SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

NGƯỜI THỰC HIỆN: TRẦN NGỌC THẮNG

Vĩnh Phúc, năm 2015

MỤC LỤC

CÁC KÍ HIỆU VÀ CỤM CHỮ CÁI VIẾT TẮT CỦA CHUYÊN ĐỀ

Kí hiệu	Tiếng Anh	Tiếng Việt
HSG		Học sinh giỏi
HSG QG		Học sinh giỏi quốc gia
IMO	International Mathematical Olympiad	Kì thi Olimpic toán quốc tế
VMO	VietNam Mathematical Olympiad	Olimpic toán học
THTT		Toán Học Tuổi Trẻ
IMO Shortlist	International Mathematical Olympiad Shortlisted	Tuyển tập các bài toán dự tuyển Olimpic toán quốc tế
TST	Team Selection Test	Kì thi chọn đội tuyển
TST VN	Team Selection Test Viet Nam	Kì thi chọn đội tuyển Việt Nam
NMO	National Mathematical Olympiad	Kì thi Olimpic toán quốc gia

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

Phần 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

1.Lý do chọn đề tài

Các bài toán về phép đếm trong tổ hợp là một phần quan trọng của chuyên ngành toán rời rạc và là một mảng khó trong chương trình toán THPT chuyên. Chính vì thế trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic Toán quốc tế và khu vực, những bài toán tổ hợp có liên quan đến các phép đếm cũng hay được đề cập và thường được xem là những dạng toán khó, những câu phân loại của kì thi. Các em học sinh bậc Trung học phổ thông thường gặp một số khó khăn khi tiếp cận các dạng toán liên quan đến phép đếm, đặc biệt là kỹ năng ứng dụng các phép đếm vào việc giải bài tập. Những học sinh mới bắt đầu làm quen một số phương pháp đếm thường chưa hiểu tường tận tư tưởng cũng như phương pháp tiếp cận bài toán, đặc biệt là khâu vận dụng kiến thức tổ hợp liên quan đến phép đếm vào giải toán trong những tình huống khác nhau. Để hiểu và vận dụng tốt một số phương pháp đếm cơ bản và vận dụng kiến thức tổ hợp vào giải toán thì thông thường học sinh phải có kiến thức nền tảng tổ hợp tương đối đầy đủ và chắc chắn trên tất cả các lĩnh vực của ngành toán rời rạc. Đó là một khó khăn rất lớn đối với giáo viên và học sinh khi giảng dạy và học tập phần các phép đếm trong tổ hợp.

Trong các phép đếm trong tổ hợp thì phép đếm sử dụng đa thức, quỹ đạo, thiết lập hệ thức truy hồi, … có rất nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán tổ hợp và trong các kì thi học sinh giỏi số lượng các bài toán liên quan đến việc sử dụng các phép đếm này khá nhiều. Các bài toán khi giải bằng phương pháp sử dụng phép các phép đếm trên trong các kì thi học sinh giỏi thường khá hay và đặc sắc, thể hiện khả năng sáng tạo của học sinh. Bằng cách giải bằng cách sử dụng các phép đếm này giúp học sinh thấy được bản chất của bài toán và phát hiện ra các tính chất thú vị khác của bài toán. Tuy nhiên khó khăn lớn nhất của giáo viên khi dạy phần này là làm sao để học sinh hứng thú học và có khả năng vận dụng các phép đếm vào giải các bài toán tổ hợp, do đó vấn đề đặt ra là cần trang bị cho các em những kiến thức gì? Cần bắt đầu từ những bài toán nào? Cần phân dạng các bài tập áp dụng các phép đếm và những dấu hiệu của các bài toán như thế nào thì dùng các phép đếm đó? Với tất cả những khó khăn và thuận lợi trên chúng tôi chọn đề tài “một số phương pháp đếm" để trao đổi và đưa ra một số dạng bài tập đặc trưng giải bằng sử dụng các phương pháp đếm.

2.Mục đích nghiên cứu

Đề tài "một số phương pháp đếm" được chọn để giới thiệu với các thầy cô giáo và các em học sinh những kinh nghiệm của chúng tôi khi giảng dạy chủ đề các phép đếm trong chương trình THPT chuyên, và đồng thời thông qua đề tài này chúng tôi muốn nhấn mạnh tầm quan trọng của các phép đếm trong các bài toán tổ hợp và một số bài toán khác xuất hiện trong các kì thi Quốc tế, khu vực và Olympic quốc gia của một số nước. Các bài toán tổ hợp mà lời giải sử dụng các phép đếm thường là những bài tập khó, các bài tập chúng tôi đưa ra đều là các đề thi Olympic Quốc tế, khu vực và một số nước có truyền thống về toán, trong các bài tập này chúng tôi có phân tích dấu hiệu của bài toán mà có thể sử dụng để giải bằng cách dùng các phép đếm. Những bài toán này nếu không sử dụng các phép đếm thường rất khó trình bày và rất dễ ngộ nhận.

Thông qua đề tài "một số phương pháp đếm" chúng tôi cũng rất mong muốn nhận được góp ý trao đổi của các bạn đồng nghiệp, các bậc cha mẹ học sinh và các em học sinh. Chúng tôi mong muốn đề tài này góp một phần nhỏ để việc dạy phần các phép đếm hiệu quả nhất và giúp các em học sinh có khả năng vận dụng các phép đếm vào giải các bài toán tổ hợp một cách tốt nhất.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu

Để đáp ứng yêu cầu về việc học tập và nghiên cứu cho học sinh trong ba năm học liên tiếp: 2013-2014, 2014-2015, 2015-2016, góp phần nâng cao số lượng và chất lượng HSG môn toán tại các kỳ thi: HSG vòng tỉnh, HSG đồng bằng duyên hải bắc bộ, HSG QG lớp 12. Tuy nhiên, do giới hạn về chương trình, điều kiện về giáo viên, cơ sở vất chất nên đề tài chưa được triển khai rộng trong các trường THPT trong toàn tỉnh.

4. Đối tượng và khách thể nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của đề tài là học sinh các lớp chuyên Toán 11, 12; đội tuyển ghép thi chọn HSG lớp 12 vòng tỉnh, đội tuyển HSG tham dự kỳ thi chọn HSG QG lớp 12 môn Toán học của trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc. Ngoài ra còn có thể là tài liệu tham khảo cho học sinh, giáo viên và phụ huynh học sinh có nhu cầu tìm hiểu về các phép đếm cũng như tìm hiểu sâu hơn về phân môn tổ hợp.

5. Phạm vi nghiên cứu

- Về kiến thức: nghiên cứu dựa trên các nội dung kiến thức toán của phân môn tổ hợp trong giới hạn thi học sinh giỏi của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

- Về đối tượng: đề tài nghiên cứu dựa trên khả năng nhận thức cũng như năng lực tư duy của học sinh các lớp chuyên toán 10, 11 và chủ yếu là học sinh nòng cốt trong đội tuyển học sinh giỏi tỉnh dự thi quốc gia.

6. Phương pháp nghiên cứu

Trong bản sáng kiến kinh nghiệm sử dụng các phương pháp nghiên cứu chủ yếu sau:

- Phương pháp nghiên cứu lí luận: Nghiên cứu các tài liệu chuyên về tổ hợp đặc biệt là các tài liệu liên quan đến số phức, giải tích, dãy số, ... và các tạp chí trong và ngoài nước; tài liệu từ Internet...

- Phương pháp trao đổi, tọa đàm (với giáo viên, học sinh các lớp chuyên toán).

- Phương pháp tổng kết kinh nghiệm.

7. Cấu trúc của chuyên đề

Chuyên đề ngoài các phần danh mục viết tắt, mục lục, tài liệu tham khảo thì chuyên đề bao gồm 3 phần chính như sau:

Phần I. Đặt vấn đề

Phần II. Nội dung

Phần III. Kết luận và kiến nghị

Phần 2. NỘI DUNG

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

Chương 1. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ĐA THỨC VÀ SỐ PHỨC

1.1 Lý thuyết

1.1.1 Căn bậc n của đơn vị

1.1.1.1 Định nghĩa. Số phức z được gọi là căn bậc *n* của đơn vị nếu nó thỏa mãn đẳng thức $z^n - 1 = 0$.

Tập hợp các căn bậc *n* của đơn vị là tập hợp $\left\{ \cos\frac{k2\pi}{n} + i\sin\frac{k2\pi}{n} \middle| k = 0,1,...,n-1 \right\}$

1.1.1.2 Tính chất

+) Nếu $z \neq 1$ là căn bậc n của đơn vị suy ra z là nghiệm của phương trình

$$z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = 0$$

+) Phương trình $z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = 0$ có $n-1$ nghiệm là

$$\cos\frac{k2\pi}{n} + i\sin\frac{k2\pi}{n},\ k = 1,...,n-1$$

1.1.2 Đa thức bất khả quy

1.1.2.1 Định nghĩa. Đa thức $P(x) \in A[x]$, trong đó $A \subset \mathbb{R}$ và có bậc n ($n \in \mathbb{N}, n > 0$) được gọi là đa thức bất khả quy trên tập A nếu $P(x)$ không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số đều thuộc A và có bậc nhỏ hơn n.

1.1.2.2 Định lí. Đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên và có bậc n ($n \in \mathbb{N}, n > 0$) bất khả quy trên $\mathbb{Z}$. Khi đó đa thức $P(x)$ cũng bất khả quy trên $\mathbb{Q}$.

1.1.3 Tiêu chuẩn Eisenstein.

Cho đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x], n \in \mathbb{Z}, n > 1$. Giả sử tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

(1) $a_0, a_1, ..., a_{p-1}$ đều chia hết cho p;

(2) a_n không chia hết cho p;

(3) a_0 không chia hết cho p^2.

Khi đó đa thức $P(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}$.

1.1.4 Một số định lí

1.1.4.1 Định lí . Cho p là một số nguyên tố, $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$ và $a_0, a_1, ..., a_{p-1} \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn đẳng thức

$$a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + ... + a_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0$$

Khi đó $a_0 = a_1 = ... = a_{p-1}$.

Chứng minh. Xét các đa thức

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{p-1}x^{p-1}$$

$$Q(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{p-1}$$

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. Đa thức $Q(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{p-1}$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}$.

Thật vậy, đặt $x = 1 + y \Rightarrow R(y) = Q(1+y) = \dfrac{(1+y)^p - 1}{1+y-1}$

$$= C_p^1 + C_p^2 y + ... + C_p^{p-1} y^{p-2} + C_p^p y^{p-1}$$

Do $C_p^k \vdots p, 1 \le k \le p-1$ và $C_p^p = 1$ không chia hết cho p nên theo tiêu chuẩn Eisenstein ta được $R(y)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}$ hay đa thức $Q(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}$ suy ra $Q(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}$. Vậy bổ đề được chứng minh.

+) Nếu $(P(x), Q(x)) = 1$ thì tồn tại các đa thức $q_1(x), q_2(x) \in \mathbb{Q}[x]$ sao cho

$$\begin{aligned}&1 = q_1(x)P(x) + q_2(x)Q(x)\\ &\Rightarrow 1 = q_1(\varepsilon)P(\varepsilon) + q_2(\varepsilon)Q(\varepsilon) = 0\end{aligned}$$

Vô lí vì $P(\varepsilon) = Q(\varepsilon) = 0$.

+) Nếu $(P(x),Q(x))=d(x)$, vì $Q(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ nên điều này chỉ xảy ra khi $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$. Mặt khác $P(x),Q(x)$ có cùng bậc nên $a_0=a_1=...=a_{p-1}$. Vậy **định lí 1.1.4.1** được chứng minh.

1.1.4.2 Định lí (định lí Root of unity filter). Cho số nguyên dương n, $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ và đa thức

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_mx^m$$

Khi đó

$$\sum_{k\vdots n}a_k=\frac{1}{n}\left[P(1)+P(\varepsilon)+...+P\left(\varepsilon^{n-1}\right)\right]$$

Chứng minh.

Ta có các đẳng thức sau

$$P(1)=a_0+a_1+...+a_m$$

$$P(\varepsilon)=a_0+a_1\varepsilon+...+a_m\varepsilon^m$$

....

$$P\left(\varepsilon^k\right)=a_0+a_1\varepsilon^k+...+a_m\varepsilon^{mk}$$

....

$$P\left(\varepsilon^{n-1}\right)=a_0+a_1\varepsilon^{n-1}+...+a_m\varepsilon^{m(n-1)}$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được

$$\sum_{j=0}^{n-1}P\left(\varepsilon^j\right)=na_0+a_1\sum_{j=0}^{n-1}\left(\varepsilon^j\right)+...+a_l\sum_{j=0}^{n-1}\left(\varepsilon^j\right)^l+...+a_m\sum_{j=0}^{n-1}\left(\varepsilon^j\right)^m$$

Chú ý

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\varepsilon^j\right)^k=\begin{cases}0 & khi\ k\not\equiv(\bmod n)\\ n & khi\ k\equiv(\bmod n)\end{cases}$$

Do đó

$$\sum_{j=0}^{n-1}P\left(\varepsilon^j\right)=na_0+a_1\sum_{j=0}^{n-1}\left(\varepsilon^j\right)+...+a_l\sum_{j=0}^{n-1}\left(\varepsilon^j\right)^l+...+a_m\sum_{j=0}^{n-1}\left(\varepsilon^j\right)^m$$

$$= n\left[\sum_{j=0}^{n-1} P\left(\varepsilon^j\right)\right]$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

1.2 Bài tập minh họa

Trong tất cả các bài tập trong chuyên đề này ta kí hiệu $S(X), |X|$ lần lượt chỉ tổng các phần tử, số phần tử của tập hợp *X*.

Bài 1.2.1 (VMO 2015). Cho số nguyên dương k. Tìm số các số tự nhiên n không vượt quá 10^k thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a) n chia hết cho 3;
b) Các chữ số trong biểu diễn thập phân của n thuộc tập hợp $\{2,0,1,5\}$.

Lời giải.

Cách 1 (Sử dụng định lí 1.1.4.1). Đặt $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, x_j là số các số tự nhiên có k chữ số, mỗi chữ số được lấy từ các chữ số 2, 0, 1, 5 và có tổng các chữ số $\equiv j \pmod 3$. Khi đó ta có

$$\sum_{j=0}^{2} x_j \varepsilon^j = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{2,0,1,5\}} \varepsilon^{x_1 + x_2 + \ldots + x_k} = \left(\varepsilon^2 + \varepsilon^0 + \varepsilon^1 + \varepsilon^5\right)^k$$

$$= \left(\varepsilon^2 + 1 + \varepsilon + \varepsilon^2\right)^k = \left(\varepsilon^2\right)^k = \varepsilon^{2k}$$

Ta xét các trường hợp sau

+) $k \equiv 0 \pmod 3$ ta có

$$\sum_{j=0}^{2} x_j \varepsilon^j = \varepsilon^{2k} = 1$$

Do đó theo **định lí 1.1.4.1** ta có

$$x_0 - 1 = x_1 = x_2 \Rightarrow x_0 - 1 = \frac{x_0 + x_1 + x_2 - 1}{3} = \frac{4^k - 1}{3} \Rightarrow x_0 = \frac{4^k + 2}{3}$$

+) $k \equiv 1 \pmod 3$ ta có

$$\sum_{j=0}^{2} x_j \varepsilon^j = \varepsilon^{2k} = \varepsilon^2$$

Do đó theo **định lí 1.1.4.1** ta có

$$x_0 = x_1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_0 = \frac{x_0 + x_1 + x_2 - 1}{3} = \frac{4^k - 1}{3} \Rightarrow x_0 = \frac{4^k - 1}{3}$$

+) $k \equiv 2 \pmod 3$ ta có

$$\sum_{j=0}^{2} x_j \varepsilon^j = \varepsilon^{2k} = \varepsilon$$

Do đó theo **định lí 1.1.4.1** ta có

$$x_0 = x_1 - 1 = x_2 \Rightarrow x_0 = \frac{x_0 + x_1 + x_2 - 1}{3} = \frac{4^k - 1}{3} \Rightarrow x_0 = \frac{4^k - 1}{3}.$$

Cách 2 (Sử dụng định lí 1.1.4.2) Đặt $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, xét đa thức

$$P(x) = \left(x^2 + x^0 + x^1 + x^5\right)^k$$

Ta có

$$P(x) = \sum_{j=0}^{5k} a_j x^j,$$

trong đó a_j là số các số tự nhiên có k chữ số, mỗi chữ số được lấy từ các chữ số 2, 0, 1, 5 và có tổng các chữ số bằng j.

Theo **định lý 1.1.4.2** ta có

$$\sum_{3|j} a_j = \frac{1}{3}\sum_{h=1}^{3} P\left(\varepsilon^h\right)$$

Với $1 \le h \le 2$, ta có

$$P\left(\varepsilon^h\right) = \left(\varepsilon^{2h} + \varepsilon^0 + \varepsilon^h + \varepsilon^{5h}\right)^k = \left(\varepsilon^{2h} + \varepsilon^0 + \varepsilon^h + \varepsilon^{2h}\right)^k = \varepsilon^{2h.k}$$

Ta xét các trường hợp sau

+) $k \equiv 0 \pmod 3$ ta có

$$P\left(\varepsilon^h\right) = \varepsilon^{5h.k} = 1,\ \ 1 \le h \le 2,$$

$$\sum_{3|j} a_j = \frac{1}{3}\sum_{h=1}^{3} P\left(\varepsilon^h\right) = \frac{4^k + 2}{3}$$

+) $k \equiv 1 \pmod 3$ ta có

$$P\left(\varepsilon^h\right)=\varepsilon^{5h.k}=\varepsilon^{2h},\ 1\le h\le 2,$$

$$\sum_{3|j}a_j=\frac{1}{3}\sum_{h=1}^{3}P\left(\varepsilon^h\right)=\frac{4^k+\varepsilon^2+\varepsilon^4}{3}=\frac{4^k+\varepsilon^2+\varepsilon}{3}=\frac{4^k-1}{3}$$

+) $k\equiv 2\left(\bmod 3\right)$ ta có

$$P\left(\varepsilon^h\right)=\varepsilon^{5h.k}=\varepsilon^{h},\ 1\le h\le 2,$$

$$\sum_{3|j}a_j=\frac{1}{3}\sum_{h=1}^{3}P\left(\varepsilon^h\right)=\frac{4^k+\varepsilon^2+\varepsilon^4}{3}=\frac{4^k+\varepsilon+\varepsilon^2}{3}=\frac{4^k-1}{3}$$

Nhận xét. Đây là một bài toán quen thuộc và đã xuất hiện nhiều dạng toán quen thuộc với cách giải tương tự như vậy.

Bài 1.2.1.1 (Rumania 2003). Cho tập hợp $X=\{2;3;7;9\}$ và n là số nguyên dương. Hỏi từ tập X ta có thể lập được bao nhiêu số nguyên dương, mỗi số có n chữ số và chia hết cho 3 ?

Bài 1.2.1.2 (PTNK TPHCM 2009). Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu số chia hết cho 3, có n chữ số và các chữ số đều thuộc tập hợp $\{3,4,5,6\}$?

Bài 1.2.2 Cho n là số nguyên dương lớn hơn 1. Tìm số tập con A của tập hợp $X=\{1,2,3,...,n\}$ sao cho tổng các phần tử của A chia hết cho 7

Lời giải

Cách 1 (Sử dụng định lí 1.1.4.1). Đặt $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$, x_j là số tập con của tập hợp X có tổng các phần tử $\equiv j\left(\bmod 7\right)$. Khi đó ta có

$$\sum_{j=0}^{6}x_j\varepsilon^j=\sum_{B\subset\{1,2,...,n\}}\varepsilon^{S(B)}=\left(1+\varepsilon\right)\left(1+\varepsilon^2\right)\left(...\right)\left(1+\varepsilon^n\right)\ (1)$$

Ta có

$$x^7-1=\left(x-\varepsilon\right)\left(x-\varepsilon^2\right)...\left(x-\varepsilon^7\right)$$

$$\Rightarrow -x^7-1=\left(-x-\varepsilon\right)\left(-x-\varepsilon^2\right)...\left(-x-\varepsilon^7\right)$$
$$\Rightarrow x^7+1=\left(x+\varepsilon\right)\left(x+\varepsilon^2\right)...\left(x+\varepsilon^7\right)$$

$$\Rightarrow\left(1+\varepsilon\right)\left(1+\varepsilon^2\right)...\left(1+\varepsilon^7\right)=2\ (2)$$

Ta xét các trường hợp sau

+) $n \equiv 0 \pmod 7$, từ (1) và (2) ta được

$$\sum_{j=0}^{6} x_j \varepsilon^j = 2^{\frac{n}{7}}$$

Do đó theo **định lí 1.1.4.1** ta được

$$x_0 - 2^{\frac{n}{7}} = x_1 = \ldots = x_6$$

$$\Rightarrow x_0 - 2^{\frac{n}{7}} = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_6 - 2^{\frac{n}{7}}}{7} = \frac{2^n - 2^{\frac{n}{7}}}{7}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{2^n + 6.2^{\frac{n}{7}}}{7}$$

+) $n \equiv 1 \pmod 7$, từ (1) và (2) ta được

$$\sum_{j=0}^{6} x_j \varepsilon^j = 2^{\frac{n-1}{7}}\left(1 + \varepsilon^n\right) = 2^{\frac{n-1}{7}}\left(1 + \varepsilon\right)$$

Do đó theo **định lí 1.1.4.1** ta được

$$x_0 - 2^{\frac{n-1}{7}} = x_1 - 2^{\frac{n-1}{7}} = \ldots = x_6$$

$$\Rightarrow x_0 - 2^{\frac{n-1}{7}} = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_6 - 2.2^{\frac{n-1}{7}}}{7} = \frac{2^n - 2.2^{\frac{n-1}{7}}}{7}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{2^n + 5.2^{\frac{n-1}{7}}}{7}$$

Tương tự cho các trường hợp $n \equiv 2 \pmod 7, \ldots, n \equiv 6 \pmod 7$.

Cách 2 (Sử dụng định lí 1.1.4.2). Đặt $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$, xét đa thức

$$P(x) = (1+x)\left(1+x^2\right)\ldots\left(1+x^n\right)$$

Ta có

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n(n+1)}{2}} a_k x^k,$$

trong đó a_k chỉ số tập con có tổng các phần tử bằng k.

Theo **định lý 1.1.4.2** ta có

$$\sum_{7|k} a_k = \frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} P\left(\varepsilon^j\right)$$

Mặt khác ta lại có

$$x^7 - 1 = \left(x - \varepsilon^j\right)\left(x - \varepsilon^{2j}\right)...\left(x - \varepsilon^{7j}\right)$$

$$\Rightarrow -x^7 - 1 = \left(-x - \varepsilon^j\right)\left(-x - \varepsilon^{2j}\right)...\left(-x - \varepsilon^{7j}\right)$$

$$\Rightarrow x^7 + 1 = \left(x + \varepsilon^j\right)\left(x + \varepsilon^{2j}\right)...\left(x + \varepsilon^{7j}\right)$$

$$\Rightarrow \left(1 + \varepsilon^j\right)\left(1 + \varepsilon^{2j}\right)...\left(1 + \varepsilon^{7j}\right) = 2$$

Ta xét các trường hợp sau

+) $n \equiv 0 \pmod 7$ ta có

$$P\left(\varepsilon^j\right) = \left[\left(1 + \varepsilon^j\right)\left(1 + \varepsilon^{2j}\right)...\left(1 + \varepsilon^{7j}\right)\right]^{\frac{n}{7}} = 2^{\frac{n}{7}}, 1 \le j \le 6,$$

$$\sum_{7|k} a_k = \frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} P\left(\varepsilon^j\right) = \frac{2^n + 6.2^{\frac{n}{7}}}{7}$$

+) $n \equiv 1 \pmod 7$ ta có

$$P\left(\varepsilon^j\right) = \left[\left(1 + \varepsilon^j\right)\left(1 + \varepsilon^{2j}\right)...\left(1 + \varepsilon^{7j}\right)\right]^{\frac{n-1}{7}}\left(1 + \varepsilon^{nj}\right) = 2^{\frac{n-1}{7}}\left(1 + \varepsilon^j\right), 1 \le j \le 6,$$

$$\sum_{7|k} a_k = \frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} P\left(\varepsilon^j\right) = \frac{2^n + 5.2^{\frac{n-1}{7}}}{7}$$

Tương tự cho các trường hợp $n \equiv 2 \pmod 7, ..., n \equiv 6 \pmod 7$.

Bài 1.2.3. Có bao nhiêu số tự nhiên có tổng các chữ số chia hết cho 7, có *n* chữ số và mỗi chữ số được lấy từ các chữ số 1, 3, 4, 6, 7, 9.

Lời giải

Cách 1 (Sử dụng định lí 1.1.4.1). Đặt $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$, x_j là số các số tự nhiên có *n* chữ số, mỗi chữ số được lấy từ các chữ số 1, 3, 4, 6, 7, 9 và có tổng các chữ số $\equiv j \pmod 7$. Khi đó ta có

$$\sum_{j=0}^{6} x_j \varepsilon^j = \sum_{x_1,x_2,...,x_n \in \{1,3,4,6,7,9\}} \varepsilon^{x_1+x_2+...+x_n} = \left(\varepsilon+\varepsilon^3+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^7+\varepsilon^9\right)^n$$

$$=\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4+\varepsilon^5+\varepsilon^6-\varepsilon^5\right)^n=\left(-\varepsilon^5\right)^n$$

Ta xét các trường hợp sau

+) $n\equiv 0 \pmod 7$ ta có

$$\sum_{j=0}^{6} x_j \varepsilon^j = \left(-\varepsilon^5\right)^n = (-1)^n$$

Do đó theo **định lí 1.1.4.1** ta có

$$x_0-(-1)^n = x_1 = ... = x_6$$

$$\Rightarrow x_0-(-1)^n = \frac{x_0+x_1+...+x_6-(-1)^n}{7} = \frac{6^n-(-1)^n}{7}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{6^n+6.(-1)^n}{7}$$

+) $n\equiv 1 \pmod 7$ ta có

$$\sum_{j=0}^{6} x_j \varepsilon^j = \left(-\varepsilon^5\right)^n = (-1)^n \varepsilon^5$$

Do đó theo **định lí 1.1.4.1** ta có

$$x_0 = x_1 = ... = x_4 = x_5-(-1)^n = x_6$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{x_0+x_1+...+x_6-(-1)^n}{7} = \frac{6^n-(-1)^n}{7}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{6^n+6.(-1)^n}{7}$$

Tương tự cho các trường hợp $n\equiv 2 \pmod 7),...,n\equiv 6 \pmod 7$.

Cách 2 (Sử dụng định lí 1.1.4.2) Đặt $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$, xét đa thức

$$P(x)=\left(x+x^3+x^4+x^6+x^7+x^9\right)^n$$

Ta có

$$P(x)=\sum_{k=0}^{9n} a_k x^k,$$

trong đó a_k là số các số tự nhiên có *n* chữ số, mỗi chữ số được lấy từ các chữ số 1, 3, 4, 6, 7, 9 và có tổng các chữ số bằng k.

Theo **định lý 1.1.4.2** ta có

$$\sum_{7|k} a_k=\frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} P\left(\varepsilon^j\right)$$

Với $1\le j\le 6$, ta có

$$P\left(\varepsilon^j\right)=\left(\varepsilon^j+\varepsilon^{3j}+\varepsilon^{4j}+\varepsilon^{6j}+\varepsilon^{7j}+\varepsilon^{9j}\right)^n$$

$$=\left(1+\varepsilon^j+\varepsilon^{2j}+\varepsilon^{3j}+\varepsilon^{4j}+\varepsilon^{5j}+\varepsilon^{6j}-\varepsilon^{5j}\right)^n=(-1)^n\varepsilon^{5nj}$$

Ta xét các trường hợp sau

+) $n\equiv 0\pmod 7$ ta có

$$P\left(\varepsilon^j\right)=(-1)^n\varepsilon^{5nj}=(-1)^n, 1\le j\le 6,$$

$$\sum_{7|k} a_k=\frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} P\left(\varepsilon^j\right)=\frac{6^n+6.(-1)^n}{7}$$

Tương tự cho các trường hợp $n\equiv 2\pmod 7,\ldots,n\equiv 6\pmod 7$.

Bài 1.2.4 (IMO 1995). Cho p là một số nguyên tố lẻ và tập hợp $A=\{1,2,\ldots,2p\}$. Tìm số tập hợp con của tập hợp A mà mỗi tập con đó có k phần tử và tổng các phần tử chia hết cho p, trong đó $k(1\le k<2p)$ là số nguyên dương cho trước.

Lời giải

Cách 1 (Sử dụng định lí 1.1.4.1). Đặt $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$, kí hiệu x_j ($j=0,1,\ldots,p-1$) là số tập hợp con X của A sao cho $S(X)\equiv j\pmod p$ và $|X|=k$. Ta có

$$\sum_{j=0}^{p-1} x_j\varepsilon^j=\sum_{X\subset A,|X|=k}\varepsilon^{S(X)}=\sum_{1\le c_1<c_2<\ldots<c_k\le 2p}\varepsilon^{c_1+c_2+\ldots+c_k}$$

Ta nhận thấy $\sum_{1\le c_1<c_2<\ldots<c_k\le 2p}\varepsilon^{c_1+c_2+\ldots+c_k}$ bằng hệ số của x^{2p-k} trong khai triển thành đa thức của $(x+\varepsilon)\left(x+\varepsilon^2\right)\ldots\left(x+\varepsilon^{2p}\right)$. Mặt khác ta có

$$x^p - 1 = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\ldots(x-\varepsilon^p)$$

$$\Rightarrow -x^p - 1 = (-x-\varepsilon^1)(-x-\varepsilon^2)\ldots(-x-\varepsilon^p)$$
$$\Rightarrow x^p + 1 = (x+\varepsilon^1)(x+\varepsilon^2)\ldots(x+\varepsilon^p)$$

Do đó ta được

$$(x+\varepsilon)(x+\varepsilon^2)\ldots(x+\varepsilon^{2p})$$

$$=(1+x^p)^2$$

Ta xét các trường hợp sau

TH1. Nếu $k=p$ thì hệ số của $x^{2p-k}=x^p$ bằng 2. Do đó ta được

$$\sum_{j=0}^{p-1} x_j\varepsilon^j = \sum_{1\le c_1<c_2<\ldots<c_k\le 2p} \varepsilon^{c_1+c_2+\ldots+c_k} = 2$$

Kết hợp với **định lí 1.1.4.1** ta có

$$x_0 - 2 = x_1 = \ldots = x_{p-1}$$

$$\Rightarrow x_0 - 2 = \frac{x_0+x_1+\ldots+x_{p-1}-2}{p} = \frac{C_{2p}^p - 2}{p}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{C_{2p}^p - 2}{p} + 2$$

TH2. Nếu $k\ne p$ thì hệ số của x^{2p-k} bằng 0. Do đó ta được

$$\sum_{j=0}^{p-1} x_j\varepsilon^j = \sum_{1\le c_1<c_2<\ldots<c_k\le 2p} \varepsilon^{c_1+c_2+\ldots+c_k} = 2$$

Kết hợp với **định lí 1.1.4.1** ta có

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_{p-1}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{x_0+x_1+\ldots+x_{p-1}}{p} = \frac{C_{2p}^k}{p}$$

Vậy $x_0 = \dfrac{C_{2p}^p - 2}{p} + 2$ nếu $k=p$ và $x_0 = \dfrac{C_{2p}^k}{p}$ nếu $k\ne p$.

Cách 2 (Sử dụng định lí 1.1.4.2) Xét đa thức

$$P(x,y) = (1+xy)(1+x^2y)\ldots(1+x^{2p}y)$$

Ta có

$$P(x,y)=(1+xy)(1+x^2y)...(1+x^{2p}y)$$
$$=\sum_{n,m}a_{n,k}x^ny^m$$

Trong đó $a_{n,m}$ là số các tập con có *m* phần tử và tổng của *m* phần tử này bằng *n*. Theo **định lí 1.1.4.2** ta được

$$\sum_{n\vdots p}a_{n,m}y^m=\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}F(\varepsilon^j,y)$$

Ta có $F(1,y)=(1+y)^{2p}$ và với $1\le j\le p-1$ thì

$$F(\varepsilon^j,y)=(1+\varepsilon^jy)(1+\varepsilon^{2j}y)...(1+\varepsilon^{2pj}y)$$
$$=\left[(1+\varepsilon^jy)(1+\varepsilon^{2j}y)...(1+\varepsilon^{pj}y)\right]^2$$
$$=y^{2p}\left[\left(\frac{1}{y}+\varepsilon^j\right)\left(\frac{1}{y}+\varepsilon^{2j}\right)...\left(\frac{1}{y}+\varepsilon^{pj}\right)\right]^2$$
$$=y^{2p}\left[\left(\frac{1}{y}\right)^p+1\right]^2=(1+y^p)^2$$

Suy ra

$$\sum_{n\vdots p}a_{n,m}y^m=\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}F(\varepsilon^j,y)=\frac{1}{p}\left[(1+y)^{2p}+(p-1)(1+y^p)^2\right]$$

Do đó

$\sum\limits_{n\vdots p,m=k}a_{n,m}=\frac{1}{p}\left[C_{2p}^p+2(p-1)\right]$ nếu $k=p$ và $\sum\limits_{n\vdots p,m=k}a_{n,m}=\frac{1}{p}C_{2p}^k$ nếu $k\ne p$.

Bài 1.2.5 (IMO Shortlist 2007). Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho mỗi phần tử của tập $S=\{1;2;3;...;n\}$ được tô bởi màu đỏ hoặc xanh, sao cho các điều kiện sau đồng thời xảy ra: Tập hợp $S\times S\times S$ chứa đúng 2007 bộ thứ tự $(x;y;z)$ và thỏa mãn:

(i) các số $x;y;z$ được tô cùng một màu,

(ii) số $x+y+z$ chia hết cho n.

Lời giải.

Kí hiệu M là số bộ thứ tự $(x;y;z)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Gọi $A,B\subset\{1,2,3,...,n\}$ là các tập hợp các số tương ứng với màu đỏ, xanh và $|A|=u,|B|=v$. Ta xét các đa thức sau:

$$f(x)=\sum_{a\in A}x^a,\ g(x)=\sum_{b\in B}x^b$$

$$P(x)=f^3(x)+g^3(x)=\sum_{(a_1,a_2,a_3)\in A^3}x^{a_1+a_2+a_3}+\sum_{(b_1,b_2,b_3)\in B^3}x^{b_1+b_2+b_3}=\sum_n a_nx^n\ ;$$

trong đó a_n là số bộ (x,y,z) thỏa mãn x,y,z cùng màu và $x+y+z$ chia hết cho n.

Đặt $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, theo **định lí 1.1.4.2** ta được:

$$M=\frac{1}{n}\sum_{k\,\vdots\, n}a_k=\frac{1}{n}\left(a_0+a_n+a_{2n}+a_{3n}\right)$$

$$\Rightarrow M=\frac{1}{n}\sum_{k\,\vdots\, n}a_k=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{3}\left[f^3\left(\varepsilon^k\right)+g^3\left(\varepsilon^k\right)\right]=\frac{1}{n}\left[f^3(1)+g^3(1)\right]+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3}\left[f^3\left(\varepsilon^k\right)+g^3\left(\varepsilon^k\right)\right]\ (1).$$

Do $M=2007\Rightarrow n>4$.

Ta có $f^3(1)+g^3(1)=\left[f(1)+g(1)\right]\left[f^2(1)-f(1)g(1)+g^2(1)\right]=n\left(u^2-uv+v^2\right)$.

Với $k\in\{1,2,3\}$ thì $\varepsilon^k\neq 1$, ta có:

$$f\left(\varepsilon^k\right)+g\left(\varepsilon^k\right)=\varepsilon^k+\left(\varepsilon^k\right)^2+...+\left(\varepsilon^k\right)^n=1+\varepsilon^k+\left(\varepsilon^k\right)^2+...+\left(\varepsilon^k\right)^{n-1}=\frac{\left(\varepsilon^k\right)^n-1}{\varepsilon^k-1}=0\Rightarrow$$

$f^3\left(\varepsilon^k\right)+g^3\left(\varepsilon^k\right)=0$.

Do đó từ (1) ta được $M=u^2-uv+v^2\Leftrightarrow 2007=u^2-uv+v^2$ (2).

Tiếp theo ta sẽ giải phương trình (2). Ta có $u^2-uv+v^2=2009\Rightarrow u^2-uv+v^2\,\vdots\,9$ hay $(u+v)^2-3uv=2009\Rightarrow\begin{cases}uv\,\vdots\,3\\u+v\,\vdots\,3\end{cases}\Rightarrow u\,\vdots\,3,v\,\vdots\,3$. Đặt $u=3r,\ v=3s$, giả sử $r\geq s$, thay vào (2) ta được $r^2-rs+s^2=223$. Hơn nữa ta có:

$$892=4\left(r^2-rs+s^2\right)=(2s-r)^2+3r^2\geq 3r^2\geq 3r^2-3s(r-s)=3\left(r^2-rs+s^2\right)=669$$

$\Rightarrow 297\geq r^2\geq 223\Rightarrow 17\geq r\geq 15$. Ta lần lượt xét ba trường hợp ta được $(r,s)=(51,18),(51,33)$. Do đó $n=69$ và $n=84$.

Bài 1.2.6 (TST Viet Nam 2008). Cho tập hợp $M=\{1;2;3;...;2008\}$. Tô mỗi phần tử của M bởi một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng sao cho mỗi màu có ít nhất một số được tô. Xét hai tập

$$M_1=\{(x;y;z)\in M^3\},$$

trong đó $x;y;z$ cùng màu và $x+y+z\equiv 0\pmod{2008}$,

$$M_1=\{(x;y;z)\in M^3\},$$

trong đó $x;y;z$ đôi một khác màu và $x+y+z\equiv 0\pmod{2008}$.

Chứng minh rằng $2|S_1|>|S_2|$.

Lời giải. Ta sẽ sử dụng ý tưởng giải của **bài 1.2.5 (IMO 2007)**.

Gọi $A,B,C\subset\{1,2,3,...,2008\}$ là các tập hợp các số tương ứng với màu xanh, đỏ, vàng. Ta xét các đa thức sau:

$$f(x)=\sum_{a\in A}x^a,\ g(x)=\sum_{b\in B}x^b,\ h(x)=\sum_{c\in C}x^c$$

$$P(x)=f^3(x)+g^3(x)+h^3(x)=\sum_{(a_1,a_2,a_3)\in A^3}x^{a_1+a_2+a_3}+\sum_{(b_1,b_2,b_3)\in B^3}x^{b_1+b_2+b_3}+\sum_{(c_1,c_2,c_3)\in C^3}x^{c_1+c_2+c_3}$$

$$=\sum_n a_nx^n\ ;$$

trong đó a_n là số bộ (x,y,z) thỏa mãn x,y,z cùng màu và $x+y+z$ chia hết cho n. Đặt $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{2008}+i\sin\frac{2\pi}{2008}$, theo **định lí 1.1.4.2** ta được:

$$|S_1|=\frac{1}{2008}\sum_{k\vdots 2008}a_k=\frac{1}{2008}\left(a_0+a_{2008}+a_{2.2008}+a_{3.2008}\right)$$

$$\Rightarrow |S_1|=\frac{1}{2008}\sum_{k\vdots 2008}a_k=\frac{1}{2008}\sum_{k=0}^{3}\left[f^3(\varepsilon^k)+g^3(\varepsilon^k)+h^3(\varepsilon^k)\right]\ (1).$$

Tiếp theo ta xét

$$Q(x)=f(x)g(x)h(x)=\sum_{(a_1,a_2,a_3)\in A\times B\times C}x^{a_1+a_2+a_3}=\sum_n b_nx^n\ ;$$

trong đó b_n là số bộ (x,y,z) thỏa mãn x,y,z đôi một khác màu và $x+y+z$ chia hết cho n. Theo **định lí 1.1.4.2** ta được:

$$|S_2|=3!\frac{1}{2008}\sum_{k\vdots 2008}b_k=3!\frac{1}{2008}\left(b_0+b_{2008}+b_{2.2008}+b_{3.2008}\right)$$

$$\Rightarrow |S_2|=3!\frac{1}{2008}\sum_{k\vdots 2008}b_k=\frac{2}{2008}\sum_{k=0}^{3}\left[3f(\varepsilon^k)g(\varepsilon^k)h(\varepsilon^k)\right]\ (2).$$

Ta có $f(1)+g(1)+h(1)=\sum_{a\in A}a+\sum_{b\in B}b+\sum_{c\in C}c=2008$, kết hợp với 2008 không chia hết cho 3 nên không thể xảy ra $f(1)=g(1)=h(1)\Rightarrow f^3(1)+g^3(1)+h^3(1)>3f(1)g(1)h(1)$ (3). Do đó từ (1), (2) và (3) ta được $2|S_1|>|S_2|$.

Bài 1.2.7. Cho p là một số nguyên tố lẻ và tập hợp $A=\{1,2,...,2p\}$. Kí hiệu $F=\{X\subset A|S(X)\vdots p,|X|=p\}$ và $T(B)$ là tổng các bình phương các phần tử của tập hợp B. Tính giá trị của biểu thức

$$\sum_{X\in F}T(X)$$

Lời giải

Đặt $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$. Với mỗi số $k\in A$, ta sẽ đếm số tập $X\in F$ và $k\in X$. Gọi x_j là số tập con B có $p-1$ phần tử sao cho $B\subset A\backslash\{k\}$ và $S(B)\equiv j(\bmod p)$.

Ta có

$$\sum_{j=0}^{p-1}x_j\varepsilon^j=\sum_{X\subset A\backslash\{k\},|X|=p-1}\varepsilon^{S(X)}=\sum_{1\le c_1<c_2<...<c_{p-1}\le 2p,c_i\in A\backslash\{k\}}\varepsilon^{c_1+c_2+...+c_{p-1}}$$

Ta nhận thấy $\sum_{1\le c_1<c_2<...<c_k\le 2p,A\backslash\{k\}}\varepsilon^{c_1+c_2+...+c_{p-1}}$ bằng hệ số của x^{p-1} trong khai triển thành đa thức của $\frac{(x+\varepsilon)(x+\varepsilon^2)...(x+\varepsilon^{2p})}{x+\varepsilon^k}$. Mặt khác ta có

$$x^p-1=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)...(x-\varepsilon^p)$$

$$\Rightarrow -x^p-1=(-x-\varepsilon^1)(-x-\varepsilon^2)...(-x-\varepsilon^p)$$

$$\Rightarrow x^p+1=(x+\varepsilon^1)(x+\varepsilon^2)...(x+\varepsilon^p)$$

Do đó ta được

$$\frac{(x+\varepsilon)(x+\varepsilon^2)...(x+\varepsilon^{2p})}{x+\varepsilon^k}=\frac{(1+x^p)^2}{x+\varepsilon^k}$$

$$=b_0+b_1x+...+b_{2p-1}x^{2p-1}$$

$$\Rightarrow(1+x^p)^2=(b_0+b_1x+...+b_{2p-1}x^{2p-1})(x+\varepsilon^k)$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} b_0\varepsilon^k = 1 \\ b_0 + b_1\varepsilon^k = 0 \\ \ldots \\ b_{p-1} + b_p\varepsilon^k = 2 \\ \ldots \\ b_{2p-2} + b_{2p-1}\varepsilon^k = 0 \\ b_{2p-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = \varepsilon^{-k} \\ b_1 = -\varepsilon^{-2k} \\ \ldots \\ b_{p-1} = (-1)^{p-1}\varepsilon^{-pk} = 1 \\ .. \\ b_{2p-2} + b_{2p-1}\varepsilon^k = 0 \\ b_{2p-1} = 1 \end{cases}$$

Do đó ta có

$$\sum_{j=0}^{p-1} x_j\varepsilon^j = \sum_{1\le c_1<c_2<\ldots<c_{p-1}\le 2p,\, c_i\in A\setminus\{k\}} \varepsilon^{c_1+c_2+\ldots+c_{p-1}} = 1$$

Kết hợp với **định lí 1.1.4.1** ta được

$$x_0 - 1 = x_1 = x_2 = \ldots = x_{p-1}$$

+) Nếu $k \equiv 0 \pmod p$ thì

$$p(x_0 - 1) = x_0 + x_1 + \ldots + x_{p-1} - 1 = C_{2p-1}^{p-1} - 1$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{C_{2p-1}^{p} - 1}{p} + 1$$

+) Nếu $k \not\equiv 0 \pmod p$ thì

$$px_k = x_0 + x_1 + \ldots + x_{p-1} - 1 = C_{2p-1}^{p-1} - 1 \Rightarrow x_k = \frac{C_{2p-1}^{p-1} - 1}{p}$$

Vậy

$$\sum_{X\in F} T(X) = p^2 + (2p)^2 + \left(\frac{C_{2p-1}^{p-1} - 1}{p}\right)\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (2p)^2\right)$$

$$= 5p^2 + \frac{C_{2p-1}^{p-1} - 1}{p}.\frac{2p(2p+1)(4p+1)}{6} = 5p^2 + \frac{\left(C_{2p-1}^{p-1} - 1\right)(2p+1)(4p+1)}{3}$$

Bài 1.2.8. Cho n là một số nguyên dương cho trước và tập hợp $A = \{1, 2, \ldots, 3n\}$. Kí hiệu $F = \{X \subset A | S(X) \vdots 3\}$ và $T(B)$ là tổng các bình phương các phần tử của tập hợp B. Tính giá trị của biểu thức

$$\sum_{X\in F} T(X)$$

Lời giải

Đặt $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Với mỗi $k \in A$, ta sẽ đếm số tập $X \in F$ và $k \in X$. Gọi x_j là số tập con B sao cho $B \subset A \setminus \{k\}$ và $S(B) \equiv j \pmod 3$.

Ta có

$$x^3 - 1 = (x - \varepsilon)(x - \varepsilon^2)(x - \varepsilon^3)$$

$$\Rightarrow -x^7 - 1 = (-1 - \varepsilon)(-1 - \varepsilon^2)(-1 - \varepsilon^3)$$
$$\Rightarrow 2 = (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^3)$$

$$x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 = \sum_{B \subset A \setminus \{k\}} \varepsilon^{S(B)}$$

$$= \frac{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)...(1+\varepsilon^{3n})}{1+\varepsilon^k} = \frac{2^n}{1+\varepsilon^k}$$

Ta xét các trường hợp sau

TH1. $k \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 = \frac{2^n}{1+\varepsilon^k} = 2^{n-1}$. Do đó theo **định lí 1.1.4.1** ta được

$$x_0 - 2^{n-1} = x_1 = x_2 = \frac{1}{3}\left(x_0 + x_1 + x_2 - 2^{n-1}\right) = \frac{1}{3}\left(2^{3n-1} - 2^{n-1}\right) \Rightarrow x_0 = \frac{2^{3n-1} + 2^n}{3}$$

TH2. $k \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 = \frac{2^n}{1+\varepsilon}$

$$\Rightarrow x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + x_0\varepsilon + x_1\varepsilon^2 + x_2 = 2^n$$
$$\Rightarrow x_0 + x_2 - 2^n + (x_0 + x_1)\varepsilon + (x_1 + x_2)\varepsilon^2 = 0$$

Do đó theo **định lí 1.1.4.1** ta được

$$x_0 + x_2 - 2^n = x_0 + x_1 = x_1 + x_2 = \frac{1}{3}\left(2(x_0 + x_1 + x_2) - 2^n\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(2.2^{3n-1} - 2^n\right) = \frac{1}{3}\left(2^{3n} - 2^n\right)$$

$$\Rightarrow x_2 = 2^{3n-1} - (x_0 + x_1) = \frac{2^{3n-1} + 2^n}{3}$$

TH2. $k \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 = \frac{2^n}{1+\varepsilon^2}$

$$\Rightarrow x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + x_0\varepsilon^2 + x_1 + x_2\varepsilon = 2^n$$

$$\Rightarrow x_0 + x_1 - 2^n + \left(x_1 + x_2\right)\varepsilon + \left(x_0 + x_2\right)\varepsilon^2 = 0$$

Do đó theo **định lí 1.1.4.1** ta được

$$x_0 + x_1 - 2^n = x_1 + x_2 = x_0 + x_2 = \frac{1}{3}\left(2\left(x_0 + x_1 + x_2\right) - 2^n\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2.2^{3n-1} - 2^n\right) = \frac{1}{3}\left(2^{3n} - 2^n\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = 2^{3n-1} - \left(x_0 + x_2\right) = \frac{2^{3n-1} + 2^n}{3}$$

Vậy

$$\sum_{X\in F} T\left(X\right) = \left(\frac{2^{3n-1} + 2^n}{3}\right)\left(1^2 + 2^2 + ... + \left(3n\right)^2\right)$$

$$\left(\frac{2^{3n-1} + 2^n}{3}\right)\frac{3n\left(3n+1\right)\left(6n+1\right)}{3} = \frac{\left(2^{3n-1} + 2^n\right)n\left(3n+1\right)\left(6n+1\right)}{3}.$$

Bài 1.2.9. Gọi $f\left(n\right)$ số các tập con *X* của tập hợp $\{1,2,...,2n\}$ sao cho *X* có *n* phần tử và tổng các phần tử của *X* chia hết cho *n*. Chứng minh rằng

$$f\left(n\right) = \frac{\left(-1\right)^n}{n}\sum_{d|n}\left(-1\right)^d \varphi\left(\frac{n}{d}\right)C_{2d}^d$$

Lời giải.

Xét đa thức

$$P\left(x,y\right) = \left(1+xy\right)\left(1+x^2y\right)...\left(1+x^{2n}y\right)$$

$$= \sum_{k,m\geq 0} a_{k,m}x^k y^m,$$

trong đó $a_{k,m}$ là số các tập con *B* của tập $\{1,2,...,2n\}$ sao cho *B* có *m* phần tử và tổng các phần tử của *B* bằng *k*.

Theo **định lí 1.1.4.2** ta có

$$\sum_{k \vdots n} a_{k,m}y^m = \frac{1}{n}\left(P\left(1,y\right) + P\left(\varepsilon,y\right) + P\left(\varepsilon,y\right) + ... + P\left(\varepsilon^{n-1},y\right)\right)$$

Tiếp theo, với mỗi $1 \leq j \leq n-1$ ta tính

$$P\left(\varepsilon^{j},y\right)=\left(1+\varepsilon^{0}y\right)\left(1+\varepsilon^{j}y\right)\left(1+\varepsilon^{2j}y\right)\ldots\left(1+\varepsilon^{(n-1)j}y\right)$$

Với mỗi $1\le j\le n-1$, gọi d là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $jd\equiv 0\left(\bmod n\right)\Rightarrow jd=nt, t\in\mathbb{N}^{*}$.

Đặt $u=\gcd(n;j)\Rightarrow\begin{cases}n=un_1\\ j=uj_1\end{cases}$, $\gcd\left(n_1,j_1\right)=1$. Mặt khác ta có

$$jd=nt\Leftrightarrow uj_1d=un_1t\Leftrightarrow j_1d=n_1t\Rightarrow d\,\vdots\,n_1$$

Kết hợp với d là số nhỏ nhất nên $d=n_1=\dfrac{n}{\gcd\left(n,j\right)}$.

Với mỗi d thì có $\varphi\left(d\right)$ số j_1 sao cho $\gcd\left(d,j_1\right)=\gcd\left(n_1,j_1\right)=1$ suy ra có $\varphi\left(d\right)$ số j sao cho $d=\dfrac{n}{\gcd\left(n,j\right)}$.

Ta có

$$\begin{aligned}&x^{d}-1=\left(x-\varepsilon^{j}\right)\left(x-\varepsilon^{2j}\right)\ldots\left(x-\varepsilon^{pj}\right)\\&\Rightarrow\left(-\frac{1}{y}\right)^{d}-1=\left(-1\right)^{d}\left(\frac{1}{y}+\varepsilon^{j}\right)\left(\frac{1}{y}+\varepsilon^{2j}\right)\ldots\left(\frac{1}{y}+\varepsilon^{dj}\right)\\&\Rightarrow 1-\left(-y\right)^{d}=\left(1+\varepsilon^{j}y\right)\left(1+\varepsilon^{2j}y\right)\ldots\left(1+\varepsilon^{dj}y\right)\end{aligned}$$

Do đó ta được

$$P\left(\varepsilon^{j},y\right)=\left(1+\varepsilon^{0}y\right)\left(1+\varepsilon^{j}y\right)\left(1+\varepsilon^{2j}y\right)\ldots\left(1+\varepsilon^{(n-1)j}y\right)=\left(1-\left(-y\right)^{d}\right)^{\frac{2n}{d}}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{k\vdots n}a_{k,m}y^{m}&=\frac{1}{n}\left(P\left(1,y\right)+P\left(\varepsilon,y\right)+P\left(\varepsilon,y\right)+\ldots+P\left(\varepsilon^{n-1},y\right)\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi\left(d\right)\left[1-\left(-y\right)^{d}\right]^{\frac{2n}{d}}=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)\left[1-\left(-y\right)^{d}\right]^{2d}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{k\vdots n}a_{k,n}y^{n}=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\left[\varphi\left(\frac{n}{d}\right)C_{2d}^{d}\left(-1\right)^{d}\left(-1\right)^{n}y^{n}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{k \vdots n} a_{k,n} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{d|n} (-1)^d \varphi\left(\frac{n}{d}\right) C_{2d}^d$$

Vậy

$$f(n) = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{d|n} (-1)^d \varphi\left(\frac{n}{d}\right) C_{2d}^d .$$

Nhận xét. Đây là kết quả mở rộng của bài thi toán số 6 kì thi **IMO 1995** khi ta thay n bởi số nguyên tố lẻ p.

Bài 1.2.10. Cho $f(n)$ là số các tập con của tập $\{1,2,3,...,n\}$ có tổng các phần tử chia hết cho n (tập rỗng cũng thỏa mãn). Chứng minh rằng

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n, d \equiv 1 (\bmod 2)} \varphi(d).2^{\frac{n}{d}}$$

Lời giải.

Xét đa thức

$$P(x) = (1+x)(1+x^2)...(1+x^n) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

trong đó a_k là số các tập con *B* của tập $\{1,2,...,n\}$ sao cho B có tổng các phần tử bằng *k*. Đặt $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Khi đó theo **định lí 1.1.4.2** ta có:

$$f(n) = \sum_{k \geq 0} a_{kn} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(\varepsilon^k)$$

Tiếp theo ta sẽ tính $P(\varepsilon^k)$.

Với mỗi $k, 1 \leq k \leq n$, ta gọi d là số nhỏ nhất thuộc $\{1,2,...,n\}$ sao cho $dk \equiv 0 (\bmod n) \Rightarrow$ tồn tại số nguyên dương t thỏa mãn $dk = tn$.

Đặt $u = \gcd(n;k) \Rightarrow \begin{cases} n = un_1 \\ k = uk_1 \end{cases}, \gcd(n_1, k_1) = 1$. Mặt khác ta có

$$kd = nt \Leftrightarrow uk_1 d = un_1 t \Leftrightarrow k_1 d = n_1 t \Rightarrow d \vdots n_1$$

Kết hợp với *d* là số nhỏ nhất nên $d = n_1 = \frac{n}{\gcd(n, j)}$.

Với mỗi d thì có $\varphi(d)$ số k_1 sao cho $\gcd(d,k_1)=\gcd(n_1,k_1)=1$ suy ra có $\varphi(d)$ số k sao cho $d=\dfrac{n}{\gcd(n,k)}$.

Ta có

$$\begin{aligned} &x^d-1=\left(x-\varepsilon^k\right)\left(x-\varepsilon^{2k}\right)\ldots\left(x-\varepsilon^{pk}\right)\\ &\Rightarrow(-1)^d-1=(-1)^d\left(1+\varepsilon^k\right)\left(1+\varepsilon^{2k}\right)\ldots\left(1+\varepsilon^{dk}\right)\end{aligned}$$

+) Nếu d chẵn thì $(-1)^d-1=1-1=0\Rightarrow(-1)^d\left(1+\varepsilon^k\right)\left(1+\varepsilon^{2k}\right)\ldots\left(1+\varepsilon^{dk}\right)=0$.

+) Nếu d lẻ thì $(-1)^d-1=-1-1=-2\Rightarrow\left(1+\varepsilon^k\right)\left(1+\varepsilon^{2k}\right)\ldots\left(1+\varepsilon^{dk}\right)=2$.

Từ hai trường hợp trên ta được $P\left(\varepsilon^k\right)=2^{\frac{n}{d}}$ nếu d lẻ, $P\left(\varepsilon^k\right)=0$ nếu d chẵn.

Vậy $f(n)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}P\left(\varepsilon^k\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{d|n,d\equiv1(\text{mod}\,2)}\varphi(d).2^{\frac{n}{d}}$.

Bài 1.2.11. Cho ba số nguyên dương m,n,p; trong đó $n+2 \vdots p$ và $m>p$. Tìm số bộ thứ thự $(x_1,x_2,...,x_p)$ gồm p số nguyên dương sao cho $x_1+x_2+...+x_p$ chia hết cho m và $x_1,x_2,...,x_p\le n$?

Lời giải.

Xét đa thức $P(x)=\left(x+x^2+...+x^n\right)^p=\sum\limits_{k=0}^{np}a_kx^k$;

trong đó a_k là số bộ thứ tự $(x_1,x_2,...,x_p)$, $1\le x_1,x_2,...,x_p\le n$ và $x_1+x_2+...+x_p=k$.

Đặt $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}$, kết hợp với **định lí 1.1.4.2** thì số bộ thứ thự $(x_1,x_2,...,x_p)$ gồm p số nguyên dương sao cho $x_1+x_2+...+x_p$ chia hết cho m và $x_1,x_2,...,x_p\le n$ bằng:

$$\sum_{k \vdots m}a_k=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}P\left(\varepsilon^j\right)\ (1).$$

Do $m>p\ge1\Rightarrow\varepsilon^j\ne1,\ \forall j=1,2,...,m-1$.

Ta có $P(1)=n^p$;

$$P\left(\varepsilon^j\right)=\left(\varepsilon^j+\left(\varepsilon^j\right)^2+\ldots+\left(\varepsilon^j\right)^n\right)^p=\left(\frac{\varepsilon^{(n+1)j}-1}{\varepsilon^j-1}-1\right)^p=\left(\frac{\varepsilon^{(n+2)j}-\varepsilon^j}{\varepsilon^j\left(\varepsilon^j-1\right)}-1\right)^p=\left(-1\right)^p\left(\frac{1}{\varepsilon^j}+1\right)^p$$

$$=\left(-1\right)^p\sum_{k=0}^{p}C_p^k\frac{1}{\varepsilon^{jk}}=\left(-1\right)^p\sum_{k=0}^{p}C_p^k\varepsilon^{-jk}$$

$$\Rightarrow\sum_{j=1}^{m-1}P\left(\varepsilon^j\right)=\left(-1\right)^p\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=0}^{p}C_p^k\varepsilon^{-jk}=\left(-1\right)^p\sum_{k=0}^{p}C_p^k\left(\sum_{j=1}^{m-1}\varepsilon^{-jk}\right)=\left(-1\right)^p\left[m-1+\sum_{k=1}^{p}C_p^k\left(\frac{\left(\varepsilon^k\right)^m-1}{\varepsilon^k-1}1\right)\right]$$

$$=\left(-1\right)^p\left[m-1-\sum_{k=1}^{p}C_p^k\right]=\left(-1\right)^p\left(m-2^p\right).$$

Do đó từ (1) ta được:

$$\sum_{k\,\vdots\,m}a_k=\frac{1}{m}\left(n^p-\left(-2\right)^p\right)+\left(-1\right)^p$$

Vậy số bộ thứ thự $\left(x_1,x_2,\ldots,x_p\right)$ gồm p số nguyên dương sao cho $x_1+x_2+\ldots+x_p$ chia hết cho m và $x_1,x_2,\ldots,x_p\le n$ bằng $\frac{1}{m}\left(n^p-\left(-2\right)^p\right)+\left(-1\right)^p$.

Bài 1.2.12. Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các bộ sắp thứ tự $\left(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1}\right)$ gồm $p-1$ số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $x_1+2x_2+\ldots+\left(p-1\right)x_{p-1}$ chia hết cho p và $1\le x_1,x_2,\ldots,x_{p-1}\le p-1$.

Lời giải.

Cách 1 (Sử dụng định lí 1.1.4.1). Đặt $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$, x_j là số các bộ sắp thứ tự $\left(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1}\right)$ gồm $p-1$ số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $x_1+2x_2+\ldots+\left(p-1\right)x_{p-1}\equiv j\left(\operatorname{mod}p\right)$ và $1\le x_1,x_2,\ldots,x_{p-1}\le p-1$. Khi đó ta có

$$\sum_{j=0}^{p-1}x_j\varepsilon^j=\left(\varepsilon^1+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{p-1}\right)\left(\left(\varepsilon^2\right)^1+\left(\varepsilon^2\right)^2+\ldots+\left(\varepsilon^2\right)^{p-1}\right)\ldots\left(\left(\varepsilon^{p-1}\right)^1+\left(\varepsilon^{p-1}\right)^2+\ldots+\left(\varepsilon^{p-1}\right)^{p-1}\right)$$ (1).

Với mỗi $j\in\{1,2,\ldots,p-1\}$ thì $\{j,2j,\ldots,(p-1)j\}$ lập thành một hệ thặng dư thu gọn theo $\operatorname{mod}p$. Do đó

$$\left(\varepsilon^1+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{p-1}\right)\left(\left(\varepsilon^2\right)^1+\left(\varepsilon^2\right)^2+\ldots+\left(\varepsilon^2\right)^{p-1}\right)\ldots\left(\left(\varepsilon^{p-1}\right)^1+\left(\varepsilon^{p-1}\right)^2+\ldots+\left(\varepsilon^{p-1}\right)^{p-1}\right)$$

$$=\left(\varepsilon^1+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{p-1}\right)^{p-1}$$

$$=\left(1+\varepsilon^{1}+\varepsilon^{2}+...+\varepsilon^{p-1}-1\right)^{p-1}=\left(\frac{\varepsilon^{p}-1}{\varepsilon-1}-1\right)^{p-1}=1 \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) ta được

$$\sum_{j=0}^{p-1}x_j\varepsilon^{j}=1 \text{ (3)}$$

Từ (3), kết hợp với **định lí 1.1.4.1** ta được

$$x_0-1=x_1=x_2=...=x_{p-1}\Rightarrow x_0-1=\frac{x_0-1+x_1+x_2+...+x_{p-1}}{p}=\frac{(p-1)^{p-1}-1}{p}$$

$$\Rightarrow x_0=1+\frac{(p-1)^{p-1}-1}{p}=\frac{(p-1)^{p}+p-1}{p}.$$

Vậy số các bộ sắp thứ tự $(x_1,x_2,...,x_{p-1})$ gồm $p-1$ số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $x_1+2x_2+...+(p-1)x_{p-1}$ chia hết cho p và $1\le x_1,x_2,...,x_{p-1}\le p-1$ bằng $\frac{(p-1)^{p}+p-1}{p}$.

Cách 2 (sử dụng định lí 1.1.4.2)

Xét đa thức

$$P(x)=\left(x+x^2+...+x^{p-1}\right)\left(\left(x^2\right)^1+\left(x^2\right)^2+...+\left(x^2\right)^{p-1}\right)...\left(\left(x^{p-1}\right)^1+\left(x^{p-1}\right)^2+...+\left(x^{p-1}\right)^{p-1}\right)=\sum_{k\ge 0}a_kx^k$$

trong đó a_k là số bộ thứ tự $(x_1,x_2,...,x_{p-1})$, $1\le x_1,x_2,...,x_{p-1}\le p-1$ và $x_1+2x_2+...+(p-1)x_{p-1}=k$.

Đặt $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$, kết hợp với **định lí 1.1.4.2** thì số bộ thứ thự $(x_1,x_2,...,x_{p-1})$ gồm $p-1$ số nguyên dương sao cho $x_1+2x_2+...+(p-1)x_{p-1}$ chia hết cho p và $x_1,x_2,...,x_{p-1}\le p-1$ bằng:

$$\sum_{k\vdots p}a_k=\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}P\left(\varepsilon^{j}\right) \text{ (1).}$$

Ta có $P(1)=(p-1)^{p-1}$ và với mỗi $j\in\{1,2,...,p-1\}$ thì $\{j,2j,...,(p-1)j\}$ lập thành một hệ thặng dư thu gọn theo $\bmod p$. Do đó

$$P\left(\varepsilon^{j}\right)=\left(\varepsilon+\varepsilon^2+...+\varepsilon^{p-1}\right)\left(\left(\varepsilon^2\right)^1+\left(\varepsilon^2\right)^2+...+\left(\varepsilon^2\right)^{p-1}\right)...\left(\left(\varepsilon^{p-1}\right)^1+\left(\varepsilon^{p-1}\right)^2+...+\left(\varepsilon^{p-1}\right)^{p-1}\right)$$

$$=\left(\varepsilon+\varepsilon^2+...+\varepsilon^{p-1}\right)^{p-1}=\left(1+\varepsilon^1+\varepsilon^2+...+\varepsilon^{p-1}-1\right)^{p-1}=\left(\frac{\varepsilon^p-1}{\varepsilon-1}-1\right)^{p-1}=1.$$

Kết hợp với (1) ta được

$$\sum_{k:p}a_k=\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}P\left(\varepsilon^j\right)=\frac{(p-1)^{p-1}+p-1}{p}.$$

Vậy số các bộ sắp thứ tự $(x_1,x_2,...,x_{p-1})$ gồm $p-1$ số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $x_1+2x_2+...+(p-1)x_{p-1}$ chia hết cho p và $1\le x_1,x_2,...,x_{p-1}\le p-1$ bằng $\frac{(p-1)^p+p-1}{p}$.

Bài 1.2.13. Cho *p* là một số nguyên tố lẻ và m, n đều chia hết cho *p, n* là số lẻ. Với mỗi hàm $f:\{1,2,...,m\}\to\{1,2,...,n\}$ thỏa mãn điều kiện $p|\left(f(1)+f(2)+...+f(m)\right)$, xét tích $f(1)f(2)...f(m)$. Chứng minh rằng tổng tất cả các tích này chia hết cho $\left(\frac{n}{p}\right)^m$.

Lời giải.

Đặt $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$ và x_k là tổng tất cả các tích $f(1)f(2)...f(m)$ thỏa mãn $x_k\equiv k\pmod p$. Khi đó

$$\sum_{k=0}^{p-1}x_k\varepsilon^k=\sum_{c_1,c_2,...,c_m\in\{1,2,...,n\}}c_1c_2..c_m\varepsilon^{c_1+c_2+...+c_m}=\left(\varepsilon+2\varepsilon^2+...+n\varepsilon^n\right)^m$$

Đặt $A=\varepsilon+2\varepsilon^2+...+n\varepsilon^n\Rightarrow\varepsilon A=\varepsilon^2+2\varepsilon^3+...+n\varepsilon^{n+1}$

Suy ra

$$\left(1-\varepsilon\right)A=\varepsilon-n\varepsilon^{n+1}+\varepsilon^2+\varepsilon^3+...+\varepsilon^n=-n\varepsilon^{n+1}+\frac{\varepsilon^{n+1}-1}{\varepsilon-1}-1$$
$$=-n\varepsilon+\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-1}-1=-n\varepsilon\Rightarrow A=\frac{n\varepsilon}{\varepsilon-1}$$

Do vậy

$$\sum_{k=0}^{p-1}x_k\varepsilon^k=\left(\varepsilon+2\varepsilon^2+...+n\varepsilon^n\right)^m=\left(\frac{n\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)^m$$

Chú ý

$$\varepsilon^{p-1}+\varepsilon^{p-2}+...+\varepsilon+1=0\Rightarrow \varepsilon^{p-1}-1+\varepsilon^{p-2}-1+...+\varepsilon-1=-p$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon-1}=p-1+\left(p-2\right)\varepsilon+...+2\varepsilon^{p-3}+\varepsilon^{p-2}$$

Do đó

$$\sum_{k=0}^{p-1}x_k\varepsilon^k=\left(\frac{n\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)^m=\left(-\frac{n}{p}\right)^m\left(p-1+\left(p-2\right)\varepsilon+...+2\varepsilon^{p-3}+\varepsilon^{p-2}\right)^m$$

$$=\left(-\frac{n}{p}\right)^m\left(c_0+c_1\varepsilon+c_2\varepsilon^2+...+c_{p-1}\varepsilon^{p-1}\right)$$

$$=r\left(c_0+c_1\varepsilon+c_2\varepsilon^2+...+c_{p-1}\varepsilon^{p-1}\right)$$

Suy ra

$$\sum_{k=0}^{p-1}\left(x_k-rc_k\right)\varepsilon^k=0$$

Theo **định lí 1.1.4.1** ta được

$$x_o-rc_0=x_1-rc_1=...=x_{p-1}-rc_{p-1}$$

$$\Rightarrow p\left(x_0-rc_0\right)=x_0+x_1+...+x_{p-1}-r\left(c_0+c_1+...+c_{p-1}\right)$$

$$=\left(1+2+...+n\right)^m-r\left(1+2+...+p-1\right)^m$$

$$=\left(\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right)^m-r\left(\frac{p\left(p-1\right)}{2}\right)^m=p^m\left[\left(\frac{n}{p}\right)^m\left(\frac{n+1}{2}\right)^m-r\left(\frac{p-1}{2}\right)^m\right]$$

Suy ra

$$r|x_0$$

Hay tổng tất cả các tích này chia hết cho $\left(\frac{n}{p}\right)^m$.

1.3 Bài tập áp dụng

Bài 1.3.1. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng các chữ số của nó là bội của 4.

Bài 1.3.2. (Romanian 2003). Cho *n* là một số nguyên dương. Có bao nhiêu số có *n* chữ số từ tập hợp $\{2,3,7,9\}$ và chia hết cho 3.

Bài 1.3.3. Cho *p* là một số nguyên tố lẻ và *n* là một số nguyên dương. Tìm số tập con của tập $\{1,2,...,n\}$ mà tổng các phần tử chia hết cho *p*.

Bài 1.3.4 (Mở rộng IMO 1995). Cho *p* là một số nguyên tố lẻ và *n* là một số nguyên dương lớn hơn p. Xác định số các tập con A của $S=\{1,2,...,n\}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau :

i) $|A|=p$

ii) $S(A)\equiv 0 \pmod p$ trong đó $S(A)$ là tổng các phần tử thuộc A.

Bài 1.3.5. Cho 3 số nguyên dương *m, n, p*; trong đó $n+2 \vdots m$ và $m>p$. Tìm số các bộ $(x_1,x_2,...,x_p)$ gồm *p* số nguyên dương sao cho $x_1+x_2+...+x_p \vdots m$, trong đó $x_1,x_2,...,x_p \le n$.

Bài 1.3.6. Cho *p* là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương *n*. Tìm số các bộ $(x_1,x_2,...,x_{p-1})$ gồm $p-1$ số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $x_1+2x_2+...+(p-1)x_{p-1}$ chia hết cho *p*, trong đó $x_1,x_2,...,x_{p-1}\le n$.

Bài 1.3.7. Cho *m, n* ($n>1$) và $a_1,a_2,...,a_m$ là các số tự nhiên. Gọi x_k là số bộ $(c_1,c_2,...,c_m)$ gồm *m* số tự nhiên sao cho $1\le c_i\le a_i$, $i=1,2,...,m$ và $c_1+c_2+...+c_m\equiv k \pmod n$. Chứng minh rằng

$$x_0=x_1=x_2=...=x_{n-1}$$

khi và chỉ khi tồn tại $i\in\{1,2,...,m\}$ sao cho a_i chia hết cho *n*.

Bài 1.3.8. Cho *n* là một số nguyên dương. Kí hiệu $f(n)$ là số các tập con của tập hợp $\{1,2,...,n\}$ và tổng các phần tử của mỗi tập hợp con đó chia hết cho *n*. Tập rỗng cũng được tính là tập con thỏa mãn tính chất trên. Chứng minh rằng

$$f(n)=\frac{1}{n}\sum_{\substack{d|n,\\ d\not\equiv 0 \pmod 2}}\varphi(d)2^{\frac{n}{d}}$$

Bài 1.3.9 (IMO 1999 Shortlist) Cho *p* là một số nguyên tố, $p>3$ và *h* là số bộ $(a_1,a_2,...,a_{p-1})\subset\{0,1,2\}^{p-1}$ sao cho $\sum_{j=0}^{p-1} ja_j$ chia hết cho *p*. Cũng vậy, gọi *k* là số bộ $(a_1,a_2,...,a_{p-1})\subset\{0,1,3\}^{p-1}$ sao cho $\sum_{j=0}^{p-1} ja_j$ chia hết cho *p*. Chứng minh rằng $h\le k$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $p=5$.

Bài 1.3.10 (IMO 2002 Shortlist) Cho *m, n* là các số nguyên lớn hơn 1 và cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên, không chia hết cho m^{n-1}. Chứng minh rằng có thể tìm được các số nguyên $e_1, e_2, ..., e_n$, không đồng thời bằng 0, sao cho $|e_i| < m$ với mọi *i* và $e_1a_1 + e_2a_2 + ... + e_na_n$ chia hết cho m^n.

Bài 1.3.11 (USAMO 1999) Cho *p* là một số nguyên tố lẻ và cho *a, b, c, d* là các số nguyên không chia hết cho *p* sao cho

$$\left\{\frac{ra}{p}\right\} + \left\{\frac{rb}{p}\right\} + \left\{\frac{rc}{p}\right\} + \left\{\frac{rd}{p}\right\} = 2,$$

V với mọi số nguyên *r* không chia hết cho *p* (ở đây kí hiệu $\{m\}$ là phần lẻ của *m*). Chứng minh rằng có ít nhất 2 số $a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d$ chia hết cho *p*.

Bài 1.3.12. Cho *p* là một số nguyên tố lẻ, *n* là một số nguyên dương cho trước và tập hợp $A = \{1, 2, ..., pn\}$. Kí hiệu $F = \{X \subset A | S(X) \vdots p\}$ và $T(B)$ là bình phương của tổng các phần tử của tập hợp *B*. Tính giá trị của biểu thức

$$\sum_{X \in F} T(X)$$

Bài 1.3.13. Cho *p* là một số nguyên tố lẻ và tập hợp $A = \{1, 2, ..., 2p\}$. Kí hiệu $F = \{X \subset A | S(X) \vdots p, |X| = p\}$ và $T(B)$ là bình phương của tổng các phần tử của tập hợp *B*. Tính giá trị của biểu thức

$$\sum_{X \in F} T(X)$$

Bài 1.3.14. Cho *F* là một họ *k* cấp số cộng vô hạn dạng $a_i + d_i\mathbb{Z}$, trong đó $1 < d_1 < d_2 < ... < d_k$. Giả sử tồn tại số nguyên *x* sao cho với mỗi số hạng của dãy $x, x+1, ..., x+2^k-1$ thuộc ít nhất một phần tử của họ *F*. Khi đó *F*

Bài 1.3.15. Cho *p* là một số nguyên tố và *m* là một số nguyên dương. Giải sử

$$E = \left\{(k_1, k_2, ..., k_{p-1}), 0 \le k_i \le m-1 : \sum_{j=0}^{p-1} jk_j \equiv (\bmod p)\right\}.$$

Hãy xác định số phần tử của tập hợp *E*.

Bài 1.3.16 (Bulgaria 2001) Cho $n \ge 2$ là một số nguyên dương. Mỗi điểm có tọa độ (i, j) có tọa độ nguyên chúng ta viết số $i + j(\bmod n)$. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho bất kì thặng dư modulo *n* xuất hiện số lần giống nhau trên các cạnh của hình chữ nhật với các đỉnh là $(0,0), (a,0), (a,b), (0,b)$ và cũng thặng dư bất kì modulo n xuất hiện số lần giống nhau bên trong hình chữ nhật này.

Bài 1.3.17 (High School - Mathematics). Có bao nhiêu tập con của tập hợp $\{1,2,...,2000\}$ mà mỗi tập con đó gồm 100 phần tử và tổng các phần tử chia hết cho 5?

Bài 1.3.18 (Rookie Contest, 1999). Cho $a_1,a_2,...,a_m$ là các số tự nhiên và $f(k)$ là số bộ sắp thứ tự $(c_1,c_2,...,c_m)$ sao cho $1\le c_i \le a_i,\ i=1,2,...,m$ và $c_1+c_2+...+c_m \equiv k(\bmod n)$, trong đó $m>1, n>1$ là các số tự nhiên. Chứng minh rằng $f(0)=f(1)=...=f(n-1)$ khi và chỉ khi tồn tại chỉ số $i\in\{1,2,...,m\}$ sao cho $n|a_i$.

Chương 2. PHƯƠNG PHÁP QUỸ ĐẠO

2.1 Lí thuyết

2.1.1 Đường đi ngắn nhất

2.1.1.1 Định nghĩa. Cho hai số nguyên dương m,n . Xét mạng lưới ô vuông kích thước $n\times m$ và điểm $A(m;n)$. Khi đó mỗi đường gấp khúc nối hai điểm O và A gồm m bước đi ngang và n bước đi lên được gọi là một đường đi ngắn nhất từ điểm O đến điểm A .

2.1.1.2 Định lí. Cho hai số nguyên dương m,n . Khi đó số đường đi ngắn nhất nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A(m;n)$ bằng C_{m+n}^{n} .

Chứng minh. Mỗi đường đi ngắn nhất từ điểm O đến điểm A tương ứng với bộ số $(x_1,x_2,...,x_{m+n})$, trong đó $x_i\in\{0;1\}$ và có đúng n số x_i bằng 1, $x_i=1$ nếu đi ngang ở bước thứ i , $x_i=1$ nếu đi lên ở bước thứ i . Khi đó mỗi đường đi ngắn nhất từ điểm O đến điểm A tương ứng với một tổ hợp chập n của $m+n$ suy ra số đường đi ngắn nhất là C_{m+n}^{n} .

2.1.1.3 Định lí. Cho bốn số nguyên a, b, x, y và $x>a$. Khi đó số đường đi ngắn nhất nối điểm $A(a;b)$ với điểm $B(x;y)$ bằng $C_{x+y-a-b}^{x-a}$.

Chứng minh. Xét phép tịnh tiến hệ trục tọa độ Oxy thành hệ trục AXY theo vector $\overrightarrow{OA}=(a;b)$. Khi đó trong hệ trục tọa độ AXY thì $A(0;0), M(x-a;y-b)$. Khi đó theo định lí 2.1.1.2 số đường đi ngắn nhất nối điểm A với điểm M bằng $C_{x+y-a-b}^{x-a}$.

2.1.2 Quỹ đạo

2.1.2.1 Định nghĩa. Cho a, b, m, n là các số nguyên và $m > a$. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, ta gọi quỹ đạo nối điểm $A(a;b)$ với điểm $B(m;n)$ là đường gấp khúc nối các điểm $A(a;b), A_1(a+1;y_1), A_2(a+2;y_2), ..., A_{m-a}(m;y_{m-a})$; trong đó

$$y_i - y_{i-1} \in \{-1;1\},\ y_{m-a} = n.$$

2.1.2.2 Định lí. Kí hiệu $S(m;n)$ (m, n là các số nguyên dương) là số quỹ đạo nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A(m;n)$. Khi đó $S(m;n) = C_m^{\frac{m+n}{2}}$ nếu m, n cùng tính chẵn lẻ và $S(m;n) = 0$ nếu m, n khác tính chẵn lẻ.

Chứng minh

Cách 1. Dễ thấy theo định nghĩa của quỹ đạo thì $m+n$ chẵn suy ra $S(m;n) = 0$ nếu m, n khác tính chẵn lẻ. Ta xét trường hợp m, n cùng tính chẵn lẻ. Bây giờ ta chứng minh $S(m;n) = C_m^{\frac{m+n}{2}}$ quy nạp theo m.

Để đến được điểm $A_m(m;n)$ thì $A_{m-1} = (m-1;n-1)$ hoặc $A_{m-1} = (m-1;n+1)$, kết hợp với giả thiết quy nạp ta được :

$$S(m;n) = S(m-1;n-1) + S(m-1;n+1) = C_{m-1}^{\frac{m-1+n-1}{2}} + C_{m-1}^{\frac{m+n}{2}} = C_{m-1}^{\frac{m+n}{2}-1} + C_{m-1}^{\frac{m+n}{2}} = C_m^{\frac{m+n}{2}}$$

Do đó $S(m;n) = C_m^{\frac{m+n}{2}}$ nếu m, n cùng tính chẵn lẻ và $S(m;n) = 0$ nếu m, n khác tính chẵn lẻ.

Cách 2. Giả sử quỹ đạo gồm p đoạn hướng lên và q đoạn hướng xuống. Khi đó ta có $p = m+n,\ q = m-n \Rightarrow m = \dfrac{p+q}{2},\ n = \dfrac{p-q}{2}$. Từ đó suy ra kết luận bài toán.

2.1.2.3 Định lí. Cho x, y, a, b là các số nguyên và $x > a$. Khi đó số quỹ đạo nối điểm $A(a;b)$ với điểm $M(x;y)$ bằng $C_{x-a}^{\frac{x+y-a-b}{2}}$.

Chứng minh.

Xét phép tịnh tiến hệ trục tọa độ Oxy thành hệ trục AXY theo vector $\overrightarrow{OA} = (a;b)$. Khi đó trong hệ trục tọa độ AXY thì $A(0;0), M(x-a;y-b)$. Khi đó số quỹ đạo nối điểm A với điểm M bằng $C_{x-a}^{\frac{x+y-a-b}{2}}$.

2.1.2.4 Định lí. Cho A, B là hai điểm bất kì nằm phía trên trục hoành. Lấy điểm A' đối xứng với điểm A qua trục hoành. Khi đó số quỹ đạo nối điểm A với điểm B và có điểm chung với trục hoành bằng số quỹ đạo nối điểm A' với điểm B.

Chứng minh.

Giả sử quỹ đạo nối điểm A với điểm B có điểm chung lần đầu với trục hoành là điểm $M(u;0)$, $A(a;b)$.

Theo định lí 2.1.2.3 ta được :

Số quỹ đạo nối điểm $A(a;b)$ với điểm $M(u;0)$ bằng $C_{u-a}^{\frac{u-a-b}{2}}$.

Số quỹ đạo nối điểm $A'(a;-b)$ với điểm $M(u;0)$ bằng $C_{u-a}^{\frac{u-a+b}{2}} = C_{u-a}^{u-a-\frac{u-a+b}{2}} = C_{u-a}^{\frac{u-a-b}{2}}$.

Do đó số quỹ đạo nối điểm $A(a;b)$ với điểm $M(u;0)$ bằng số quỹ đạo nối điểm $A'(a;-b)$ với điểm $M(u;0)$ suy ra số quỹ đạo nối điểm A với điểm B và có điểm chung với trục hoành bằng số quỹ đạo nối điểm A' với điểm B.

2.2 Bài tập minh họa

Bài 2.2.1. Cho số nguyên dương $n > 1$ và số tự nhiên $k,\ 0 \le k \le n$. Chứng minh rằng :

a) $C_n^k = C_n^{n-k}$

b) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}\ (1 \le k)$

Lời giải

Đây là các tính chất cơ bản của C_n^k và có thể chứng minh theo nhiều cách khác nhau, sau đây chúng ta sẽ sử dụng đường đi ngắn nhất để chứng minh các đẳng thức này.

a) Xét đường đi ngắn nhất nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n-k;k)$ gồm $n-k$ bước đi ngang và k bước đi lên. Khi đó theo định lí 2.1.1.2 ta có số đường đi ngắn nhất nối $O(0;0)$ với điểm $A(n-k;k)$ bằng $C_{n-k+k}^k = C_n^k$. Mặt khác mỗi đường đi ngắn nhất nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n-k;k)$ tương ứng với một cách chọn ra $n-k$ bước đi ngang từ n bước đi suy ra số đường đi nối $O(0;0)$ với điểm $A(n-k;k)$ bằng C_n^{n-k}. Do đó $C_n^{n-k} = C_n^k$.

b) Xét đường đi ngắn nhất nối hai điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n-k;k)$. Khi đó theo định lí 2.1.1.2 ta có số đường đi ngắn nhất nối $O(0;0)$ với điểm $A(n-k;k)$ bằng $C_{n-k+k}^k = C_n^k$.

Xét mỗi đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n-k;k)$. Trước khi đến điểm $A(n-k;k)$ ta phải đến được điểm $A_1(n-k;k-1)$ hoặc $A_2(n-k-1;k)$. Khi đó số đường đi ngắn nhất nối $O(0;0)$ với điểm $A(n-k;k)$ bằng số đường đi ngắn nhất nối $O(0;0)$ với điểm $A_1(n-k;k-1)$ cộng với số đường đi ngắn nhất nối $O(0;0)$ với điểm $A_2(n-k-1;k)$ cộng với số. Khi đó theo định lí 2.1.1.2 ta được :

$$C_n^k = C_{n-k+k-1}^{k-1} + C_{n-k-1+k}^{k} = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}.$$

Bài 2.2.2. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng :

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$$

Lời giải

Xét đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n;n)$. Khi đó theo định lí 2.1.1.2 thì số đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n;n)$ bằng $C_{n+n}^n = C_{2n}^n$.

Tiếp theo ta xét hình vuông $OBAC$, trong đó $B(0;n), C(n;0)$. Khi đó mỗi đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n;n)$ phải đi qua một điểm $M(k;n-k), 0 \le k \le n$ nằm trên đường chéo BC. Như vậy mỗi đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n;n)$ gồm đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ với điểm $M(k;n-k)$ và đường đi ngắn nhất từ điểm $M(k;n-k)$ với điểm $A(n;n)$. Theo định lí 2.1.1.3 ta được số đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ với điểm $M(k;n-k)$ bằng $C_{k+n-k}^k = C_n^k$ và số đường đi ngắn nhất từ điểm $M(k;n-k)$ với điểm $A(n;n)$ bằng $C_{n+n-(k+n-k)}^{n-k} = C_n^{n-k} = C_n^k$ suy ra số đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n;n)$ và đi qua điểm $M(k;n-k)$ là $\left(C_n^k\right)^2$.

Do đó số đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n;n)$ bằng $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2$. Từ đó ta được đẳng thức sau

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$$

Bài 2.2.3. Cho $n > m > 1$ là các số nguyên dương. Chứng minh đẳng thức sau :

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + ... + C_{m-1}^{m-1}$$

Lời giải

Xét đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ với điểm $A(m;n-m)$. Khi đó theo định lí 2.1.1.2 thì số đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ với điểm $A(m;n-m)$ bằng $C_{m+n-m}^{m}=C_{n}^{m}$.

Mỗi đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ với điểm $A(m;n-m)$ và đi qua điểm $P\left(\frac{1}{2};k\right)$, $0\le k\le n$. Khi đó đường đi ngắn nhất này gồm một đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $Q(1;k)$ và một đường đi ngắn nhất từ điểm $Q(1;k)$ đến điểm $A(m;n-m)$. Do phải đi qua điểm $P\left(\frac{1}{2};k\right)$ nên chỉ có duy nhất một đường đi từ điểm $O(0;0)$ đến điểm $Q(1;k)$, và theo định lí 2.1.1.3 số đường đi ngắn nhất từ điểm $Q(1;k)$ đến điểm $A(m;n-m)$ bằng $C_{m+n-m-(k+1)}^{m-1}=C_{n-k-1}^{m-1}$. Do đó số đường đi ngắn nhất từ điểm $O(0;0)$ với điểm $A(m;n-m)$ và đi qua điểm $P\left(\frac{1}{2};k\right)$ bằng C_{n-k-1}^{m-1}. Từ đó suy ra số đường đi từ điểm $O(0;0)$ với điểm $A(m;n-m)$ bằng $\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-k-1}^{m-1}$.

Vậy ta có đẳng thức $C_{n}^{m}=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-2}^{m-1}+...+C_{m-1}^{m-1}$.

Bài 2.2.4. Cho a, b, m, n, p là các số nguyên. Tìm số quỹ đạo nối điểm $A(a;b)$ với điểm $M(x;y)$ sao cho quỹ đạo đó không cắt đường thẳng $y=p$?

Lời giải

Nếu A và M nằm khác phía so với đường thẳng $y=p$ thì số quỹ đạo bằng 0.

Nếu A và M nằm cùng phía so với đường thẳng $y=p$. Lấy điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng $y=p\Rightarrow A'(a;2p-b)$. Khi đó theo định lí 2.1.2.4 số quỹ đạo nối điểm A với điểm M bằng số quỹ đạo nối điểm A' với điểm M.

Theo định lí 2.1.2.3 thì số quỹ đạo nối điểm A với điểm M bằng $C_{x-a}^{\frac{x+y-a-b}{2}}$ và số quỹ đạo nối điểm A' với điểm M bằng $C_{x-a}^{\frac{x+y-a-2p+b}{2}}$.

Do đó số quỹ đạo nối điểm $A(a;b)$ với điểm $M(x;y)$ sao cho quỹ đạo đó không cắt đường thẳng $y=p$ bằng $C_{x-a}^{\frac{x+y-a-b}{2}}-C_{x-a}^{\frac{x+y-a-2p+b}{2}}$.

Nếu A nằm trên đường thẳng $y=p$ thì điểm A sẽ được nối với điểm $A_1(a+1;p+1)$ hoặc $A_2(a+1;p-1)$. Khi đó số quỹ đạo nối điểm $A(a;b)$ với điểm $M(x;y)$ mà có điểm chung với đường thẳng $y=p$, không tính điểm chung A gồm các quỹ đạo nối $A_1(a+1;p+1)$ với điểm $M(x;y)$ và $A_2(a+1;p-1)$ với điểm $M(x;y)$. Do đó số quỹ đạo loại này là $C_{x-a-1}^{\frac{x+y-a-p}{2}}+C_{x-a-1}^{\frac{x+y-a-p}{2}}=2C_{x-a-1}^{\frac{x+y-a-p}{2}}$.

Do đó số quỹ đạo nối điểm $A(a;b)$ với điểm $M(x;y)$ mà không có điểm chung với đường thẳng $y=p$ ngoài điểm A bằng $C_{x-a}^{\frac{x+y-a-p}{2}}-2C_{x-a-1}^{\frac{x+y-a-p}{2}}$.

Bài 2.2.5. Cho hai số nguyên dương m,n. Tìm số quỹ đạo nối điểm $O(0;0)$ với điểm $M(m;n)$ sao cho quỹ đạo đó không có điểm chung với trục hoành.

Lời giải

Điểm $O(0;0)$ chỉ nối với điểm $A_1(1;1)$ hoặc điểm $A_2(1;-1)$. Khi đó số quỹ đạo nối điểm $O(0;0)$ với điểm $M(m;n)$ cắt trục hoành bằng hai lần số quỹ đạo nối $A_2(1;-1)$ với điểm $M(m;n)$ và bằng $2C_{x-1}^{\frac{x+y+1-1}{2}}=2C_{x-1}^{\frac{x+y}{2}}$.

Do đó số quỹ đạo nối điểm $O(0;0)$ với điểm $M(m;n)$ sao cho quỹ đạo đó không có điểm chung với trục hoành bằng $C_x^{\frac{x+y}{2}}-2C_{x-1}^{\frac{x+y}{2}}$.

Mặt khác

$$C_x^{\frac{x+y}{2}}-2C_{x-1}^{\frac{x+y}{2}}=C_x^{\frac{x+y}{2}}-2.\frac{(x-1)!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!.\left(x-1-\frac{x+y}{2}\right)!}$$

$$=C_x^{\frac{x+y}{2}}-C_x^{\frac{x+y}{2}}.\frac{2\left(x-\frac{x+y}{2}\right)}{x}=\frac{y}{x}C_x^{\frac{x+y}{2}}.$$

Vậy số quỹ đạo nối điểm $O(0;0)$ với điểm $M(m;n)$ và không có điểm chung với trục hoành bằng $\frac{y}{x}C_x^{\frac{x+y}{2}}$.

Bài 2.2.6. Cho m,n là các số nguyên dương và $m\le n$. Có $m+n$ người sắp hàng mua vé, trong đó có n người mang loại tiền 5000 đồng và m người mang tiền loại 10000 đồng. Mỗi vé giá 5000 đồng. Trước lúc bán người bán vé có p đồng tiền 5000 đồng (p là một số tự nhiên). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp $m+n$ người để không có người nào phải chờ trả tiền thừa?

Lời giải

Giả sử $m+n$ người mua vé đã được sắp xếp hàng theo một cách nào đó. Đặt $\varepsilon_i = 1$ nếu người thứ i có 5000 đồng và $\varepsilon_i = -1$ nếu người thứ i có 10000 đồng. Khi đó nếu có k sắp hàng đã mua vé thì số tiền của người bán vé bằng $S_k = p + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$ suy ra sau khi bán vé cho người thứ k, để không phải trả tiền thì $S_k \geq 0$.

Trên mạng lưới ô vuông, vẽ các điểm $A_k(k;S_k), 1 \leq k \leq m+n$, xét quỹ đạo nối điểm $O(0;p)$ với điểm $A_{m+n}(m+n;n-m+p)$. Khi đó mỗi cách sắp xếp $m+n$ người để không có người nào phải chờ trả tiền thừa tương ứng với một quỹ đạo nối điểm $O(0;p)$ với điểm $A_{m+n}(m+n;n-m+p)$ và quỹ đạo này không có điểm chung với đường thẳng $y=-1$. Do đó theo **bài 2.2.4** ta được số quỹ đạo này là $C_{m+n}^{\frac{2n+p-p}{2}} - C_{m+n}^{\frac{2n+p-2(-1)+p}{2}} = C_{m+n}^{n} - C_{m+n}^{n+p+1}$.

Vậy số cách sắp xếp $m+n$ người để không có người nào phải chờ trả tiền thừa bằng $C_{m+n}^{n} - C_{m+n}^{n+p+1}$.

Bài 2.2.7 (Bài toán bầu cử). Cho m, n là các số nguyên dương và $m > n$. Trong một cuộc bầu cử, ứng cử viên A được m phiếu bầu, ứng cử viên B được n phiếu bầu. Cử tri bỏ phiếu liên tiếp. Hỏi có bao nhiêu cách bỏ phiếu để ứng cử viên A luôn dẫn đầu về số phiếu bầu cho mình.

Lời giải

Giả sử $a+b$ người tham gia bầu cử và đã được sắp xếp hàng theo một cách nào đó. Đặt $\varepsilon_i = 1$ nếu người thứ i bầu phiếu cho ứng viên A và $\varepsilon_i = -1$ nếu người thứ i bầu phiếu cho ứng viên B. Khi đó nếu có k đã tham gia bầu cử thì hiệu số phiếu của ứng viên A với số phiếu của ứng viên B bằng $S_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$ suy ra sau khi k người tham gia bầu cử, để ứng viên A luôn dẫn đầu về số phiếu thì $S_k > 0$.

Trên mạng lưới ô vuông, vẽ các điểm $A_k(k;S_k), 1 \leq k \leq a+b$, xét quỹ đạo nối điểm $A_1(1;1)$ với điểm $A_{a+b}(a+b;a-b)$. Khi đó mỗi cách bầu cử của $a+b$ người để ứng viên A luôn dẫn đầu về số phiếu tương ứng với một quỹ đạo nối điểm $A_1(1;1)$ với điểm $A_{a+b}(a+b;a-b)$ và quỹ đạo này không có điểm chung với đường thẳng $y=0$. Do đó theo **bài 2.2.4** ta được số quỹ đạo này là $C_{a+b-1}^{\frac{2a-2}{2}} - C_{a+b-1}^{\frac{2a-1-2(0)+1}{2}} = C_{a+b-1}^{a-1} - C_{a+b-1}^{a} = \dfrac{a-b}{a+b} C_{a+b}^{a}$.

Vậy số cách bỏ phiếu để ứng cử viên A luôn dẫn đầu về số phiếu bầu cho mình bằng $\dfrac{a-b}{a+b}C_{a+b}^{a}$.

Bài 2.2.8. Cho số nguyên dương $n>1$. Tìm số dãy $(x_1,x_2,...,x_{2n-2})$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

a) $x_i \in \{-1;1\}$, $\forall i=1,2,...,2n-2$

b) $x_1+x_2+...+x_k \geq 0,\ \forall k=1,2,...,2n-2$

c) $x_1+x_2+...+x_{2n-2}=0.$

Lời giải

Ta sẽ giải bài toán tổng quát hơn như sau:

Bổ đề. Cho hai số nguyên dương m, n và $m \geq n > 1$. Tìm số dãy $(x_1,x_2,...,x_{m+n})$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

a) $x_i \in \{-1;1\}$, $\forall i=1,2,...,m+n$

b) $x_1+x_2+...+x_k \geq 0,\ \forall k=1,2,...,m+n$

c) Dãy $(x_1,x_2,...,x_{m+n})$ có m số hạng bằng 1 và n số hạng bằng -1.

Trên mạng lưới ô vuông, vẽ các điểm $A_k(k;S_k), 1 \leq k \leq m+n$, xét quỹ đạo nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A_{m+n}(m+n;m-n)$. Khi đó mỗi dãy $(x_1,x_2,...,x_{m+n})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán tương ứng với một quỹ đạo nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A_{m+n}(m+n;m-n)$ và quỹ đạo này không có điểm chung với đường thẳng $y=-1$.

Do đó theo **bài 2.2.4** ta được số quỹ đạo này là $C_{m+n}^{\frac{2n+0-0}{2}} - C_{m+n}^{\frac{2n-2(-1)+0}{2}} = C_{m+n}^{n} - C_{m+n}^{n+1}$.

Vậy số dãy $(x_1,x_2,...,x_{m+n})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng $C_{m+n}^{n} - C_{m+n}^{n+1}$.

Trở lại **bài 2.2.8**, áp dụng **bổ đề** khi thay m, n bởi $n-1$ ta được số dãy bằng

$$C_{2n-2}^{n-1} - C_{2n-2}^{n} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!.(n-1)}{n.(n-1)!(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}.$$

Bài 2.2.9. Cho số nguyên dương $n>1$. Tìm số dãy số $(a_1,a_2,...,a_{2n+1})$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

a) $a_i \geq 0,\ \forall i = 1,2,...,2n+1$

b) $a_1 = a_{2n+1} = 0$

c) $\left|a_i - a_{i+1}\right| = 1,\ \forall i = 1,2,...,2n.$

Lời giải

Đặt $x_i = a_{i+1} - a_i$, kết hợp với các điều kiện trên ta được dãy số $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $x_i \in \{-1;1\},\ \forall i = 1,2,...,2n$

ii) $x_1 + x_2 + ... + x_k \geq 0,\ \forall k = 1,2,...,2n$

iii) $x_1 + x_2 + ... + x_{2n} = 0.$

Dễ thấy mỗi dãy $(a_1, a_2, ..., a_{2n+1})$ tương ứng với một dãy $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ và ngược lại. Do đó theo kết quả **bài 2.2.8** ta được số dãy bằng $\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$.

Bài 2.2.10. Kí hiệu $B_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$. Chứng minh rằng trong số C_{2n}^n quỹ đạo nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A(2n;0)$ có

a) B_{n-1} quỹ đạo nằm trên trục hoành và không có điểm chung với trục hoành, trừ các điểm O và A.

b) B_n quỹ đạo không có đỉnh nằm dưới trục hoành.

Lời giải

a) Mỗi quỹ đạo nằm trên trục hoành và không có điểm chung với trục hoành, trừ các điểm O và A là quỹ đạo nối điểm $A_1(1;1)$ với điểm $A_{2n-1}(2n-1;1)$ và không có điểm chung với đường thẳng $y=0$. Do đó theo **bài 2.2.4**, số quỹ đạo cần tìm bằng $C_{2n-2}^{\frac{2n-2}{2}} - C_{2n-2}^{\frac{2n-1-2.(0)+1}{2}} = C_{2n-2}^{n-1} - C_{2n-2}^{n} = \frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1} = B_{n-1}$.

b) Số quỹ đạo nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A(2n;0)$ và không có đỉnh nằm dưới trục hoành bằng số quỹ đạo nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A(2n;0)$ và không có điểm chung với đường thẳng $y=-1$. Do đó theo **bài 2.2.4** số quỹ đạo bằng $C_{2n}^{\frac{2n}{2}} - C_{2n}^{\frac{2n-2.(-1)+0}{2}} = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n} = B_n$.

Bài 2.2.11. Cho số nguyên dương $n>1$. Tìm số hàm không giảm $f:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ thỏa mãn điều kiện $f(x) \leq x$ với mọi $x \in \{1,2,...,n\}$?

Lời giải

Với mỗi hàm không giảm $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$, trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, ta xây dựng một đường đi ngắn nhất nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n;n)$ như sau:

Với mỗi $i\in\{1,2,...,n\}$, điểm $M(i;f(i))$ nối với điểm $M_1(i+1;f(i))$ bởi một đoạn nằm ngang. Nếu $f(i+1)>f(i)$ thì điểm $M_1(i+1;f(i))$ nối với điểm $M_2(i+1;f(i+1))$ bằng một đoạn thẳng đứng. Nếu $f(i+1)=f(i)$ thì điểm $M_1(i+1;f(i))\equiv M_2(i+1;f(i+1))$.

Cho $i=1,2,...,n-1$ ta được một đường đi ngắn nhất nối điểm $O(0;0)$ với điểm $(n;f(n))$. Điểm $O(0;0)$ nối với điểm $(1;0)$ bởi một đoạn nằm ngang, và nếu $f(n)<n$, ta nối điểm $(n;f(n))$ với điểm $A(n;n)$ bởi một dãy các đoạn thẳng đứng liên tiếp. Khi đó ta được một đường đi ngắn nhất nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n;n)$ và đường đi ngắn nhất gồm n đoạn thẳng đứng và n đoạn nằm ngang.

Bây giờ ta xét tập X các hàm không giảm $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ thỏa mãn điều kiện $f(x)\le x$ với mọi $x\in\{1,2,...,n\}$ với tập Y các đường đi ngắn nhất nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n;n)$ thỏa mãn tính chất trên. Ta chứng minh ánh xạ $g:X\to Y$ là một song ánh. Dễ thấy g là một đơn anh, tiếp theo ta chứng minh g là một toàn ánh, thật vậy: giả sử d là một đường đi ngắn nhất nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n;n)$ thỏa mãn tính chất đã xây dựng. Ta xây dựng hàm không giảm như sau : $f_d(i)=\max\{j\,|(i;j)\in d\},\ i=1,2,...,n$.

Ta đếm số đường đi ngắn nhất độ dài $2n$ nối điểm $O(0;0)$ với điểm $A(n;n)$ và không có đỉnh nằm phía trên đường thẳng $y=x$. Theo lí luận ở trên số đường đi ngắn nhất như vậy bằng số dãy $(x_1,x_2,...,x_{2n})$ thỏa mãn đồng thời các tính chất:

a) $x_i\in\{-1;1\},\ \forall i=1,2,...,2n$

b) $x_1+x_2+...+x_k\ge 0,\ \forall k=1,2,...,2n$

c) $x_1+x_2+...+x_{2n}=0.$

Do đó theo **bài 2.2.8** ta có số dãy thỏa mãn là $\dfrac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$.

Vậy số hàm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$.

2.3 Bài tập áp dụng

Bài 2.3.1. Cho m, n là các số nguyên dương và $m \le n$. Có $m+n$ người sắp hàng mua vé, trong đó có n người mang loại tiền 5000 đồng và m người mang tiền loại 10000 đồng. Mỗi vé giá 5000 đồng. Trước lúc bán, người bán vé không có tiền. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp $m+n$ người để không có người nào phải chờ trả tiền thừa?

Bài 2.3.2. Cho m, n, k là các số nguyên dương. Chứng minh các đẳng thức sau bằng cách sử dụng phương pháp xây dựng đường đi ngắn nhất.

a) $C_n^0.C_m^k + C_n^1.C_m^{k-1} + ... + C_n^k.C_m^0 = C_{m+n}^k \ (k \le m, k \le n)$

b) $C_n^m.C_k^0 + C_{n-1}^{m-1}.C_{k+1}^1 + ... + C_{m-n}^0.C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m \ (n < m)$.

Bài 2.3.3. Kí hiệu $B(n,k)$ là số quỹ đạo nối điểm $O(0;0)$ với điểm $M(2n;0)$ có $2k$ cạnh nằm trên trục hoành và $2n-2k$ cạnh còn lại nằm dưới trục hoành. Chưng minh các đẳng thức sau:

a) $B(n,k) = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$

b) $B_0B_{n-1} + B_1B_{n-2} + ... + B_{n-1}B_0 = B(n,k)$, trong đó $B_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$.

Bài 2.3.4 (TST VN 2003). Cho các số nguyên dương m,n,p,q thỏa mãn $p < m,\ q < n$. Trên mặt phẳng tọa độ lấy bốn điểm:

$$A(0;0),\ B(p;0),\ C(m;q),\ D(m;n)$$

Xét các đường đi ngắn nhất từ điểm A đến điểm D và các đường đi g ngắn nhất từ B đến điểm C. Gọi S là số cặp đường đi ngắn nhất (f,g) sao cho f và g không có điểm chung. Chứng minh rằng:

$$S = C_{m+n}^n C_{m+q-p}^q - C_{m+q}^q C_{m+n-p}^n$$

Bài 2.3.5. Một tập $n-2$ đường chéo của một đa giác lồi $A_1A_2...A_{n+1}$ được gọi là tập có tính chất C nếu hai đường chéo bất kì của nó hoặc không có điểm chung hoặc nếu có điểm chung thì điểm chung đó là đỉnh của đa giác và $n-2$ đường chéo này chia đa giác thành $n-1$ tam giác. Tính số các tập $n-2$ đường chéo có tính chất C

Bài 2.3.6. Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn $1 \le n < m$. Chứng minh rằng số các đường đi ngắn nhất từ điểm $(1;0)$ đến điểm $(m;n)$ sao cho đường đi ngắn nhất này cắt đường thẳng $y = x$ tại ít nhất một điểm bằng số đường đi ngắn nhất từ điểm $(0;1)$ đến điểm $(m;n)$.

Bài 2.3.7. Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn $1 \le n < m$. Chứng minh rằng số đường đi ngắn nhất từ điểm $(0;0)$ đến điểm $(m;n)$ cắt đường thẳng $y = x$ chỉ tại duy nhất điểm $(0;0)$ bằng $\frac{m-n}{m+n}C_{m+n}^{n}$.

Bài 2.3.8. Cho $n > 1$ là số nguyên. Tìm số đường đi ngắn nhất nối điểm $(0;0)$ với điểm $(n;n)$ và không có đỉnh nằm phía trên đường thẳng $y = x$?

Bài 2.3.9. Cho $n > 1$ là số nguyên. Tìm số đường đi ngắn nhất nối điểm $(0;0)$ với điểm $(2n;2n)$ và không đi qua các điểm $(2i-1;2i-1), 1 \le i \le n$?

Bài 2.3.10. Cho $n > 1$ là số nguyên. Tìm số dãy nguyên $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thỏa mãn điều kiện $1 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và $a_i \le i, i = 1, 2, ..., n$.

Bài 2.3.11. Cho $n > 1$ là số nguyên. Tìm số dãy nguyên $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thỏa mãn điều kiện $a_1 < a_2 < ... < a_n$ và $1 \le a_i \le 2i, i = 1, 2, ..., n$.

Bài 2.3.12. Cho $n > 1$ là số nguyên. Tìm số dãy nguyên $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thỏa mãn điều kiện $a_1 = 0$ và $0 \le a_{i+1} \le a_i + 1, i = 1, 2, ..., n-1$.

Bài 2.3.13. Cho $n > 1$ là số nguyên. Tìm số dãy nguyên $(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ thỏa mãn điều kiện $a_i \le 1, i = 1, 2, ..., n-1$ và $a_1 + a_2 + ... + a_k \ge 0, i = 1, 2, ..., n-1$.

Bài 2.3.14. Cho $n > 1$ là số nguyên. Tìm số dãy nguyên $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thỏa mãn điều kiện $a_i \ge -1, i = 1, 2, ..., n-1$ và $a_1 + a_2 + ... + a_k \ge 0, i = 1, 2, ..., n-1$ và $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$.

Bài 2.3.15. Cho $n > 1$ là số nguyên. Tìm số dãy nguyên $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thỏa mãn điều kiện $0 \le a_i \le n - i, i = 1, 2, ..., n-1$ và nếu $i < j, a_i > 0, a_j > 0, a_{i+1} = a_{i+2} = ... = a_{j-1} = 0$ thì $j - i > a_i - a_j$.

Bài 2.3.16. Cho $n > 1$ là số nguyên. Tìm số dãy nguyên $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thỏa mãn điều kiện $i \le a_i \le n$ và nếu $i \le j \le a_i$ thì $a_j \le a_i$.

Bài 2.3.17. Cho $n > 1$ là số nguyên. Tìm số dãy nguyên $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thỏa mãn điều kiện $1 \le a_i \le i$ và nếu $a_i = j$ thì $a_{i-r} \le j - r$ với $1 \le r \le j-1$.

Bài 2.3.18. Cho $n>1$ là số nguyên. Tìm số hoán vị $a_1a_2...a_{2n}$ của tập $\{1,2,...,2n\}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a) $1,3,5,...,2n-1$ xuất hiện theo thứ tự tăng dần

b) $2,4,6,...,2n$ xuất hiện theo thứ tự giảm dần

c) $2i-1$ đứng trước $2i, 1\le i\le n$.

Bài 2.3.19. Cho $n>1$ là số nguyên. Tìm số hoán vị $a_1a_2...a_n$ của tập $\{1,2,...,n\}$ thỏa mãn điều kiện không có dãy con tăng có độ dài lớn hơn 2.

Bài 2.3.18. Cho $n>1$ là số nguyên. Tìm số bộ n số nguyên $(a_1,a_2,...,a_n)$ thỏa mãn $a_i\ge 2$ và dãy số $1a_1a_2...a_n1$ có tính chất với mỗi $i=1,2,...,n$ ta có a_i là ước của tổng hai số đứng liền trước và liến sau nó.

Bài 2.3.19 (Canada 2009) Cho số nguyên dương $n>1$ và bảng ô vuông kích thước $3\times n$. Một quân xe xuất phát từ ô góc trên bên trái và đi đến ô góc dưới bên trái sao cho đường đi của nó tạo thành một đường gấp khúc không tự cắt. Hỏi có bao nhiêu cách đi như thế ?

Chương 3. PHƯƠNG PHÁP THIẾT LẬP QUAN HỆ TRUY HỒI

Phương pháp thiết lập quan hệ truy hồi là một phương pháp cơ bản và rất quan trọng đối với bài toán đếm trong tổ hợp. Nội dung của phương pháp thiết lập quan hệ truy hồi như sau: giả sử công việc A có $f(n)$ cách thực hiện, để tìm $f(n)$ ta sẽ tìm mối liên hệ giữa $f(n)$ với $f(n-1), f(n-2), ,f(2), f(1)$, sau đó suy ra công thức $f(n)$. Các bài toán sử dụng phương pháp thiết lập quan hệ truy hồi rất đa dạng, phong phú và ở những mức độ khó dễ khác nhau. Dưới đây chúng sẽ đưa ra một số dạng bài tập tổ hợp sử dụng phương pháp thiết lập quan hệ truy hồi.

3.1 Sử dụng phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi trong các bài toán liên quan đến bảng ô vuông

Trong phần này khi nói đến bảng ô vuông $m\times n$ ta hiểu đây là bảng gồm m dòng và n cột.

Bài 3.1.1. Cho n là một số nguyên dương. Điền vào mỗi ô của bảng $1\times n$ một trong hai số 0 hoặc 1. Hỏi có bao nhiêu cách điền số sao cho không có hai ô kề nhau nào cùng chứa số 1?

Lời giải

Kí hiệu u_n là số cách điền số thỏa mãn yêu cầu bài toán vào bảng $1\times n$ và S_n là tập hợp cách điều số vào bảng $1\times n$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với mỗi cách điền số thuộc S_n, ta giả sử a_i là số được điền vào ô thứ i (tính từ trái sang phải). Ta xét các khả năng sau:

+) $a_n=0$ thì khi đó ta bỏ đi số a_n của bảng $1\times n$, ta được một bảng $1\times(n-1)$ và được một cách điền số thuộc S_{n-1} suy ra trong trường hợp này có u_{n-1} cách điền số.

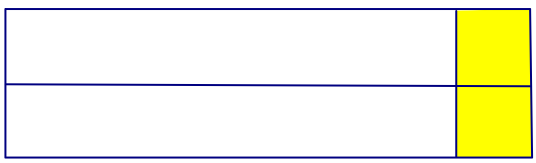
+) $a_n=1$ thì $a_{n-1}=0$, khi đó ta bỏ đi số a_n, a_{n-1} của bảng $1\times n$, ta được một bảng $1\times(n-2)$ và được một cách điền số thuộc S_{n-2} suy ra trong trường hợp này có u_{n-2} cách điền số.

Từ hai trường hợp trên ta được hệ thức: $u_n=u_{n-1}+u_{n-2},\ n>2$, tiếp theo ta dễ thấy $u_1=2, u_2=2$. Từ đó ta tính được $u_n=2F_n$, trong đó F_n là số Fibonacci thứ n.

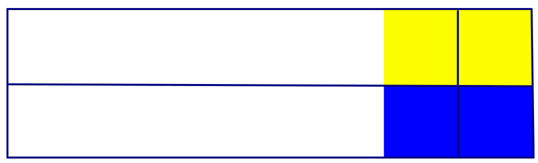
Bài 3.1.2. Hỏi có bao nhiêu cách lát kín bảng $2\times n$ bởi các quân 2×1 hoặc 2×1?

Lời giải

Kí hiệu u_n là số cách lát thỏa mãn yêu cầu bài toán vào bảng $2\times n$ và S_n là tập hợp các cách lát kín bảng $2\times n$ bởi các quân 2×1 hoặc 1×2.



Hình 1



Hình 2

Với mỗi cách lát kín bảng $2\times n$ bởi các quân 2×1 hoặc 1×2. Khi đó sẽ xảy ra hai trường hợp sau:

+) Nếu cột cuối của bảng $2\times n$ được lát bởi quân 2×1 như hình 1, khi đó bỏ đi quân này ta được một bảng $2\times(n-1)$ và được một cách lát thuộc S_{n-1} suy ra trong trường hợp này có u_{n-1} cách lát.

+) Nếu hai ô cuối của dòng 1 được lát bởi quân 1×2 thì hai ô cuối của dòng 2 cũng phải được lát bởi quân 1×2 (xem hình 2). Khi đó ta bỏ đi hai quân 1×2 ở cuối của bảng ta được một bảng $2\times(n-2)$ và được một cách lát thuộc S_{n-2} suy ra trong trường hợp này có u_{n-2} cách lát.

Từ hai trường hợp trên ta được hệ thức: $u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ n > 2$, tiếp theo ta dễ thấy $u_1 = 1, u_2 = 2$. Từ đó ta tính được $u_n = F_{n+1}$, trong đó F_{n+1} là số Fibonacci thứ $n+1$.

Bài 3.1.3. Hỏi có bao nhiêu cách lát kín bảng $2\times n$ bởi các quân 2×1 hoặc 2×1 hoặc 2×2?

Lời giải

Kí hiệu u_n là số cách lát thỏa mãn yêu cầu bài toán vào bảng $2\times n$ và S_n là tập hợp các cách lát kín bảng $2\times n$ bởi các quân 2×1 hoặc 1×2 hoặc 2×2.

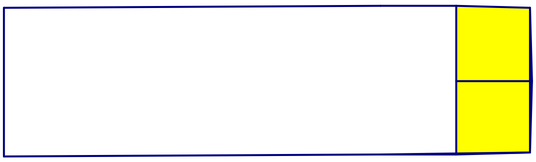
Với mỗi cách lát kín bảng $2\times n$ bởi các quân 2×1 hoặc 1×2 hoặc 2×2. Khi đó sẽ xảy ra ba trường hợp sau:

+) Nếu cột cuối của bảng $2\times n$ được lát bởi quân 2×1 như hình 1, khi đó bỏ đi quân này ta được một bảng $2\times(n-1)$ và được một cách lát thuộc S_{n-1} suy ra trong trường hợp này có u_{n-1} cách lát.

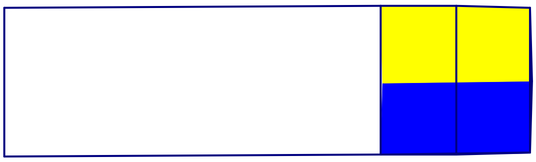
+) Nếu hai ô cuối của dòng 1 được lát bởi quân 1×2 thì hai ô cuối của dòng 2 cũng phải được lát bởi quân 1×2 (xem hình 2). Khi đó ta bỏ đi hai quân 1×2 ở cuối của bảng ta được một bảng $2\times(n-2)$ và được một cách lát thuộc S_{n-2} suy ra trong trường hợp này có u_{n-2} cách lát.

+) Nếu hai cột cuối được lát bởi một quân 2×2 (hình 3) thì khi bỏ đi quân 2×2 ta được bảng $2\times(n-2)$ và được một cách lát thuộc S_{n-2} suy ra số cách lát trong trường hợp này bằng u_{n-2}.

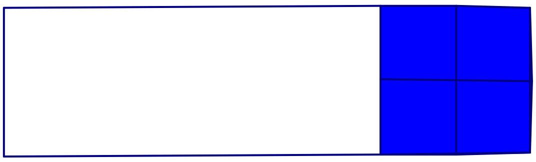
Từ ba trường hợp trên ta được hệ thức: $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2},\ n > 2$, tiếp theo ta dễ thấy $u_1 = 1, u_2 = 3$. Từ đó ta tính được $u_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}$.



Hình 1

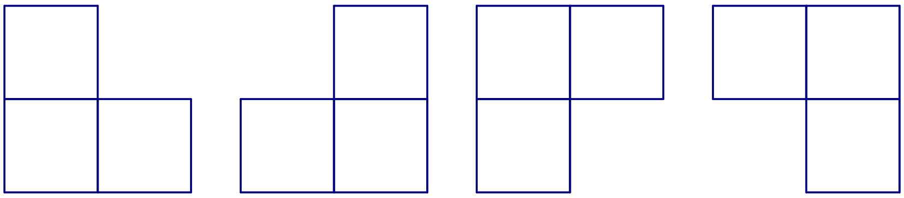


Hình 2



Hình 3

Bài 3.1.4. Hỏi có bao nhiêu cách lát kín bảng $2\times n$ bởi các quân 1×1 hoặc L-trominoes? Quân L-trominoes là một trong các quân sau



Lời giải

Kí hiệu u_n là số cách lát thỏa mãn yêu cầu bài toán vào bảng $2\times n$ và S_n là tập hợp các cách lát kín bảng $2\times n$ bởi các quân 1×1 hoặc L-trominoes.

Với mỗi cách lát kín bảng $2\times n$ bởi các quân 1×1 hoặc L-trominoes. Khi đó sẽ xảy ra sáu trường hợp sau:

+)TH1. Hai ô cuối của bảng $2\times n$ được lát bởi hai quân 1×1 như hình 1. Khi đó bỏ đi hai quân này ta được một bảng $2\times(n-1)$ và được một cách lát thuộc S_{n-1} suy ra trong trường hợp này có u_{n-1} cách lát.

hình 1

+)TH2. Ô cuối của dòng 1 của bảng $2\times n$ được lát bởi quân 1×1 thì bốn ô cuối phải được lát bởi một quân 1×1 và một quân L-trominoes như hình 2. Khi đó bỏ đi hai quân này ta được một bảng $2\times(n-2)$ và được một cách lát thuộc S_{n-2} suy ra trong trường hợp này có u_{n-2} cách lát.

hình 2

+)TH3. Ô cuối của dòng 2 của bảng $2\times n$ được lát bởi quân 1×1 thì bốn ô cuối phải được lát bởi một quân 1×1 và một quân L-trominoes như hình 3. Khi đó bỏ đi hai quân này ta được một bảng $2\times(n-2)$ và được một cách lát thuộc S_{n-2} suy ra trong trường hợp này có u_{n-2} cách lát.

hình 3

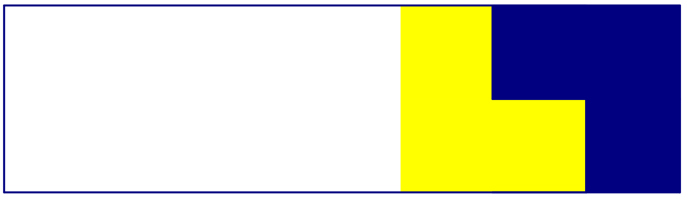
+)TH4. Ô thứ hai (từ phải sang trái) của dòng 1 của bảng $2\times n$ được lát bởi quân 1×1 thì bốn ô cuối phải được lát bởi một quân 1×1 và một quân L-trominoes như hình 4. Khi đó bỏ đi hai quân này ta được một bảng $2\times(n-2)$ và được một cách lát thuộc S_{n-2} suy ra trong trường hợp này có u_{n-2} cách lát.

hình 4

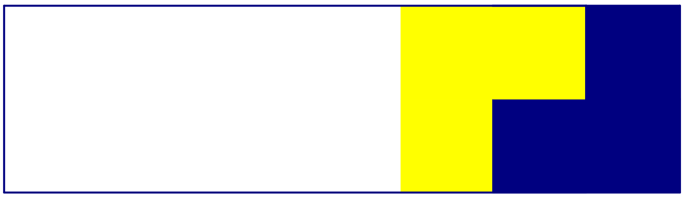
+)TH5. Ô thứ hai (từ phải sang trái) của dòng 2 của bảng $2\times n$ được lát bởi quân 1×1 thì bốn ô cuối phải được lát bởi một quân 1×1 và một quân L-trominoes như hình 5. Khi đó bỏ đi hai quân này ta được một bảng $2\times(n-2)$ và được một cách lát thuộc S_{n-2} suy ra trong trường hợp này có u_{n-2} cách lát.

hình 5

+)TH6. Nếu hai cột cuối của bảng $2\times n$ không được lát bởi quân 1×1 thì sáu ô cuối phải được lát bởi hai quân L-trominoes như hình 6 hoặc 7. Khi đó bỏ đi hai quân này ta được một bảng $2\times(n-2)$ và được một cách lát thuộc S_{n-2} suy ra trong trường hợp này có u_{n-2} cách lát.



hình 6



hình 7

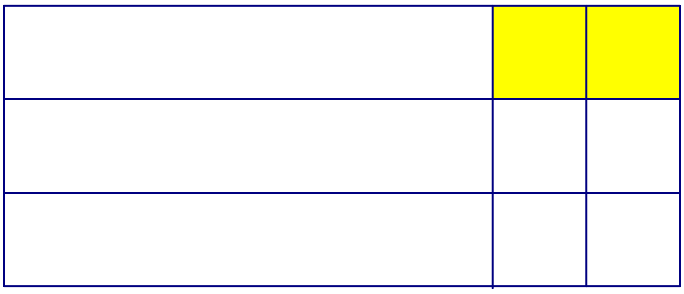
Do đó từ sáu trường hợp trên ta được $u_n = u_{n-1} + 4u_{n-2} + 2u_{n-3}, n > 3$. Dễ thấy $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 2$. Sử dụng dãy tuyến tính ta được u_n.

Bài 3.1.5. Hỏi có bao nhiêu cách lát kín bảng $3\times n$ bởi các quân 1×2 hoặc 2×1?

Lời giải

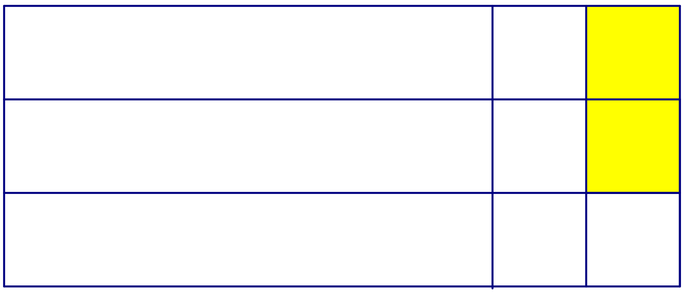
Kí hiệu u_n là số cách lát thỏa mãn yêu cầu bài toán vào bảng $3\times n$. Khi bảng $3\times n$ bởi các quân 1×2 hoặc 2×1 nên n phải là số chẵn.

Kí hiệu a_n là số cách lát bảng $3\times n$ bởi các quân 1×2 hoặc 2×1, trong đó hai ô cuối của dòng 1 được lát bởi quân 1×2 như hình vẽ 1.



hình 1

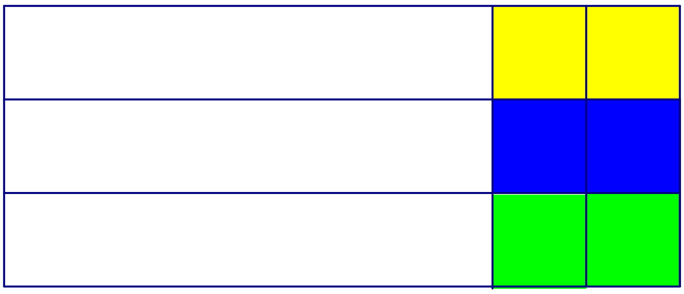
Kí hiệu b_n là số cách lát bảng $3\times n$ bởi các quân 1×2 hoặc 2×1, trong đó ô cuối của dòng 1 và ô cuối của dòng 2 được lát bởi quân 2×1 như hình vẽ 2.



hình 2

Xét cách lát bảng $3\times n$ theo cách giống như hình 1. Khi đó sẽ xảy ra ba trường hợp sau:

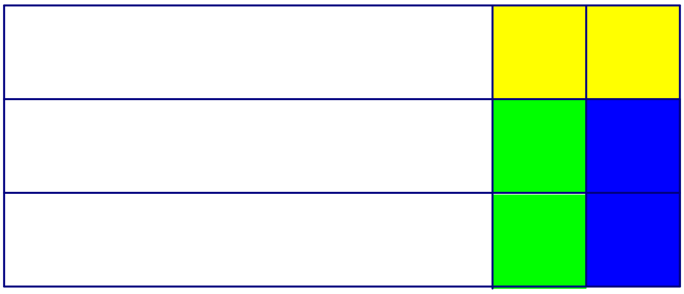
+) Hai cột cuối của bảng $3\times n$ được lát bởi 3 quân 1×2 như hình 3 dưới đây



hình 3

Khi bỏ đi hai cột cuối của bảng $3\times n$ thì ta được bảng $3\times(n-2)$ suy ra số cách lát trong trường hợp này là $a_{n-2}+b_{n-2}=u_{n-2}$.

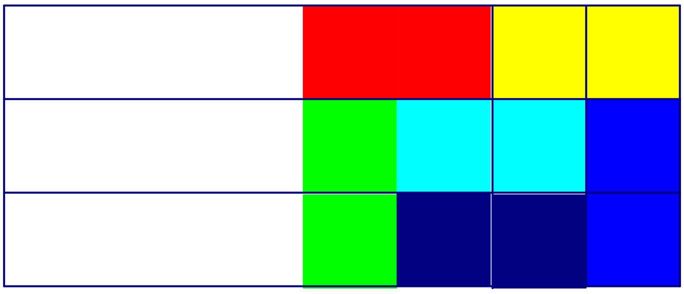
+) Hai cột cuối của bảng $3\times n$ được lát bởi một quân 1×2 và hai quân 2×1 như hình 4 dưới đây



hình 4

Khi bỏ đi hai cột cuối của bảng $3\times n$ thì ta được bảng $3\times(n-2)$ suy ra số cách lát trong trường hợp này là $a_{n-2}+b_{n-2}=u_{n-2}$.

+) Hai cột cuối của bảng $3\times n$ không được lát kín bởi các quân 1×2 và 2×1 như hình 5 dưới đây



hình 5

Khi bỏ đi bốn cột cuối của bảng $3\times n$ thì ta được bảng $3\times(n-4)$ suy ra số cách lát trong trường hợp này là $a_{n-4}+b_{n-4}=u_{n-4}$.

Cứ tiếp tục như vậy và kết hợp với ba trường hợp trên ta được:

$$a_n=2(a_{n-2}+b_{n-2})+a_{n-4}+b_{n-4}+a_{n-6}+b_{n-6}+\ldots \quad (1)$$

Xét cách lát bảng $3\times n$ theo cách giống như hình 2. Lập luận tương tự như trên ta được hệ thức

$$b_n=a_{n-2}+b_{n-2}+a_{n-4}+b_{n-4}+a_{n-6}+b_{n-6}+\ldots \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thiết lập được hai đẳng thức sau:

$$u_n=a_n+b_n=3(a_{n-2}+b_{n-2})+2(a_{n-4}+b_{n-4}+a_{n-6}+b_{n-6}+\ldots)=3u_{n-2}+2(u_{n-4}+u_{n-6}+\ldots) \quad (3)$$

Từ (3) ta có:

$$u_{n+2}=3u_n+2(u_{n-2}+u_{n-4}+\ldots)=3u_n+2u_{n-2}+u_n-3u_{n-2}=4u_n-u_{n-2}$$
$$\Rightarrow u_{n+2}=4u_n-u_{n-2}$$

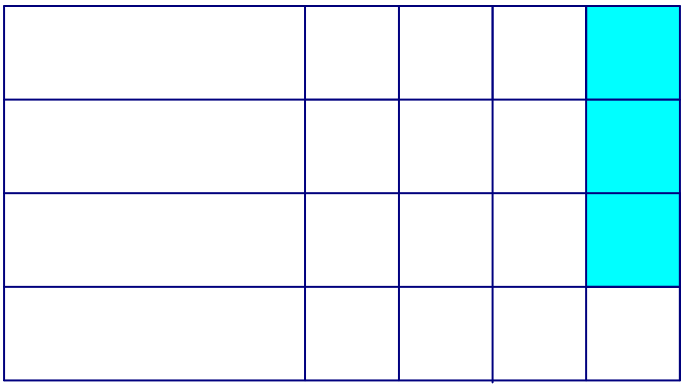
Do đó ta được dãy (u_n) được xác định như sau: $u_0 = 1, u_2 = 3$, $u_{n+2} = 4u_n - u_{n-2}$. Từ đó tính được $u_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(\sqrt{3}-1\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$.

Bài 3.1.6. Hỏi có bao nhiêu cách lát kín bảng $4\times n$ bởi các quân 1×3 hoặc 3×1?

Lời giải

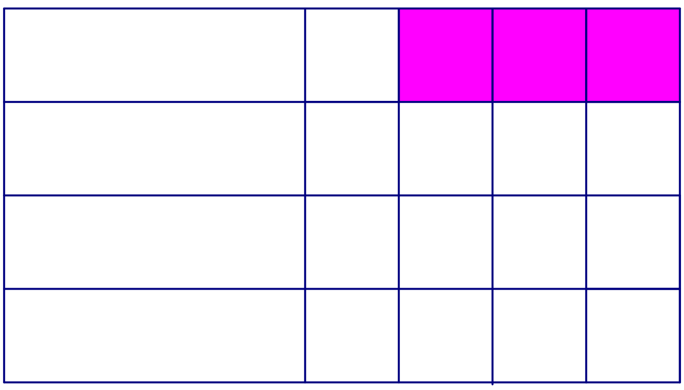
Kí hiệu u_n là số cách lát thỏa mãn yêu cầu bài toán vào bảng $4\times n$. Khi bảng $4\times n$ bởi các quân 1×3 hoặc 3×1 nên n phải là số chia hết cho 3.

Kí hiệu a_n là số cách lát bảng $4\times n$ bởi các quân 1×3 hoặc 3×1, trong đó ba ô đầu (tính từ trên xuống) của cột cuối của bảng $4\times n$ được lát bởi quân 3×1 như hình vẽ 1.



hình 1

Kí hiệu b_n là số cách lát bảng $4\times n$ bởi các quân 1×3 hoặc 3×1, trong đó ba ô cuối (tính từ trái sang phải) của dòng 1 của bảng $4\times n$ được lát bởi quân 1×3 như hình vẽ 2.



hình 2

Tương tự như **bài 3.1.5** ta được các đẳng thức sau:

$$a_n = a_{n-3} + b_{n-3} + 2\left(a_{n-6} + b_{n-6}\right) + a_{n-9} + b_{n-9} + \ldots (1)$$

$$b_n = 2\left(a_{n-3} + b_{n-3}\right) + a_{n-6} + b_{n-6} + a_{n-9} + b_{n-9} + ...(2)$$

Cộng từng vế các đẳng thức (1) và (2) ta được

$a_n + b_n = 3\left(a_{n-3} + b_{n-3}\right) + 3\left(a_{n-6} + b_{n-6}\right) + 2\left(a_{n-9} + b_{n-9} + ...\right)$

$\Rightarrow u_n = 3u_{n-3} + 3u_{n-6} + 2\left(u_{n-9} + u_{n-12} + ...\right)$

$\Rightarrow u_{n+3} = 3u_n + 3u_{n-3} + 2\left(u_{n-6} + u_{n-9} + ...\right)$

$\Rightarrow u_{n+3} = 3u_n + 3u_{n-3} + 2u_{n-6} + u_n - 3u_{n-3} - 3u_{n-6} = 4u_n - u_{n-6}$.

Do đó ta được dãy (u_n) được xác định như sau:

$$u_0 = 1,\ u_3 = 3,\ u_n = 4u_{n-3} - u_{n-9}$$

3.2 Sử dụng phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi trong các bài toán khác

Bài 3.2.1. Cho số nguyên dương n và tập hợp $X = \{1,2,3,...,n\}$. Tìm số tập con (kể cả tập rỗng) của X mà không chứa hai số nguyên dương liên tiếp.

Lời giải

Kí hiệu u_n là số các tập con của tập $X = \{1,2,3,...,n\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán và S_n là tập hợp các tập con của tập $X = \{1,2,3,...,n\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với mỗi tập hợp $A \in S_n$ gồm hai loại: loại 1 gồm các tập chứa phần tử n, loại 2 gồm các tập không chứa phần tử n.

+) Nếu tập A thuộc loại 1 thì tập A không chứa phần tử $n-1$. Nếu loại bỏ phần tử n thì ta được một tập thuộc S_{n-2} suy ra trong trường hợp này có u_{n-2} tập A thuộc loại 1.

+) Nếu tập A thuộc loại 2 thì tập A thuộc S_{n-1} suy ra trong trường hợp này có u_{n-1} tập A thuộc loại 2.

Từ hai trường hợp trên ta được dãy (u_n) được xác định như sau:

$$u_1 = 2,\ u_2 = 3,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ n = 3,4,...$$

Từ cách xác định dãy (u_n) ta được: $u_n = F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$.

Bài 3.2.2. Cho số nguyên dương n và tập hợp $X = \{1,2,3,...,n\}$. Tìm số tập con của X mà ***chứa đúng*** hai số nguyên dương liên tiếp.

Lời giải

Kí hiệu u_n là số các tập con của tập $X=\{1,2,3,...,n\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán và S_n là tập hợp các tập con của tập $X=\{1,2,3,...,n\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với mỗi tập hợp $A\in S_n$ gồm ba loại: loại 1 gồm các tập không chứa phần tử n, loại 2 gồm các tập không chứa phần tử $n-1$, loại 3 gồm các tập không chứa $\{n,n-1\}$.

+) Nếu tập A thuộc loại 1 thì tập A thuộc S_{n-1} suy ra trong trường hợp này có u_{n-1} tập A thuộc loại 1.

+) Nếu tập A thuộc loại 2 thì tập A thuộc S_{n-2} suy ra trong trường hợp này có u_{n-2} tập A thuộc loại 2.

+) Nếu tập A thuộc loại 3 thì khi loại bỏ hai phần tử $n, n-1$ ta được một tập hợp con của tập $\{1,2,3,...,n-2\}$ và không chứa hai phần tử liên tiếp suy ra theo **bài 3.2.1** số tập A trong trường hợp này là F_n.

Từ ba trường hợp sau ta được:

$$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}+F_n$$

Ta có $F_n=u_n-u_{n-1}-u_{n-2}$, kết hợp với

$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \Rightarrow u_{n+2}-u_{n+1}-u_n=u_{n+1}-u_n-u_{n-1}+u_n-u_{n-1}-u_{n-2}$

$\Rightarrow u_{n+2}=2u_{n+1}+u_n-2u_{n-1}-u_{n-2}$.

Do đó ta được dãy (u_n) được xác định như sau:

$$u_1=0,\ u_2=1,\ u_3=2,\ u_4=5,\ u_{n+2}=2u_{n+1}+u_n-2u_{n-1}-u_{n-2}$$

Xét phương trình đặc trưng: $x^4-2x^3-x^2+2x+1=0$.

Nếu $x=0$ không thỏa mãn phương trình suy ra $x\neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho x^2 ta được: $x^2-2x-1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+1=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{x}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó ta có $u_n=(an+b)\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+(cn+d)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$,

kết hợp với $u_1=0,\ u_2=1,\ u_3=2,\ u_4=5$ ta được

$$u_n = \frac{1}{5}\left[2n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - 2n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + (n+1)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

Bài 3.2.3 (Bài toán chia kẹo Euler). Cho các số nguyên dương m, n.

a) Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$?

b) Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$, trong đó $n \ge m$?

Lời giải

a) Kí hiệu $u(m,n)$ là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$. Khi đó ta có: $x_1 + x_2 + ... + x_{m-1} = n - x_m$, từ đó suy ra

$$u(m,n) = \sum_{x_m=0}^{n} u(m-1, n-x_m) = \sum_{k=0}^{n} u(m-1,k) \quad (1)$$

Từ (1) ta suy ra

$$u(m,n+1) = \sum_{x_m=0}^{n+1} u(m-1, n+1-x_m) = \sum_{k=0}^{n+1} u(m-1,k) = u(m-1,n+1) + \sum_{k=0}^{n} u(m-1,k)$$

$$= u(m-1,n+1) + u(m-1,n)$$

$$\Rightarrow u(m,n+1) = u(m-1,n+1) + u(m-1,n) \quad (2)$$

Đẳng thức (2) có dạng giống đẳng thức Pascal: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ nên ta dự đoán được: $u(m,n) = C_{m+n-1}^{m-1}$. Tiếp theo từ (2) ta chứng minh $u(m,n) = C_{m+n-1}^{m-1}$ dễ dàng bằng phương pháp quy nạp theo n.

Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$ bằng C_{m+n-1}^{m-1}

b) Đặt $x_i = y_i + 1,\ i = 1,2,...,m \Rightarrow y_i \ge 0,\ \forall i = 1,2,...,m$. Khi đó ta có phương trình:

$$y_1 + 1 + y_2 + 1 + ... + y_m + 1 = n \Rightarrow y_1 + y_2 + ... + y_m = n - m$$

Theo kết quả phần a thì số nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$ bằng C_{n-1}^{m-1}.

Bài 3.2.4 (IMO 1987). Cho số nguyên dương n và số tự nhiên $k \in \{0,1,2,...,n\}$. Gọi $p_n(k)$ là số hoán vị có đúng k điểm cố định của tập $\{1,2,...,n\}$. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k) = n!$

Lời giải

Ta sẽ tìm mối liên hệ giữa $p_n(k)$ và $p_{n-1}(k-1)$. Thật vậy, xét cặp (f,i) kí hiệu cặp gồm hoán vị f bất kì của n phần tử của tập $\{1,2,...,n\}$ với k điểm cố định và i là điểm tùy ý trong k điểm cố định. Ta sẽ đếm số cặp (f,i) theo hai cách như sau:

Cách 1. Đếm theo f. Số cách chọn hoán vị f của n phần tử của tập $\{1,2,...,n\}$ với k điểm cố định bằng $p_n(k)$, với mỗi hoán vị f ta có k cách chọn điểm i suy ra số cách chọn cặp (f,i) bằng $k.p_n(k)$.

Cách 2. Đếm theo i. Số cách chọn điểm i bằng n, với mỗi điểm cố định i, số hoán vị f bằng $p_{n-1}(k-1)$ suy ra số cách chọn cặp (f,i) bằng $n.p_{n-1}(k-1)$.

Từ hai cách đếm trên ta được đẳng thức: $k.p_n(k)=n.p_{n-1}(k-1)$.

Trở lại bài toán ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k)=\sum_{k=1}^{n} k.p_n(k)=\sum_{k=1}^{n} n.p_{n-1}(k-1)=\sum_{k=0}^{n-1} n.p_{n-1}(k)=n\left(\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1}(k)\right)=n.(n-1)=n!$$

Nhận xét. Từ đẳng thức $k.p_n(k)=n.p_{n-1}(k-1)$ ta có thể chứng minh các đẳng thức sau:

3.2.4.1. $\sum_{k=0}^{n} k^2.p_n(k)=2.n!$

3.2.4.2. $\sum_{k=0}^{n} (k-1)^2.p_n(k)=n!$

3.2.4.3. $p_n(k)=C_n^k P_{n-k}(0)$.

3.2.5 (IMO 2011). Cho số nguyên dương k. Cho một cái cân bằng gồm hai đĩa và n quả cân với trọng lượng là $2^0,2^1,2^2,...,2^{n-1}$. Ta muốn đặt lên cái cân một trong n quả cân, lần lượt từng quả một, theo cách để đảm bảo đĩa cân bên phải không bao giờ nặng hơn đĩa cân bên trái. Ở mỗi bước ta chọn một trong các quả cân chưa được đặt lên cân, rồi đặt nó hoặc vào đĩa bên trái, hoặc vào đĩa bên phải, cho đến khi tất cả các quả cân đều đã được đặt lên cân. Xác định xem, có bao nhiêu cách khác nhau để thực hiện mục đích đề ra?

Lời giải

Xét $n\geq 2$, kí hiệu $f(n)$ là số cách khác nhau để thực hiện mục đích đề ra. Chú ý đĩa cân bên trái luôn lớn hơn đĩa cân bên phải ít nhất là 1 nên nếu ở một bước nào đó ta đặt quả cân nặng là 1 lên một trong hai đĩa thì đĩa cân bên phải không bao giờ nặng hơn đĩa cân bên trái. Do đó ta chỉ xét các quả cân: $2^1,2^2,...,2^{n-1}$.

Nếu ta chia trọng lượng mỗi quả cân trên cho 2 thì kết quả không thay đổi nên có $f(n-1)$ cách đặt thỏa mãn yêu cầu bài toán. Bây giờ xét các khả năng đặt quả cân 1.

+) Nếu đặt quả cân này trong lượt đặt đầu tiên thì ta chỉ có thể đặt vào đĩa bên trái.

+) Nếu đặt quả cân này trong các lượt đặt tiếp theo thì ta có thể đặt vào bên trái hay phải đều được. Do đó có $2n-2$ cách đặt trong trường hợp này.

Do đó ta được liên hệ sau: $f(n)=(2n-1)f(n-1)=1.3.5...(2n-1)$.

3.2.6 (VMO 2015). Cho số nguyên dương k. Tìm số các số tự nhiên n không vượt quá 10^k thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) n chia hết cho 3;

ii) các chữ số trong biểu diễn thập phân của n thuộc tập hợp $\{2,0,1,5\}$.

Lời giải

Do 10^k không chia hết cho 3 nên số n thỏa mãn yêu cầu bài toán sẽ có tối đa k chữ số. Giả sử $n=\overline{a_1a_2...a_k}$, trong đó $a_1,a_2,...,a_k\in\{2,0,1,5\}$, ta nhận thấy các số $n=\overline{a_1a_2...a_k}$ sẽ lấy hết các số từ 0 đến 10^k-1 và các chữ số thuộc tập hợp $\{2,0,1,5\}$. Số $n=\overline{a_1a_2...a_k}$ chia hết cho 3 khi và chỉ khi $a_1+a_2+...+a_k$ chia hết cho 3.

A_m là tập hợp các số nguyên dương có m chữ số, các chữ số thuộc tập $\{2,0,1,5\}$ và có tổng các chữ số chia hết cho 3, đặt $x_m=|A_m|$.

B_m là tập hợp các số nguyên dương có m chữ số, các chữ số thuộc tập $\{2,0,1,5\}$ và có tổng các chữ số chia cho 3 và dư 1, đặt $y_m=|B_m|$.

C_m là tập hợp các số nguyên dương có m chữ số, các chữ số thuộc tập $\{2,0,1,5\}$ và có tổng các chữ số chia cho 3 và dư 2, đặt $z_m=|C_m|$.

Xét số có $m+1$ chữ số $\overline{a_1a_2...a_{m+1}},\ a_1,\ a_2,\ ...,a_{m+1}\in\{2,0,1,5\}$.

TH1. Nếu $\overline{a_1a_2...a_{m+1}}\in A_{m+1}$ thì $a_1+a_2+...+a_{m+1}\equiv 0(\bmod 3)$. Ta xét các khả năng sau:

+) $a_{m+1}=0\Rightarrow a_1+a_2+...+a_m\equiv 0(\bmod 3)\Rightarrow \overline{a_1a_2...a_m}\in A_m$ nên trong trường hợp này số các số thỏa mãn là x_m.

+) $a_{m+1}\in\{2,5\}\Rightarrow a_1+a_2+...+a_m\equiv 1(\bmod 3)\Rightarrow \overline{a_1a_2...a_m}\in B_m$ nên trong trường hợp này số các số thỏa mãn là $2y_m$.

+) $a_{m+1}=1 \Rightarrow a_1+a_2+...+a_m \equiv 2\left(\bmod 3\right) \Rightarrow \overline{a_1a_2...a_m} \in C_m$ nên trong trường hợp này số các số thỏa mãn là z_m.

Từ ba khả năng trên ta được đẳng thức $x_{m+1}=x_m+2y_m+z_m$.

TH2. Nếu $\overline{a_1a_2...a_{m+1}} \in B_{m+1}$ thì $a_1+a_2+...+a_{m+1} \equiv 1\left(\bmod 3\right)$. Ta xét các khả năng sau:

+) $a_{m+1}=0 \Rightarrow a_1+a_2+...+a_m \equiv 1\left(\bmod 3\right) \Rightarrow \overline{a_1a_2...a_m} \in B_m$ nên trong trường hợp này số các số thỏa mãn là y_m.

+) $a_{m+1} \in \{2,5\} \Rightarrow a_1+a_2+...+a_m \equiv 2\left(\bmod 3\right) \Rightarrow \overline{a_1a_2...a_m} \in C_m$ nên trong trường hợp này số các số thỏa mãn là $2z_m$.

+) $a_{m+1}=1 \Rightarrow a_1+a_2+...+a_m \equiv 0\left(\bmod 3\right) \Rightarrow \overline{a_1a_2...a_m} \in A_m$ nên trong trường hợp này số các số thỏa mãn là x_m.

Từ ba khả năng trên ta được đẳng thức $x_{m+1}=x_m+y_m+2z_m$.

TH3. Nếu $\overline{a_1a_2...a_{m+1}} \in C_{m+1}$ thì $a_1+a_2+...+a_{m+1} \equiv 2\left(\bmod 3\right)$. Ta xét các khả năng sau:

+) $a_{m+1}=0 \Rightarrow a_1+a_2+...+a_m \equiv 2\left(\bmod 3\right) \Rightarrow \overline{a_1a_2...a_m} \in C_m$ nên trong trường hợp này số các số thỏa mãn là z_m.

+) $a_{m+1} \in \{2,5\} \Rightarrow a_1+a_2+...+a_m \equiv 0\left(\bmod 3\right) \Rightarrow \overline{a_1a_2...a_m} \in A_m$ nên trong trường hợp này số các số thỏa mãn là $2x_m$.

+) $a_{m+1}=1 \Rightarrow a_1+a_2+...+a_m \equiv 1\left(\bmod 3\right) \Rightarrow \overline{a_1a_2...a_m} \in B_m$ nên trong trường hợp này số các số thỏa mãn là y_m.

Từ ba khả năng trên ta được đẳng thức $x_{m+1}=2x_m+y_m+z_m$.

Như vậy ta được hệ sau:

$$\begin{cases} x_{m+1}=x_m+2y_m+z_m \\ y_{m+1}=x_m+y_m+2z_m \\ z_{m+1}=2x_m+y_m+z_m \\ x_1=1, y_2=1, z_2=2 \end{cases}$$

Ta có $x_{m+1}+y_{m+1}+z_{m+1}=4\left(x_m+y_m+z_m\right)=...=4^m\left(x_1+y_1+z_1\right)=4^{m+1}$, kết hợp với hệ trên ta được

$$\begin{cases} x_{m+1}=x_m+2y_m+z_m=4^m+y_m \\ y_{m+1}=x_m+y_m+2z_m=4^m+z_m \quad (1) \\ z_{m+1}=2x_m+y_m+z_m=4^m+x_m \end{cases}$$

Từ (1) ta được $x_k = 4^{k-1} + y_{k-1} = 4^{k-1} + 4^{k-2} + z_{k-2} = 4^{k-1} + 4^{k-2} + 4^{k-3} + x_{k-3}$ (2).

Từ (2) ta xét ba khả năng sau:

+) Nếu $k \equiv 0 \pmod 3$ thì

$$x_k = 4^{k-1} + 4^{k-2} + 4^{k-3} + ... + 4^5 + 4^4 + 4^3 + x_3$$
$$= 4^{k-1} + 4^{k-2} + 4^{k-3} + ... + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 4^2 + 4 + z_1 = 4^{k-1} + 4^{k-2} + 4^{k-3} + ... + 4^2 + 4 + 1 + 1$$
$$= \frac{4^k - 1}{3} + 1 = \frac{4^k + 2}{3} \Rightarrow x_k = \frac{4^k + 2}{3}.$$

+) Nếu $k \equiv 1 \pmod 3$ thì

$$x_k = 4^{k-1} + 4^{k-2} + 4^{k-3} + ... + 4^3 + 4^2 + 4^1 + x_1$$
$$= 4^{k-1} + 4^{k-2} + 4^{k-3} + ... + 4^2 + 4 + 1 = \frac{4^k - 1}{3}$$

+) Nếu $k \equiv 2 \pmod 3$ thì

$$x_k = 4^{k-1} + 4^{k-2} + 4^{k-3} + ... + 4^4 + 4^3 + 4^2 + x_2$$
$$= 4^{k-1} + 4^{k-2} + 4^{k-3} + ... + 4^2 + 4 + y_1 = 4^{k-1} + 4^{k-2} + 4^{k-3} + ... + 4^2 + 4 + 1 = \frac{4^k - 1}{3}.$$

Vậy số các số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng $\frac{4^k + 2}{3}$ nếu $k \equiv 0 \pmod 3$ và $\frac{4^k - 1}{3}$ nếu $k \not\equiv 0 \pmod 3$.

3.2.7 (Bulgaria 1995). Cho số nguyên $n \geq 2$. Tìm số hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ của tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$ sao cho tồn tại duy nhất một chỉ số $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ thỏa mãn điều kiện $a_i > a_{i+1}$?

Lời giải

Gọi u_n là số hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ của tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$ sao cho tồn tại duy nhất một chỉ số $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ thỏa mãn điều kiện $a_i > a_{i+1}$ và A_n là tập hợp các hoán vị như vậy. Xét hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A_n$, ta xét các trường hợp sau:

+) Nếu $a_n = n$ thì nếu loại bỏ a_n trong hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ta được một hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \in A_{n-1}$ suy ra số hoán vị thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp này là u_{n-1}.

+) Nếu $a_n < n$ thì tồn tại $i \in \{1,2,...,n-1\}$ sao cho $a_i = n \Rightarrow a_i > a_{i+1} \Rightarrow \Rightarrow a_1 < a_2 < ... < a_{i-1}, a_{i+1} < a_{i+2} < ... < a_n$. Do đó số hoán vị trong trường hợp này bằng $\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} - 1 = 2^{n-1} - 1$.

Từ hai trường hợp trên ta được hệ thức: $u_n = u_{n-1} + 2^{n-1} - 1$ (1).

Dễ thấy $u_2 = 1$ và kết hợp với (1) ta được $u_n = 2^n - n - 1$.

Bài 3.2.8. Cho số nguyên dương n. Tìm số các đa thức $P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, bậc n thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a) Các hệ số của $P_n(x)$ thuộc tập $\{-1;0;1\}$.

b) Tồn tại đa thức $Q(x)$ cũng có các hệ số thuộc tập $\{-1;0;1\}$ sao cho $P_n(x) = (x-1)Q(x)$.

Lời giải

Giả sử $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, trong đó $a_i \in \{-1,0,1\}$, $\forall i = 0,1,...,n$.

Giả sử $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_{n-1}x^{n-1}$, trong đó $b_i \in \{-1,0,1\}$, $\forall i = 0,1,...,n-1$.

Theo giả thiết b của bài toán ta có:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = (x-1)\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_{n-1}x^{n-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = -b_0 + (b_0 - b_1)x + (b_1 - b_2)x^2 + ... + (b_{n-2} - b_{n-1})x^{n-1} + b_{n-1}x^n$$

Đồng nhất hệ số ta được:

$$\begin{cases} a_0 = -b_0 \\ a_1 = b_0 - b_1 \\ a_2 = b_1 - b_2 \\ ... \\ a_{n-1} = b_{n-2} - b_{n-1} \\ a_n = b_{n-1} \end{cases}$$

Do đó mỗi đa thức $P_n(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán tương ứng với một bộ $(b_0, b_1, ..., b_{n-1})$ thỏa mãn điều kiện $b_i \in \{-1,0,1\}$, $\forall i = 0,1,...,n-1$ và $|b_i - b_{i+1}| \le 1$, $\forall i = 0,1,...,n-2$.

Kí hiệu u_n số bộ $(b_0, b_1, ..., b_{n-1})$ thỏa mãn điều kiện $b_i \in \{-1,0,1\}$, $\forall i = 0,1,...,n-1$ và $|b_i - b_{i+1}| \le 1$, $\forall i = 0,1,...,n-2$.

A_n là tập hợp các bộ $(b_0, b_1, ..., b_{n-1})$ thỏa mãn điều kiện $b_i \in \{-1, 0, 1\}$, $\forall i = 0, 1, ..., n-1$ và $|b_i - b_{i+1}| \le 1,\ \forall i = 0, 1, ..., n-2$ và $b_{n-1} = -1$, đặt $x_n = |A_n|$.

B_n là tập hợp các bộ $(b_0, b_1, ..., b_{n-1})$ thỏa mãn điều kiện $b_i \in \{-1, 0, 1\}$, $\forall i = 0, 1, ..., n-1$ và $|b_i - b_{i+1}| \le 1,\ \forall i = 0, 1, ..., n-2$ và $b_{n-1} = 0$, đặt $y_n = |B_n|$.

C_n là tập hợp các bộ $(b_0, b_1, ..., b_{n-1})$ thỏa mãn điều kiện $b_i \in \{-1, 0, 1\}$, $\forall i = 0, 1, ..., n-1$ và $|b_i - b_{i+1}| \le 1,\ \forall i = 0, 1, ..., n-2$ và $b_{n-1} = 1$, đặt $z_n = |C_n|$.

Xét bộ $(b_0, b_1, ..., b_n) \in A_{n+1} \Rightarrow b_n = -1$.

Do đó $b_n = -1 \Rightarrow |b_{n-1} - b_n| \le 1 \Rightarrow |b_{n-1} + 1| \le 1 \Rightarrow b_{n-1} \in \{-1; 0\} \Rightarrow$ bộ số $(b_0, b_1, ..., b_{n-1}) \in A_n$ hoặc $(b_0, b_1, ..., b_{n-1}) \in B_n$ suy ra số bộ $(b_0, b_1, ..., b_n)$ trong trường hợp này bằng $x_n + y_n \Rightarrow x_{n+1} = x_n + y_n$.

Xét bộ $(b_0, b_1, ..., b_n) \in A_{n+1} \Rightarrow b_n = 0$. Do đó $b_n = 0 \Rightarrow |b_{n-1}| \le 1 \Rightarrow b_{n-1} \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow$ bộ số $(b_0, b_1, ..., b_{n-1}) \in A_n$ hoặc $(b_0, b_1, ..., b_{n-1}) \in B_n$ hoặc $(b_0, b_1, ..., b_{n-1}) \in C_n$ suy ra số bộ $(b_0, b_1, ..., b_n)$ trong trường hợp này bằng $x_n + y_n + z_n \Rightarrow y_{n+1} = x_n + y_n + z_n = u_n$.

Xét bộ $(b_0, b_1, ..., b_n) \in A_{n+1} \Rightarrow b_n = 1$. Do đó $b_n = 1 \Rightarrow |b_{n-1} - 1| \le 1 \Rightarrow b_{n-1} \in \{0, 1\} \Rightarrow$ bộ số $(b_0, b_1, ..., b_{n-1}) \in B_n$ hoặc $(b_0, b_1, ..., b_{n-1}) \in C_n$ suy ra số bộ $(b_0, b_1, ..., b_n)$ trong trường hợp này bằng $y_n + z_n \Rightarrow z_{n+1} = y_n + z_n$.

Ta có $u_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = x_n + y_n + u_n + y_n + z_n = 2u_n + y_n = 2u_n + u_{n-1}$. Từ đó ta được:

$$u_1 = 3,\ u_2 = 7,\ u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1},\ n > 1$$

Từ liên hệ trên ta được: $u_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}$.

Bài 3.2.9 (Romania 2000). Cho số nguyên dương $n > 2$. Tìm số hàm số $f : \{1, 2, 3, ..., n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và thỏa mãn tính chất

$$|f(k+1) - f(k)| \ge 3 \text{ với mọi } k \in \{1, 2, ..., n-1\}.$$

Lời giải

Nếu $f(n) = 3 \Rightarrow |f(n) - f(n-1)| \ge 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3 - f(n-1) \ge 3 \\ 3 - f(n-1) \le -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(n-1) \le 0 \\ f(n-1) \ge 6 \end{array}\right.$ (không thỏa mãn) suy ra $f(n) \ne 3$.

Kí hiệu A_n, B_n, C_n, D_n là số hàm $f:\{1,2,3,...,n\} \to \{1,2,3,4,5\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán và $f(n)$ tương ứng bằng $1,2,4,5$. Đặt $a_n = |A_n|, b_n = |B_n|, c_n = |C_n|, d_n = |D_n|$ và $u_n = a_n + b_n + c_n + d_n$.

+) Xét $f \in A_{n+1}$, ta có $f(n+1) = 1 \Rightarrow |f(n+1) - f(n)| \ge 3 \Rightarrow |1 - f(n)| \ge 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - f(n) \ge 3 \\ 1 - f(n) \le -3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(n) \le -2 \\ f(n) \ge 4 \end{array}\right. \Rightarrow f(n) \in \{4,5\}$. Do đó $a_{n+1} = c_n + d_n$.

+) Xét $f \in B_{n+1}$, ta có

$f(n+1) = 2 \Rightarrow |f(n+1) - f(n)| \ge 3 \Rightarrow |2 - f(n)| \ge 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - f(n) \ge 3 \\ 2 - f(n) \le -3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(n) \le -1 \\ f(n) \ge 5 \end{array}\right. \Rightarrow f(n) = 5$. Do đó $b_{n+1} = d_n$.

+) Xét $f \in C_{n+1}$, ta có

$f(n+1) = 4 \Rightarrow |f(n+1) - f(n)| \ge 3 \Rightarrow |4 - f(n)| \ge 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4 - f(n) \ge 3 \\ 4 - f(n) \le -3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(n) \le 1 \\ f(n) \ge 7 \end{array}\right. \Rightarrow f(n) = 1$. Do đó $c_{n+1} = a_n$.

+) Xét $f \in D_{n+1}$, ta có

$f(n+1) = 5 \Rightarrow |f(n+1) - f(n)| \ge 3 \Rightarrow |5 - f(n)| \ge 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5 - f(n) \ge 3 \\ 5 - f(n) \le -3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(n) \le 2 \\ f(n) \ge 8 \end{array}\right. \Rightarrow f(n) \in \{1,2\}$. Do đó $d_{n+1} = a_n + b_n$.

Ta có $a_{n+1} + d_{n+1} = a_n + b_n + c_n + d_n = u_n$, $b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + d_n = u_{n-1}$ suy ra

$$u_n = a_n + b_n + c_n + d_n = (a_n + d_n) + (b_n + c_n) = u_{n-1} + u_{n-2} \Rightarrow u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ n > 2.$$

Do đó ta được dãy số (u_n) thỏa mãn $u_3 = 10,\ u_4 = 16,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ n > 2$.

Từ hệ thức truy hồi trên ta được:

$$u_n = 2F_{n+2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

Bài 3.2.10 (Canada 1996). Cho số nguyên dương $n>1$. Gọi u_n là số hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ của tập hợp $\{1,2,3,...,n\}$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ |a_{i+1} - a_i| \le 2,\ \forall i = 1,2,...,n-1 \end{cases}$$

Tìm số dư của u_{1996} khi chia cho 3.

Lời giải

Kí hiệu A_n là tập hợp các hoán vị của tập $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán của tập hợp $\{1,2,3,...,n\}$ và $u_n = |A_n|$. Ta có $|a_2 - a_1| \le 2 \Leftrightarrow |a_2 - 1| \le 2 \Leftrightarrow -1 \le a_2 \le 3$, kết hợp với $a_1 \ne a_2 \Rightarrow a_2 \in \{2,3\}$.

TH1. Nếu $a_2 = 2$ thì ta đặt $b_i = a_i - 1,\ i = 2,3,...,n$. Khi đó ta có:

$$b_2 = 1,\ |b_{i+1} - b_i| = |(a_{i+1} - 1) - (a_i - 1)| = |a_{i+1} - a_i| \le 2,\ \forall i = 2,...,n-1$$

Suy ra $(b_2, b_3, ..., b_n)$ là một hoán vị của tập $\{1,2,...,n-1\} \Rightarrow (b_2, b_3, ..., b_n) \in A_{n-1} \Rightarrow$ số hoán vị $(1,2,a_3,...,a_n)$ bằng u_{n-1}.

TH2. Nếu $a_2 = 3$ thì tồn tại $i \in \{3,4,...,n\}$ sao cho $a_i = 2$. Giả sử $3 < i < n$ suy ra

$$\begin{cases} |a_{i-1} - a_i| \le 2 \\ |a_{i+1} - a_i| \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a_{i-1} - 2| \le 2 \\ |a_{i+1} - 2| \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i-1} \in \{2,4\} \\ a_{i+1} \in \{2,4\} \end{cases} \Rightarrow a_{i-1} = a_{i+1} = 4$$

Vô lí, suy ra $a_3 = 2$ hoặc $a_n = 2$.

+) $a_3 = 2 \Rightarrow a_4 = 4$, ta đặt $c_i = a_i - 3,\ i = 4,5,...,n$. Khi đó ta có:

$$c_4 = 1,\ |c_{i+1} - c_i| = |(a_{i+1} - 1) - (a_i - 1)| = |a_{i+1} - a_i| \le 2,\ \forall i = 4,...,n-1$$

Suy ra $(c_4, c_5, ..., c_n)$ là một hoán vị của tập $\{1,2,...,n-3\} \Rightarrow (c_4, c_5, ..., c_n) \in A_{n-3} \Rightarrow$ số hoán vị $(1,3,2,a_4,...,a_n)$ bằng u_{n-3}.

+) $a_n = 2 \Rightarrow |a_{n-1} - a_n| \le 2 \Rightarrow |a_{n-1} - 2| \le 2 \Rightarrow a_{n-1} = 4$, tiếp theo ta có:

$|a_3 - a_2| \le 2 \Rightarrow |a_3 - 3| \le 2 \Rightarrow a_3 \in \{1,2,3,4,5\} \Rightarrow a_3 = 5 \Rightarrow |a_{n-2} - a_{n-1}| \le 2 \Rightarrow |a_{n-2} - 4| \le 2$

$a_{n-2} \le 6 \Rightarrow a_{n-2} = 6$, cứ tiếp tục như vậy ta được $a_4 = 2 \Rightarrow a_4 = 7, a_{n-3} = 8, ...$

Trong trường hợp $a_n = 2$ ta được một hoán vị.

Từ các trường hợp trên ta được đẳng thức

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-3} + 1,\ n > 3$$

Từ giả thiết ta có $u_1 = u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 4$. Do đó ta được dãy số (u_n) xác định như sau: $u_1 = u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 4$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-3} + 1,\ n > 3$.

Ta có $u_n = u_{n-1} + u_{n-3} + 1 = u_{n-2} + u_{n-4} + u_{n-3} + 2 = u_{n-3} + u_{n-5} + u_{n-4} + u_{n-3} + 3$

$\equiv u_{n-5} + u_{n-4} - u_{n-3} \pmod 3$

$\equiv u_{n-5} + u_{n-4} - (u_{n-4} + u_{n-6} + 1) \pmod 3$

$\equiv u_{n-5} - u_{n-6} - 1 \pmod 3$

$\equiv u_{n-6} + u_{n-8} + 1 - u_{n-6} - 1 \pmod 3$

$\equiv u_{n-8} \pmod 3$

Suy ra $u_n \equiv u_{n-8} \pmod 3$ (1).

Từ (1) ta có $u_{1996} = u_{249.8+4} \equiv u_4 \equiv 1 \pmod 3$. Do đó u_{1996} chia cho 3 dư 1.

Bài 3.2.11 (IMO Shortlist 2008). Cho số nguyên dương n. Tìm số hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ của tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$ thỏa mãn tính chất :

$$2(a_1 + a_2 + ... + a_k) \text{ chia hết cho } k \text{ với mọi } k = 1, 2, ..., n.$$

Lời giải

Kí hiệu A_n là tập hợp các hoán vị của tập $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán của tập hợp $\{1, 2, 3, ..., n\}$ và $u_n = |A_n|$. Với $n = 1, 2, 3$ ta được $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 6$.

Ta xét $n > 3$ và xét hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ của tập hợp $\{1, 2, 3, ..., n\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Xét với $k = n-1$, ta có:

$2(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}) = 2[(1 + 2 + ... + n) - a_n] = n(n+1) - 2a_n = (n+2)(n-1) + 2 - 2a_n$.

Từ đẳng thức trên suy ra $2a_n - 2 \vdots n-1$, kết hợp với

$$0 \le 2a_n - 2 \le 2n - 2 \Rightarrow 2a_n - 2 \in \{0, n-1, 2n-2\}$$

TH1. $2a_n - 2 = n - 1 \Leftrightarrow a_n = \dfrac{n+1}{2}$.

Tiếp theo xét với $k = n-2$, ta có:

$$2\left(a_1+a_2+...+a_{n-2}\right)=2\left[\left(1+2+...+n\right)-a_n-a_{n-1}\right]=n\left(n+1\right)-2a_n-2a_{n-1}$$
$$=n^2+n-n-1-2a_{n-1}=\left(n-2\right)\left(n+2\right)+3-2a_{n-1}$$

Từ đẳng thức trên suy ra $2a_{n-1}-3 \vdots n-2$, kết hợp với

$$1\le 2a_n-3\le 2n-3\Rightarrow 2a_n-3\in\left\{0,n-2,2n-4\right\}$$

Do $2a_{n-1}-3$ là một số lẻ suy ra $2a_{n-1}-3=n-2\Leftrightarrow a_{n-1}=\dfrac{n+1}{2}=a_n$ vô lí. Do đó trường hợp $2a_n-2=n-1$ không xảy ra.

TH2. $a_n=n\Rightarrow$ $\left(a_1,a_2,...,a_{n-1}\right)$ là một hoán vị của tập $\left\{1,2,...,n-1\right\}$ và $\left(a_1,a_2,...,a_{n-1}\right)\in A_{n-1}$ suy ra số hoán vị trong trường hợp này bằng u_{n-1}.

TH3. $a_n=1$, ta đặt $b_i=a_i-1,\ i=2,3,...,n$. Mặt khác ta có

$$2\left(b_1+b_2+...+b_k\right)=2\left(a_1-1+a_2-1+...+a_k-1\right)=2\left(a_1+a_2+...+a_k\right)-2k$$

Suy ra $2\left(b_1+b_2+...+b_k\right)$ chia hết cho k với mọi $k=1,2,...,n-1$.

Do đó bộ $\left(b_1,b_2,...,b_{n-1}\right)\in A_{n-1}$ suy ra số bộ $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ thỏa mãn trong trường hợp này bằng u_{n-1}.

Từ ba trường hợp trên ta được $u_n=2u_{n-1}$.

Từ đẳng thức này ta có $u_n=3.2^{n-2},\ n>3$.

Bài 3.2.11 (VMO 2003). Với mỗi số nguyên $n>1$, kí hiệu s_n là số các hoán vị $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ của n số nguyên dương đầu tiên, mà mỗi hoán vị $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ đều có tính chất : $1\le\left|a_k-k\right|\le 2$ với mọi $k=1,2,...,n$. Chứng minh rằng

$$1,75.s_{n-1}<s_n<2.s_{n-1} \text{ với mọi } n>6.$$

Lời giải

Kí hiệu A_n là tập hợp các hoán vị $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ của n số nguyên dương đầu tiên, mà mỗi hoán vị $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ đều có tính chất : $1\le\left|a_k-k\right|\le 2$ với mọi $k=1,2,...,n$.

Xét hoán vị $\left(a_1,a_2,...,a_{n+1}\right)\in A_{n+1}$, theo giả thiết $1\le\left|a_n-n\right|\le 2\Rightarrow a_n\in\left\{n-2,n-1,n+1\right\}$ và $1\le\left|a_{n-1}-\left(n-1\right)\right|\le 2\Rightarrow a_{n-1}\in\left\{n-2,n,n-3,n+1\right\}$, $a_{n+1}\ne n+1$ suy ra $a_n=n+1$ hoặc $a_{n-1}=n+1$. Ta xét các trường hợp sau :

TH1: $a_{n-1}=n+1$, ta có $1\le\left|a_n-n\right|\le 2\Rightarrow a_n\in\left\{n-2,n-1\right\}$. Ta xét hai khả năng sau :

+) $a_n = n-1 \Rightarrow a_{n+1} = n \Rightarrow (a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) = (a_1, a_2, ..., a_{n-2}, n+1, n-1, n)$ suy ra $(a_1, a_2, ..., a_{n-2}) \in A_{n-2}$, trong trường hợp này số hoán vị thỏa mãn là s_{n-2} (1).

+) $a_n = n-2 \Rightarrow a_{n+1} \in \{n-1, n\}$. Khi đó ta có hai trường hợp tiếp theo:

- Nếu $a_{n+1} = n-1 \Rightarrow a_{n-2} = n$ suy ra

$(a_1, a_2, ..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) = (a_1, a_2, ..., a_{n-3}, n, n+1, n-2, n-1)$, trong trường hợp này số hoán vị thỏa mãn là s_{n-3} (2).

- Nếu $a_{n+1} = n$ suy ra $(a_1, a_2, ..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) = (a_1, a_2, ..., a_{n-3}, a_{n-2}, n+1, n-2, n)$, với $\{a_1, a_2, ..., a_{n-2}\} = \{1, 2, ..., n\} \setminus \{n-2, n\}$ (3).

TH2 : $a_n = n+1$, ta có $1 \le |a_{n+1} - n - 1| \le 2 \Rightarrow a_{n+1} \in \{n-1, n\}$. Ta xét hai khả năng sau :

+) $a_{n+1} = n \Rightarrow (a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) = (a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, n+1, n)$ suy ra số hoán vị trong trường hợp này bằng s_{n-1} (4).

+) $a_{n+1} = n-1 \Rightarrow (a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) = (a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, n+1, n-1)$, trong đó $\{a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1}\} = \{1, 2, ..., n\} \setminus \{n-1\}$ (5).

Từ các kết quả (1), (2), (3), (4) và (5) ta được:

$s_{n+1} = s_n + s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} - s_{n-4}$, $n > 4$ (6).

$$s_{n+1} - 2s_n = -s_n + s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} - s_{n-4}$$
$$= -(s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-4} - s_{n-5}) + s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} - s_{n-4} = s_{n-5} - 2s_{n-4}$$

$\Rightarrow s_n - 2s_{n-1} = s_{n-6} - 2s_{n-5}$, $n > 5$ (7).

Ta chứng minh bằng quy nạp được $s_n > s_{n-1} > 0$, $n > 1$ (8).

Từ (7) và (8) ta có $s_n - 2s_{n-1} = s_{n-6} - s_{n-5} - s_{n-5} < -s_{n-5} < 0$, $n > 6 \Rightarrow s_n < 2s_{n-1}$, $n > 6$ (9).

Từ (6), (8) và (9) ta được : $s_n > s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} > s_{n-1} + \frac{1}{2}s_{n-1} + \frac{1}{4}s_{n-1} = 1{,}75s_{n-1}$, $n > 8$ (10)

Tính trực tiếp ta được $s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = 2, s_4 = 4, s_5 = 6, s_6 = 13, s_7 = 24, s_8 = 45$ ta kiểm tra được $s_7 > 1{,}75s_6$, $s_8 > 1{,}75s_7$ (11).

Từ (9), (10) và (11) ta được $1{,}75.s_{n-1} < s_n < 2.s_{n-1}$ với mọi $n > 6$.

Bài 3.2.12. Cho số nguyên dương n. Giả sử có ba loại đoạn thẳng: màu đỏ, màu xanh và màu trắng. Các đoạn thẳng màu đỏ và màu xanh có độ dài một đơn vị; đoạn thẳng màu trắng có độ dài hai đơn vị. Ta cần ghép các đoạn thẳng đó lại thành một cán cờ có độ dài n có phân biệt điểm đầu và cuối. Có bao nhiêu cách thiết kế?

Lời giải

Ta giả sử số cách thiết kết đối với cán cờ độ dài n đơn vị bằng u_n. Khi đó có ba loại cán cờ:

Loại 1: đoạn thẳng cuối là màu đỏ. Khi đó nếu ta bỏ đoạn cuối đi thì ta được một cán cờ có độ dài $n-1$. Nên số cách thiết kế trong trường hợp này là u_{n-1}.

Loại 2: đoạn thẳng cuối là màu xanh. Khi đó nếu ta bỏ đoạn cuối đi thì ta được một cán cờ có độ dài $n-1$. Nên số cách thiết kế trong trường hợp này là u_{n-1}.

Loại 3. Đoạn thẳng cuối là màu trắng. Khi đó nếu ta bỏ đoạn cuối đi thì ta được một cán cờ có độ dài $n-2$. Nên số cách thiết kế trong trường hợp này là u_{n-2}.

Từ đó ta có $u_1 = 2, u_2 = 5,\ u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2},\ n > 2$.

Nhận xét. Từ bài này ta suy ra một loạt các bài toán sau:

3.2.12.1. Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu nghiệm nguyên âm, nguyên dương của phương trình sau:

$$x + 2y + 3z + 3t = n$$

3.2.12.2. Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$x + y + 2z = n$$

3.2.12.3. Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x + y + 2z = n$$

3.2.12.4. Cho số nguyên dương n. Hãy tính tổng sau:

$$\sum_{\substack{i+j+2k=n \\ i,j,k\geq 0}} \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}.$$

3.3 Bài tập áp dụng

Bài 3.3.1. Cho số nguyên dương $n > 1$. Tìm số cách lát bảng $2\times n$ bởi các quân 2×2 hoặc các quân L-trominoes ?

Bài 3.3.2. Cho số nguyên dương $n > 1$. Tìm số cách lát bảng $2\times n$ bởi các quân 1×1 hoặc các quân 1×2 hoặc 2×1?

Bài 3.3.3. Cho số nguyên dương $n > 1$. Tìm số cách lát bảng $4\times n$ bởi các quân 1×2 hoặc 2×1?

Bài 3.3.4. Cho số nguyên dương $n>1$. Tìm số cách lát khối hộp $2\times 2\times n$ bởi các quân $1\times 1\times 2$ hoặc $1\times 2\times 1$ hoặc $2\times 1\times 1$?

Bài 3.3.5 (IMO Shortlist 1996). Cho bảng ô vuông $n\times n\ (n>1)$. Hỏi có bao nhiêu cách đánh dấu các ô vuông trong bảng sao cho trong mỗi hình vuông 2×2 có đúng hai ô vuông được đánh dấu (Hai cách đánh dấu được coi là khác nhau nếu có một ô vuông nào đó mà trong cách này thì được đánh dấu còn trong cách kia thì không).

Bài 3.3.6 (Colombia 1997). Cho hai số nguyên dương $m,n>1$. Xét bảng ô vuông $m\times n$ được tô các viền bởi ba màu. Ta tô mỗi đoạn của đường viền bởi một trong số ba màu sao cho mỗi hình vuông đơn vị có hai cạnh tô một màu và hai cạnh kia tô bởi hai màu còn lại. Có bao nhiêu cách tô màu có thể?

Bài 3.3.7 (Turkey TST 2006). Cho số nguyên dương $n>1$. Tìm số cách chia bảng ô vuông $n\times 2$ thành các hình chữ nhật có độ dài nguyên không vượt quá n (Hai cách chia tạo bởi nhau bằng phép quay 180^0 được coi là hai cách chia phân biệt).

Bài 3.3.8 (Canada 2009). Cho số nguyên dương $n>1$ và hình chữ nhật kích thước $3\times n$. Một quân xe xuất phát từ ô góc trên bên trái và đi đến ô góc dưới bên trái sao cho đường đi của nó tạo thành một đường gấp khúc không tự cắt. Hỏi có bao nhiêu cách đi như thế?

Bài 3.3.8 (IMO 1979). Giả sử A và E là hai đỉnh đối diện của một bát giác đều. Một con ếch bắt đầu nhảy từ đỉnh A. Tại mỗi đỉnh của bát giác (trừ đỉnh E), mỗi cú nhảy con ếch chỉ có thể nhảy tới hai đỉnh kề của đỉnh đó. Khi con ếch nhảy vào đỉnh E nó sẽ bị kẹt vĩnh viễn ở đó. Cho trước số nguyên dương n. Hỏi với n cú nhảy, có bao nhiêu cách để con ếch nhảy vào đỉnh E.

Bài 3.3.9. Có n người xếp thành một hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra k người sao cho trong số đó không có hai người nào đứng liên tiếp nhau trong hàng?

Bài 3.3.10. Cho số nguyên dương n và tập $X=\{1,2,...,n\}$. Hỏi có bao nhiêu cách chia tập X thành ba tập con khác rỗng sao cho trong mỗi tập không có hai phần tử liên tiếp? Nếu chia tập X thành bốn tập sao cho trong mỗi tập không có hai phần tử liên tiếp thì có bao nhiêu cách chia?

Bài 3.3.11 (APMO 1998). Giả sử F_k là tập hợp tất cả các bộ $(A_1,A_2,...,A_k)$, trong đó $A_i\left(i=\overline{1,k}\right)$ là một tập con của tập $\{1,2,...,n\}$ ($A_1,A_2,...,A_k$ có thể trùng nhau). Hãy tính $S_n=\sum\limits_{(A_1,A_2,...,A_k)}|A_1\cup A_2\cup...\cup A_k|$ và $T_n=\sum\limits_{(A_1,A_2,...,A_k)}|A_1\cap A_2\cap...\cap A_k|$.

Bài 3.3.12. Xét tập $X=\{1,2,...,n\}$, $n\ge 4$. Hỏi có bao nhiêu tập con A của tập X thỏa mãn với mọi $a,b\in A$ thì $|a-b|$ không thuộc tập $\{1,3\}$.

Bài 3.3.13 (VMO 2009). Cho n là một số nguyên dương. Xét tập hợp $X=\{1,2,...,n\}$. Hãy xác định số tập con T của S sao cho không có hai phần tử a,b nào của T mà $a,b\in\{1,n\}$.

Bài 3.3.14 (Tiệp Khắc 1973). Có bao nhiêu cặp tập hợp con không giao nhau của tập hợp gồm n phần tử?

Bài 3.3.15. Cho đa giác lồi có n đỉnh và có đúng m màu. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu các đỉnh của đa giác sao cho hai đỉnh kề nhau thì được tô màu khác nhau?

Bài 3.3.16. Cho đa giác đều n đỉnh $A_1A_2...A_n$ và có k màu khác nhau $k\ge 3$. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu các miền tam giác $OA_1A_2, OA_2A_3,...,OA_nA_1$ sao cho hai miền kề nhau đều được tô màu khác nhau?

Bài 3.3.17. Cho n là một số nguyên dương. Hỏi từ tập hợp $X=\{3,4,5,6\}$ ta có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số có n chữ số và chia hết cho 3.

Bài 3.3.18 (Romania 2003). Cho n là một số nguyên dương. Hỏi từ tập hợp $X=\{2,3,7,9\}$ ta có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số có n chữ số và chia hết cho 3.

Bài 3.3.19. Tìm các số nguyên dương n thỏa mãn các điều kiện:

i) n có 1000 chữ số
ii) Tất cả các chữ số của n là lẻ;
iii) Hiệu của hai số liên tiếp bất kì của n luôn bằng 2.

Bài 3.3.20. Tìm số bộ nguyên $(a_1,a_2,...,a_n)$ $(n>1)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} |a_i|\le 1,\ \forall i=1,2,...,n \\ |a_i-a_{i+1}|\le 1,\ \forall i=1,2,...,n-1 \end{cases}$$

Bài 3.3.21. Tìm số các đa thức $P_n(x)$ bậc n chẵn thỏa mãn các điều kiện:

i) Các hệ số của $P_n(x)$ thuộc tập $\{-1,0,1\}$;
ii) Tồn tại đa thức $Q(x)$ cũng có các hệ số thuộc tập $\{-1,0,1\}$ sao cho: $P_n(x)=(x^2-1)Q(x)$

Bài 3.3.22. Cho trước số nguyên dương n. Xét tất cả các tổng

$$S=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n;x_i,y_i\in\{0,1\},\forall i=\overline{1,n}$$

Gọi S_n là số tổng lẻ, P_n là số tổng chẵn. Chứng minh rằng:

$$\frac{S_n}{P_n} = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$$

Bài 3.3.23 (Bài toán tháp Hà Nội). Tương truyền rằng tại một ngôi tháp ở Hà Nội có một tấm thẻ đế bằng đồng trên đó có đặt ba chiếc cọc bằng kim cương. Lúc khai thiên lập địa, trên cọc số 1, Phật tổ Như Lai đã xếp 64 chiếc đĩa bằng vàng có đường kính khác nhau sao cho các đĩa có đường kính lớn hơn xếp ở dưới, các đĩa ở phía trên cao càng nhỏ dần. Các nhà sư được yêu cầu chuyển tất cả các đĩa ở cọc số 1 sang cọc số 2 với quy tắc sau:

- Mỗi lần chỉ được chuyển đi một chiếc đĩa.
- Trong quá trình di chuyển không được đặt đĩa lớn lên trên đĩa nhỏ (do đó cần thiết phải có thêm chiếc cọc trung gian thức ba). Giả sử mỗi lần chuyển một chiếc đĩa mất một giây. Hỏi các nhà sư cần ít nhất là bao nhiêu năm để chuyển tất cả các đĩa ở cọc số 1 sang cọc số 2?

Bài 3.3.24. Gọi C_n là số các hoán vị f của $\{1,2,...,n\}$ thỏa mãn $f(i) \geq i-1, \forall i = 1,2,...,n-1$; E_n là số các hoán vị f của $\{1,2,...,n\}$ thỏa mãn $f(i) \leq i+1, \forall i = 1,2,...,n$. Chứng minh rằng $C_n = 2C_{n-1}$ và $E_n = C_n$.

Bài 3.3.25. Kí hiệu $t(n), n \geq 3$ là số bộ số phân biệt (a,b,c) không có thứ tự, không nhất thiết phân biệt sao cho $a,b,c \in \mathbb{N}^*$ và là ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng n. Chứng minh rằng

$$t(2n-1) - t(2n) = \left[\frac{n}{6}\right] \text{ hoặc } \left[\frac{n}{6}\right] + 1$$

Bài 3.3.26. Một hình tròn được chia thành 6 hình quạt bằng nhau, trong mỗi hình quạt đặt một quân cờ. Mỗi lần cho phép chuyển một quân cờ ở 1 hình quạt sang 1 trong 2 hình quạt bên cạnh. Chứng minh rằng không thể dồn các quân cờ vào một hình quạt sau 2006 lần thực hiện.

Bài 3.3.27. Giả sử $A_1, A_2, ..., A_n$ theo thứ tự là các điểm trên cùng một đường thẳng. Người ta tô màu các điểm đó bằng 5 màu X, D, T, V, C, mỗi điểm tô một màu sao cho trong hai điểm $A_i, A_{i+1}, i = 1,2,...,n-1,$ luôn hoặc là cùng màu hoặc là 1 trong 2 điểm được tô màu X. Hỏi có bao nhiêu cách tô như vậy?

Bài 3.3.28. Kí hiệu $f(n)$ là số hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ của tập $\{1,2,...,n\}$ thỏa mãn:

i) $a_1 = 1$

ii) $|a_i - a_{i+1}| \leq 2, \forall i = 1,2,...,n-1$.

Khi nào $f(n)$ chia hết cho 3?

Bài 3.3.29 (IMO ShortList 1987). Hỏi có bao nhiêu số có n chữ số từ tập $\{0,1,2,3,4\}$ sao cho bất kì hai chữ số đứng cạnh nhau trong các số đó cũng hơn kém nhau 1 đơn vị?

Bài 3.3.30. Xét $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ với $x_i \in \{0,1,2\}$. Gọi a_n là số các dãy như vậy mà số phần tử 1 trong mỗi dãy là bội của 3. Tính a_n?

Bài 3.3.31. Tìm số các dãy $\{x_1, x_2, ..., x_{2015}\}$ với $x_i \in \{1,2,3\}, i = 1,2,...,2015$ và thỏa mãn điều kiện: $x_1 = x_{2015}, i = 1,2,...,2014.$

Bài 3.3.32 (Romania 1998). Gọi A_n là tập hợp các chữ số có độ dài bằng n được lập từ các chữ cái a,b,c sao cho không có hai phần tử liên tiếp cùng bằng a hoặc cùng bằng b. Gọi B_n là tập hợp các chữ có độ dài bằng n, được lập thành từ các chữ cái a,b,c mà không có ba phần tử liên tiếp nào đôi một phân biệt. Chứng minh rằng $|B_n| = 3.|A_n|$

Bài 3.3.33 (St.Petersburg 1995). Trên đường tròn cho 999 điểm. Có bao nhiêu cách đánh cho mỗi điểm bởi các chữ cái A, B và C sao cho trên cung nằm giữa hai điểm được viết cùng chữ cái, có số chẵn các chữ cái khác nhau từ hai chữ cái đó.

Bài 3.3.34 (IMO Longlist 1992). Cho a_n là ước số lớn nhất của n mà không chia hết cho 3. Xét dãy số $s_0 = 0, s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Đặt A_n là số các tổng $s_k \left(0 \le k \le 3^n, k \in \mathbb{N}\right)$ chia hết cho 3. Chứng minh hệ thức

$$A_n = 3^{n-1} + 2.3^{\frac{n}{2}-1}.\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right), \forall n \in \mathbb{N}$$

Bài 3.3.35. Tìm số tập con của tập hợp n số nguyên dương đầu tiên sao cho mỗi tập có đúng 3 phần tử và tổng các phần tử chia hết cho 3.

Bài 3.3.36 (USA 1990). Cho n là số nguyên dương. Tìm số các số nguyên dương mà trong biểu diễn hệ cơ số n của nó có các chữ số phân biệt và thỏa mãn tính chất: trừ chữ số đầu tiên bên trái, mọi chữ số đều khác các chứ số nào đó bên trái là ± 1?

Bài 3.3.37 (VMO 1977). Trong mặt phẳng cho n đường tròn. Hai đường tròn bất kì cắt nhau tại hai điểm và không có điểm nào nằm trên ba đường tròn. Hỏi có bao nhiêu miền mặt phẳng bị chia bởi các đường tròn nói trên?

Chương 4. PHƯƠNG PHÁP ĐẾM BẰNG HAI CÁCH

4.1. Bài tập

Bài 4.1.1. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

b) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{n-k}^0$

Lời giải

a) Xét bộ số $(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i \in \{0;1\}$. Khi đó số bộ số $(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i \in \{0;1\}$ là 2^n. Trong các bộ $(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i \in \{0;1\}$, số bộ chứa $k(k = 0,1,\ldots,n)$ số không bằng C_n^k. Từ đó ta có đẳng thức: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

b) Giả sử ta có tập hợp X chứa n phần tử. Số các tập con có k phần tử bằng C_n^k. Trong tập con k phần tử này thì số tập con có chứa $r, 1 \le r \le k$ phần tử cho trước bằng C_{n-r}^{k-r}.

Bài 4.1.2. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) (Công thức Pascal) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

b) $C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \ldots + C_m^k C_n^0 = C_{m+n}^k$

c) $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$

Lời giải

a) Giả sử tập A có n phần tử và phần tử $x \in A$. Khi ta lấy tập con gồm k phần tử của tập A thì sẽ gồm có hai loại:
Loại 1: Tập con này không chứa x suy ra số các tập con loại này là C_{n-1}^k.
Loại 2: Tập con này chứa x suy ra số tập con loại này là C_{n-1}^{k-1}.
Do đó số các tập con gồm k phần tử của tập A bằng $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

b) Giả sử một lớp học có m học sinh nam và n học sinh nữ. Số cách chọn ra k học sinh từ lớp học là C_{m+n}^{k}. Mặt khác trong k học sinh này gồm có i học sinh nam và $k-i$ học sinh nữ suy ra số cách chọn ra k học sinh từ lớp học là $C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + ... + C_m^k C_n^0$. Vậy ta có đẳng thức cần chứng minh.

c) Suy trực tiếp từ câu b.

Bài 4.1.3. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}, 1 \le k \le n$

b) $C_n^k C_k^l = C_n^l C_{n-l}^{k-l}, 1 \le l \le k \le n$

c) $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$

d) $\sum_{k=0}^{n} k\left(C_n^k\right)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}$

Lời giải

a) Cho tập hợp *A* gồm *n* phần tử và *M* là một tập con gồm *k* phần tử của tập hợp *A*, gọi $x \in M$. Ta sẽ đếm cặp *(x,M)* bằng hai cách như sau:
Cách 1: Ta đếm theo *x*, có *n* cách chọn *x* và mỗi cách chọn *x* ta có C_{n-1}^{k-1} cách chọn tập con *M* có *k* phần tử trong đó có phần tử *x*. Suy ra số cách chọn cặp *(x,M)* bằng nC_{n-1}^{k-1}.
Cách 2: Ta đếm theo *M*, có C_n^k tập gồm *k* phần tử và mỗi tập *M* ta có *k* cách chọn phần tử *x* suy ra số cách chọn cặp *(x,M)* bằng nC_n^k.
Từ đó suy ra đẳng thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}, 1 \le k \le n$.

b) Giả sử tập *A* có *n* phần tử và $L \subset K$ là hai tập con của *A* sao cho $|K| = k, |L| = l$. Bây giờ ta sẽ đếm số bộ (K, L) bằng hai cách.
Cách 1: Ta đếm theo tập *K*, số cách chọn tập *K* bằng C_n^k và số cách chọn tập *L* bằng C_k^l suy ra số bộ (K, L) bằng $C_n^k C_k^l$.
Cách 2: Ta đếm theo tập *L*, số cách chọn tập *L* bằng C_n^l, với mỗi tập *L* vừa chọn để chọn được tập *K* ta phải chọn tiếp một tập có $k-l$ phần tử từ tập $n-l$ phần tử suy ra số cách chọn tập *K* bằng C_{n-l}^{k-l}. Do đó số bộ (K, L) bằng $C_n^l C_{n-l}^{k-l}$.

Bài 4.1.4. Gọi $P_n(k)$ là số hoán vị của tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$ có đúng *k* điểm cố định. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = n!$

b) $kP_n(k) = nP_{n-1}(k-1)$

c) $\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = n!$

d) $\sum_{k=0}^{n} k^2 P_n(k) = 2.n!$

e) $\sum_{k=0}^{n} (k-1)^2 P_n(k) = n!$

f) $(k-1)P_n(k) = C_n^k P_{n-k}(0)$.

Lời giải

a) Số hoán vị của tập hợp $\{1,2,...,n\}$ bằng $n!$. Mỗi hoán vị của tập hợp này sẽ xẩy ra một trong các trường hợp sau: hoán vị đó có k điểm cố định, trong đó $k = 0,1,2,...,n$ suy ra số hoán vị sẽ là $\sum_{k=0}^{n} P_n(k)$. Do đó ta có $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = n!$.

b) Gọi f là một hoán vị có *k* điểm cố định và *x* là một trong các điểm cố định. Ta sẽ tính số cặp (x, f) theo hai cách như sau:

Cách 1. Ta đếm theo *x*, số các chọn x bằng *x* và mỗi cách chọn *x* sẽ có $P_{n-1}(k-1)$ hoán vị f suy ra số cách chọn cặp (x, f) bằng $nP_{n-1}(k-1)$.

Cách 2. Ta đếm theo f, số cách chọn f bằng $P_n(k)$ và với mỗi cách chọn f sẽ có k cách chọn x suy ra số cách chọn cặp (x, f) bằng $kP_n(k)$.

Từ đó ta có đẳng thức $kP_n(k) = nP_{n-1}(k-1)$;

c) Theo kết quả phần a và b ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = \sum_{k=1}^{n} nP_{n-1}(k-1) = n\sum_{k=1}^{n} P_{n-1}(k-1) = n!$$

Các phần d) và e) được suy ra từ phần a, b, c.

Bài 4.1.5. Chứng minh đẳng thức sau: $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^i C_{n-2i}^i 2^{n-2i} = C_{2n}^n$.

Lời giải

Chia *2n* số thành *n* cặp. Ta thực hiện lấy ra một tập con gồm *n* số như sau:

Bước 1: Từ *n* cặp lấy ra $n-2i$ cặp, mỗi cặp lấy ra một số suy ra bước 1 có $C_n^{n-2i} 2^{n-2i}$ cách.

Bước 2. Lấy ra *i* cặp từ *2i* cặp còn lại, với $i = 0,1,...,\left[\frac{n}{2}\right]$ suy ra số cách lấy ra *n* phần tử là $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^i C_{n-2i}^i 2^{n-2i} = C_{2n}^n$.

Bài 4.1.6 (IMO 1998). Trong một cuộc thi, có a thí sinh và b giám khảo, với b là số nguyên dương lẻ và $b \geq 3$. Mỗi giám khảo sẽ đánh giá mỗi thí sinh theo 2 mức "trượt" và "đỗ". Gọi k là số nguyên dương sao cho nếu lấy 2 giám khảo bất kì thì đánh giá của hai vị giám khảo này có kết quả trùng nhau nhiều nhất là cho k thí sinh. Chứng minh rằng: $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Lời giải

Với mỗi thí sinh i, thí sinh này được x_i giám khảo đánh giá "đỗ" và y_i giám khảo đánh giá "trượt". Do có b thí sinh nên ta có: $x_i + y_i = b$. Như vậy số cặp giám khảo đánh giá cùng kết quả của thí sinh i là $C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2 = \frac{x_i^2 - x_i + y_i^2 - y_i}{2} \geq \frac{b^2 - 2b}{4}$. Do b là số lẻ và ≥ 3 nên $C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2 \geq \frac{(b-1)^2}{4}$.

Mặt khác do hai giám khảo bất kì có kết quả trùng nhau nhiều nhất là k thí sinh nên số thí sinh tối đa được hai giám khảo đánh giá trùng kết quả là kC_b^2. Do đó ta có bất đẳng thức sau:

$$kC_b^2 \geq a\frac{(b-1)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Bài 4.1.7. Cho X là một tập hữu hạn với $|X| = n$, và cho $A_1, A_2, ..., A_m \ (m \geq 2)$ là các tập con có ba phần tử của X sao cho $|A_i \cap A_j| \leq 1$ với mọi $i \neq j$. Chứng minh rằng tồn tại một tập A là tập con của X sao cho $|A| \geq \left[\sqrt{2n}\right]$ và A không chứa tập nào trong các tập $A_1, A_2, ..., A_m$.

Lời giải

Gọi B là tập hợp con của X có số phần tử lớn nhất sao cho B không chứa tập nào trong các tập $A_1, A_2, ..., A_m$. Giả sử $|B| = k$, khi đó số phần tử của tập $|X \setminus A| = n - k$. Ta sẽ đếm số phần tử của $|X \setminus A|$ theo cách khác như sau:

Nếu $x \in X \setminus A$ thì $A \cup \{x\}$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán nên tồn tại $i(x) \in \{1, 2, ..., m\}$ sao cho $A_{i(x)} \subset A \cup \{x\}$ suy ra $x \in A_{i(x)}$ và $A_{i(x)} \setminus \{x\} \subset A$. Mặt khác tập $A_{i(x)}$ có số phần tử bằng 3 nên $\left|A_{i(x)} \setminus \{x\}\right| = 2$. Ta thấy với $x, y \in X \setminus A, x \neq y$ nếu $A_{i(x)} \setminus \{x\} = A_{i(y)} \setminus \{y\}$ thì $\left|A_{i(x)} \cap A_{i(y)}\right| = 2$ vô lý, suy ra $A_{i(x)} \setminus \{x\} \neq A_{i(y)} \setminus \{y\}$. Do vậy ta có mỗi phần tử của tập $X \setminus A$ thì tương ứng với một tập con có hai phần tử của A nên ta có: $|A| \leq C_k^2 \Leftrightarrow n - k \leq \frac{k(k-1)}{2} \Leftrightarrow k^2 + k - 2n \geq 0 \Rightarrow k \geq \left[\sqrt{2n}\right]$.

Bài 4.1.8 (APMO 1998). Giả sử *F* là tập hợp tất cả các bộ $(A_1, A_2, ..., A_k)$, trong đó $A_i\,(i = 1, 2, ..., k)$ là một tập hợp con của tập $\{1, 2, ..., n\}$. Kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập A. Hãy tính:

$$\sum_{(A_1, A_2, ..., A_k)\in F} |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k|$$

Lời giải

Cách 1:

Gọi $S_k(i)$ là số bộ $(A_1, A_2, ..., A_k)$ sao cho $i \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$. Khi đó ta có đẳng thức: $S_k = \sum_{k=1}^{n} S_k(i)$. Bây giờ ta tính $S_k(i)$:

Số bộ $(A_1, A_2, ..., A_k)$ là $(2^n)^k$ và trong số này có $(2^{n-1})^k$ bộ $(A_1, A_2, ..., A_k)$ với $i \notin A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$. Do đó $S_k(i) = (2^n)^k - (2^{n-1})^k$.

Vậy $S_k = \sum_{k=1}^{n} S_k(i) = n.2^{(n-1)k}.(2^k - 1)$

Cách 2:

Kí hiệu $S_k = T_n$ ứng với tập có *n* phần tử. Khi đó ta dễ dàng chỉ ra đẳng thức: $T_n = 2^k T_{n-1} + (2^k - 1)2^{k(n-1)}$, sau đó bằng quy nạp ta được $T_n = n(2^k - 1)2^{k(n-1)}$.

Từ bài toán này ta được một loạt bài toán sau:

Bài 4.1.8.1. Tính:

$$S_1 = \sum_{A\in F} |A|$$

Bài 4.1.8.2. Cho $k = 2$. Tính:

a) $S_2 = \sum_{(A_1, A_2)\in F} |A_1 \cup A_2|$

b) $T_2 = \sum_{(A_1, A_2)\in F} |A_1 \cap A_2|$

Bài 4.1.8.3. Tính:

$$\sum_{(A_1, A_2, ..., A_k)\in F} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k|$$

Bài 4.1.8.4. Cho số tự nhiên *n, k*. Gọi *A = {1, 2, 3,...,n}* (tập hợp *n* số nguyên dương đầu tiên), $A_i \subset A$; *i = 1, 2, ... , k*. *F* là tập các bộ $\left(A_1, A_2 ...., A_k\right)$ có thứ tự, *E* là tập các bộ $\left(A_1, A_2 ...., A_k\right)$ không có thứ tự. Hãy tính

1) $S_1 = \sum\limits_{(A_1, A_2, ..., A_k) \in F} \left|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k\right|$

2) $S_2 = \sum\limits_{(A_1, A_2, ..., A_k) \in F} \; \sum\limits_{a \in \left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k\right)} a$

3) $S_3 = \sum\limits_{(A_1, A_2, ..., A_k) \in F} \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{a \in A_i} a$

4) $S_4 = \sum\limits_{(A_1, A_2, ..., A_k) \in E} \left|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k\right|$

5) $S_5 = \sum\limits_{(A_1, A_2, ..., A_k) \in E} \; \sum\limits_{a \in A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k} a$

6) $S_6 = \sum\limits_{(A_1, A_2, ..., A_k) \in E} \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{a \in A_i} a$

Lời giải

+) $S_1 = n(2^k - 1)2^{(n-1)k}$ (là ví dụ 3)

+) $S_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} i S_k(i) = \sum\limits_{i=1}^{n} i 2^{(n-1)k}(2^k - 1) = \dfrac{n(n+1)}{2}(2^k - 1)2^{(n-1)k}$

+) Để tính S_3 thì với mỗi $j \in N$ $(1 \le j \le k)$ ta tìm số bộ $(A_1, A_2, ..., A_k) \in F$ mà $a \in A$, *a* thuộc *j* tập con của bộ nên có $2^{(n-1)k} C_k^j$ bộ. Vậy

$$S_3 = \sum_{a=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} ja\left(2^{(n-1)k} C_k^j\right) = \sum_{a=1}^{n} a 2^{(n-1)k} \sum_{j=1}^{k} j C_k^j$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} 2^{(n-1)k} k 2^{k-1} = n(n+1)k 2^{nk-2}$$

+) Tương tự ta tìm được S_4, S_5, S_6.

Bài 4.1.9 (Nguyên lý Fubini). Cho m,n là hai số nguyên dương và cho hai tập hữu hạn $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ và $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$. Tích trực tiếp của *A* và *B* được xác định như sau: $A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}$. Nếu S là tập con của $A\times B$ và ta xác định các tập như sau: $S(a_i,*)=\{(a_i,b)\in S\},S(*,b_i)=\{(a,b_i)\in S\}$. Khi đó ta có đẳng thức sau:

$$|S|=\sum_{j=1}^{n}\left|S\left(*,b_j\right)\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|S\left(a_i,*\right)\right|$$

Lời giải

Xét hình chữ nhật kích thước $m\times n$ ô vuông đơn vị. Tại ô ở dòng *i*, cột *j* ta đặt số x_{ij} được xác định như sau:

$$x_{ij}=\begin{cases}1 \ khi \left(a_i,b_j\right)\in S\\0 \ khi \left(a_i,b_j\right)\notin S\end{cases}$$

Số lượng số 1 ở hàng thứ *i* bằng $\left|S\left(a_i,*\right)\right|$ suy ra số lượng số 1 trong hình chữ nhật trên là $\sum_{i=1}^{n}\left|S\left(a_i,*\right)\right|$.

Số lượng số 1 ở cột thứ j bằng $\left|S\left(*,b_j\right)\right|$ suy ra số lượng số 1 trong hình chữ nhật trên là $\sum_{j=1}^{n}\left|S\left(*,b_j\right)\right|$.

Từ đó ta có đpcm.

Bài 4.1.10. Cho *n* là một số nguyên dương, và cho $(a_1,a_2,...,a_n)$ là một hoán vị của tập $\{1,2,...,n\}$. Giả sử $1\le k\le n$, đặt

$$F_k=\{a_i|a_i<a_k,i>k\} \text{ và } G_k=\{a_i|a_i>a_k,i<k\}$$

Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^{n}F_k=\sum_{k=1}^{n}G_k$

Lời giải

Đặt $A=B=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Đặt $S=\left\{\left(a_i,b_j\right)|a_i\in A,b_j\in B,a_i>b_j\right\}$. Khi đó ta có: $F_k=S\left(a_k,*\right),G_k=S\left(*,a_k\right)$. Nên theo nguyên lý Fubini ta được:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=1}^{n} G_k$$

4.2. Bài tập áp dụng

Bài 4.2.1 (China 1994). Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} = C_{2n+1}^n, n \in \mathbb{N}^*$.

Ta sẽ giải bài toán tổng quát hơn như sau:

Bài 4.2.2. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^{n} m^k C_n^k \left(C_m^2\right)^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} = C_{mn+1}^n, m, n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 4.2.3 (Ucraina -1996). Gọi *M* là số tất cả các số nguyên dương viết trong hệ thập phân có *2n* chữ số, trong đó có *n* chữ số 1 và *n* chữ số 2. Gọi *N* là số tất cả số nguyên dương viết trong hệ thập phân có *n* chữ số trong đó chỉ có các chữ số 1,2,3,4 và số chữ số 1 bằng số chữ số 2. Chứng minh rằng *M = N*.

Bài 4.2.4. Cho trước các số nguyên dương m, n. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^k 2^{m-k} + \sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^k 2^{n-k} = 2^{m+n+1}$$

Bài 4.2.5. Người ta xếp *n* học sinh nam và *n* học sinh nữ thành một hàng, sau đó tìm cách cắt hàng thành hai khúc sao cho mỗi khúc có số học sinh nam bằng số nữ sinh. Gọi *A* là số trường hợp không thể cắt hàng theo yêu cầu trên, *B* là số trường hợp chỉ có thể cắt hàng theo yêu cầu trên một cách duy nhất. Chứng minh rằng *B = 2A*.

Bài 4.2.6. Cho *X* là một tập hữu hạn với $|X| = n$, và cho $A_1, A_2, ..., A_m \ (m \geq 2)$ là các tập con có $p \ (p \geq 2)$ phần tử của *X* sao cho $|A_i \cap A_j| \leq 1$ với mọi $i \neq j$. Chứng minh rằng tồn tại một tập *A* là tập con của *X* sao cho $n \leq |A| + C_{|A|}^{p-1}$ và *A* không chứa tập nào trong các tập $A_1, A_2, ..., A_m$.

Bài 4.2.7. Cho tập hợp *X* có hữu hạn phần tử. Gọi *F* là họ tất cả các tập con của tập *X*. Kí hiệu $d(x)$ là số các tập thuộc *F* sao cho các tập này đều chứa $x \in X$. Chứng minh rằng :

a) $\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{A \in F} |A|$

b) $\sum_{x \in Y} d(x) = \sum_{A \in F} |Y \cap A|$, với mọi *Y* là tập con của *X*

c) $\sum_{x\in X}\left(d(x)\right)^2=\sum_{A\in F}\sum_{x\in A}d(x)=\sum_{A\in F}\sum_{B\in F}|A\cap B|$

Bài 4.2.8 (Số Turán $T(n,k,l)$). Số Turán $T(n,k,l)$ $(l\le k\le n)$ là số nhỏ nhất của các tập con có phần tử của tập *X* có *n* phần tử sao cho mọi tập con chứa *k* phần tử sẽ chứa ít nhất một tập con *l* phần tử ở trên. Chứng minh rằng $T(n,k,l)\ge\frac{C_n^l}{C_k^l}$

Bài 4.2.9. Giả sử *F* là một họ các tập con gồm *k* phần tử của một tập hợp *X* gồm n phần tử sao cho với mỗi tập con gồm *l* phần tử của *X* sẽ chứa ít nhất một phần tử của *F*. Chứng minh rằng $|F|\ge\frac{C_n^l}{C_k^l}$.

Bài 4.2.10 (Sperner 1928). Cho F là một họ các tập con có k phần tử của tập hợp $\{1,2,...,n\}$. Gọi M là họ các tập con chứa $k-1$ phần tử sao cho mỗi phần tử của M chứa ít nhất một phần tử của F. Chứng minh rằng tập hợp M chứa ít nhất $\frac{k|F|}{n-k+1}$ tập hợp.

Bài 4.2.11 (Định lí Sperner). Cho X là một tập với $|X|=n$. Giả sử $X_1,X_2,...,X_n$ là các tập con của tập X sao cho X_i không là tập con của X_j với $i\ne j$. Khi đó:

$$m\le C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

Phần 3. PHẦN KẾT LUẬN

1. Những kết luận quan trọng nhất về nội dung, ý nghĩa khi thực hiện chuyên đề

Trong chuyên đề "Một số phương pháp đếm" chúng tôi đã đưa ra ứng dụng quan trọng nhất của các phép đếm như sử dụng đa thức và số phức, thiết lập hệ thức truy hồi, đường đi ngắn nhất và quỹ đạo,… và một số ứng dụng khác. Chuyên đề có phân tích khá đầy đủ và chi tiết phương pháp và cách thức áp dụng các phép đếm trên trong chứng minh, đặc biệt trong một số bài sử dụng đa thức và số phức. Chuyên đề này chúng tôi cũng đã cập nhật và tổng hợp những dạng toán mới nhất trong các kì thi Olympiad của các nước, khu vực và quốc tế có sử dụng các phép đếm. Hệ thống các bài tập đưa ra theo thứ tự tăng dần độ khó để người đọc thấy được ứng dụng đặc biệt cũng như hướng tư duy có liên quan đến việc sử dụng các phép đếm trên của bài toán. Trong chuyên đề này có những bài tập tổ hợp nếu không sử dụng các phép đếm trên thì rất khó để hình dung ra hướng giải đồng thời thông qua các phép trên giúp giáo viên định hướng tương đối rõ ràng cách giải cho học sinh. Các bài tập có lời giải là những bài tập đặc trưng nhất cho nhóm bài tập sử dụng các phép đếm trên và đa số trong các bài tập này là các bài tập khó hoặc rất khó (theo ý kiến của tác giả), các bài tập này phù hợp với những buổi dạy tổ hợp cho học sinh đội tuyển dự thi học sinh giỏi quốc gia. Trong phần bài tập áp dụng (không có lời giải) chúng tôi cũng đã chọn lọc từ tất cả các cuộc thi, các bài tập này có thể có những lời giải khác nhau nhưng lời giải dựa theo các phép đếm là đặc sắc nhất và đẹp nhất. Hy vọng rằng chuyên đề "Một số phương pháp đếm" này sẽ góp một phần nhỏ vào quá trình giảng dạy bồi dưỡng đội tuyển phần các phép đếm và rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các đồng nghiệp để chuyên đề được hoàn thiện hơn.

2. Các đề xuất và kiến nghị được đề xuất, rút ra từ chuyên đề

Để giảng dạy có hiệu quả phần các phép đếm nói riêng và phân môn tổ hợp nói chung giáo viên viên cần trang bị cho học sinh những kiến thức nền tảng của tất cả các mảng tổ hợp cũng như các phần liên quan. Đối với học sinh lớp 10 giáo viên cần giảng dạy đầy đủ và chi tiết các chuyên đề trong quyển tài liệu giáo khoa chuyên toán phần tổ hợp, một số cuốn sách tổ hợp của Titu Andreescu, theo chúng tôi đây là một số cuốn sách phù hợp nhất để giảng dạy và học tập tốt phần tổ hợp.

Để giảng dạy hiệu quả nhất phần ứng dụng phần các phép đếm thì giáo viên nên chọn các ví dụ phù hợp nhất và phân tích chi tiết cho các em cách sử dụng các phép đếm và tại sao lại sử dụng các phép đếm đó trong tình huống như vậy. Học sinh thường gặp khó khăn trong các bài toán phải sử dụng đến đường đi ngắn nhất và quỹ đạo, đối với các dạng toán này giáo viên cần hệ thống những dấu hiệu nào thì cần dùng đến đường đi ngắn nhất và quỹ đạo.

KẾT THÚC CHUYÊN ĐỀ

Vấn đề mới/cải tiến chuyên đề đặt ra và giải quyết so với các chuyên đề trước đây (ở trong nhà trường hoặc trong tỉnh hoặc trên toàn quốc):

Chuyên đề này được hình thành trong suốt những năm giảng dạy phần tổ hợp cho các lớp chuyên toán: nắm được điểm mạnh và điểm yếu của học sinh đồng thời xây dựng được hệ thống bài tập theo các cấp độ khác nhau trong từng giai đoạn học tập của học sinh. Tôi có thể khẳng định rằng đây là một chuyên đề kiến khá đầy đủ trong phần ứng dụng các phép đếm đối với việc bồi dưỡng học sinh giỏi dự thi các cấp. Chuyên đề này cũng được kế thừa và phát huy tốt nhất so với các chuyên đề cùng về chủ đề này, đồng thời chuyên đề này cũng đã đưa ra hệ thống bài tập tương đối cập nhật của các kì thi học sinh giỏi trên thế giới và đa số là các bài tập khó và rất hay. Cách giải quyết vấn đề trong chuyên đề này được đưa ra theo phương hướng cũng như yêu cầu đặt ra trong các kì thi học sinh giỏi những năm gần đây.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc Tổ hợp và Toán rời rạc,* NXB Giáo dục, 2008.

[2] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Toán Rời rạc và một số vấn đề liên quan*, Tài liệu bồi dưỡng giáo viên hè 2007, Trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội.

[3] Trần Nam Dũng (chủ biên), *Chuyên đề toán học số 8, 9,* Trường PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

[4] Le Hai Chau - Le Hai Khoi, *Selected Problems of the Vietnamese Maththematical Olympiad (1962 - 2009)*, World Scientific.

[5] Tạp chí *Toán học tuổi trẻ, Crux - Canada, AMM - USA*

[6] Titu Andresscu - Zuming Feng, *A path to combinatorics for underfrduates,* Birkhauser.

[7] Arthur Engel, *Problem - Solving Strategies,* Springer.

[8] Titu Andreescu and Zuming Feng. *102 combinatorial problems from the training of the USA IMO team.*

[9] Phạm Minh Phương. *Một số chuyên đề toán học tổ hợp bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông*. NXB Giáo dục Việt Nam.

[10] Các nguồn tài liệu từ internet

www.mathscope.org; www.mathlinks.org; www.imo.org.yu