CÔNG THỨC NỘI SUY LAGRANGE

Lê Xuân Đại,

Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc

I. CÔNG THỨC NỘI SUY LAGRANGE.

Cho đa thức $P(x)$ có bậc nhỏ hơn $n+1$ và $n+1$ số thực phân biệt $x_i; i=\overline{1,n+1}$. Khi đó $P(x)$ được xác định duy nhất như sau:

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n+1} P(x_i)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (*)$$

Chứng minh. Xét đa thức $Q(x)=P(x)-\sum_{i=1}^{n+1} P(x_i)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$.

Khi đó $\deg Q(x)\le n$ và $Q(x_i)=0$ nên $Q(x)$ có ($n+1$) nghiệm x_i. Do đó $Q(x)\equiv 0$.

Tính duy nhất của $P(x)$ được suy ra ngay từ nhận xét rằng hai đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng n nhận giá trị bằng nhau tại $(n+1)$ điểm thì chúng trùng nhau.

II. ỨNG DỤNG CỦA CÔNG THỨC NỘI SUY LAGRANGE

2.1. Tính giá trị của một đa thức tại một điểm

Công thức Nội suy Lagrange rất hay được sử dụng để tính giá trị của đa thức bậc n tại một điểm nào đó, khi đã biết $n+1$ giá trị tại các điểm khác. Ta bắt đầu bằng ví dụ sau:

Bài toán 1. Cho đa thức $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ có bậc n thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $f(0)=0; f(1)=\frac{1}{2}; f(2)=\frac{2}{3};...; f(n)=\frac{n}{n+1}$. Tính giá trị của $f(n+1)$.

Lời giải. Trước tiên ta thử tiếp cận bài toán theo phương án thông thường và tự nhiên nhất. Giả sử $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Để tìm các hệ số ta phải giải hệ phương trình: $\begin{cases} f(0)=1\\ f(1)=\frac{1}{2}\\ .....\\ f(n)=\frac{n}{n+1}\end{cases}$

Điều này gần như là không thể thực hiện được.

Tiếp theo ta nghĩ đến công thức nội suy Lagrange:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[f(i)\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-j}{i-j}\right]=\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{i+1}\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-j}{i-j}.$$

Do đó $f(n+1)=\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{i+1}\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{n+1-j}{i-j}$. Đến đây có thể nói là ta đã tìm được $f(n+1)$.

Tuy nhiên ta cần tìm ở dạng gọn nhất có thể.

Dễ thấy $\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{n+1-j}{i-j}=\frac{(n+1)!}{(n+1-i)i!(n-i)!}\cdot(-1)^{n-i}$. Từ đó suy ra

$$f(n+1)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(n+1-i)!(i-1)!}\cdot(-1)^{n-i}=(n+1)\sum_{i=1}^{n}C_n^{i-1}\cdot(-1)^{n-i}=(n+1)\sum_{i=0}^{n-1}C_n^{i}\cdot(-1)^{n+1-i}$$

Mặt khác $\sum_{i=0}^{n-1}C_n^{i}\cdot(-1)^{n+1-i}=-\left[\sum_{i=0}^{n}C_n^{i}\cdot(-1)^{n-i}-1\right]=-\left[(1-1)^n-1\right]=1$.

Vậy $f(n+1)=n+1$.

Bài toán 2. Cho đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ có $\deg P(x)=n$ thỏa mãn $P(i)=2^i,\ \forall i=\overline{1,n+1}$.

Tính $P(n+2)$.

Lời giải. Áp dụng công thức nội suy Lagrange với ($n+1$) mốc nội suy $x_i=i$, ta được

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\left[P(i)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right].$$

Do đó

$$\begin{aligned}
P(n+2)&=\sum_{i=1}^{n+1}\left[P(i)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\frac{(n+2)-j}{i-j}\right]=\sum_{i=1}^{n+1}\left[P(i)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\frac{(n+2)-j}{i-j}\right]\\
&=\sum_{i=1}^{n+1}2^i\,\frac{(n+1)!}{(n+2-i)(i-1)!(n+1-i)!(-1)^{n+1-i}}=\sum_{i=1}^{n+1}2^i\,\frac{(n+1)!}{(i-1)!(n+2-i)!}(-1)^{n+1-i}\\
&=-2\sum_{i=1}^{n+1}2^{i-1}\,\frac{(n+1)!}{(i-1)!(n+2-i)!}(-1)^{n+2-i}=-2\sum_{i=1}^{n+1}2^{i-1}C_{n+1}^{i-1}(-1)^{n+1-(i-1)}\\
&=-2\sum_{j=0}^{n}2^j\cdot C_{n+1}^{j}(-1)^{n+1-j}=2\left(2-1\right)^{n+1}+2\cdot2^{n+1}
\end{aligned}$$

Vậy $P(n+2)=2^{n+2}-2$.

Chú ý: Bài toán này cũng có thể được giải bằng các cách khác như sau:

<u>**Cách 2**</u>: Ta chứng minh quy nạp $P(n+2)=2^{n+2}-2$ (1)

Với *n*=1 thì $P(x)=2x$ nên (1) đúng

Giả sử (1) đúng với $n-1$. Xét đa thức $Q(x)=P(x+1)-P(x)$ thì $\deg Q(x)=n-1$.

Ta có $Q(i)=P(i+1)-P(i)=2^{i+1}-2^{i}=2^{i} \quad \forall i=1,n$.

Theo giả thiết quy nạp thì $Q(n+2)=2^{n+1}-2$.

Khi đó $P(n+2)-P(n+1)=2^{n+1}-2$. Từ đó suy ra $P(n+2)=2^{n+2}-2$ (đpcm).

<u>**Cách 3**</u>: Xét $Q(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+...+\frac{x(x-1)(x-2)...(x-n+1)}{n!}$

Khi đó $\deg Q(x)=n$ và $Q(k)=\sum_{i=0}^{k} C_k^i=2^k=P(k) \;\; \forall k=\overline{1,n+1}$

Suy ra $P(x)=Q(x)$. Từ đó tính ra $P(n+2)=2^{n+2}-2$.

Bài toán 3. (*IMO Shorlist 1981*) Cho đa thức $P(x)\in\mathbb{R}\left[x\right]$ có $\deg P(x)=n$ thỏa mãn điều kiện $P(k)=\frac{1}{C_{n+1}^k}, \;\; \forall k=\overline{0,n}$. Tính $P(n+1)$.

Lời giải. Áp dụng công thức nội suy Lagrange với ($n+1$) mốc nội suy $x_k=k$ ta được

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[P(k)\cdot\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-i}{k-i}\right].$$

Suy ra $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{C_{n+1}^k}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-i}{k-i}\right]=\sum_{k=0}^{n}\frac{\prod_{i=0}^{n}(x-i)}{C_{n+1}^k(-1)^{n-k}k!(n-k)!}$

Do đó $P(n+1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n+1)!}\cdot\prod_{i=0}^{n}(n+1-i)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}$

Vậy $P(n+1)=0$ nếu n lẻ và $P(n+1)=1$ nếu n chẵn.

Bài toán 4. Cho đa thức $P(x)\in\mathbb{R}\left[x\right]$ có $\deg P(x)=n$ thỏa mãn $P(k)=\frac{1}{k}, \;\; \forall k=\overline{1,n+1}$.

Tính $P(n+2)$.

Lời giải. Xét đa thức $Q(x) = xP(x) - 1$ thì $\deg Q(x) = n+1$ và $Q(k) = 0,\ \ \forall k = \overline{1, n+1}$.

Do đó $Q(x) = a(x-1)(x-2)...(x-n-1)$.

Mà $Q(0) = -1 \Rightarrow a = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$. Suy ra $Q(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}(x-1)(x-2)...(x-n-1)$

Vậy $P(n+2) = \dfrac{Q(n+2)+1}{n+2} + 1 = \dfrac{1+(-1)^n}{n+2}$.

Bài toán 5. Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ có $\deg P(x) = n$ thỏa mãn $P(k) = \dfrac{k}{k+1},\ \ \forall k = \overline{0, n}$.

Tính $P(n+1)$.

Lời giải bài toán này xin dành cho bạn đọc.

2.2. Tính toán các tổng liên quan đến công thức tổ hợp

Bài toán 6. Cho n số phân biệt $a_1, a_2, ..., a_n$ và đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc $\deg P(x) \le n-2$.

Chứng minh rằng

$$T = \frac{P(a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)...(a_1-a_n)} + ... + \frac{P(a_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)...(a_n-a_{n-1})} = 0.$$

Lời giải. Áp dụng công thức nội suy Lagrange ta được:

$$P(x) = P(a_1)\frac{(x-a_2)(x-a_3)...(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)...(a_1-a_n)} + ... + P(a_n)\frac{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)...(a_n-a_{n-1})}$$

Đồng nhất hệ số của x^{n-1} ở hai vế ta thu được $T = 0$ (đpcm).

Phép chứng minh bài toán đẹp đẽ và đơn giản đến bất ngờ. Tư tưởng chung là sử dụng công thức nội suy Lagrange rồi so sánh hệ số với nhau ta thu được các đẳng thức quan trọng và khó chứng minh các đẳng thức đó bằng một con đường khác.

Bài toán 7. Cho các số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ phân biệt. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\ne k}}^{n}(x_k - x_j)} = \sum_{k=1}^{n} x_k \quad (1)$$

Lời giải. Ta sẽ đi xây dựng một đa thức có bậc không vượt quá n-1 và có khai triển Lagrange tại các điểm x_i giống như vế trái của đẳng thức (1).

Xét đa thức $P(x)=x^n-(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$. Khi đó $\deg P(x)\le n-1$ và $P\left(x_k\right)=x_k^n$ với $k=\overline{1,n}$.

Áp dụng công thức nội suy Lagrange với n mốc nội suy $x_1,x_2,...,x_n$ ta được

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[P(x_k)\cdot\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[x_k^n\cdot\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right].$$

Đồng nhất hệ số của x^{n-1} hai vế ta được $\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^n}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}=\sum_{k=1}^{n}x_k$ (đpcm)

Từ bài toán trên ta cũng suy ra một kết quả thú vị như sau:

Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là các số nguyên dương phân biệt. Khi đó với mọi số nguyên dương k thì số $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}$ là một số nguyên.

<u>Bài toán 8</u>. Cho dãy Fibonaxi $\left(F_n\right)$ và đa thức $f(x)\in\mathbb{R}\left[x\right]$ có bậc 990 thỏa mãn điều kiện $f(k)=F_k,\ \forall k=\overline{992,1982}$. Chứng minh rằng $f(1983)=F_{1983}-1$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $f(k+992)=F_{k+992},\ \forall k=\overline{0,990}$.

Đặt $g(x)=f(x+992)\Rightarrow \deg g(x)=990$ và $g(k)=F_{k+992},\ \forall k=\overline{0,990}$.

Áp dụng công thức nội suy Lagrange với 991 mốc nội suy $x_k=k$ ta được

$$g(x)=\sum_{k=0}^{990}\left[g(k)\cdot\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{990}\frac{x-i}{k-i}\right].$$

Suy ra $f(1983)=g(991)=\sum_{k=0}^{990}g(k)\cdot C_{991}^{k}\cdot(-1)^k=\sum_{k=0}^{990}C_{991}^{k}\cdot F_{k+992}\cdot(-1)^k$.

Ta cần chứng minh $\sum_{k=0}^{990}C_{991}^{k}\cdot F_{k+992}\cdot(-1)^k=F_{1983}-1$ (1)

Chú ý là $F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta};\ \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2};\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (công thức Binet).

Như vậy $\sum_{k=0}^{990} C_{991}^{k} \cdot F_{k+992} \cdot (-1)^k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{990} C_{991}^{k} \cdot \alpha^{k+992} \cdot (-1)^k - \sum_{k=0}^{990} C_{991}^{k} \cdot \beta^{k+992} \cdot (-1)^k\right]$

Ta có

$$\sum_{k=0}^{990} C_{991}^{k} \cdot \alpha^{k+992} \cdot (-1)^k = \alpha^{992} \cdot \sum_{k=0}^{990} C_{991}^{k} \cdot (-\alpha)^k = \alpha^{992}\left[\left(1-\alpha\right)^{991} + \alpha^{991}\right]$$
$$= \alpha^{992}\left[\left(1-\alpha\right)^{991} + \alpha^{991}\right] = \alpha\left(\alpha-\alpha^2\right)^{991} + \alpha^{1983} = -\alpha + \alpha^{1983} \quad (\text{do } \alpha^2 = \alpha + 1)$$

Tương tự $\sum_{k=0}^{990} C_{991}^{k} \cdot \beta^{k+992} \cdot (-1)^k = -\beta + \beta^{1983}$

Vậy $\sum_{k=0}^{990} C_{991}^{k} \cdot F_{k+992} \cdot (-1)^k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\alpha^{1983} - \beta^{1983}\right) - \left(\alpha - \beta\right)\right] = \frac{\alpha^{1983} - \beta^{1983}}{\sqrt{5}} - 1 = F_{1983} - 1$.

Bài toán được chứng minh xong.

Nhận xét: Từ kết quả bài toán trên ta đưa ra được bài toán tổng quát sau:

Bài toán 8.1. Cho dãy Fibonaxi $\left(F_n\right)$ và đa thức $f_n(x) \in \mathbb{R}\left[x\right]$ có bậc n thỏa mãn điều kiện $f_n(n+k) = F_{n+k}, \ \forall k = \overline{2, n+2}$. Chứng minh rằng $f_n(2n+3) = F_{2n+3} - 1$.

Tuy nhiên cũng có thể chứng minh bài toán này bằng phương pháp quy nạp theo n .

Bài toán 9. Cho đa thức $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \in \mathbb{R}\left[x\right]$. Chứng minh rằng với mọi số thực $h \neq 0$ và mọi số thực A ta đều có đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot C_n^k \cdot f\left(A + kh\right) = a_0 \cdot h^n \cdot n!$$

Lời giải. Áp dụng công thức nội suy Lagrange với (n+1) mốc nội suy $x_k = k, \ k = \overline{0, n}$, ta được $f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[f(A+kh).\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x - A - jh}{(k-j)h}\right]$.

So sánh hệ số của x^n ta được:

$$a_0 = \sum_{k=0}^{n} f(A+kh) \cdot \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (k-j)h} = \frac{1}{n!h^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot C_n^k \cdot f\left(A+kh\right).$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét: Bằng cách đặc biệt hóa chọn đa thức $f(x)$ và hằng số A và h ta được những đẳng thức hay, chẳng hạn:

* Nếu chọn $f(x) = x^p \ (p \le n-1); A = 0; h = 1$ ta được: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot k^p = 0$.

* Nếu chọn $f(x) = x^n; A = 0; h = 1$ ta được: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot k^n = 0$.

Tiếp theo ta xét một bài toán ở dạng khó hơn.

<u>Bài toán 10</u>. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot C_n^k \cdot k^{n+1} = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

Lời giải. Xét đa thức $f(x) = x^n$. Áp dụng công thức nội suy Lagrange với ($n+1$) mốc nội suy $x_k = k$, ta được

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n} \frac{x-j}{k-j}. \quad (*)$$

Đồng nhất hệ số của x^n trong (*), ta được:

$$1 = \sum_{k=0}^{n} k^n \cdot \frac{1}{k!(n-k)!(-1)^{n-k}} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{k^n.n!}{k!(n-k)!} \cdot (-1)^{n-k} = n! \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot C_n^k \cdot k^n = n! \quad (1)$$

Đồng nhất hệ số của x^{n-1} trong (*), ta được $0 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k^n}{\prod_{j \ne k} (k-j)} \right) \left(1+2+...+n-k\right)$

Suy ra $\frac{n(n+1)}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{k^n \cdot (-1)^k}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^{n+1} \cdot (-1)^k}{k!(n-k)!} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot C_n^k \cdot k^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot n! = \frac{n(n+1)!}{2}$ (đpcm).

Nhận xét 1: Cũng có thể giải bài toán bằng cách xét một đa thức khác như sau:

Xét đa thức $f(x) = x^n - (x-1)(x-2)...(x-n) \Rightarrow f(k) = k^n \quad \forall k = \overline{1,n}$.

Áp dụng công thức nội suy Lagrange với n mốc nội suy $x_k = k$ và so sánh hệ số của x^{n-1} ta thu được $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} \cdot C_n^k \cdot k^{n+1}}{n!} = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot C_n^k \cdot k^{n+1} = \frac{n(n+1)!}{2}$ (đpcm).

Nhận xét 2: Từ kết quả (1) ta suy ra kết quả tổng quát sau:

Với n nguyên dương và số thực a bất kì ta có:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot C_n^k \cdot (a-k)^n = n!$$

Thật vậy, chỉ cần thay việc xét đa thức $f(x)=x^n$ bởi đa thức $f(x)=(a-x)^n$.

2.3. Chứng minh các bất đẳng thức

Ứng dụng nâng cao và khó nhất của công thức nội suy Lagrange là chứng minh các bất đẳng thức. Ta bắt đầu bằng một bài toán sau.

<u>Bài toán 11</u> (*VMO 1977*). Cho $n+1$ số nguyên đôi một phân biệt $x_0,x_1,...,x_n$. Xét các đa thức $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0 \in \mathbb{R}[x]$. Chứng minh rằng

$$\max_{i=0,n}|P(x_i)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $x_0<x_1<...<x_n$.

Khi đó $x_n-x_0 \geq n;...;x_n-x_{n-1}\geq 1;....;x_k-x_m \geq k-m$.

Áp dụng công thức nội suy Lagrange với ($n+1$) mốc nội suy $x_0,x_1,...,x_n$ ta được:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[P(x_k)\cdot \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right]$$

So sánh hệ số của x^n, ta được $1=\sum_{k=0}^{n}\left[P(x_k)\cdot \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{1}{x_k-x_j}\right]$ (1)

Bây giờ phản chứng rằng $|P(x_i)|<\frac{n!}{2^n},\ \forall i=\overline{0,n}$. Khi đó

$$1\leq \sum_{k=0}^{n}\left[|P(x_k)|\cdot \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{1}{x_k-x_j}\right] < \frac{n!}{2^n}\cdot \sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{1}{|x_k-x_j|}\right)$$

Ta có đánh giá sau

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{1}{|x_k-x_j|}=\left(\frac{1}{|x_k-x_0|}\cdot\frac{1}{|x_k-x_1|}\cdot...\cdot\frac{1}{|x_k-x_{k-1}|}\right)\cdot\left(\frac{1}{|x_k-x_{k+1}|}\cdot...\cdot\frac{1}{|x_k-x_n|}\right)\leq \frac{1}{k!(n-k)!} \quad (2)$$

Do đó $1<\frac{n!}{2^n}\cdot\left[\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!1!}+...+\frac{1}{(n-k)!k!}+...+\frac{1}{0!n!}\right]=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k=1$, mâu thuẫn.

Vậy tồn tại chỉ số i mà $\left|P(x_i)\right|\ge\frac{n!}{2^n}$. Do đó $\underset{i=\overline{0,n}}{\text{Max}}\left|P(x_i)\right|\ge\frac{n!}{2^n}$.

Nhận xét: Mấu chốt của bài toán là từ công thức nội suy Lagrange, ta thiết lập được hệ thức (*) liên quan giữa các giá trị $P(x_i),\ i=\overline{0,n}$. Đánh giá (2) dựa trên tính chất của dãy hiệu các số nguyên phân biệt cũng rất tự nhiên. Ta tiếp tục một bài sử dụng đánh giá tương tự.

Bài toán 12. Cho đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ có $\deg P(x)\le 2n$ thỏa mãn $\left|P(k)\right|\le 1,\ \forall k=\overline{-n,n}$. Chứng minh rằng

$$\left|P(x)\right|\le 4^n,\ \ \forall x\in[-n;n].$$

Lời giải. Theo công thức nội suy Lagrange với $(2n+1)$ mốc nội suy $\pm n;\pm n+1;...;0$, ta được $P(x)=\sum_{k=-n}^{n}\left[P(k)\cdot\prod_{\substack{j=-n\\ j\ne k}}^{n}\frac{x-j}{k-j}\right]$.

Do đó $\left|P(x)\right|\le\sum_{k=-n}^{n}\left[\left|P(k)\right|\cdot\prod_{\substack{j=-n\\ j\ne k}}^{n}\left|\frac{x-j}{k-j}\right|\right]\le\sum_{k=-n}^{n}\left[\prod_{\substack{j=-n\\ j\ne k}}^{n}\left|\frac{x-j}{k-j}\right|\right]$ (1)

Ta sẽ đánh giá $\prod_{\substack{j=-n\\ j\ne k}}^{n}\left|\frac{x-j}{k-j}\right|$ tương tự như đánh giá (2) của bài toán 2

Ta có $\prod_{\substack{j=-n\\ j\ne k}}^{n}\left|x-j\right|\le(2n)!,\ \forall x\in[-n;n]$ và $\prod_{\substack{j=-n\\ j\ne k}}^{n}\left|k-j\right|=(n+k)!(n-k)!$.

Do đó $\prod_{\substack{j=-n\\ j\ne k}}^{n}\left|\frac{x-j}{k-j}\right|\le\frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra với mọi $x\in[-n;n]$ thì

$$\left|P(x)\right|\le\sum_{k=-n}^{n}\frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^k=4^n\ \ \text{(đpcm)}.$$

Bài toán 13. Cho tam thức $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn điều kiện $\left|f(x)\right|\le 1,\ \forall x\in[-1;1]$. Chứng minh rằng với mỗi số $M\ge 1$ thì

$$\left|f(x)\right|\le 2M^2-1,\ \forall x\in[-M;M].$$

Lời giải. Áp dụng công thức nội suy Lagrange với 3 mốc nội suy $-1;0;1$ ta được

$$f(x)=f(1)\cdot\frac{x^2+x}{2}-f(0)\cdot(x^2-1)+f(-1)\cdot\frac{x^2-x}{2}.$$

Do đó với mọi x thì

$$\begin{aligned}\left|f(x)\right|&\le\left|f(1)\right|\cdot\left|\frac{x^2+x}{2}\right|+\left|f(0)\right|\cdot\left|x^2-1\right|+\left|f(-1)\right|\cdot\left|\frac{x^2-x}{2}\right|\\&\le\left|\frac{x^2+x}{2}\right|+\left|\frac{x^2-x}{2}\right|+\left|x^2-1\right|\end{aligned}$$

* Nếu $|x|\le 1$ thì theo giả thiết ta có $\left|f(x)\right|\le 1\le 2M^2-1$.

* Nếu $|x|>1$ thì $\frac{x^2+x}{2}\cdot\frac{x^2-x}{2}=\frac{x^2(x^2-1)}{4}>0$ suy ra $\left|f(x)\right|\le 2x^2-1\le 2M^2-1$.

Trong cả hai trường hợp ta đều có $\left|f(x)\right|\le 2M^2-1,\ \forall x\in[-M;M]$ (đpcm).

Bài toán tương tự: Cho đa thức $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ thỏa mãn điều kiện $\left|f(x)\right|\le 1,\ \forall x\in[-1;1]$. Chứng minh rằng với mỗi số $M\ge 1$ thì

$$\left|f(x)\right|\le\frac{32}{3}M^4-\frac{32}{3}M^2+1,\ \forall x\in[-M;M].$$

Bài toán 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương n sao cho tồn tại đa thức $P(x)$ bậc n hệ số nguyên thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $P(0)=0;P(1)=1$

b) Với mọi m nguyên dương bất kì thì số dư trong phép chia $P(m)$ cho số nguyên tố p (p cho trước) là 0 hoặc 1.

Lời giải. Giả sử đa thức $P(x)$ bậc n thỏa mãn các điều kiện bài toán.

Ta chứng minh $n\ge p-1$ bằng phản chứng.

Thật vậy, giả sử $n\le p-2$. Áp dụng công thức nội suy Lagrange với ($p-1$) mốc nội suy $x_k=k,k=\overline{0,p-2}$ ta được

$$P(x)=\sum_{k=0}^{p-2}\left[P(k)\cdot\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{p-2}\frac{x-i}{k-i}\right].$$

Biến đổi tương tự như các bài toán trên ta được

$$P(p-1)=\sum_{k=0}^{p-2}P(k)\cdot(-1)^{p-k}\cdot C_{p-1}^{k}\quad (1)$$

Do p nguyên tố nên $C_{p-1}^{k}\equiv(-1)^k(\bmod p)\ \forall k=\overline{0,p-2}$

Từ (1) suy ra $P(p-1)\equiv\sum_{k=0}^{p-2}P(k)\cdot(-1)^{p-k}\cdot(-1)^k\equiv\sum_{k=0}^{p-2}P(k)\cdot(-1)^p\equiv-\sum_{k=0}^{p-2}P(k)\ \ (\bmod p)$

Do đó $\sum_{k=0}^{p-1}P(k)\equiv 0\ \ (\bmod p)$ (2)

Chú ý là $P(0)=0;P(1)=1$ và $P(k)\equiv 0;1(\bmod p)\ \forall k=\overline{2,p-1}$ nên (2) không thể xảy ra.

Vậy $n\geq p-1$.

Trong trường hợp $n=p-1$, xét $P(x)=x^{p-1}$. Rõ ràng $P(x)$ thỏa mãn hai điều kiện của bài toán.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n bằng $n=p-1$.

Từ kết quả bài toán trên ta suy ra bài toán sau:

<u>Bài toán 14.1</u>. Cho p là số nguyên tố và đa thức $P(x)$ bậc n hệ số nguyên với $p>n+1$.

Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{p-1}P(k)\equiv 0\ \ (\bmod p)$.

Bài toán 15. Cho $a\geq 3$ và đa thức $P(x)\in\mathbb{R}\left[x\right]$ có $\deg P(x)=n$. Chứng minh rằng:

$$\underset{i=\overline{0,n+1}}{Max}\left|a^i - P(i)\right|\geq 1$$

Lời giải. Đặt $y_k=P(k)$. Áp dụng công thức nội suy Lagrange với ($n+2$) mốc nội suy $x_k=k,k=\overline{0,n+1}$ ta được

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\left[y_k\cdot\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n+1}\frac{x-i}{k-i}\right].$$

Hệ số của x^{n+1} phải bằng 0. Do đó

$$\sum_{k=0}^{n+1}\frac{y_k}{k!(n+1-k)!(-1)^{n+1-k}}=0\Rightarrow\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k(-1)^{n+1-k}y_k=0 \quad (1)$$

Bây giờ ta phản chứng $\left|a^k - P(k)\right|<1\ \ \forall k=\overline{0,n+1}$, suy ra

$$a^k-1<y_k<a^k+1\ \ \forall k=\overline{0,n+1}\Rightarrow(-1)^{n+1-k}.a^k-1<(-1)^{n+1-k}y_k<(-1)^{n+1-k}a^k+1$$

Do đó $\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k\cdot(-1)^{n+1-k}\cdot y_k>\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k\cdot\left[(-1)^{n+1-k}a^k-1\right]$

hay $\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k\cdot(-1)^{n+1-k}\cdot y_k>(a-1)^{n+1}-2^{n+1}\geq 0$ (mâu thuẫn với (1))

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét 1. Thực chất việc áp dụng công thức nội suy Lagrange chỉ nhằm mục đích chỉ ra đẳng thức (1) từ đó đưa ra các đánh giá cho bài toán. Điều này rất hay làm trong các bài toán về đa thức và qua đây cũng cho ta thấy công thức nội suy Lagrange rất thân thiện và việc áp dụng nó là khá tự nhiên.

Nhận xét 2. Bằng quy nạp ta có thể chứng minh một kết quả mạnh hơn như sau:

<u>Bài toán 15.1</u>. Cho $a\geq 3$ và đa thức $P(x)\in\mathbb{R}\left[x\right]$ có $\deg P(x)=n$. Chứng minh rằng:

$$\underset{i=0,n+1}{Max}\left|a^i - P(i)\right|\geq\left(\frac{a-1}{2}\right)^n \quad (2)$$

Thật vậy, với $n=0$ thì $P(x)=c$ là hằng số. Khi đó

$$\underset{i=0,n+1}{Max}\left|a^i - P(i)\right|=max\left\{\left|1-c\right|;\left|a-c\right|\right\}\geq\frac{a-c+c-1}{2}=\frac{a-1}{2}\geq 1.$$

Giả sử (2) đúng với mọi đa thức có bậc không vượt quá $n-1$. Xét đa thức $P(x)$ bậc n.

Đặt $Q(x)=\dfrac{P(x+1)-P(x)}{a-1}\Rightarrow\deg Q(x)=n-1$.

Theo giả thiết quy nạp thì $\underset{i=0,n}{Max}\left|a^i - Q(i)\right|\geq\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^{n-1}$.

Suy ra tồn tại $i\in\left\{0;1;...;n\right\}$ sao cho $\left|a^i - Q(i)\right|\geq\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^{n-1}$.

Điều này tương đương với $\left|a^i-\dfrac{P(i+1)-P(i)}{a-1}\right|\geq\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^{n-1}$.

$$\Leftrightarrow \left|\left(P(i+1)-a^{i+1}\right)-\left(P(i)-a^{i}\right)\right| \geq \left(\frac{a-1}{2}\right)^{n-1}(a-1)$$

Do đó $\underset{i=0,n+1}{Max}\left|a^{i}-P(i)\right| \geq \left(\frac{a-1}{2}\right)^{n}$ (đpcm).

Tiếp theo ta xét một bài toán có sử dụng kết quả của bài toán trên

Bài toán 16 (***Iran 2011***) Cho đa thức $f(x)=x^{n}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots+a_{1}x+a_{0} \in \mathbb{R}[x]$.

Chứng minh rằng tồn tại $i \in \{1;2;\ldots;n\}$ sao cho $|f(i)| \geq \frac{n!}{C_{n}^{i}}$.

Lời giải. Giả thiết về đa thức *f*(*x*) cho ta thấy ngay hệ số của x^{n-1} bằng 0. Điều này cho ta nghĩ ngay tới việc khai triển Lagrange và so sánh hệ số của x^{n-1}. Đẳng thức thu được sẽ cho ta suy ra được kết luận bài toán.

Thật vậy, xét đa thức $g(x)=f(x)-x^{n}$ thì $\deg g(x) \leq n-2$.

Áp dụng công thức nội suy Lagrange đa thức $g(x)$ với *n* mốc nội suy $x_{k}=k,\ k=\overline{1,n}$ ta được $g(x)=\sum_{i=1}^{n}\left[g(i).\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-j}{i-j}\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{g(i)}{\prod_{j\neq i}(i-j)}.\prod_{j\neq i}(x-j)=\sum_{i=1}^{n}\frac{g(i)(-1)^{n-i}}{(i-1)!(n-i)!}.x^{n-1}.\prod_{j\neq i}(1-\frac{j}{x})$.

So sánh hệ số của x^{n-1} ta được $0=\sum_{i=1}^{n}\frac{ig(i)(-1)^{n-i}}{\frac{n!}{C_{n}^{i}}}$ (*).

Hay $\sum_{i=1}^{n}C_{n}^{i}(-1)^{n-i}i^{n+1}=\sum_{i=1}^{n}iC_{n}^{i}(-1)^{n-i}f(i)$ (thay $g(i)=f(i)-i^{n}$).

Theo bài toán 12 thì $\sum_{i=1}^{n}C_{n}^{i}(-1)^{n-i}i^{n+1}=\frac{n(n+1)!}{2}$. Do đó $\sum_{i=1}^{n}iC_{n}^{i}(-1)^{n-i}f(i)=\frac{n(n+1)!}{2}$ (1)

Bây giờ phản chứng rằng với mọi $i \in \{1;2;\ldots;n\}$ thì $|f(i)| < \frac{n!}{C_{n}^{i}}$.

Ta có $\left|\sum_{i=1}^{n}iC_{n}^{i}(-1)^{n-i}f(i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n}iC_{n}^{i}|f(i)| < n!\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)!}{2}$, mâu thuẫn với (1).

Vậy tồn tại $i \in \{1;2;\ldots;n\}$ sao cho $|f(i)| \geq \frac{n!}{C_{n}^{i}}$ (đpcm).

Bài toán 17. Cho đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ có $\deg P(x)=n$ thỏa mãn $|P(x)|\le 1\ \forall x\in[0;1]$. Chứng minh rằng $P\left(-\dfrac{1}{n}\right)\le 2^{n+1}-1$.

Lời giải. Áp dụng công thức nội suy Lagrange với ($n+1$) mốc nội suy $x_k=\dfrac{k}{n},\ k=\overline{0,n}$, ta có

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[P(x_k)\cdot\prod_{\substack{j=0\\ i\ne k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right].$$

Suy ra $|P(x)|=\sum_{k=0}^{n}\left[|P(x_k)|\cdot\prod_{\substack{j=0\\ i\ne k}}^{n}\left|\dfrac{x-x_j}{x_k-x_j}\right|\right]\le\sum_{k=0}^{n}\left[\prod_{\substack{j=0\\ i\ne k}}^{n}\left|\dfrac{x-x_j}{x_k-x_j}\right|\right]\quad\forall x\in[0;1]$.

Do đó

$$\left|P\left(-\frac{1}{n}\right)\right|\le\sum_{k=0}^{n}\left[\prod_{\substack{j=0\\ i\ne k}}^{n}\left|\frac{\frac{1}{n}+x_j}{x_k-x_j}\right|\right]=\sum_{k=0}^{n}\left[\prod_{\substack{j=0\\ i\ne k}}^{n}\left|\frac{j+1}{k-j}\right|\right]=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(n+1)!(-1)^{n-k}}{(k+1)k!(n-k)!}\right|$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}=2^{n+1}-1.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài toán 18. Cho đa thức $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, n là số nguyên dương cho trước, $t\ge 3$ là số thực thỏa mãn điều kiện $\left|f(k)-t^k\right|<1\ \forall k=\overline{0,n}$. Chứng minh rằng $\deg f(x)\ge n$.

Lời giải. Giả sử $\deg f(x)<n$.

Áp dụng công thức nội suy Lagrange với $(n+1)$ mốc nội suy $x_k=k,\ k=\overline{0,n}$ ta được

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f(k).\prod_{\substack{j=0\\ j\ne k}}^{n}\frac{x-j}{k-j}\right].$$

So sánh hệ số của x^n ta được: $0=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f(k)}{\prod_{j\ne k}(k-j)}=\dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\cdot C_n^k\cdot f(k)$.

Vì $t^k-1<f(k)<t^k-1\ \forall k=\overline{0,n}$ nên ta có

$$0 > \left[(t^n-1)C_n^n+(t^{n-2}-1)C_n^{n-2}+...\right]-\left[(t^{n-1}+1)C_n^{n-1}+(t^{n-3}+1)C_n^{n-3}+...\right]$$
$$=\left(t-1\right)^n-2^n\ge 0.$$

Điều mâu thuẫn này suy ra đpcm.

Bài toán 19. Trên đoạn $\left[a;b\right]$, ta lấy k điểm phân biệt $x_1,x_2,...,x_k$. Gọi d_n là tích các khoảng cách từ điểm x_n tới $k-1$ điểm còn lại; $n=1,2,...,k$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{1}{d_n}$.

Lời giải

Đặt $t_n=\frac{2x_n-a-b}{b-a}$, ta có với $x_n\in\left[a;b\right]\Leftrightarrow t_n\in\left[-1;1\right];n=1,2,...,k$.

Khi đó $d_n=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k-1}\left|\prod\limits_{i=1,i\ne n}^{k}\left(t_n-t_i\right)\right|$ suy ra

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{d_n}=\left(\frac{2}{b-a}\right)^{k-1}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\left|\prod\limits_{i=1,i\ne n}^{k}\left(t_n-t_i\right)\right|}\quad(1)$$

Xét đa thức Chebyshev $T_k\left(t\right):\begin{cases}T_0\left(t\right)=1,T_1\left(t\right)=t\\T_{n+1}\left(t\right)=2tT_n\left(t\right)-T_{n-1}\left(t\right)\end{cases}$.

Áp dụng khai triển Lagrange của $T_{k-1}\left(t\right)$ tại các điểm t_n, $n=1,2,...,k$ ta được:

$$T_{k-1}\left(t\right)=\sum_{n=1}^{k}T_{k-1}\left(t_n\right)\prod_{i=1,i\ne n}^{k}\frac{t-t_i}{t_n-t_i}.$$

So sánh hệ số của t^{k-1} ở hai vế ta được đẳng thức sau:

$$2^{k-2}=\sum_{n=1}^{k}\frac{T_{k-1}\left(t_n\right)}{\prod\limits_{i=1,i\ne n}^{k}\left(t_n-t_i\right)}\quad(*)$$

$$\Rightarrow 2^{k-2}=\left|\sum_{n=1}^{k}\frac{T_{k-1}\left(t_n\right)}{\prod\limits_{i=1,i\ne n}^{k}\left(t_n-t_i\right)}\right|\le\sum_{n=1}^{k}\frac{\left|T_{k-1}\left(t_n\right)\right|}{\left|\prod\limits_{i=1,i\ne n}^{k}\left(t_n-t_i\right)\right|}\le\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\left|\prod\limits_{i=1,i\ne n}^{k}\left(t_n-t_i\right)\right|}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) ta được:

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{d_n} \geq \left(\frac{2}{b-a}\right)^{k-1} \cdot 2^{k-2} = \frac{2^{2k-3}}{(b-a)^{k-1}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t_n = \cos\frac{n\pi}{k-1}; n = 0,1,2,...,k-1$.

<u>Chú ý:</u> Trong bài này ta đã sử dụng các tính chất cơ bản sau của đa thức Chebyshev:

(1) $T_n(x)$ có hệ số bậc cao nhất bằng 2^{n-1}.

(2) $|T_n(x)| \leq 1 \ \forall x \in [-1;1]$; $T_n(x) = 1 \Leftrightarrow x = \cos\frac{k\pi}{n}$.

Tiếp theo ta xét một số kết quả đẹp và một số vấn đề cổ điển của các đa thức có hệ số thuộc đoạn $[-1;1]$. Trước hết đưa ra hai kết quả sau, tuy chứng minh khá đơn giản nhưng lại có ứng dụng rất hiệu quả trong nhiều trường hợp.

<u>Kết quả 1</u>: Đặt $t_k = \cos\frac{k\pi}{n};\ 0 \leq k \leq n$ thì

$$f(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - t_k) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2^n}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right].$$

Chứng minh: Xét hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2^n}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]$.

Bằng khai triển Newton ta thấy $g(x)$ là một đa thức.

Hiển nhiên $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^{n+1}} = 1$, suy ra g(x) là đa thức monic và $\deg g(x) = n+1$.

Như vậy để chứng minh $f(x) \equiv g(x)$ ta chỉ cần chứng minh $g(t_k) = 0\ \forall k = \overline{0,n}$ là đủ.

Thật vậy theo công thức Moavro ta được:

$$\begin{aligned}
g(t_k) &= \frac{\sqrt{t_k^2-1}}{2^n}\left[\left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right)^n - \left(\cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}\right)^n\right] \\
&= \frac{\sqrt{t_k^2-1}}{2^n}\left[(\cos k\pi + i\sin k\pi) - (\cos k\pi - i\sin k\pi)\right] \\
&= \frac{\sqrt{t_k^2-1}}{2^n}\cdot 2i\sin k\pi = 0
\end{aligned}$$

<u>Kết quả 2</u>: Ta có 3 đẳng thức sau:

1. $\prod_{j\neq k}\left(t_k-t_j\right)=\dfrac{(-1)^n.n}{2^{n-1}}$ nếu $1\leq k\leq n-1$.

2. $\prod_{j=1}^{n}\left(t_0-t_j\right)=\dfrac{n}{2^{n-2}}$.

3. $\prod_{j=0}^{n-1}\left(t_n-t_j\right)=\dfrac{(-1)^n.n}{2^{n-2}}$.

Chứng minh: Ta có

$$f'(x)=\frac{n}{2^n}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]+\frac{x}{2^n\sqrt{x^2-1}}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right].$$

Từ đó áp dụng công thức Moavre như trên ta được ngay đẳng thức 1.

Các kết quả 2,3 được suy ra từ $\lim\limits_{x\to\pm1}f'(x)$.

Tiếp theo ta đưa ra một số ứng dụng điển hình của hai kết quả trên. Trước hết là định lí kinh điển *Chebyshev.*

Bài toán 20 (*Định lý Chebyshev***).** Cho đa thức $f(x)\in\mathbb{R}\left[x\right]$ có $\deg f(x)=n$. Chứng minh

$$\max_{x\in[-1;1]}\left|f(x)\right|\geq\frac{1}{2^{n-1}}\quad(1)$$

Lời giải. Áp dụng công thức nội suy Lagrange với $(n+1)$ mốc $t_k=\cos\dfrac{k\pi}{n}$, $k=\overline{0,n}$ và so sánh hệ số bậc cao nhất ta được: $1=\sum\limits_{k=0}^{n}\left[f(t_k)\cdot\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\dfrac{1}{t_k-t_j}\right]$.

Suy ra $1\leq\max\left|f(t_k)\right|\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{\left|\prod\limits_{j\neq k}^{n}(t_k-t_j)\right|}$. Áp dụng kết quả (2) ta được: $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{\left|\prod\limits_{j\neq k}^{n}(t_k-t_j)\right|}=2^{n-1}$.

Từ đó suy ra $\max\limits_{0\leq k\leq n}\left|f(t_k)\right|\geq\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Có thể thấy rằng kết quả (1) là chặt nhất theo nghĩa không thể tăng vế phải lên nữa.

Thật vậy, xét đa thức Chebyshev $T_n(x)$ loại 1. $T_n(x)$ có bậc n và hệ số cao nhất là 2^{n-1}.

Khi đó đa thức $\dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ là monic, bậc n và $\max\limits_{x\in[-1;1]}\left|\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right|=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Bài toán 21. Cho các số thực $a_0, a_1, ..., a_n$ thỏa mãn điều kiện $\left|a_0 + a_1x + ... + a_nx^n\right| \le 1$ với mọi $x \in [-1;1]$. Chứng minh rằng với mọi $x \in [-1;1]$ ta cũng có

$$\left|a_n + a_{n-1}x + ... + a_0x^n\right| \le 2^{n-1}.$$

Lời giải. Trước hết ta có bổ đề sau: Với mỗi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có $\deg f(x) = n$, ta đặt $\|f\| = \max\limits_{x\in[-1;1]}|f(x)|$ thì có bất đẳng thức sau:

$$|f(x)| \le |T_n(x)| \cdot \|f\| \text{ với mọi } |x| \ge 1.$$

Chứng minh. Với $u \in [-1;1]$. Áp dụng công thức nội suy Lagrange ta được

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left[f(t_k)\cdot\prod_{\substack{j=0\\ j\ne k}}^{n}\frac{\frac{1}{u} - t_j}{t_k - t_j}\right].$$

Suy ra $\left|f\left(\frac{1}{u}\right)\right| \le \left|\|f\|\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\prod\limits_{j\ne k}\frac{\frac{1}{u}\left(1 - ut_j\right)}{t_k - t_j}\right| = \frac{1}{|u|^n}\cdot\|f\|\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\prod\limits_{j\ne k}\frac{1 - ut_j}{\left|t_k - t_j\right|}.$

Bây giờ ta sử dụng chính khai triển này cho đa thức $T_n(x)$, ta được:

$$\left|T_n\left(\frac{1}{u}\right)\right| = \frac{1}{|u|^n}\cdot\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\prod_{j\ne k}\frac{1 - ut_j}{t_k - t_j}\right| = \frac{1}{|u|^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\prod_{j\ne k}\frac{1 - ut_j}{\left|t_k - t_j\right|}$$

Từ hai kết quả trên ta suy ra

$$\left|f\left(\frac{1}{u}\right)\right| \le \left|T_n\left(\frac{1}{u}\right)\right|\cdot\|f\| \text{ với mọi } u \in [-1;1].$$

Do đó bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, ta xét $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$. Từ giả thiết cho ta $\|f\| \le 1$ và kết hợp với bổ đề ta được: $|f(x)| \le |T_n(x)|$ với mọi $|x| \ge 1$.

Với mỗi $x \in [-1;1]$, ta có: $\left|a_n + a_{n-1}x + ... + a_0x^n\right| = \left|x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \left|x^nT_n\left(\frac{1}{x}\right)\right|.$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\left|x^nT_n\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 2^{n-1}$ (1)

BĐT (1) được viết lại dưới dạng: $\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^n+\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^n\le 2^n$ (2)

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\in[0;1]$. Xét hàm $h(t)=(1+t)^n+(1-t)^n$ với $t\in[0;1]$.

Dễ kiểm tra thấy hàm $h(t)$ lồi trên đoạn $[0;1]$ nên ta có:

$$h(t)\le max\left\{f(1);f(0)\right\}=2^n$$

Từ đó (2) đúng nên (1) được chứng minh. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bài toán 22. Cho các số thực $a_1,a_2,...,a_n$. Chứng minh rằng

$$\max_{x\in[0;2]}\prod_{i=1}^{n}\left|x-a_i\right|\le\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2}\cdot\max_{x\in[0;1]}\prod_{i=1}^{n}\left|x-a_i\right|.$$

Lời giải. Đây là một bài toán rất khó. Một đề thi cũ của Nga đã yêu cầu chứng minh

$$\max_{x\in[0;2]}\prod_{i=1}^{n}\left|x-a_i\right|\le 108^n.\max_{x\in[0;1]}\prod_{i=1}^{n}\left|x-a_i\right|.$$

Và trong một đề thi của Nhật bản năm 1994 lại yêu cầu chỉ ra một hằng số thỏa mãn bất đẳng thức trên.

Ta đặt $\left\|f\right\|_{[a;b]}=\max_{x\in[a;b]}\left|f(x)\right|$ và $c_n=\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2}$.

Ta cần chứng minh $\left\|f\right\|_{[0;2]}\le c_n\cdot\left\|f\right\|_{[0;1]}$ với $f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$.

Có thể xét đa thức *f(x)* bất kì và không mất tính tổng quát, giả sử $\left\|f\right\|_{[0;1]}=1$.

Như vậy ta chỉ cần chứng minh với mọi $x\in[1;2]$ thì $\left|f(x)\right|\le c_n$ (1).

Thật vậy, cố định $x\in[1;2]$ và xét $x_k=\dfrac{1+t_k}{2}$.

Áp dụng công thức nội suy Lagrange ta suy ra

$$\left|f(x)\right|\le\sum_{k=0}^{n}\left|\prod_{j\ne k}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right|=\sum_{k=0}^{n}\prod_{j\ne k}\frac{x-x_j}{\left|x_k-x_j\right|}\quad(\text{do } x\in[1;2])$$

$$\Rightarrow\left|f(x)\right|\le\sum_{k=0}^{n}\prod_{j\ne k}\frac{2-x_j}{\left|x_k-x_j\right|}=\sum_{k=0}^{n}\prod_{j\ne k}\frac{3-t_j}{\left|t_k-t_j\right|}.$$

Sử dụng kết quả 2 ở phần trên ta được:

$$\sum_{k=0}^{n}\prod_{j\neq k}\frac{3-t_j}{\left|t_k-t_j\right|}=\frac{2^{n-1}}{n}\sum_{k=0}^{n}\prod_{j\neq k}\frac{3-t_j}{\left|t_k-t_j\right|}+\frac{2^{n-2}}{n}\left[\prod_{j=0}^{n-1}(3-t_j)+\prod_{j=1}^{n}(3-t_j)\right]$$

Tiếp tục sử dụng kết quả 1 và 2 ở phần trước, ta thu được:

$$\begin{aligned}&\frac{n}{2^n}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]+\frac{3}{2^{n+1}\sqrt{2}}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j\neq k}(3-t_j)+\prod_{j=0}^{n-1}(3-t_j)+\prod_{j=1}^{n}(3-t_j)\end{aligned}$$

Lại sử dụng kết quả 1 ta suy ra:

$$\prod_{j=1}^{n-1}(3-t_j)=\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{2}}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^n-\left(3-2\sqrt{2}\right)^n\right]$$

Từ đó suy ra $\left|f(x)\right|\le c_n$ với mọi $x\in\left[1;2\right]$ (đpcm).

III. BÀI TẬP ÁP DỤNG.

Bài 1. Cho các số thực *a,b,c* đôi một phân biệt. Rút gọn biểu thức

$$A=\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}$$

Bài 2. Tính các tổng sau:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot k^{n+2}\ ;\ T_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot k^{n+3}\ .$$

Bài 3. Cho đa thức $f(x)\in\mathbb{R}\left[x\right]$ có $\deg f(x)=2$ thỏa mãn $max\left\{\left|f(0)\right|;\left|f(\pm1)\right|\right\}\le 1$. Chứng minh rằng với mọi $\left|x\right|\le 1$ thì ta có $\left|f(x)\right|\le\frac{5}{4}$ và $\left|x^2f\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le 2$.

Bài 4. Cho đa thức $f(x)\in\mathbb{R}\left[x\right]$ có $\deg f(x)=n$ thỏa mãn điều kiện $\left|f(x)\right|\le 1$ với mọi $x\in\left[0;1\right]$. Chứng minh rằng $\left|f\left(-\frac{1}{n}\right)\right|\le 2^{n+1}-1$.

Bài 5. Cho đa thức $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbb{R}\left[x\right]$ thỏa mãn điều kiện $\left|f(x)\right|\le 1$ với mọi $x\in\left[-1;1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của $\left|c\right|$ và tìm một đa thức trong trường hợp đó.

Bài 6. Cho *a,b,c* thực thỏa mãn $\left|ax^2+bx+c\right|\le 1$ với mọi $x\in[-1;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của $a^2+b^2+c^2$.

Bài 7. Cho *a,b,c,d* thực thỏa mãn $\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|\le 1$ với mọi $x\in[-1;1]$. Chứng minh rằng $|a|+|b|+|c|+|d|\le 7$.

Bài 8. Cho đa thức $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ có $\deg f(x)=3n$ thỏa mãn điều kiện sau: $f(x)$ nhận giá trị bằng 2 tại các điểm $0;3;6;...;3n$; $f(x)$ nhận giá trị bằng 1 tại các điểm $1;4;7;...;3n-2$ và $f(x)$ nhận giá trị bằng 0 tại các điểm $2;5;8;...;3n-1$. Biết thêm rằng $f(3n+1)=730$. Tìm n.

Bài 9. Cho đa thức $P(x)=x^{10}+a_9x^9+...+a_1x+a_0$. Biết rằng $P(-k)=P(k)$ với mỗi $k\in\{1;2;3;4;5\}$. Chứng minh rằng $P(-x)=P(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Bài 10 (Duyên Hải 2009). Cho số thực $\alpha\in(-1;1)$. Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực có bậc không vượt quá hai thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$|f(1)|\le 1;|f(-1)|\le 1;|f(\alpha)|\le 1 \text{ và } \max_{[\alpha;1]}|f(x)|=\frac{\alpha^2+2\alpha+5}{4(\alpha+1)}.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, 2004, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, NXB Giáo Dục

[2] Nguyễn Văn Mậu, 2007, *Nội suy và áp dụng*, NXB Giáo Dục.

[3] Tủ sách Toán học và Tuổi trẻ. *Các bài thi Olympic Toán trung học phổ thông (1990-2006).* NXB Giáo dục.

[4] Các nguồn tài liệu khác từ Internet: www.mathscope.org; www.mathlinks.org; www.imo.org.yu.