрирует циклическое поведение накопления-сокращения, описанное в [21]. Однако, оно может не производить дисконтированную прибыль близкую к оптимальной, если циклы накопления-сокращения не малы.

В случае когда начальный товарный запас $z \geq 0$ оптимальная стратегия определяется следующим образом:

(i) Если $A \leq K^2/4$, то фирма должна оптимально продать начальный запас:

$$\dot{X}_t = -\widehat{q}(v'(X_t)) = -\frac{A - v'(X_t)}{2B} < 0, \quad X_t > 0.$$

Производство не отсутствует.

(ii) Если $K^2/4 < A < K^2/4 + 3BK$, то производство начинается после продажи начального запаса, и распределенная производственная стратегия (31) должна соответствовать спросу $\widehat{q}(\zeta) = \widehat{u} = (A - K^2/4)/2B$.

(iii) Если $A \geq K^2/4 + 3BK$, то производство начинается после того, как уровень товарного запаса падает ниже $\widehat{x}$. При этом товарный запас продолжает уменьшаться до

0 и стабилизируется на этом уровне. Оптимальные спрос и интенсивность производства соответствующего устойчивого режима равны значению $\widehat{u}$, определенному в (29).

В четвертой главе исследуется одна из версий задачи позиционирования объекта, находящегося под воздействием случайных факторов.

Рассмотрим некоторый случайный процесс S, согласованный с естественной фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_s)_{s\in[0,T]}$ винеровского процесса W. Будем считать, что положение объекта в терминальный момент времени T имеет вид

$$X_T = X_0 + \gamma_0(S_\tau - S_0) + \gamma_\tau(S_T - S_\tau).$$

Здесь X_0, γ_0 — начальные положение и интенсивность воздействия, а стратегия изменения интенсивности воздействия представлена парой (γ_τ, τ), где τ момент остановки относительно $\mathbb{F}$, а γ_τ — $\mathcal{F}_\tau$ - измеримая случайная величина. Цель состоит в минимизации среднеквадратического отклонения положения объекта от заданного фиксированного уровня H:

$$\mathsf{E}[(X_T - H)^2] \to \min_{(\gamma_\tau,\tau)}.$$

Данная задача сводится к задаче оптимальной остановки:

$$\mathsf{E}\left[(\widehat{H} - \gamma_0 S_\tau)^2\left(1 - \frac{\mathsf{E}((S_T - S_\tau)|\mathcal{F}_\tau)^2}{\mathsf{E}((S_T - S_\tau)^2|\mathcal{F}_\tau)}\right)\right] \to \min_\tau, \tag{32}$$

где $\widehat{H} = H - X_0 + \gamma_0 S_0$.

Для моделей броуновского движения со сносом и геометрического броуновского движения:

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

задача (32) принимает вид

$$\mathsf{E}[h(S_\tau)\phi(\tau)] \to \min_\tau, \tag{33}$$

где $h(S_t) = (\widehat{H} - \gamma_0 S_t)^2$, и

$$\phi(t) = \frac{\sigma^2}{\mu^2(T-t)+\sigma^2}, \quad \phi(t) = \frac{e^{2\mu(T-t)}(e^{\sigma^2(T-t)} - 1)}{e^{(2\mu+\sigma^2)(T-t)} - 2e^{\mu(T-t)} + 1}$$

для моделей броуновского движения со сносом и геометрического броуновского движения соответственно.

Для оценки оптимального момента остановки была использована интегральная форма задачи (33):

$$h(S_0)\phi(0) + \mathsf{E}\left[\int_0^\tau F(t, S_t)dt\right] \to \min_\tau,$$

где $F(t,s) = h(s)\phi'(t) + h'(s)\phi(t)\mu(s) + \frac{1}{2}h''(s)\phi(t)\sigma^2(s)$. Было установлено что оптимальный момент остановки $\hat{\tau}$ удовлетворяет оценке $\hat{\tau} \geq \tau^*$, где

$$\tau^* = \inf_t\{t \geq 0 : F(t, S_t) \geq 0\} \wedge T.$$

Отметим, что если $\mu = 0$, то $\tau^* = 0$ и $\gamma^*_\tau = 0$. При $\mu \neq 0$ область продолжения, определяющая момент τ^*, имеет вид

$$\{(t,s) : F(t,s) \leq 0\} = \{(t,s) : s_1(t) \leq s \leq s_2(t)\},$$

$$s_{1,2}(t) = \frac{\widehat{H}}{\gamma_0} - \frac{\sigma^2}{\mu} - \mu(T-t) \pm \sqrt{\mu^2(T-t)^2 + \sigma^2(T-t)}, \tag{34}$$

$$s_{1,2}(t) = \frac{H}{\gamma_0} \frac{\mu\phi(t) + \phi'(t) \pm \sqrt{\mu^2\phi^2(t) - \sigma^2\phi(t)\phi'(t)}}{(\sigma^2 + 2\mu)\phi(t) + \phi'(t)} \tag{35}$$

в случае броуновского движения со сносом и геометрического броуновского движения соответственно.

Для численного решения задачи использовалось уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\min\left\{v_t - [\mu(x)v_s + \frac{1}{2}\sigma^2(s)v_{ss}], h(s)\phi(t) - v\right\} = 0, \quad (t,s) \in G, \tag{36}$$
$$v(T,s) = h(s)\phi(T)$$

для задачи (33). Для модели броуновского движения со сносом $G = [0,T] \times \mathbb{R}$, μ, σ являются константами. В модели геометрического броуновского движения $G = [0,T] \times [0,+\infty)$, $\mu(s) = \mu s, \sigma(s) = \sigma s$. Для задачи (36) справедлива теорема сравнения, что гарантирует сходимость разностной схемы, при условии что последняя обладает свойствами аппроксимации, монотонности и устойчивости. Используемая далее схема (аналогичная рассмотренной в главе 1) обладает данными свойствами.

Для модели броуновского движения со сносом задача решалась при следующих входных данных: $T = 10$, $H = 4$, $X_0 = 1$, $S_0 = 10$, $\gamma_0 = 2$, $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.4$. Граница области остановки (пунктирная линия) и её нижняя оценка (сплошная линия) представлены на рис. 6.

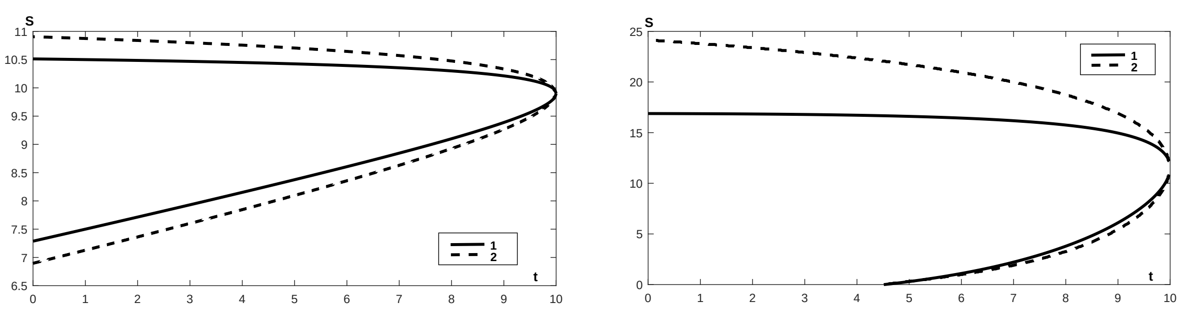

Рис. 6: Границы областей остановки и их нижние оценки (34), (35) для моделей броуновского движения со сносом и геометрического броуновского движения соответственно.

Можно отметить, что полученная в результате численных расчетов граница качественно ведет себя так же, как и её нижняя оценка. Величина погрешности зависит от параметров, но приведенная на рис. 6 картина является типичной.

Для модели геометрического броуновского движения картина несимметрична и, в типичном случае, верхняя граница области остановки оценивается менее точно чем нижняя. Соответствующие графики, для входных данных: $T = 10$, $H = 4$, $X_0 = 1$, $S_0 = 15$, $\gamma_0 = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.4$, представлены на 6. Отметим, что область остановки определяется лишь той частью границы, которая находится выше оси абсцисс.

Заключение. В работе построена модель защиты информации от НСД и перехвата в канале передачи данных на основе применения линейных кодов, в частности, на основе применения асимметричных и симметричных шифросистем типа шифросистемы Мак-Элиса для ранговых кодов, и методов кодового зашумления для борьбы с перехватом в каналах передачи данных. Построена универсальная модель защиты каналов передачи данных на основе линейных кодов, состоящая из логического блока защиты от НСД и блока защиты от перехвата. Универсальность модели проявляется в том, что один линейный кодек может применяться для борьбы с различными схемами нападения: НСД (полным съемом информации) и перехватом (частичным съемом). Однако полная универсальность обеспечивается не для произвольных кодов, а только для кодов в ранговой метрике. Универсальность применения кодов в хэмминговой метрике ограничена только схемами защиты от перехвата. Модель реализована программно, в качестве базы линейных кодеков реализованы кодеки на случайных кодах, регулярных слабоплотных кодах специального типа, случайных слабоплотных кодах, кодах Рида-Маллера, кодах Рида-Соломона и ранговых кодах.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Рохлин Д. Б., Мироненко Г. В.* Расчет оптимальных стратегий выплаты дивидендов, перестрахования и инвестирования в диффузионной модели //Сибирский журнал индустриальной математики. – 2015. – Т. 18. – №. 1. – С. 110-122.

[2] *Rokhlin D. B., Mironenko G.* Regular finite fuel stochastic control problems with exit time //Mathematical Methods of Operations Research. – 2016. – Т. 84. – №. 1. – С. 105-127.

[3] *Rokhlin D. B., Mironenko G.* Optimal production and pricing strategies in a dynamic model of monopolistic firm //Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. – 2016. – Т. 33. – №. 3. – С. 557-582.

[4] *Мироненко Г. В.* ЗАДАЧА О ПОЗИЦИОНИРОВАНИИ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕКТА ЗА СЧЕТ ОДНОКРАТНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ПРИРАЩЕНИЙ ЕГО ТРАЕКТОРИИ //Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2017. – №. 1. – С. 36-41.

Подписано к печати _._.2009 Заказ Формат $60 \times 90/16$

Печ. л. 1.0 Уч.-изд. л. 1.0 Тираж 120 Бесплатно

Отпечатано в _

_