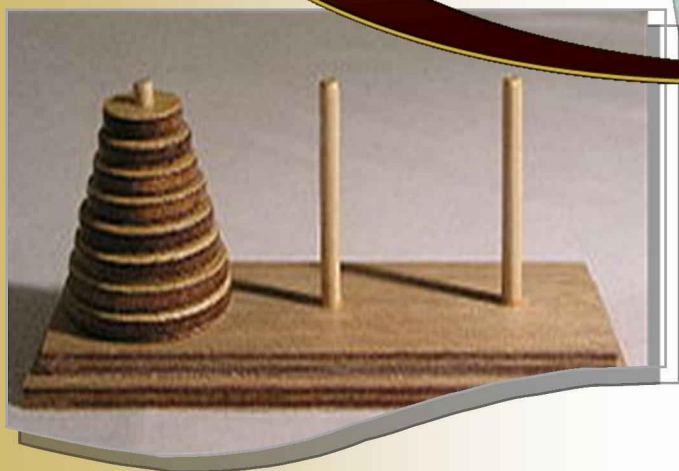


DIỄN ĐÀN MATHSCOPE.ORG

TUYỂN TẬP  
CÁC CHUYÊN ĐỀ

TỔ HỢP



THÁNG 01/2012



# LỜI NÓI ĐẦU

Ngay từ năm 1736, nhà toán học Euler đã giải quyết thành công bài toán tổ hợp về bảy cây cầu ở thành phố Königsberg, Đức (nay là Kaliningrad, Nga) nằm trên sông Pregel, bao gồm hai hòn đảo lớn nối với nhau và với đất liền bởi bảy cây cầu. Bài toán được đặt ra là “Có thể đi theo một tuyến đường mà đi qua mỗi cây cầu đúng một lần rồi quay lại điểm xuất phát hay không?”. Và kể từ đó đến nay, trải qua nhiều thăng trầm của lịch sử, lý thuyết tổ hợp vẫn phát triển mạnh mẽ, đóng góp nhiều cho sự phát triển của khoa học và kỹ thuật hiện đại. Chúng ta thường gặp các bài toán tổ hợp trong các mô hình sản xuất như “Lập lịch cho một cơ quan”, xuất hiện trong giải pháp an toàn giao thông với các mô hình “Đặt các trạm xe bus tối ưu nhất trong một thành phố”, vào quản lý con người với mô hình “Lập thời khoá biểu và phân việc”,..., hoặc có thể ứng dụng gián tiếp trong các thuật toán giải các bài toán tối ưu trong các phần mềm máy tính như thuật toán tìm kiếm của Google, Yahoo,..., hay các phần mềm ứng dụng mà chúng ta vẫn đang sử dụng hàng ngày. Chính vì vậy toán tổ hợp luôn dành được sự quan tâm rất lớn từ các nhà toán học, các thầy, cô giáo và các bạn học sinh yêu thích môn toán.

Toán tổ hợp là một lớp các bài toán khó, thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh, thành phố, cấp quốc gia, quốc tế. Do đó, giải quyết thành thạo và có vốn kiến thức chắc chắn, sâu rộng về toán tổ hợp là niềm mong ước của nhiều giáo viên và học sinh. Mặc dù toán tổ hợp quan trọng như vậy nhưng các tài liệu về toán tổ hợp, rời rạc dành cho học sinh giỏi ở Việt Nam vẫn còn rất ít và hạn chế. Xuất phát từ thực tế trên và với mục đích cung cấp tài liệu chất lượng gồm nhiều chuyên đề toán tổ hợp nâng cao giúp cho việc học tập của học sinh tốt hơn và các thầy, cô giáo có thêm tài liệu giảng dạy, nhóm biên soạn bao gồm các giáo viên, các sinh viên hệ cử nhân tài năng toán, các học sinh giỏi quốc gia, quốc tế đến từ mọi miền của Tổ quốc đã cùng nhau viết nên các chuyên đề, các bài giảng về toán tổ hợp nâng cao.

“Tuyển tập các chuyên đề tổ hợp” ra đời đánh dấu cho thành công lớn trong việc chia sẻ tri thức cho cộng đồng các bạn yêu thích môn toán, mà ở đó những kinh nghiệm làm bài, những cách giải hay và sáng tạo có được từ sự đúc kết trong thời gian học tập của nhiều thành viên đã và đang là học sinh giỏi quốc gia, quốc tế hay đầy tính sư phạm của các giáo viên tích lũy được trong quá trình tham gia học tập, giảng dạy. Tuyển tập được hoàn thành và gửi tới bạn đọc trong dịp Tết Nguyên Đán, hi vọng nó sẽ là một món quà năm mới thực sự hữu ích với bạn đọc trên khắp đất nước.

Để hoàn thành cuốn sách, nhóm biên tập xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các thầy giáo, các bạn học sinh, sinh viên đã tham gia gửi các chuyên đề, các bài toán trên diễn đàn MathScope. Đồng thời cũng xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới ban quản trị diễn đàn [MathScope](#) và thầy giáo, TS. Trần Nam Dũng - ĐHKHTN - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh đã cổ vũ, động viên và cho nhiều nhận xét có giá trị để cuốn sách vừa có giá trị chuyên môn cao mà lại miễn phí về tài chính với bạn đọc.

Do thời gian gấp rút và trình độ có hạn, dù rất cố gắng nhưng sai sót là khó tránh khỏi. Mọi ý kiến đóng góp để cuốn sách hoàn thiện hơn xin gửi về địa chỉ [hoangquan9@gmail.com](mailto:hoangquan9@gmail.com) hoặc [alephvn@gmail.com](mailto:alephvn@gmail.com).

Hà Nội, ngày 22 tháng 1 năm 2012 (ngày Tất niên năm Nhâm Thìn)

Đại diện nhóm biên soạn

Chủ biên

Hoàng Minh Quân – Phan Đức Minh

# MỤC LỤC

Lời nói đầu .....	3
Sử dụng phép đếm để chứng minh các đẳng thức tổ hợp <i>Nguyễn Tất Thu</i> .....	7
Phương pháp đếm bằng hai cách <i>Phan Đức Minh</i> .....	17
Phương pháp xây dựng mô hình trong giải toán tổ hợp <i>Lê Phúc Lữ</i> .....	33
Phương pháp hàm sinh <i>Hoàng Minh Quân</i> .....	53
Phương pháp hàm sinh <i>Lê Hữu Phước, Trần Nguyễn Quốc Cường</i> .....	69
Giải toán tổ hợp bằng đại lượng bất biến <i>Trần Gia Huy</i> .....	101
Một số bài toán tô màu <i>Lê Tuấn Linh</i> .....	119
Cực trị và bất đẳng thức rời rạc <i>Nguyễn Hiền Trang</i> .....	141
Một số bài toán tổ hợp điển hình về bàn cờ <i>Nguyễn Việt Dũng</i> .....	165
Số Stirling loại hai <i>Hoàng Minh Quân</i> .....	173



# SỬ DỤNG PHÉP ĐẾM ĐỂ CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

Nguyễn Tất Thu<sup>1</sup>

Như chúng ta biết các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp được hình thành từ các bài toán đếm. Các khái niệm này ra đời giúp chúng ta trình bày bài toán đếm đơn giản hơn. Tuy nhiên khi gặp các bài chứng minh các đẳng thức liên quan đến  $P_n, C_n^k$  thì chúng ta thường sử dụng các biến đổi đại số hoặc khai triển nhị thức Newton để chứng minh. Do đó việc chứng minh các bài toán đẳng thức liên quan đến  $P_n, C_n^k$  và các khái niệm của nó không có mối quan hệ nào. Điều này ít nhiều làm mất đi vẻ đẹp của các khái niệm toán học nói chung và các khái niệm  $P_n, C_n^k$  nói riêng. Trong chuyên đề này chúng tôi giới thiệu với các bạn cách chứng minh một số đẳng thức liên quan đến  $P_n, C_n^k$  bằng phương pháp đếm.

Nội dung của phương pháp này như sau :

Giả sử ta cần chứng minh một đẳng thức liên quan đến  $P_n, C_n^k$  có dạng  $A = B$ .

Ta sẽ đi đếm số cách thực hiện một công việc X nào đó theo hai cách:

Cách 1 ta được kết quả số cách thực hiện công việc X là A.

Cách 2 cho ta kết quả số cách thực hiện công việc X là B.

Từ đó ta có được  $A = B$ .

Để làm tốt phương pháp này chúng ta cần hiểu ý nghĩa của các đại lượng xuất hiện trong hai vế của đẳng thức. Chẳng hạn:

- $2^m$ : là số tập con của tập  $X$  gồm  $m$  phần tử và cũng là số cách chọn  $m$  phần tử từ  $m$  cặp và mỗi cặp chọn một phần tử.
- $2^m - 1$ : là số tập con khác rỗng của tập  $X$  gồm  $m$  phần tử.
- $C_n^k$ : số tập con gồm  $k$  phần tử của tập  $X$  gồm  $n$  phần tử.

Chúng ta sẽ bắt đầu bằng các ví dụ sau đây:

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng  $C_n^k = C_n^{n-k}$  với mọi  $k, n \in \mathbb{N}; n \geq 1; 0 \leq k \leq n$ .

**LỜI GIẢI.** Xét tập  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

Ta thấy ở vế trái là số tập con  $A$  gồm  $k$  phần tử của tập  $X$ . Để lập  $A$  ta làm theo hai cách như sau:

1. Mỗi cách lấy  $k$  phần tử trong  $X$ , ta có một tập con  $A$  gồm  $k$  phần tử của tập  $X$ , nên số tập con  $A$  là  $C_n^k$ .

---

<sup>1</sup>Giáo viên trường THPT Lê Hồng Phong, Đồng Nai.

2. Để thiết lập  $A$  ta có thể làm như sau:

Mỗi cách lấy  $n - k$  phần tử của tập  $X$  và loại  $n - k$  phần tử này đi, ta có được được  $k$  phần tử còn lại là một tập con  $A$  gồm  $k$  phần tử của  $X$ .

Nên số tập con  $A$  là:  $C_n^{n-k}$

Từ đó ta có được  $C_n^k = C_n^{n-k}$  và bài toán được chứng minh.  $\square$

**Ví dụ 2.** Cho  $n \geq 2, k$  là các số tự nhiên thỏa  $1 \leq k \leq n$ . Chứng minh rằng

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

**LỜI GIẢI.** Vì vế trái của đẳng thức là số tập con gồm  $k$  phần tử của tập gồm  $n$  phần tử nên ta đi đếm số tập con  $A$  gồm  $k$  phần tử của tập  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

**Cách 1.** Số tập  $A$  có  $C_n^k$  tập.

**Cách 2.** Số tập  $A$  gồm hai loại, ta sẽ đi đếm số tập thuộc hai loại này.

Loại 1. Gồm những tập con chứa phần tử  $x_n$ . Mỗi tập  $A$  thuộc loại này cho ta một tập  $A' = A \setminus \{x_n\}$  là tập con gồm  $k - 1$  phần tử của tập  $X \setminus \{x_n\}$ .

Và ngược lại mỗi tập  $A'$  cho ta một tập  $A$  nên suy ra số tập  $A$  thuộc loại này chính bằng số tập  $A'$  và bằng  $C_{n-1}^{k-1}$ .

Loại 2. Gồm những tập con không chứa phần tử  $x_n$ . Như vậy các phần tử của tập  $A$  được lấy từ tập  $X \setminus \{x_n\}$  gồm  $n - 1$  phần tử nên số tập  $A$  thuộc loại này là  $C_{n-1}^k$ .

Do đó theo cách 2 thì số tập  $A$  là  $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ .

Vậy ta có  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ .  $\square$

**Ví dụ 3.** Cho  $n \geq 1$  là số tự nhiên. Chứng minh đẳng thức sau:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

**LỜI GIẢI.** Ta thấy VP của đẳng thức chính là số tập con  $A$  gồm  $n$  phần tử của tập  $X$  gồm  $2n$  phần tử nên ta xét bài toán sau: Hãy tính số tập con  $A$  gồm  $n$  phần tử của tập  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$ .

**Cách 1.** Ta có số tập con  $A$  là  $C_{2n}^n$ .

**Cách 2.** Chia tập  $X$  thành hai tập  $X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  và  $X_2 = \{x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}$ .

Để lập tập con  $A$  ta làm như sau:

Lấy  $k$  phần tử ( $k = \overline{0, n}$ ) thuộc tập  $X_1$ , rồi lấy  $n - k$  phần tử còn lại thuộc tập  $X_2$  và ta có  $C_n^k C_n^{n-k} = (C_n^n)^2$  cách chọn  $A$  ứng với mỗi  $k$ .

Cho  $k$  chạy từ 0 đến  $n$  rồi lấy tổng ta có được kết quả chính là số tập  $A$  cần tìm, hay

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

$\square$

**Ví dụ 4.** Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^n 2^k C_n^k C_{n-k}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = C_{2n+1}^n$$



**LỜI GIẢI.** Ta thấy về phải là số cách chọn  $n$  phần tử từ tập  $X$  gồm  $2n + 1$  phần tử nên ta xét bài toán sau: Tính số cách chọn  $n$  phần tử từ tập  $X$  gồm  $2n + 1$  phần tử.

**Cách 1.** Số cách chọn chính bằng  $C_{2n+1}^n$ .

**Cách 2.** Ta chia  $X$  thành  $n$  cặp và phần tử  $x$ . Để chọn  $n$  phần tử từ  $X$  ta thực hiện các bước sau:

**Bước 1.** Ta chọn  $k$  cặp ( $k = \overline{0, n}$ ) từ  $n$  cặp đã chia ta có  $C_n^k$  cách, sau đó ở mỗi cặp ta chọn một phần tử như vậy ta có  $2^k C_n^k$  cách chọn.

**Bước 2.** Chọn  $\left[\frac{n-k}{2}\right]$  cặp trong  $n - k$  cặp còn lại.

Vì  $\left[\frac{n-k}{2}\right] = \frac{n-k}{2}$  nếu  $n - k$  chẵn và  $\left[\frac{n-k}{2}\right] = \frac{n-k-1}{2}$  nếu  $n - k$  lẻ.

Do đó ta sẽ chọn  $x$  nếu  $n - k$  lẻ và không chọn  $x$  nếu  $n - k$  chẵn.

Số cách chọn ở bước này là  $C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$ .

Suy ra có  $2^k C_n^k C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$  cách trong mỗi lần chọn.

Cho  $k$  chạy từ 0 đến  $n$  và lấy tổng ta có số cách chọn là:

$$\sum_{k=0}^n 2^k C_n^k C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} = C_{2n+1}^n$$

□

**Ví dụ 5.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  ta có:

$$\sum_{k=0}^m C_{n+k}^k 2^{m-k} + \sum_{k=0}^n C_{m+k}^k 2^{n-k} = 2^{m+n+1}$$

**LỜI GIẢI.** Xét tập  $X = \{1, 2, \dots, m + n + 1\}$ . Ta sẽ đi đếm số tập con của  $X$ .

**Cách 1.** Ta có  $2^{m+n+1}$  tập con.

**Cách 2.** Số tập con của  $X$  gồm hai loại:

**Loại 1.** Gồm những tập con có dạng  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+i}\}$  với  $1 \leq i \leq m + 1$  và  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+i}$  và  $x_{n+1} = n + k + 1$  với  $0 \leq k \leq m$ . Để lập tập con loại này ta làm như sau:

**Bước 1.** Chọn  $n$  phần tử từ  $n + k$  phần tử (với  $0 \leq k \leq m$ ) ta có  $C_{n+k}^n$  cách.

**Bước 2.** Bổ sung một tập con của tập  $\{n + k + 1, n + k + 2, \dots, n + m + 1\}$  ta có  $2^{m-k}$  cách.

Do đó có  $\sum_{k=0}^m C_{n+k}^n 2^{m-k}$  tập con  $A$  của  $X$  có nhiều hơn  $n$  phần tử.

Tương tự có  $\sum_{k=0}^n C_{m+k}^k 2^{n-k}$  tập con của  $X$  có nhiều hơn  $m$  phần tử.

Mà mỗi tập con của  $X$  có hơn  $m$  phần tử ứng với một tập con của  $X$  có không quá  $n$  phần tử, suy ra số tập con của  $X$  có không quá  $n$  phần tử là  $\sum_{k=0}^n C_{m+k}^k 2^{n-k}$ .

Do vậy  $\sum_{k=0}^m C_{n+k}^k 2^{m-k} + \sum_{k=0}^n C_{m+k}^k 2^{n-k}$  chính là số tập con của  $X$ .

Vậy ta có

$$\sum_{k=0}^m C_{n+k}^k 2^{m-k} + \sum_{k=0}^n C_{m+k}^k 2^{n-k} = 2^{m+n+1}$$

□

**Ví dụ 6.** Chứng minh đẳng thức sau với  $n \geq 1$  là số tự nhiên

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$$

**LỜI GIẢI.** Ta thấy  $n$  chính là số cách lấy một phần tử từ một tập gồm  $n$  phần tử, còn  $2^{n-1}$  chính là số tập con của tập gồm  $n-1$  phần tử. Do đó ta xét bài toán sau: Cho tập  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Hãy đếm số cặp  $(a, A)$  trong đó  $a \in X$  và  $A$  là một tập con của tập  $X' = X \setminus \{a\}$ .

**Cách 1.** Ta có  $n$  cách chọn  $a$ , với mỗi cách chọn  $a$  ta có  $2^{n-1}$  cách chọn  $A$ . Theo quy tắc nhân ta có  $n2^{n-1}$  cặp  $(a, A)$ .

**Cách 2.** Ta chọn  $A$  là một tập con gồm  $k$  phần tử của  $(k = \overline{0, n-1})$ , nên có  $C_n^k = C_n^{n-k}$  cách chọn  $A$ . Mỗi cách chọn tập  $A$  ta sẽ chọn  $a \in X \setminus A$  nên có  $n-k$  cách chọn  $a$ . Khi cho  $k$  chạy từ 0 đến  $n-1$  và lấy tổng thì ta có được số cặp  $(a, A)$  hay là có  $\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)C_n^{n-k} = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$  cặp  $(a, A)$ .

So sánh kết quả hai cách đếm ta có

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$$

□

**Ví dụ 7.** Chứng minh đẳng thức sau:

$$C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + \dots + C_n^k C_{n-k}^0 = 2^k C_n^k$$

**LỜI GIẢI.** Thấy có  $2^k$  là số tập con của một tập gồm  $k$  phần tử, còn  $C_n^k$  là số tập con gồm  $k$  phần tử của tập gồm  $n$  phần tử nên ta xét bài toán sau: Cho tập  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Hãy đếm số cặp  $(A, M)$  trong đó  $A$  là một tập con gồm  $k$  phần tử của  $X$  và  $M$  là một tập con của  $A$ .

**Cách 1.** Ta có  $C_n^k$  cách chọn tập  $A$ , với mỗi cách chọn  $A$  ta có  $2^k$  cách chọn  $M$  nên có tất cả  $2^k C_n^k$  cặp  $(A, M)$ .

**Cách 2.** Ta có  $C_n^i$  cách chọn  $M$  ( $0 \leq i \leq k$ ). Sau khi chọn  $M$  ta chọn  $k-i$  phần tử từ  $n-i$  phần tử còn lại rồi gộp với  $M$  ta có được tập  $A$ , nên với mỗi  $i$  ta có  $C_n^i C_{n-i}^{k-i}$  cách chọn cặp  $(A, M)$ . Cho  $i$  chạy từ 0 đến  $k$  và lấy tổng ta có số cặp  $(A, M)$  là  $\sum_{i=0}^k C_n^i C_{n-i}^{k-i}$ .

Vậy ta có

$$C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + \dots + C_n^k C_{n-k}^0 = 2^k C_n^k$$

Đây là đẳng thức cần chứng minh.

□

**Ví dụ 8.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ , ta luôn có:

$$(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \dots + n(C_n^n)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}$$

**LỜI GIẢI.** Ta thấy  $nC_{2n-1}^{n-1}$  chính là số các cặp  $(a, A)$ , trong đó  $a$  là một phần tử thuộc tập  $X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  còn  $A$  là một tập con gồm  $n-1$  phần tử của tập  $X = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}\} \setminus \{a\}$ . Nên ta xét bài toán sau: Cho hai tập rời nhau  $X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  và  $X_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Hãy đếm số cặp  $(a, A)$ , trong đó  $a \in X_1$  còn  $A$  là một tập con bất kì gồm  $n-1$  phần tử của tập  $X = X_1 \cup X_2 \setminus \{a\}$ .

**Cách 1.** Để chọn  $a$  ta có  $n$  cách, với mỗi cách chọn  $a$  ta có  $C_{2n-1}^{n-1}$  cách chọn  $A$  nên có tất cả  $nC_{2n-1}^{n-1}$  cách chọn cặp  $(a, A)$ .

**Cách 2.** Lấy  $k$  phần tử thuộc  $X_1$  ( $1 \leq k \leq n$ ) ta có  $C_n^k$  cách, rồi ta chọn  $a$  từ  $k$  phần tử vừa

chọn ta có  $k$  cách. Sau khi chọn  $a$  ta chỉ còn lại  $k - 1$  phần tử. Tiếp tục chọn  $n - k$  phần tử thuộc  $X_2$  và kết hợp với  $k - 1$  phần tử còn lại ở trên ta được một tập con  $A$  gồm  $n - 1$  phần tử của  $X$ . Nên mỗi trường hợp này ta có  $k C_n^k C_n^{n-k} = k (C_n^k)^2$  cách chọn. Cho  $k$  chạy từ 1 đến  $n$  và lấy tổng ta được số cách chọn các cặp  $(a; A)$  là

$$(C_n^1)^2 + 2 (C_n^2)^2 + \cdots + n (C_n^n)^2$$

Do đó ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Ví dụ 9.** Cho số tự nhiên  $n \geq 1$ . Một hoán vị của tập  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  được gọi là hoán vị bảo tồn  $a \in A$  nếu như phần tử  $a$  ở nguyên vị trí cũ của nó trong hoán vị mới. Kí hiệu  $P_n(k)$  là số hoán vị bảo tồn đúng  $k$  phần tử của  $A$ . Chứng minh rằng:

$$(a) \quad kP_n(k) = nP_{n-1}(k-1);$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^n kP_n(k) = n!.$$

**LỜI GIẢI.** (a) Với mỗi  $k = 1, 2, \dots, n$  ta đi đếm số cặp  $(i; f)$  trong đó  $f$  bảo tồn đúng  $k$  vị trí và  $f(i) = i$ .

**Cách 1.** Ta có số cách chọn  $i$  là  $k$  và số cách chọn  $f$  là  $P_n(k)$  nên số cặp  $(i; f)$  là  $kP_n(k)$ .

**Cách 2.** Ta xét  $i$  là một phần tử cố định (tức là  $f(i) = i$ ). Khi đó ta có một hoán vị bảo tồn  $k - 1$  phần tử của tập  $A' = A \setminus \{i\}$  và với mỗi hoán vị bảo tồn  $k - 1$  phần tử của tập  $A'$  ta bổ sung thêm  $i$  vào ta sẽ được một hoán vị bảo tồn  $k$  phần tử của tập  $A$ . Vì có  $n$  cách chọn  $i$  và có  $P_{n-1}(k-1)$  hoán vị bảo tồn  $k - 1$  phần tử của tập  $A'$  nên số cặp  $(i; f)$  là  $nP_{n-1}(k-1)$ .

Từ đó ta suy ra  $kP_n(k) = nP_{n-1}(k-1)$ .

(b) Theo kết quả ở trên ta có

$$\sum_{k=1}^n kP_n(k) = n \sum_{k=1}^n P_{n-1}(k-1)$$

Mà  $P_{n-1}(0) + P_{n-1}(1) + \cdots + P_{n-1}(n-1)$  chính là số hoán vị của tập  $B$  gồm  $n - 1$  phần tử mà trong hoán vị đó bảo tồn  $0, 1, 2, \dots, n - 1$  phần tử, do đó tổng này chính bằng số hoán vị của tập  $B$  và bằng  $(n - 1)!$ . Vậy

$$\sum_{k=1}^n kP_n(k) = n(n - 1)! = n!$$

$\square$

**Nhận xét.** Trong một số trường hợp ta có thể dùng đếm theo hai cách để chứng minh các bất đẳng thức. Chẳng hạn nếu ta chứng minh được  $A = B$  và  $D < A, B < C$  thì ta có  $D < C$ .

**Ví dụ 10.** Trong một kì thi có  $a$  thí sinh và số lẻ  $b \geq 3$  giám khảo. Mỗi giám khảo đánh giá từng thí sinh và cho kết luận thí sinh đó đỗ hay trượt. Giả sử  $k$  là số thỏa mãn: với hai giám khảo bất kì thì số thí sinh mà họ cho kết luận giống nhau nhiều nhất là  $k$ . Chứng minh rằng

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

LỜI GIẢI. Ta đi đếm số bộ  $(A, B, x)$  trong đó  $x$  là một thí sinh nào đó còn  $A, B$  là hai giám khảo cho cùng một kết quả khi đánh giá  $x$ . Gọi  $N$  là số bộ như vậy, ta sẽ đếm  $N$  theo hai cách.

**Cách 1.** Có tất cả  $\frac{b(b-1)}{2}$  bộ đôi giám khảo và mỗi bộ đôi giám khảo cho không quá  $k$  thí sinh cùng một kết quả nên ta có

$$N \leq \frac{kb(b-1)}{2} \quad (1)$$

**Cách 2.** Ta xét một thí sinh  $X$  cố định và có  $m$  giám khảo cho thí sinh  $X$  này đỗ, suy ra có  $\frac{x(x-1)}{2}$  cặp giám khảo cho  $X$  cùng một kết quả đậu và có  $\frac{(b-x)(b-x-1)}{2}$  cặp giám khảo đánh giá thí sinh này trượt. Do đó tổng số cặp giám khảo đánh giá thí sinh này cùng một kết quả là

$$\frac{x(x-1) + (b-x)(b-x-1)}{2} = \frac{2x^2 - 2xb + b^2 - b}{2}$$

Nên suy ra

$$N = \frac{a(2x^2 - 2xb + b^2 - b)}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra được:

$$\frac{kb(b-1)}{2} \geq \frac{a(2x^2 - 2xb + b^2 - b)}{2}$$

Do đó

$$\frac{k}{a} \geq \frac{2x^2 - 2xb + b^2 - b}{b(b-1)} \quad (3)$$

Mặt khác:

$$2x^2 - 2bx + b^2 - b = \frac{(2x-b)^2 + (b-1)^2 - 1}{2} \geq \frac{(b-1)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Do  $b$  lẻ nên  $\frac{(b-1)^2}{2} \in \mathbb{Z}$ , suy ra

$$2x^2 - 2bx + b^2 - b \geq \frac{(b-1)^2}{2} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có  $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$ . □

Qua các ví dụ trên ta thấy, để vận dụng tốt phương pháp này chúng ta cần hiểu rõ ý nghĩa của các đối tượng có trong đẳng thức. Với việc xét một bài toán đếm và đếm theo nhiều cách sẽ cho chúng ta các kết quả khác nhau về mặt hình thức và từ đó có được các đẳng thức tổ hợp.

## Các bài tập đề nghị

**Bài tập 1.** Chứng minh đẳng thức

$$\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

**Bài tập 2.** Chứng minh đẳng thức

$$k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$$

**Bài tập 3.** Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{k+1} i C_n^i C_k^{i-1} = n C_{n+k-1}^k$$

**Bài tập 4.** Chứng minh đẳng thức

$$C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \dots + C_m^k C_n^0 = C_{m+n}^k$$

**Bài tập 5.** Chứng minh rằng

$$C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + \dots + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$$

**Bài tập 6.** Chứng minh rằng

$$\sum \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!} = n^k$$

Trong đó bộ  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  thỏa  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ .

**Bài tập 7.** Cho trước một số nguyên dương lẻ  $n$  lớn hơn 1 và các số nguyên  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Kí hiệu  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  là một hoán vị trong  $n!$  hoán vị của  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ . Chứng minh rằng tồn tại hai hoán vị  $b, c$  và số nguyên  $m$  sao cho

$$\sum_{i=1}^n k_i (b_i - c_i) = m \cdot n!$$

**Bài tập 8.** Tính tổng

$$T = \sum \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_{2011}! (n_2 + 2n_3 + \dots + 2011n_{2011})!}$$

Ở đây lấy tổng theo tất cả các bộ thứ tự các số tự nhiên  $(n_1, n_2, \dots, n_{2011})$  thỏa điều kiện  $n_1 + 2n_2 + \dots + 2011n_{2011} = 2011$ .

## Hướng dẫn và gợi ý

**Bài tập 1.** Ta cần chứng minh  $(n+1)C_n^k = (k+1)C_{n+1}^{k+1}$ .

Ta đếm số cặp  $(a, A)$  trong đó  $a$  là một phần tử của tập  $X = \{1, 2, \dots, n+1\}$  còn  $A$  là một tập con gồm  $k$  phần tử của  $X \setminus \{a\}$  theo hai cách.

**Cách 1.** Có  $n+1$  cách chọn  $a$ , khi đã chọn  $a$  thì có  $C_n^k$  cách chọn  $A$ . Do đó có tất cả  $(n+1)C_n^k$  cặp  $(a, A)$ .

**Cách 2.** Lấy một tập con  $A'$  của  $X$  gồm  $k+1$  phần tử rồi từ  $A'$  lấy một phần tử  $a$  và  $A = A' \setminus \{a\}$  nên ta có  $(k+1)C_{n+1}^{k+1}$  cặp  $(a, A)$ .

Từ đó ta có điều cần chứng minh.

**Bài tập 2.** Ta đếm số các bộ  $(a, b, A)$  trong đó  $a, b \in X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  còn  $A$  là một tập con gồm  $k-2$  phần tử của  $X \setminus \{a, b\}$  theo hai cách.

**Cách 1.** Chọn  $a, b$  từ  $X$  ta có  $n(n-1)$ , khi đó sẽ có  $C_{n-2}^{k-2}$  cách chọn  $A$ .

Nên có tất cả  $n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$  bộ  $(a, b, A)$ .

**Cách 2.** Trước hết ta lấy từ  $X$  ra  $k$  phần tử, có  $C_n^k$  cách lấy rồi từ  $k$  phần tử đó ta lấy  $a, b$  ta có  $k(k-1)$  cách lấy. Tập còn lại có  $k-2$  phần tử đó chính là  $A$  nên ta có  $k(k-1)C_n^k$  số bộ  $(a, b, A)$ .

Từ đó ta có điều cần chứng minh.

**Bài tập 3.** Cho tập  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  và  $B = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ . Ta đếm số bộ  $(x, X)$  trong đó  $x$  một phần tử thuộc  $A$  còn  $X$  là một tập con gồm  $k$  phần tử của tập  $A \cup B \setminus \{x\}$  theo hai cách.

**Cách 1.** Ta có  $n$  cách chọn  $x$  và  $C_{n+k-1}^k$  cách chọn  $X$  nên có tất cả  $nC_{n+k-1}^k$  cặp.

**Cách 2.** Lấy từ  $A \cup B$  ra  $k+1$  phần tử. Trong  $k+1$  phần tử này có  $i (i = 1, \dots, k+1)$  phần tử thuộc  $A$  và  $k+1-i$  phần tử thuộc  $B$  nên mỗi trường hợp ta có  $i$  cách chọn  $a$  và  $k$  phần tử còn lại lập thành tập  $A$ .

Do đó số cặp là:  $\sum_{i=1}^{k+1} iC_n^i C_k^{k+1-i}$ . Từ đó ta có điều cần chứng minh.

**Bài tập 4.** Hãy đếm số cách lấy  $k$  phần tử từ tập gồm  $m+n$  phần tử.

**Bài tập 5.** Ta có  $C_{i-1}^{k-1} (i = \overline{k, n})$  chính là số tập con gồm  $k$  phần tử của tập  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  chứa  $i$  và không chứa phần tử nào lớn hơn  $i$ .

Do đó  $C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + \dots + C_{n-1}^{k-1}$  chính là số tập con gồm  $k$  phần tử của  $X$  mà ta đã biết số tập con này chính bằng  $C_n^k$  nên ta có đẳng thức cần chứng minh.

**Bài tập 6.** Cho tập  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Đếm số dãy gồm  $k$  phần tử thuộc  $X$ .

**Cách 1.** Mỗi vị trí có  $n$  cách chọn nên có  $n^k$  số các dãy cần lập.

**Cách 2.** Xét mỗi cách xếp dãy có  $k$  phần tử, trong đó mỗi phần tử  $i$  xuất hiện  $k_i$  lần ( $k_i \geq 0$ ).

Ta được số cách  $\frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$ .

Do đó  $\sum_{i=1}^k \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$  là số cách xếp dãy gồm  $k$  phần tử.

Từ đó ta có điều cần chứng minh.

**Bài tập 7.** Kí hiệu  $S(a) = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ , ta cần chứng minh tồn tại hai hoán vị  $b, c$  sao cho  $S(b) - S(c)$  chia hết cho  $n!$ . Ta tính  $\sum S(a)$  theo hai cách.

**Cách 1.** Trong tổng  $\sum S(a)$  (theo đồng dư mod  $n!$ ), mỗi  $k_i$  được tính lặp trong mỗi giai thừa với hệ số đúng  $(n-1)!$  lần ứng với mỗi số  $i \in A$  nhận nó làm hệ số. Do đó tổng hệ số  $k_i$  trong  $\sum S(a)$  là

$$(n-1)!(1+2+\dots+n) = \frac{(n+1)!}{2}$$

Nên  $\sum S(a) = \frac{(n+1)!}{2} \sum_{i=1}^n k_i$ .

**Cách 2.** Giả sử không tồn tại hai hoán vị  $b, c$  sao cho  $S(b) - S(c)$  chia hết cho  $n!$ . Khi đó số dư mà  $S(a)$  chia cho  $n!$  có  $n!$  số dư khác nhau  $0, 1, 2, \dots, n! - 1$ . Do đó ta có

$$\sum S(a) \equiv \frac{(n!-1)n!}{2} \pmod{n!}$$

Từ đó ta suy ra được  $\frac{(n+1)!}{2} \sum_{i=1}^n k_i \equiv \frac{(n!-1)n!}{2} \pmod{n!}$  (\*)

Ta cho  $n$  lẻ thì vế trái của (\*) chia hết cho  $n!$ , trong khi đó vế phải của (\*) không chia hết cho  $n!$  nên dẫn tới điều vô lí.

**Bài tập 8.** Gọi  $A$  là tập các bộ có dạng  $(a_1, a_2, \dots, a_{2011}, \dots, a_{2010+2011})$ , trong đó

- $a_i \in \{0, 1\}$  với mọi  $i = \overline{1, 4021}$ ;
- Trong mỗi bộ có đúng 2011 chữ số 1.

Kí hiệu  $A_{(n_1, n_2, \dots, n_{2011})}$  là tập các bộ có thứ tự  $(a_1, \dots, a_{4021}) \in A$  sao cho trong mỗi bộ có đúng  $n_i$  nhóm gồm  $i$  chữ số 1 đứng liên tiếp nhau trong bộ (tức là nhóm có dạng  $0 \underbrace{11 \dots 1}_k 0, \underbrace{1 \dots 1}_k 0, \underbrace{11 \dots 1}_k 0$ )

Khi đó ta có:  $A = \bigcup A_{(n_1, \dots, n_{2011})}$  (hợp lấy theo các bộ có thứ tự các số tự nhiên  $(n_1, n_2, \dots, n_{4021})$

thỏa  $\sum_{i=1}^{2011} i \cdot n_i = 2011$ )

Suy ra

$$\begin{aligned} |A_{(n_1, \dots, n_{2011})}| &= \frac{2011!}{n_1! n_2! \dots n_{2011}! (2011 - n_1 - \dots - n_{2011})!} \\ &= \sum \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_{2011}! (n_2 + 2n_3 + \dots + 2011n_{2011})!} \\ |A| &= \sum |A_{(n_1, \dots, n_{2011})}| = \sum \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_{2011}! (n_2 + 2n_3 + \dots + 2011n_{2011})!} \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có  $|A| = C_{4021}^{2010}$ .

Do đó

$$\sum \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_{2011}! (n_2 + 2n_3 + \dots + 2011n_{2011})!} = C_{4021}^{2010}$$

## Tài liệu tham khảo

[1] Vũ Đình Hòa, *Lý thuyết tổ hợp và các bài toán ứng dụng*, NXB Giáo dục, 2003.

[2] Ngô Thúc Lan, *Tìm hiểu đại số tổ hợp phổ thông*, NXB Giáo dục, 1998.

[3] Các tài liệu từ internet.

[4] Các diễn đàn về toán như

- Diễn đàn Math.vn  
<http://math.vn/index.php>
- Diễn đàn MathScope  
<http://forum.mathscope.org/index.php>





# PHƯƠNG PHÁP ĐẾM BẰNG HAI CÁCH

Phan Đức Minh<sup>1</sup>

## 1. Cơ sở lý thuyết

**Nguyên lý 1** (Nguyên lý đếm bằng hai cách). *Nếu cùng một số lượng được đếm theo hai cách thì các kết quả thu được phải bằng nhau.*

Khi áp dụng phương pháp đếm bằng hai cách, ta cần chú ý đến các biểu thức có ý nghĩa trong tổ hợp:  $\binom{n}{k}$  là số tập con có  $k$  phần tử của một tập có  $n$  phần tử;  $n!$  là số các hoán vị của  $n$  phần tử;  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  là số các bội số của  $k$  trong  $n$  số nguyên dương đầu tiên;  $n^k$  là số chỉnh hợp lặp chập  $k$  của  $n$  phần tử...

Nắm vững được bản chất của các biểu thức trên, ta có thể chứng minh một số đẳng thức và bất đẳng thức tổ hợp bằng phương pháp đếm bằng hai cách.

## 2. Các bài toán áp dụng phương pháp đếm bằng hai cách

### 2.1. Đếm số tập con, số cặp và số hoán vị

**Bài toán 1.** Cho  $k, n$  là các số tự nhiên với  $0 \leq k \leq n$ . Chứng minh rằng

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

**LỜI GIẢI.** Đây là ví dụ cơ bản nhất cho phương pháp đếm bằng hai cách. Ta quan sát thấy về trái của đẳng thức cần chứng minh là số các  $k$ -tập con của  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ <sup>2</sup>, trong khi đó về phải là số các  $(n-k)$ -tập con của  $[n]$ . Như vậy đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được số các  $k$ -tập con bằng số các  $(n-k)$ -tập con. Mà điều này là hiển nhiên vì mỗi  $k$ -tập con  $S$  của  $[n]$  tương ứng duy nhất với  $(n-k)$ -tập con  $[n] \setminus S$ . Vậy số các  $k$ -tập con bằng số các  $(n-k)$ -tập con. Ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng với  $n, k$  là các số nguyên và  $1 \leq k \leq n$ , ta luôn có đẳng thức

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} = (n-k+1) \binom{n}{k-1}$$

**LỜI GIẢI.** Tích của  $k$  và  $\binom{n}{k}$  gợi ý cho chúng ta sử dụng quy tắc nhân.  $\binom{n}{k}$  là số các  $k$ -tập con của  $[n]$  và  $k$  là số cách chọn ra một phần tử từ một tập hợp có  $k$  phần tử. Do đó  $k \binom{n}{k}$  sẽ cho chúng ta số  $\mathcal{N}$  các cặp  $(e, S)$ , trong đó  $e \in S \subseteq [n]$  và  $|S| = k$ . Ta sẽ đếm số cặp trên theo các

<sup>1</sup>SV Cử nhân Khoa học tài năng Toán học K15, ĐHKHTN - ĐHQGHN.

<sup>2</sup>Từ đây về sau, nếu không có giải thích gì thêm, ta sẽ sử dụng kí hiệu như trên. Với  $n = 0$  thì  $[0] = \emptyset$ .

cách khác :

Với mỗi phần tử  $e$  của  $[n]$ , ta có  $\binom{n-1}{k-1}$  tập con có  $k$  phần tử của  $[n]$  chứa  $e$ . Do đó  $\mathcal{N} = n\binom{n-1}{k-1}$ . Mặt khác, nếu ta chọn trước  $k-1$  phần tử của  $S$ , sau đó chọn  $e$  từ  $n-k+1$  phần tử còn lại để bổ sung vào  $S$ . Khi đó  $\mathcal{N} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$ .

Theo nguyên lý đếm bằng hai cách, ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 3** (Đẳng thức Pascal). Chứng minh rằng với  $k, n$  là các số nguyên và  $1 \leq k \leq n$ , ta luôn có đẳng thức

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

LỜI GIẢI. Về trái của đẳng thức cần chứng minh là số tập con  $S$  có  $k$  phần tử của  $[n+1]$ . Về phải là tổng của hai biểu thức gợi ý cho chúng ta sử dụng quy tắc cộng.  $\binom{n}{k}$  và  $\binom{n}{k-1}$  tương ứng là số  $k$ -tập con và  $(k-1)$  tập con của  $[n]$ , trong khi tập hợp ban đầu của chúng ta là  $[n+1]$ . Từ đó ta xét hai trường hợp sau với một phần tử  $e$  bất kì của  $[n+1]$  :

1.  $e \in S$  : Số các tập  $S$  thỏa mãn sẽ là  $\binom{n}{k-1}$ ;
2.  $e \notin S$  : Số các tập  $S$  thỏa mãn là  $\binom{n}{k}$ .

Vì vậy số tập con có  $k$  phần tử của  $[n+1]$  là  $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ . Ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 4.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$ , ta có

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

LỜI GIẢI. Đặt  $S_n$  là tập hợp tất cả các tập con của  $[n]$ . Vì trong  $S_n$  có  $\binom{n}{0}$  tập có 0 phần tử,  $\binom{n}{1}$  tập có 1 phần tử,  $\dots$ ,  $\binom{n}{n}$  tập có  $n$  phần tử. Do đó ta có

$$|S_n| = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$

Mặt khác, với mỗi phần tử  $e$  và tập con  $S$  của  $[n]$ , chỉ có hai khả năng xảy ra là  $e \in S$  và  $e \notin S$ . Suy ra số các tập con của  $[n]$  là  $2^n$ . So sánh với đẳng thức trên, ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Chú ý :** Từ kết quả số tập con của  $[n]$  bằng  $2^n$ , ta còn kí hiệu  $2^{[n]}$  là tập hợp tất cả các tập con của  $[n]$ . Tổng quát hơn, ta kí hiệu  $2^S$  là tập hợp tất cả các tập con của một tập hợp  $S$  bất kì.

**Bài toán 5.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$ , ta có

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

LỜI GIẢI. Trước hết, ta sẽ đếm số tập con có chẵn phần tử của  $[n]$ . Số các tập con này là

$$\sum \binom{n}{2k}$$

Để có một tập con có chẵn phần tử của  $[n]$ , trước hết ta chọn ra  $n - 1$  phần tử cố định và chọn tiếp một tập con bất kì của  $n - 1$  phần tử này. Nếu tập con đã chọn ra có một số chẵn phần tử thì ta đã có một tập con có chẵn phần tử của  $[n]$ , nếu tập con đã chọn ra có một số lẻ phần tử thì ta sẽ bổ sung phần tử còn lại của  $[n]$  vào tập con này. Khi đó ta cũng có một tập con có chẵn phần tử của  $[n]$ .

Vì vậy số tập con có một số chẵn phần tử của  $[n]$  cũng bằng số tập con của  $[n - 1]$  và bằng  $2^{n-1}$ . Và vì số tập con của  $[n]$  bằng  $2^n$  nên số tập con có số chẵn phần tử của  $[n]$  bằng số tập con có số lẻ phần tử của  $[n]$ . Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.  $\square$

**Nhận xét :** Sự xuất hiện  $(-1)^i$  trong số hạng tổng quát của tổng khiến chúng ta nghĩ đến việc tách thành hai tổng nhỏ : một tổng với  $k$  chẵn và một tổng với  $k$  lẻ. Nếu như đẳng thức ta cần chứng minh là đúng (và hiển nhiên rằng nó đúng!) thì ta sẽ suy ra rằng số các tập con có một số chẵn phần tử bằng một nửa số các tập con của  $[n]$  và bằng  $2^{n-1}$ . Con số này lại chính bằng số tập con của  $[n - 1]$ , từ đó dẫn đến cách chứng minh trên. Nếu suy nghĩ theo hướng chứng minh trực tiếp số tập con có một số chẵn phần tử bằng số tập con có một số lẻ phần tử thì sẽ tương đối khó khăn để thực hiện điều này.

**Bài toán 6** (Đẳng thức Vandermonde). Cho  $m, n, r$  là các số tự nhiên với  $r \leq \min\{m, n\}$ . Chứng minh rằng

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}$$

**LỜI GIẢI.** Ta sẽ phân hoạch tập  $[m+n]$  thành hai tập con  $A, B$ , trong đó  $|A| = m, |B| = n$  và đếm số tập con  $S$  có  $r$  phần tử của  $[m+n]$  bằng cách xét  $|S \cap A|$  và  $|S \cap B|$  : Nếu  $|S \cap A| = i$  thì  $|S \cap B| = r - i$  (vì  $A \cup B = \emptyset$ ). Cho  $i$  chạy từ 0 đến  $r$  và lấy tổng, ta sẽ thu được số tập con  $S$  có  $r$  phần tử của  $[m+n]$ . Đẳng thức được chứng minh.  $\square$

**Tổng quát :** Cho  $n, x, y, k_i$  ( $i = \overline{1, y}$ ) là các số tự nhiên. Khi đó ta có đẳng thức

$$\sum_{k_1, \dots, k_y=0}^x \binom{n}{k_1} \binom{n}{k_2} \cdots \binom{n}{k_y} \binom{n}{x - \sum_{j=1}^y k_j} = \binom{(y+1)n}{x}$$

**Bài toán 7.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$ , ta luôn có

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$$

**LỜI GIẢI.** Phân hoạch  $[2n]$  thành hai tập  $X, Y$  với  $|X| = |Y| = n$ . Ta sẽ đếm số  $\mathcal{N}$  các cặp  $(e, A, B)$ . Trong đó  $e \in A; A \subseteq X, B \subseteq Y; |A| + |B| = n$ .

Đặt  $|A| = k, |B| = n - k, k = \overline{1, n}$ . Ta có  $\binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$  cách chọn  $A, B$ . Từ đó, với mỗi  $k$  có  $k \binom{n}{k}^2$  cách chọn  $(e, A, B)$ . Vì vậy

$$\mathcal{N} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2$$

Mặt khác, với  $e$  bất kì thuộc  $[2n]$ , mỗi tổ hợp chập  $n - 1$  của  $2n - 1$  phần tử của  $[2n] \setminus \{e\}$  sẽ

tương ứng với một cặp  $(e, A, B)$  thỏa mãn đề bài. Do đó

$$\mathcal{N} = n \binom{2n-1}{n-1}$$

Vậy ta có đẳng thức cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 8.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $m, n$  và  $m \leq n$ , ta có

$$\sum_{i=m}^n \binom{n}{i} \binom{i}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}$$

LỜI GIẢI. Xét các cặp  $(A, B)$  với  $|A| = m, |B| = i$  và  $A \subseteq B \subseteq [n]$ . Số các cặp này là

$$\sum_{i=m}^n \binom{n}{i} \binom{i}{m}$$

Với mỗi tập con  $A$  có  $m$  phần tử của  $[n]$ , ta chọn thêm một tập con bất kì trong số  $n-m$  phần tử của  $[n] \setminus A$  “bổ sung” vào  $A$  để tạo thành  $B$ . Do đó số các cặp  $(A, B)$  là  $2^{n-m} \binom{n}{m}$ .  $\square$

**Bài toán 9.** Chứng minh rằng nếu  $k, n$  là các số nguyên dương thì

$$\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$$

LỜI GIẢI. Ta viết lại đẳng thức cần chứng minh như sau :

$$\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

Ta đếm số các tập con có  $n+1$  phần tử của  $[n+k+1]$  bằng cách chia trường hợp : Có  $\binom{n}{n}$  tập con có phần tử lớn nhất là  $n+1$ . Có  $\binom{n+1}{n}$  tập con có phần tử lớn nhất là  $n+2$ . . . Có  $\binom{n+k}{n}$  tập con có phần tử lớn nhất là  $n+k+1$ . Từ các trường hợp trên, ta suy ra rằng số tập con có  $n+1$  phần tử của  $[n+k+1]$  bằng

$$\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{n}$$

Mặt khác, số tập con này bằng  $\binom{n+k+1}{n+1}$ . Theo nguyên lý đếm bằng hai cách, ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 10.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$ , ta có

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{n-2i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{i} = \binom{2n}{n}$$

LỜI GIẢI. Vế phải của đẳng thức cần chứng minh là số tập con có  $n$  phần tử của  $[2n]$ . Ta sẽ đếm số tập con này bằng cách phân hoạch  $[2n]$  thành hai tập con  $A, B$  với  $|A| = |B| = n$ .

Gọi các phần tử của  $A, B$  lần lượt là  $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$  và ghép cặp  $(a_j, b_j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Xét một tập con  $S$  của  $[2n]$  với  $|S| = n$ . Ta gọi một phần tử của  $[2n]$  là “tốt” nếu nó thuộc  $S$ .

Dễ thấy rằng với mỗi tập con  $S$  có  $n$  phần tử của  $[2n]$ , số các cặp  $(a, b)$  mà  $a, b$  cùng “tốt” bằng số cặp  $(a, b)$  mà  $a, b$  cùng không “tốt”. Đặt số cặp này là  $i$ . Rõ ràng  $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

Ta có  $\binom{n}{i} \binom{n-i}{i}$  cách chọn ra  $i$  cặp “tốt” và  $i$  cặp “không tốt”. Còn lại  $n - 2i$  cặp, ta sẽ chọn từ mỗi cặp một phần tử và đánh dấu phần tử đó là “tốt”. Như vậy ta đã chọn được đủ  $n$  phần tử “tốt”. Mặt khác, dễ thấy rằng mỗi cách chọn trên xác định duy nhất một tập con có  $n$  phần tử của  $[2n]$ . Vì vậy ta có

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{n-2i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{i} = \binom{2n}{n}$$

Đây chính là đẳng thức cần chứng minh.  $\square$

**Nhận xét :** Điểm đặc biệt trong lời giải trên là ghép cặp các phần tử của  $[2n]$  và sử dụng biểu thức  $2^{n-2i}$  để chọn ra đúng  $n - 2i$  phần tử thay vì một nhóm bất kì trong số  $n - 2i$  như công thức về số tập con quen thuộc. Bằng phương pháp tương tự, chúng ta có thể giải quyết bài toán sau : Cho  $n$  là một số nguyên dương, chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

**Bài toán 11.** Cho số nguyên  $n \geq 1$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot k! = n! - 1$$

**LỜI GIẢI.** Xét bài toán sau : Đếm số các hoán vị  $\sigma$  của  $[n]$  sao cho có ít nhất một số  $i$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) mà  $\sigma(i) \neq i$ .

Dễ thấy rằng số các hoán vị như vậy là  $n! - 1$ . Ta sẽ đếm theo phần tử  $i$  của  $[n]$  nhỏ nhất mà  $\sigma(i) \neq i$ .

Với mỗi  $k = \overline{1, n-1}$ , một hoán vị  $\sigma$  nhận  $n - k$  là phần tử  $i$  nhỏ nhất mà  $\sigma(i) \neq i$  được xây dựng như sau :  $n - k - 1$  số đầu tiên của  $\sigma$  vẫn là  $1, 2, \dots, n - k - 1$ . Tiếp theo đó,  $\sigma(n - k)$  có thể nhận  $k$  giá trị thuộc tập  $\{n - k + 1, n - k + 2, \dots, n\}$ .  $k$  số còn lại có thể sắp xếp theo  $k!$  cách.

Vì vậy có  $k \cdot k!$  hoán vị thỏa mãn điều kiện trên với mỗi  $k = \overline{1, n-1}$ . Cho  $k$  chạy từ 1 đến  $n - 1$  và lấy tổng, ta sẽ thu được số các hoán vị cần tìm là

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot k!$$

Vậy ta có đẳng thức cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 12** (IMO 1987). Gọi  $p_n(k)$  là số các hoán vị của  $[n]$  có đúng  $k$  điểm cố định. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n k \cdot p_n(k) = n!$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ đếm tất cả các cặp  $(x, s)$  với  $s$  là một hoán vị của  $[n]$  và  $x$  là một điểm cố định của  $s$ .

Với mỗi phần tử  $x$ , ta có  $(n-1)!$  hoán vị nhận  $x$  là điểm cố định. Suy ra số các cặp  $(x, s)$  là

$$S = \sum_{x \in [n]} (n-1)! = n \cdot (n-1)! = n! \quad (1)$$

Mặt khác, với mỗi hoán vị  $s$  có đúng  $k$  điểm cố định thì ta có  $k$  cặp  $(x, s)$ . Do đó ta có

$$S = \sum_{k=0}^n k \cdot p_n(k) \quad (2)$$

Từ hai đẳng thức (1) và (2), ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Chú ý :** Ta cũng có thể giải quyết bài toán trên bằng cách chứng minh đẳng thức  $k \cdot p_n(k) = np_{n-1}(k-1)$ .

**Bài toán 13. Sự chia lớp :** Họ các tập con khác rỗng  $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$  của tập  $X$  được gọi là một *sự chia lớp* tập  $X$  nếu nó thỏa mãn điều kiện  $A_i \cap A_j = \emptyset$  với mọi  $i \neq j$  và  $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ .

**Số Bell**  $B_n$  là số tất cả các cách chia lớp  $[n]$  (giả sử  $B_0 = 1$ ). Chứng minh rằng

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_i$$

LỜI GIẢI. Xét một phần tử  $e$  bất kì của  $[n+1]$ . Ta sẽ đếm số các cách chia lớp  $[n+1]$  theo lực lượng của tập con của  $[n+1]$  chứa  $e$ .

Giả sử  $e \in A$  với  $|A| = i+1$  ( $i = \overline{0, n}$ ). Ta thực hiện chia lớp  $[n+1]$  theo các bước sau :

1. Bổ sung thêm  $i$  phần tử từ  $n$  phần tử còn lại của  $[n+1] \setminus \{e\}$  : Có  $\binom{n}{i}$  cách;
2. Chia lớp  $n-i$  phần tử còn lại : Có  $B_{n-i}$  cách.

Vì vậy số các cách chia lớp  $[n+1]$  bằng

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{n-i} B_{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_i$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.  $\square$

**Bài toán 14.** Cho số nguyên dương  $n$ , Ký hiệu  $\tau_n$  là số ước nguyên dương của  $n$ . Chứng minh rằng

$$\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$$

LỜI GIẢI. Xét trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Ta gọi một điểm là điểm nguyên nếu tọa độ của nó là các số nguyên.

Xét một nhánh hyperbol  $(H_i^*)$  có phương trình  $y = \frac{i}{x}, x > 0$ . Vế phải của đẳng thức cần chứng minh là số các điểm nguyên nằm trong miền  $\mathcal{R}$  giới hạn bởi góc phần tư thứ nhất và  $(H_n^*)$  (có thể nằm trên  $(H_n^*)$ ).

Với mỗi  $i = \overline{1, n}$ . Ta có  $\tau_i$  là số điểm nguyên nằm trên  $(H_i^*)$ . Mặt khác, dễ thấy rằng mọi điểm nguyên nằm trên  $(H_i^*)$  đều thuộc  $\mathcal{R}$ . Do đó các nhánh hyperbol  $(H_i^*)$ ,  $i = \overline{1, n}$  đi qua tất cả các điểm nguyên thuộc  $\mathcal{R}$ . Vì vậy số các điểm nguyên thuộc  $\mathcal{R}$  chính bằng  $\sum_{i=1}^n \tau_i$ .

Từ các nhận xét trên, ta có đẳng thức cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 15.** Một họ  $\mathcal{F}$  các tập con của  $[n]$  được gọi là một *phản chuỗi* (antichain, còn gọi là *đôi xích* hoặc *họ Sperner*) nếu không có một tập nào của  $\mathcal{F}$  chứa một tập khác trong họ  $\mathcal{F}$ . Đặt  $a_k$  là số các tập có  $k$  phần tử trong  $\mathcal{F}$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Các kết quả về phản chuỗi thường rất đẹp và đóng một vai trò quan trọng trong tối ưu tổ hợp. Dưới đây là một số kết quả trong số đó :

(a) (Bất đẳng thức Lubell – Yamamoto – Meshalkin)  $\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$ ;

(b) (Định lý Sperner) Phản chuỗi lớn nhất của  $[n]$  chứa  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  tập.

**LỜI GIẢI.** (a) Xét chuỗi tập con  $\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n = [n]$ , trong đó  $|S_i| = i$  với  $i = \overline{0, n}$ . Dễ thấy rằng mỗi chuỗi như trên tương ứng với một hoán vị của  $[n]$ . Vì vậy có đúng  $n!$  chuỗi như vậy.

Mặt khác, với mỗi  $A \in \mathcal{F}$  và  $|A| = k$ , có đúng  $k!(n-k)!$  chuỗi chứa  $A$  (tại sao?). Chú ý rằng không một chuỗi nào chứa hai tập con trong  $\mathcal{F}$ . Suy ra số các chuỗi chứa các tập trong  $\mathcal{F}$  là

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot k!(n-k)!$$

Lại có số các chuỗi như trên không vượt quá tổng số tất cả các chuỗi của  $[n]$ . Do đó

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot k!(n-k)! \leq n!$$

Chia cả hai vế của bất đẳng thức trên cho  $n!$ , ta có điều cần chứng minh.

(b) Từ câu (a), kết hợp với bất đẳng thức quen thuộc  $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ ,  $\forall k = \overline{0, n}$ . Ta suy ra

$$\frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

Do đó

$$|\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^n a_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Mặt khác, xét  $\mathcal{F}^*$  là họ các  $\lfloor n/2 \rfloor$ -tập con của  $[n]$  thì  $\mathcal{F}^*$  là một phản chuỗi và  $|\mathcal{F}^*| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ . Ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 16** (Định lý Erdős – Ko – Rado). Một họ  $\mathcal{F}$  các tập con của  $[n]$  được gọi là một *k-họ giao nhau* nếu tất cả các tập trong  $\mathcal{F}$  đều có  $k$  phần tử và hai tập bất kì trong  $\mathcal{F}$  đều có phần tử chung. Chứng minh rằng *k-họ giao nhau* lớn nhất của  $[n]$  chứa  $\binom{n-1}{k-1}$  tập với  $n \geq 2k$ .

**LỜI GIẢI.** Xét một đa giác đều  $n$  cạnh  $P$ . Một *cung* độ dài  $k$  gồm  $k+1$  đỉnh liên tiếp của  $P$  và  $k$  cạnh nằm giữa chúng. Ta có bổ đề sau :

**Bổ đề.** Giả sử rằng  $n \geq 2k$  và ta có  $t$  cung phân biệt  $A_1, A_2, \dots, A_t$  có độ dài  $k$ . Biết rằng hai cung bất kì có một cạnh chung. Khi đó  $t \leq k$ .

Chú ý rằng mỗi đỉnh của  $P$  là đầu mút của tối đa một cung. Thật vậy, nếu hai cung  $A_i, A_j$  có chung một đầu mút. Khi đó hai cung  $A_i, A_j$  nằm về hai nửa đa giác. Và vì  $n \geq 2k$  nên  $A_i, A_j$  không thể có cạnh chung, vô lý.

Xét cung  $A_1$ . Vì mọi cung  $A_i$  ( $i \geq 2$ ) đều có cạnh chung với  $A_1$  nên một trong hai đầu mút của  $A_i$  nằm trong  $A_1$ . Mà  $A_1$  có  $k - 1$  điểm trong và các đầu mút này phân biệt như ta vừa chỉ ra. Do đó có tối đa  $k - 1$  cung khác. Suy ra số cung tối đa là  $k$   $\square$

Quay trở lại với bài toán của chúng ta. Ta sẽ đếm số  $\mathcal{N}$  các cặp  $(A, \sigma)$ . Trong đó  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\sigma$  là một hoán vị vòng quanh  $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  của  $[n]$  và các phần tử của  $A$  là  $k$  số liên tiếp của  $\sigma$ .

Ta viết các số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  lần lượt theo chiều kim đồng hồ lên các cạnh của  $P$ . Từ bổ đề trên, với mỗi hoán vị vòng quanh  $\sigma$ , có tối đa  $k$  tập trong  $\mathcal{F}$  có các phần tử là  $k$  số liên tiếp của  $\sigma$ . Lại có số hoán vị vòng quanh  $\sigma$  bằng  $(n - 1)!$ . Vì vậy ta có

$$\mathcal{N} \leq k(n - 1)! \quad (1)$$

Với mỗi  $A \in \mathcal{F}$ , ta có  $k!(n - k)!$  hoán vị vòng quanh của  $[n]$ . Do đó số  $\mathcal{N}$  các cặp  $(A, \sigma)$  bằng

$$|\mathcal{F}| \cdot k!(n - k)! \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{k(n - 1)!}{k!(n - k)!} = \binom{n - 1}{k - 1}$$

Xét  $e$  là một phần tử bất kì của  $[n]$ . Dễ thấy rằng có đúng  $\binom{n - 1}{k - 1}$  tập con có  $k$  phần tử của  $[n]$  chứa  $e$  và các tập con này tạo thành một  $k$ -họ giao nhau của  $[n]$ . Vậy ta có điều cần chứng minh.  $\square$

## 2.2. Phương pháp đếm bằng hai cách và đồ thị hữu hạn

Chúng ta sẽ xét các bài toán của lý thuyết đồ thị được giải quyết bằng phương pháp đếm bằng hai cách :

**Bài toán 17.** Giả sử rằng đồ thị  $G = (V, E)$  có  $|V| = n$  và không chứa một chu trình độ dài 4 (kí hiệu  $C_4$ ). Tìm số cạnh lớn nhất có thể của  $G$ .

**LỜI GIẢI.** Đặt  $d(u)$  là bậc của đỉnh  $u$ ;  $S$  là tập các cặp  $(u, \{v, w\})$ , trong đó  $u$  kề với  $v$  và  $w, v \neq w$ .

Với mỗi đỉnh  $u$  của  $G$ , số các cặp như trên là  $\binom{d(u)}{2}$ . Vì vậy ta có

$$|S| = \sum_{u \in V} \binom{d(u)}{2}$$

Mặt khác, với mỗi cặp  $\{v, w\}$  chỉ tồn tại nhiều nhất một đỉnh  $u \in V$  sao cho  $(u, \{v, w\}) \in S$  (vì  $G$  không chứa  $C_4$ ). Suy ra  $|S| \leq \binom{n}{2}$ . Do đó

$$\sum_{u \in V} \binom{d(u)}{2} \leq \binom{n}{2}$$



Tương đương với

$$\sum_{u \in V} d(u)^2 \leq n(n-1) + \sum_{u \in V} d(u)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$n^2(n-1) + n \sum_{u \in V} d(u) \geq n \sum_{u \in V} d(u)^2 \geq \left( \sum_{u \in V} d(u) \right)^2$$

Với chú ý rằng  $\sum_{u \in V} d(u) = 2|E|$ , ta có

$$n^2(n-1) + 2n|E| \geq 4|E|^2$$

hay

$$|E|^2 - \frac{n}{2} \cdot |E| - \frac{n^2(n-1)}{4} \leq 0$$

Giải bất phương trình bậc 2 trên, ta suy ra

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n}{4} (1 + \sqrt{4n-3}) \right\rfloor$$

□

**Bài toán 18** (Công thức Cayley). Chứng minh rằng có đúng  $n^{n-2}$  cây có thể tạo thành từ  $n$  đỉnh phân biệt.

**LỜI GIẢI.** Ta sẽ đếm số  $\mathcal{N}$  các dãy các cạnh có hướng có thể thêm vào  $n$  đỉnh trên để tạo thành một cây có gốc. Các cạnh có hướng được thêm vào có hướng sao cho với mỗi đỉnh  $V$  thì các cạnh thuộc đường nối gốc  $R$  của cây với  $V$  có hướng từ  $R$  đến  $V$ .

Gọi  $T_n$  là số các cây biểu diễn khác nhau của đồ thị đầy đủ  $K_n$ . Với mỗi cây trong số  $T_n$  cây chưa có gốc, ta chọn ra một trong số  $n$  đỉnh làm gốc và chọn một trong số  $(n-1)!$  hoán vị của  $n-1$  cạnh của cây để tạo thành một dãy cạnh có hướng (chú ý rằng hướng của mỗi cạnh được xác định duy nhất vì giữa hai đỉnh bất kì của một cây chỉ có đúng một đường nối duy nhất). Suy ra

$$\mathcal{N} = T_n \cdot n \cdot (n-1)! = n! T_n$$

Ta sẽ xây dựng một cây có gốc như trên bằng cách thêm từng cạnh một vào  $n$  đỉnh đã cho. Giả sử rằng ta đã thêm  $n-k$  cạnh ( $k = \overline{2, n}$ ) vào  $\overline{K}_n$ . Khi đó ta thu được một bụi có gốc gồm  $k$  cây. Có  $n(k-1)$  cách thêm vào một cạnh : đỉnh đầu của nó là một trong số  $n$  đỉnh và đỉnh cuối của nó là một trong số  $k-1$  gốc của  $k-1$  cây không chứa đỉnh đầu. Vì vậy ta có

$$\mathcal{N} = \prod_{k=2}^n n(k-1) = n^{n-1} \cdot (n-1)! = n^{n-2} \cdot n!$$

Từ hai đẳng thức trên ta suy ra  $n! T_n = n^{n-2} \cdot n!$  hay  $T_n = n^{n-2}$ .

□

Một số bài toán có thể được giải quyết bằng cách sử dụng lý thuyết đồ thị kết hợp với phương pháp đếm bằng hai cách. Ta xét các ví dụ sau :

**Bài toán 19.** Cho các số nguyên  $0 \leq k \leq n$ . Chứng minh rằng

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}$$

**LỜI GIẢI.** Xét đồ thị đầy đủ  $K_n$ . Ta chọn ra  $k$  đỉnh tùy ý của  $K_n$  và xếp các cạnh của  $K_n$  vào 3 nhóm :

- $\binom{k}{2}$  cạnh của đồ thị con đầy đủ tạo từ  $k$  đỉnh đã chọn;
- $\binom{n-k}{2}$  cạnh của đồ thị con đầy đủ tạo từ  $n-k$  đỉnh còn lại;
- $k(n-k)$  cạnh nối giữa các đỉnh của 2 đồ thị con trên.

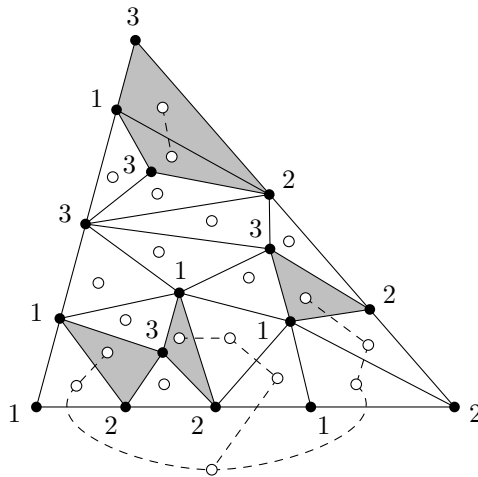
Rõ ràng rằng tất cả các cạnh của đồ thị ban đầu phải thuộc vào một và chỉ một trong 3 trường hợp trên. Vì vậy tổng số các cạnh của 3 nhóm trên bằng số cạnh của đồ thị ban đầu hay ta có

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}$$

Đây chính là đẳng thức cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 20** (Bổ đề Sperner). Cho một tam giác  $V_1V_2V_3$  được phân hoạch thành các tam giác nhỏ sao cho không có một đỉnh nào của các tam giác nhỏ nằm trên cạnh một tam giác nhỏ khác (có thể nằm trên cạnh của tam giác ban đầu). Giả sử rằng các đỉnh được đánh số 1, 2, 3 sao cho  $V_i$  được đánh số  $i$  và chỉ hai số  $i, j$  được đánh số cho các đỉnh nằm trên cạnh  $V_iV_j$  ( $i, j = \overline{1, 3}, i \neq j$ ). Chứng minh rằng tồn tại một tam giác nhỏ mà 3 đỉnh của nó được đánh số bởi cả 3 số 1, 2, 3.

**LỜI GIẢI.** Gọi tam giác nhỏ mà 3 đỉnh của nó được đánh số bởi cả 3 số 1, 2, 3 là tam giác “tốt”. Ta sẽ chứng minh một kết quả mạnh hơn : Số các tam giác “tốt” là một số lẻ.



Xét đồ thị đối ngẫu<sup>3</sup>  $G$  của cách phân hoạch tam giác  $V_1V_2V_3$  nhưng không lấy tất cả các cạnh của nó. Hai đỉnh của  $G$  được nối với nhau bởi một cạnh khi và chỉ khi hai miền mặt phẳng

<sup>3</sup>Đồ thị đối ngẫu của một đồ thị phẳng  $G$  là một đồ thị  $G'$  trong đó mỗi đỉnh tương ứng với một miền mặt phẳng của đồ thị  $G$  và các cạnh được nối giữa hai đỉnh tương ứng với hai miền kề nhau.

tương ứng với hai đỉnh đó có cạnh chung mà hai đầu mút của nó được đánh số bởi 1 và 2.

Dễ thấy rằng với mỗi tam giác “tốt” thì bậc của đỉnh tương ứng với nó bằng 1, bậc bằng 2 với các tam giác mà 3 đỉnh của nó được đánh số bởi một trong hai số 1, 2 và bậc bằng 0 với các tam giác không có đồng thời hai đỉnh được đánh số 1, 2. Khi đó chỉ các tam giác “tốt” mới tương ứng với một đỉnh bậc lẻ.

Mặt khác, trên cạnh  $V_1V_2$ , ta có một số lẻ các cạnh của các tam giác nhỏ có dạng 1 – 2. Và vì các cạnh có dạng 1 – 2 chỉ xuất hiện trên cạnh  $V_1V_2$  nên ta suy ra bậc của đỉnh tương ứng với phần mặt phẳng nằm ngoài tam giác ban đầu có bậc lẻ.

Từ kết quả quen thuộc : số các đỉnh bậc lẻ của một đồ thị hữu hạn là một số chẵn, ta suy ra rằng số các tam giác “tốt” là một số lẻ.  $\square$

### 2.3. Phương pháp ma trận liên thuộc

Trước hết chúng ta sẽ đến với một cách phát biểu khác của nguyên lý đếm bằng hai cách :

**Nguyên lý 2** (Nguyên lý Fubini). Cho hai tập hữu hạn  $R, C$  và  $S \subseteq R \times C$ . Nếu  $(p, q) \in S$ , ta nói rằng  $p$  và  $q$  liên thuộc với nhau. Đặt  $r_p$  là số các phần tử liên thuộc với  $p \in R$  và  $c_q$  là số các phần tử liên thuộc với  $q \in C$ . Khi đó

$$\sum_{p \in R} r_p = |S| = \sum_{q \in C} c_q$$

Để minh họa cho tập  $S$ , ta sẽ dùng đến ma trận liên thuộc của  $S$  :

**Định nghĩa 1.** Ma trận  $M = (a_{pq})$  là ma trận mà các cột và các hàng của nó tương ứng được đánh số theo các phần tử của  $R$  và  $C$  với

$$a_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (p, q) \in S \\ 0 & \text{nếu } (p, q) \notin S \end{cases}$$

Khi đó  $r_p$  là tổng của các phần tử ở cột  $p$ ,  $c_q$  là tổng của các phần tử ở cột  $q$  và  $|S|$  là tổng tất cả các phần tử của ma trận  $M$ . Với một số bài toán, phương pháp ma trận liên thuộc sẽ giúp chúng ta dễ hình dung hơn về cấu trúc của bài toán, từ đó đưa ra lời giải cho bài toán. Ta xét các ví dụ sau :

**Bài toán 21** (IMO 1998). Trong một cuộc thi có  $a$  thí sinh và  $b$  giám khảo, trong đó  $b \geq 3$  và là số nguyên lẻ. Mỗi giám khảo đánh giá “đạt” hoặc “trượt”. Giả sử rằng với hai giám khảo bất kì, họ đánh giá giống nhau với tối đa  $k$  thí sinh. Chứng minh rằng

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

**LỜI GIẢI.** Xét ma trận liên thuộc  $b \times a$  với các hàng được đánh số theo các giám khảo và các cột được đánh số theo các thí sinh. Phần tử tương ứng của ma trận nhận giá trị bằng 1 nếu giám khảo đánh giá thí sinh là “đạt” và nhận giá trị bằng 0 nếu ngược lại.

Đặt  $\mathcal{T}$  là tập hợp các cặp các số 0 hoặc 1 trong cùng một cột. Vì hai giám khảo đánh giá giống nhau nhiều nhất là  $k$  thí sinh nên với hai hàng bất kì, có nhiều nhất  $k$  cặp thuộc  $\mathcal{T}$ . Do đó

$$|\mathcal{T}| \leq k \binom{b}{2} = \frac{kb(b-1)}{2}$$

Với mỗi cột trong ma trận, giả sử có  $p$  số 0 và  $q$  số 1. Khi đó sẽ có đúng  $\binom{p}{2} + \binom{q}{2}$  cặp thuộc  $\mathcal{T}$ . Mà  $p + q = b$  lẻ nên ta có bất đẳng thức sau (bạn đọc tự chứng minh)

$$\binom{p}{2} + \binom{q}{2} \geq \frac{(b-1)^2}{4}$$

Và vì có  $a$  cột nên ta có  $|\mathcal{T}| \geq \frac{a(b-1)^2}{4}$ . Vậy ta có

$$\frac{a(b-1)^2}{4} \leq |\mathcal{T}| \leq \frac{kb(b-1)}{2}$$

Suy ra  $\frac{a(b-1)}{2} \leq kb$  hay  $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$ . □

**Nhận xét :** Như đã nói ở trên, phương pháp ma trận liên thuộc kết hợp với nguyên lý Fubini cho chúng ta một hình dung dễ dàng hơn về cấu trúc bài toán. Ta vẫn có thể giải chúng mà không cần sử dụng đến ma trận liên thuộc. Chẳng hạn như ví dụ trên, chúng ta có thể giải quyết bằng cách xét các bộ  $(A, B, x)$ , trong đó  $x$  là một thí sinh và  $A, B$  là hai giám khảo đánh giá thí sinh  $x$  giống nhau.

**Bài toán 22** (IMC 2002). Có 200 thí sinh tham gia trong một cuộc thi. Họ được đề nghị giải 6 bài toán. Biết rằng mỗi bài toán được giải đúng bởi ít nhất 120 thí sinh. Chứng minh rằng phải có 2 thí sinh mà với mỗi bài toán, có ít nhất một trong hai thí sinh này giải được bài toán đó.

**LỜI GIẢI.** Xét ma trận liên thuộc  $6 \times 200$ , trong đó mỗi hàng đại diện cho một bài toán và mỗi cột đại diện cho một thí sinh tham gia cuộc thi. Mỗi phần tử của ma trận nhận giá trị 1 nếu thí sinh tương ứng với cột *không* giải được bài toán tương ứng với hàng và 0 nếu ngược lại.

Đặt  $\mathcal{N}$  là số các cặp các số 1 ở cùng hàng. Giả sử rằng với hai thí sinh bất kì, tồn tại một bài toán mà cả 2 đều không giải được. Khi đó, với hai cột bất kì, có ít nhất một cặp số 1 trong hai cột này nằm cùng một hàng. Mà ta có đúng  $\binom{200}{2}$  cặp cột. Do đó

$$\mathcal{N} \geq \binom{200}{2} = 19\,900 \tag{1}$$

Mặt khác, theo giả thiết thì có tối đa 80 số 1 ở mỗi hàng. Và vì vậy có nhiều nhất  $\binom{80}{2}$  cặp số 1 ở cùng hàng. Và vì có 6 hàng nên suy ra

$$\mathcal{N} \leq 6 \times \binom{80}{2} = 18\,960 \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta suy ra  $19\,900 \leq \mathcal{N} \leq 18\,960$ , vô lý. Vì vậy điều giả sử ban đầu của chúng ta là sai và bài toán được chứng minh. □

**Bài toán 23.** Số Turan  $T(n, k, l)$  ( $l \leq k \leq n$ ) là số nhỏ nhất các tập con có  $l$  phần tử của  $[n]$  sao cho với mọi tập con có  $k$  phần tử của  $[n]$  đều chứa ít nhất một tập con trên. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $l \leq k \leq n$ , ta có

$$T(n, k, l) \geq \frac{\binom{n}{l}}{\binom{k}{l}}$$

**LỜI GIẢI.** Đặt  $\mathcal{F}$  là họ nhỏ nhất các tập con  $l$  phần tử của  $[n]$  sao cho với mọi tập con  $k$  phần tử của  $[n]$  đều chứa ít nhất một phần tử của  $\mathcal{F}$ . Xét ma trận liên thuộc  $M = (m_{A,B})$  với các được đánh số theo các tập con  $A$  của  $\mathcal{F}$ , các cột được đánh số theo các tập con  $k$  phần tử  $B$  của  $[n]$  và  $m_{A,B} = 1$  khi và chỉ khi  $A \subseteq B$ , trong các trường hợp khác  $m_{A,B} = 0$ .

Đặt  $r_A$  là số các số 1 trong hàng  $A$  và  $c_B$  là số các số 1 trong cột  $B$ . Theo giả thiết thì  $c_B \geq 1$  với mọi  $B$ . Mặt khác,  $r_A$  là số các tập con  $k$  phần tử chứa tập con  $l$  phần tử  $A$ . Suy ra  $r_A = \binom{n-l}{k-l}$  với mọi  $A \in \mathcal{F}$ . Vì vậy

$$|\mathcal{F}| \cdot \binom{n-l}{k-l} = \sum_{A \in \mathcal{F}} r_A = \sum_{B \subseteq [n]} c_B \geq \binom{n}{k}$$

Do đó

$$T(n, k, l) = |\mathcal{F}| \geq \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-l}{k-l}} = \frac{\binom{n}{l}}{\binom{k}{l}}$$

Đẳng thức cuối độc giả có thể tự chứng minh, tương tự ví dụ 8.  $\square$

**Bài toán 24.** Cho số nguyên dương  $n$ , Ký hiệu  $\tau_n$  là số ước nguyên dương của  $n$  và  $\sigma_n$  là tổng các ước nguyên dương của  $n$ . Chứng minh rằng

- (a)  $\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$ ;  
 (b)  $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + n \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$ .

**LỜI GIẢI.** Để chứng minh đẳng thức (a), ngoài phương pháp sử dụng lưới điểm nguyên như ở bài 12, ta còn có thể sử dụng ma trận liên thuộc như dưới đây :

Xét ma trận  $M = (m_{ij})_{n \times n}$  với  $m_{ij} = 1$  khi và chỉ khi  $j$  chia hết cho  $i$ , trong các trường hợp khác,  $m_{ij} = 0$ .

Dễ thấy rằng số các số 1 ở cột  $j$  bằng  $\tau_j$  và số các số 1 ở hàng  $i$  bằng  $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ . Từ đó theo nguyên lý Fubini, đẳng thức (a) được chứng minh.

Để giải quyết câu (b), ta sẽ thay đổi cách đánh số các phần tử của  $M$  như sau :  $m_{ij} = i$  khi và chỉ khi  $j \vdots i$ . Khi đó tổng các số ở cột  $j$  sẽ bằng

$$\sum_{d|j} d = \sigma_j$$

Và tổng các số ở hàng  $i$  bằng  $i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ . Từ đó đẳng thức (b) được chứng minh.  $\square$

**Chú ý :** Từ đẳng thức (a), ta có thể suy ra bất đẳng thức sau

$$|\psi_n - \ln n| < 1$$

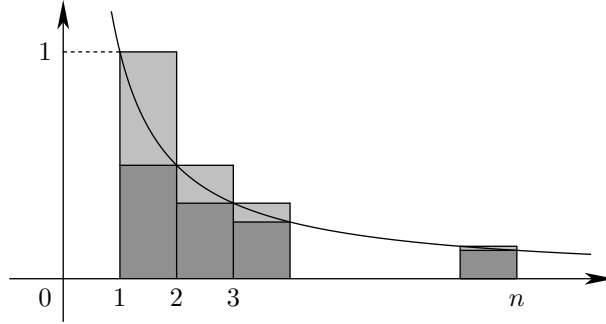
Trong đó  $\psi_n$  là trung bình cộng của các số  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ , tức là

$$\psi_n = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n}{n}$$

CHỨNG MINH. Từ bất đẳng thức  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$  với mọi số thực  $x$ , ta suy ra

$$H_n - 1 < \psi_n < H_n$$

Trong đó  $H_n$  là số điều hòa thứ  $n$ :  $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ . Ta sẽ tìm cách đánh giá  $H_n$  với  $\ln n$ .



Dựa vào hình vẽ trên, so sánh diện tích của hình giới hạn bởi các đường  $y = 0, y = \frac{1}{x}, x = 1, x = n$  và tổng diện tích của các hình chữ nhật, ta thấy rằng

$$H_n - 1 = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} < \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n$$

và

$$H_n - \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} > \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n$$

Do đó

$$\ln n + \frac{1}{n} < H_n < \ln n + 1$$

Vì vậy

$$\ln n - 1 < H_n - 1 - \frac{1}{n} < H_n - 1 < \psi_n < H_n < \ln n + 1$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. □

### 3. Các bài tập đề nghị

**Bài tập 1.** Trong mặt phẳng tọa độ trục chuẩn  $Oxy$ , xét tập  $M$  những điểm có tọa độ  $(x, y)$  với  $x, y$  nguyên,  $x, y = \overline{1, 12}$ . Mỗi điểm của  $M$  được tô bởi một trong 3 màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ, các đỉnh thuộc  $M$  và được tô bởi cùng một màu.

**Bài tập 2** (Bulgaria MO 2006). Một quốc gia có 16 thành phố và có 36 tuyến bay nối giữa chúng. Chứng minh rằng ta có thể tổ chức một chuyến bay vòng quanh giữa các thành phố.

**Bài tập 3.** Giả sử rằng các cạnh của đồ thị  $K_6$  được tô bởi hai màu. Khi đó tồn tại hai tam giác mà cả 3 cạnh của mỗi tam giác được tô bởi cùng một màu.

**Bài tập 4.** Giả sử  $k, n$  là hai số nguyên dương và  $S$  là tập hợp  $n$  điểm trên mặt phẳng thỏa mãn tính chất 3 điểm bất kì của  $S$  đều không thẳng hàng, và với mỗi điểm  $P \in S$  có ít nhất  $k$  điểm phân biệt của  $S$  cách đều  $P$ . Chứng minh rằng

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

**Bài tập 5** (IMO Shortlist 1986). Cho 5 số có 100 chữ số được tạo thành từ các chữ số 1, 2. Ta xếp các số đó thẳng nhau theo các hàng đơn vị, chục, trăm, ... Biết rằng hai số bất kì trong 5 số đó đều có ít nhất  $r$  hàng giống nhau và mỗi hàng sau khi xếp đều có đủ hai chữ số 1, 2. Chứng minh rằng  $40 \leq r \leq 60$ .

**Bài tập 6.** Với các số nguyên  $n \geq k \geq 0$ , đặt  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  là số các hoán vị của  $n$  phần tử có đúng  $k$  xích. Nói cách khác,  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  là số cách xếp  $n$  người phân biệt vào  $k$  chiếc bàn tròn và không có bàn nào trống.  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  được gọi là *số Stirling loại một*. Chứng minh rằng

$$(a) \sum_{k=1}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = n!;$$

$$(b) \text{ Với } n \geq k \geq 1, \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + (n-1) \left[ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right];$$

$$(c) \text{ Với } n \geq 2, \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0;$$

$$(d) \text{ Với } n \geq 1, \left[ \begin{smallmatrix} n+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = n! H_n. \text{ Trong đó } H_n \text{ là số điều hòa thứ } n \text{ (xem thêm ví dụ 23)}$$

**Bài tập 7.** Cho  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là các tập hợp có  $r$  phần tử và  $X$  là giao của chúng. Nếu  $|A_i \cap A_j| \leq k$  với mọi  $i \neq j$ , khi đó

$$|X| \leq \frac{r^2 n}{r + k(n-1)}$$

**Gợi ý :** Với mỗi  $x \in X$ , đặt  $d(x)$  là số các tập  $A_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) mà  $x \in A_i$ . Hãy chứng minh các kết quả sau:

$$(a) \sum_{x \in A_i} d(x) = \sum_{j=1}^n |A_i \cap A_j|;$$

$$(b) \sum_{i=1}^n \sum_{x \in A_i} d(x) = \sum_{x \in X} d(x)^2.$$

Từ đó tìm các đánh giá thích hợp để suy ra kết quả của bài toán.

**Bài tập 8.** Cho  $X$  là một tập hợp có  $n$  phần tử và  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là các tập con của  $X$  sao cho số phần tử trung bình của  $n$  tập con đó ít nhất là  $\frac{n}{w}$ . Giả sử rằng  $n \geq 2w^2$ . Chứng minh rằng tồn tại  $i \neq j$  sao cho

$$|A_i \cap A_j| \geq \frac{n}{2w^2}$$

## Tài liệu tham khảo

- [1] Trần Nam Dũng, *Kỹ thuật đếm bằng hai cách và ứng dụng trong giải toán*, Kỷ yếu Hội nghị Khoa học, Các chuyên đề chuyên Toán – Bồi dưỡng học sinh giỏi THPT, Nam Định, tháng 11/2010.
- [2] Stasys Jukna, *Extremal Combinatorics: With Applications in Computer Science*, Second Edition, Springer, 2001.
- [3] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Fourth Edition, Springer, 2010.
- [4] Arthur T. Benjamin, Jennifer J. Quinn, *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*, The Mathematical Association of America, 2003.
- [5] Titu Andreescu, Zuming Feng, *102 Combinatorial Problems*, Birkhäuser, 2003.
- [6] Yufei Zhao, *Counting in Two Ways*, MOP 2007 Black Group.  
[http://web.mit.edu/yufeiz/www/olympiad/doublecounting\\_mop.pdf](http://web.mit.edu/yufeiz/www/olympiad/doublecounting_mop.pdf)
- [7] Carl G. Wagner, *Basic Combinatorics*, 2005.  
<http://www.math.utk.edu/~wagner/papers/comb.pdf>
- [8] Các diễn đàn Toán học :
  - Diễn đàn Art of Problem Solving (Mathlinks)  
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/index.php>
  - Diễn đàn MathScope  
<http://forum.mathscope.org/index.php>



# PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG MÔ HÌNH TRONG GIẢI TOÁN TỔ HỢP

Lê Phúc Lữ<sup>1</sup>

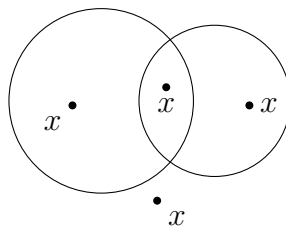
Song ánh là một công cụ mạnh để giải nhiều bài toán chứng minh và bài toán đếm trong tổ hợp. Ý tưởng chính của phương pháp này chính là thay đổi cách tiếp cận trong đề bài bằng một con đường, một cách nhìn khác có các đặc điểm tương đồng với giả thiết ban đầu mà với nó, ta có thể dễ dàng xử lý hơn. Hai trong các tư tưởng dùng song ánh thường gặp chính là việc xây dựng bảng và xây dựng đồ thị trong mặt phẳng tọa độ. Với cách dùng bảng và dùng đồ thị để giải Toán tổ hợp, ta có thể tiếp cận vấn đề trực quan hơn và cộng thêm một số phương pháp đếm khác, ta hoàn toàn có thể xử lý được nhiều bài toán khó, thậm chí không giải được bằng cách thông thường. Dưới đây, chúng ta sẽ tìm hiểu một số bài toán và ý tưởng để xây dựng một bảng hoặc một đồ thị trong mặt phẳng tọa độ tương ứng để giải quyết chúng (nên phân biệt với một số bài toán mà câu hỏi đã đặt ra trực tiếp với một bảng có sẵn nào đó).

## 1. Một số vấn đề về xây dựng mô hình trong giải toán tổ hợp

Việc xây dựng mô hình ở đây giúp chúng ta hình dung vấn đề một cách tường minh hơn và việc đếm, tính toán ở đây có thể kiểm nghiệm trực quan hơn. Chẳng hạn, ta xét bài toán sau đây:

**Bài toán 1.** Có bao nhiêu cách chia tập hợp  $S$  có  $n$  phần tử thành hai tập con (có tính tập rỗng) sao cho hợp của chúng bằng  $S$ .

Ta thấy rằng vấn đề đặt ra ở đây khá tổng quát và các ý tưởng đếm bằng truy hồi, chứng minh bằng quy nạp xuất hiện đầu tiên trong trường hợp này. Tuy nhiên, nếu chúng ta thử vẽ một mô hình ra để hình dung thì vấn đề có thể sáng tỏ hơn:



Ta có thể biểu diễn hai tập  $A, B$  như trên bởi các hình tròn và công việc cần làm là ứng với mỗi phần tử  $x \in S$ , xếp nó vào trong các hình tròn đó. Rõ ràng ta có 4 cách để xếp:

---

<sup>1</sup>Sinh viên đại học FPT thành phố Hồ Chí Minh.

- $x$  thuộc  $A$  nhưng không thuộc  $B$ ;
- $x$  thuộc  $B$  nhưng không thuộc  $A$ ;
- $x$  thuộc cả  $A$  và  $B$  (nằm trong phần giao);
- $x$  không thuộc cả  $A$  và  $B$ .

Nhưng vì yêu cầu của bài toán là “hợp của hai tập con là  $S$ ” nên không thể tính trường hợp thứ 4 ở trên được. Do đó, ứng với mỗi phần tử, ta có đúng 3 cách xếp vào hai tập hợp.

Từ đây, ta có thể tính ra đáp số của bài toán là  $\frac{3^n-1}{2} + 1 = \frac{3^n+1}{2}$ .

Giải thích thêm về kết quả này, ta thấy rằng có một vấn đề cần giải quyết khi đếm là các trường hợp bị trùng nhau. Nếu đề ban đầu đã cho sẵn hai tập con  $A$  và  $B$  rồi thì kết quả sẽ là  $3^n$  rõ ràng. Tuy nhiên, yêu cầu ở đây là chia tập  $S$  ra thành hai tập con, như thế thì việc chia ở đây có tính đối xứng giữa  $A$  và  $B$  (tức là cách đếm “ $x$  thuộc  $A$  nhưng không thuộc  $B$ ”, “ $x$  thuộc  $B$  nhưng không thuộc  $A$ ” ở trên là giống nhau). Chú ý thêm có một trường hợp đặc biệt là khi  $A = B$  thì buộc phải có  $A = B = S$  nên chỉ có một cách chia. Bỏ trường hợp đó ra, chia đôi số trường hợp rồi lại cộng nó vào thì sẽ được số cách chia cần tìm.

Công thức ở đây hoàn toàn có thể kiểm tra với các giá trị  $n$  nhỏ.

Dựa vào phân tích trên, các bạn hãy thử giải quyết bài toán sau:

**Bài toán 2.** Có bao nhiêu cách phân hoạch tập hợp  $S$  gồm  $n$  phần tử thành hai tập con?” (tập hợp  $S$  phân hoạch thành hai tập hợp  $A$  và  $B$  khi  $A \cap B = \emptyset, A \cup B = S$ ).

Có một bài toán khá thú vị về việc chia tập hợp này là:

**Bài toán 3.** Cho tập hợp  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  là tập hợp  $n$  số nguyên dương đầu tiên.

- Hãy tìm số cách chia  $S$  thành 3 tập con  $A, B, C$  sao cho  $A \cap B \neq \emptyset, B \cap C \neq \emptyset, C \cap A \neq \emptyset$  và  $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ .
- Hãy tìm số các bộ ba các tập con  $A, B, C$  thỏa mãn  $A \cup B \cup C = S$  và  $B \cap C = \emptyset$ .
- Hãy tìm số các bộ bốn các tập con  $A, B, C, D$  thỏa mãn  $A \cup B \cup C \cup D = S$  và  $B \cap C \cap D = \emptyset$ .

Chúng ta lại xem xét tiếp bài toán sau:

**Bài toán 4.** Có bao nhiêu tập con của tập hợp gồm  $2n$  số nguyên dương đầu tiên sao cho trong đó không tồn tại hai số  $a, b$  mà  $a + b = 2n + 1$ ?

Bài toán này có thể sử dụng công thức truy hồi để xử lý nhưng lập luận hơi rắc rối. Ta có thể chuyển về mô hình sau để hình dung:

1	2	3	...	$n$
$2n$	$2n - 1$	$2n - 2$	...	$n + 1$

Đến đây thì vấn đề đã quá rõ ràng, cũng tương tự như bài trên và không cần giải thích gì thêm, các bạn có thể tự giải đầy đủ được nếu biết kết quả là  $3^n$ .

Vậy nếu thay điều kiện ở trên thành  $|a - b| = n$  thì sao? Xin mời các bạn tự xây dựng mô hình để giải quyết. Các đáp số được kiểm chứng bằng những trường hợp nhỏ.

Nhắc đến bài này, chúng ta sẽ nhớ đến bài 5 trong kì thi VMO 2009. Đó thực sự là một bài toán khó và cách xây dựng bảng để đếm số trường hợp thỏa mãn đề bài quả là con đường duy nhất có thể áp dụng được trong tình huống này. Ta hãy xem lại đề bài và lời giải chi tiết cho bài toán đó.

**Bài toán 5.** Cho số nguyên dương  $n$ . Kí hiệu  $T$  là tập hợp  $2n$  số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có bao nhiêu tập con  $S$  của  $T$  thỏa mãn tính chất: trong  $S$  không tồn tại hai số  $a, b$  mà  $|a - b| \in \{1; n\}$ ?

Bài toán phát biểu rất đơn giản và dễ hiểu nhưng đằng sau đó là cả một vấn đề. Bài toán này khác với bài mà chúng ta vừa phát biểu ở chỗ người ta đã loại thêm một trường hợp  $|a - b| = 1$  (nếu chỉ cho riêng yêu cầu này thì chỉ cần đếm bằng truy hồi để ra công thức tương tự dãy Fibonacci quen thuộc), như thế thì việc sắp xếp theo kiểu như trên sẽ đưa đến vấn đề là “không có hai ô nào cạnh nhau được chọn” (cùng cột hoặc liền kề). Tuy nhiên, vẫn còn trường hợp  $a = n + 1, b = n$  chưa xử lí được nếu như hiểu theo kiểu trên.

**LỜI GIẢI.** Ứng với một số nguyên dương  $n$ , đặt  $2n$  số nguyên dương  $\{1, 2, 3, \dots, 2n - 1, 2n\}$  vào một bảng  $2 \times n$  như sau:

1	2	3	...	$n - 1$	$n$
$n$	$n + 1$	$n + 3$	...	$2n - 1$	$2n$

Ta sẽ xác định tổng số các cách chọn một số ô vuông từ bảng này (có thể là không chọn số nào) thỏa mãn hai điều kiện dưới đây:

- (i) Hai ô vuông kề nhau (tức là hai ô chứa hai số liền nhau hoặc hai số cách nhau  $n$  đơn vị) sẽ không được chọn đồng thời.
- (ii) Hai ô chứa số  $n$  và  $n + 1$  cũng sẽ không được chọn đồng thời.

Rõ ràng số cách chọn này chính là số tập hợp con  $S$  của tập hợp  $T$  cần tìm, đặt số cách chọn này là  $S(n)$ .

Ta sẽ xét thêm số cách chọn một số ô vuông  $A(n), B(n), C(n)$  từ các bảng  $(A), (B), (C)$  cũng thỏa điều kiện (i) nhưng có một số thay đổi như sau:

- $A(n)$  : bảng  $(A)$  này chứa đủ các số từ 1 đến  $2n$  và hai ô vuông chứa số  $n, n + 1$  vẫn được chọn đồng thời.
- $B(n)$  : bảng  $(B)$  này không có chứa ô vuông ở góc của bảng, chẳng hạn là ô vuông chứa số  $n + 1$ .
- $C(n)$  : bảng  $(C)$  này không tính hai ô vuông ở góc của bảng chứa hai số liên tiếp là  $n, n + 1$ .

Ta sẽ chứng minh các quan hệ sau:

$$(1) A(n) = S(n) + C(n-2);$$

$$(2) A(n) = A(n-1) + 2B(n-1);$$

$$(3) B(n) = A(n-1) + B(n-1);$$

$$(4) B(n) = C(n) + C(n-1);$$

$$(5) C(n) = B(n-1) + B(n-2) + C(n-2).$$

Thật vậy:

(1) Để tính số cách chọn  $A(n)$  các ô vuông từ bảng (A), ta chia làm 2 trường hợp:

- Các ô chứa  $n$  và  $n+1$  không được chọn đồng thời. Số cách chọn này chính là  $S(n)$ .
- Các ô chứa  $n$  và  $n+1$  được chọn đồng thời. Khi đó, các ô chứa số  $1, n+2, 2n, n-1$  không được chọn, bảng (A) có dạng như sau:

	2	3	...		
		$n+3$	...	$2n-1$	

Bảng này chứa  $2n-4$  ô nên có thể xem nó tương ứng với bảng:

1	2	3	...	$n-3$	
	$n+2$	$n+3$	...	$2n-3$	$2n-2$

Rõ ràng, số cách chọn các ô vuông từ bảng này và thỏa điều kiện (i) chính là  $C(n-2)$ .

Do các trường hợp ở trên là rời nhau nên  $A(n) = S(n) + C(n-2)$ .

(2) Cũng để tính số cách chọn  $A(n)$  các ô vuông từ bảng (A), ta chia làm 3 trường hợp:

- Các ô vuông chứa 1 và  $n+1$  không được chọn. bảng (A) có dạng:

	2	3	...	$n-1$	$n$
	$n+2$	$n+3$	...	$2n-1$	$2n$

Ta thấy bảng này chỉ chứa  $2n-2$  ô nên có thể xem tương ứng với bảng sau

1	2	3	...	$n - 2$	$n - 1$
$n$	$n + 1$	$n + 2$	...	$2n - 1$	$2n$

Số cách chọn các ô vuông từ bảng này và thỏa điều kiện (i) chính là  $A(n - 1)$ .

- *Chọn ô vuông chứa số 1.* Khi đó ô vuông chứa số  $n + 1$  và 2 không được chọn, bảng có dạng

		3	...	$n - 1$	$n$
	$n + 2$	$n + 3$	...	$2n - 1$	$2n$

Ta thấy bảng này cũng có thể xem tương ứng như bảng sau:

	2	3	...	$n - 2$	$n - 1$
$n$	$n + 1$	$n + 2$	...	$2n - 2$	$2n - 1$

Số cách chọn các ô vuông từ bảng này và thỏa điều kiện (i) chính là  $B(n - 1)$ .

- *Chọn ô vuông chứa số  $n + 1$*  Tương tự trên, số cách chọn trong trường hợp này là  $B(n - 1)$ .

Các trường hợp trên là rời nhau nên  $A(n) = A(n - 1) + 2B(n - 1)$ .

Các kết quả (3), (4) và (5) ở trên được chứng minh tương tự. Từ đó, ta sẽ chứng minh công thức truy hồi của  $S(n)$ :  $S(n + 3) = S(n + 2) + 3S(n + 1) + S(n)$ .

Thật vậy, từ (2) ta suy ra  $B(n - 1) = \frac{1}{2} [A(n) - A(n - 1)]$ , thay vào (3) ta có  $\frac{1}{2} [A(n + 1) - A(n)] = A(n - 1) + \frac{1}{2} [A(n) - A(n - 1)]$  hay  $A(n + 1) = 2A(n) + A(n - 1)$ . Từ đó suy ra

$$A(n + 3) = 2A(n + 2) + A(n + 1) = A(n + 2) + 2A(n + 1) + A(n) + A(n + 1)$$

hay tương đương với

$$A(n + 3) = A(n + 2) + 3A(n + 1) + A(n) \quad (6)$$

Thay (4) vào (5), ta có

$$\begin{aligned} C(n) &= [C(n - 1) + C(n - 2)] + [C(n - 2) + C(n - 3)] + C(n - 2) \\ &= C(n - 1) + 3C(n - 2) + C(n - 3), \quad \forall n \geq 3 \end{aligned} \quad (7)$$

Từ (1), (6) và (7), ta có được công thức truy hồi của  $S(n)$ :

$$S(n + 3) = S(n + 2) + 3S(n + 1) + S(n), \quad \forall n \geq 0$$

Mặt khác, dễ thấy rằng  $S(0) = 1, S(1) = 3, S(2) = 6$ . Từ đó ta sẽ xác định công thức tổng quát của  $S(n)$ .

Dãy  $\{S(n)\}$  có phương trình đặc trưng  $\lambda^3 = \lambda^2 + 3\lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = -1, \lambda = 1 \pm \sqrt{2}$ .

Từ đó ta suy ra số tập con cần tìm là

$$\frac{(3 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^n + (3 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^n - 2(-1)^n}{4}, \quad \forall n \geq 0$$

□

Lời giải tuy dài và rắc rối nhưng từ đó, chúng ta vẫn có thể học được nhiều điều cần thiết. Trên thực tế, nhiều bài toán có thể có sự chuyển đổi qua lại giữa việc phát biểu dạng tập hợp như trên và việc xây dựng mô hình. Chẳng hạn, ta bắt đầu bằng bài toán quen thuộc sau:

**Bài toán 6.** Chứng minh rằng không thể lát một nền nhà  $10 \times 10$  bằng các viên gạch  $1 \times 4$ .

Cách giải của bài này là tô màu các ô có dạng (lẻ, lẻ) trong bảng, như thế thì tô được 25 ô. Tuy nhiên, mỗi viên gạch  $1 \times 4$  như trên phải chiếm 2 ô được tô màu, tức là số ô được tô màu nằm trong đó phải chẵn. Điều mâu thuẫn này cho thấy ta không thể lát gạch được.

Bài toán này có thể thay số 10 (số chẵn nhưng không chia hết cho 4) thành các số tương tự như 50, 2010, 2014, ... thì vẫn cho câu trả lời tương tự với cách giải tương tự.

Ta thử thay đổi bài toán theo kiểu nối các điểm trong mặt phẳng để thu được bài toán sau:

**Bài toán 7.** Trong mặt phẳng, cho tập hợp  $A$  gồm  $2010^2$  điểm phân biệt được đánh số từ 1 đến  $2010^2$  sao cho ba điểm bất kì nào trong chúng cũng không thẳng hàng. Một tứ giác (lồi hoặc lõm) được gọi là “đẹp” nếu các đỉnh của nó thuộc  $A$  và được đánh số bằng 4 số thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

- (i) Đó là 4 số tự nhiên cách nhau 2010 đơn vị.
- (ii) Đó là 4 số tự nhiên liên tiếp và nếu trong đó có chứa số chia hết cho 2010 thì số đó phải là lớn nhất.

Nối tất cả các điểm thuộc tập hợp  $A$  lại với nhau sao cho điểm nào thuộc  $A$  cũng thuộc đúng một tứ giác. Tìm số lớn nhất tứ giác “đẹp” được tạo thành.

Rõ ràng cách nối các điểm như trên có thể được mô phỏng bằng 4 số nằm trên một viên gạch  $1 \times 4$  như trên. Ta có thể giải chi tiết như sau:

**LỜI GIẢI.** Xét một bảng ô vuông gồm  $2010 \times 2010$  ô vuông con được điền các số theo thứ tự từ trên xuống và trái sang phải.

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng không thể chia tất cả  $2010^2$  điểm đã cho thành các tứ giác “đẹp” được. Rõ ràng 4 số trên các đỉnh của các tứ giác “đẹp” tương ứng với 4 số bị che đi trên bảng ô vuông khi đặt một mảnh bìa hình chữ nhật kích thước  $1 \times 4$  vào đó. Ta sẽ chứng minh rằng không thể che hết toàn bộ bảng ô vuông này bằng các hình chữ nhật  $1 \times 4$ .

Thật vậy, ta tô màu các ô vuông nằm ở cột chẵn và hàng chẵn. Do bảng có  $2010^2$  ô vuông nên số ô vuông bị tô màu bằng  $\frac{2010^2}{4} = 1010025$  là số lẻ.

Giả sử ngược lại rằng ta có thể lấp kín được cả bảng ô vuông bằng các mảnh bìa. Khi đó, mỗi mảnh bìa sẽ che đi hoặc hai ô vuông hoặc không có ô vuông nào của bảng ô vuông, tức là luôn có một số chẵn ô vuông bị che đi. Do đó, số ô vuông bị che đi trên bảng là một số chẵn. Từ đó ta thấy có mâu thuẫn.

Vậy không thể che hết bảng ô vuông này bằng các hình chữ nhật  $1 \times 4$  được.

Gọi  $k$  là số tứ giác đẹp lớn nhất cần tìm thì  $k < 1010025 \Rightarrow k \leq 1010024$ .

Ta sẽ chứng minh  $k = 1010024$  bằng cách chỉ ra cách dùng các mảnh bìa che kín bảng ô vuông. Thật vậy, chia bảng ô vuông thành hai phần:

- Phần 1 gồm 2008 cột đầu, ta xếp các mảnh bìa theo các hàng, mỗi hàng có đúng 502 mảnh bìa. Khi đó, ta sẽ có thể che kín hết phần 1 bởi các mảnh bìa.
- Phần 2 gồm 2 cột cuối, ta xếp nối tiếp các mảnh bìa từ trên xuống dưới thì cuối cùng sẽ còn lại một ô vuông  $2 \times 2$  ở góc dưới cùng của bảng.

Như vậy, ta dùng 1010024 mảnh bìa che được tối đa  $2010^2 - 4$  ô vuông của bảng. Từ đó, ta thấy, số tứ giác “đẹp” lớn nhất cần tìm là  $k = 1010024$ .  $\square$

Các bạn thử tìm hiểu bài toán sau:

**Bài toán 8.** Có bao nhiêu cách lát một hình chữ nhật kích thước  $2 \times n$  bởi các viên gạch: hình chữ I (hình chữ nhật kích thước  $1 \times 2$ ) và hình chữ L (hình vuông  $2 \times 2$  bỏ đi một ô)?

Nếu thay hình chữ nhật  $2 \times n$  bằng hình chữ nhật  $3 \times n$  thì số cách lát thu được sẽ là bao nhiêu?

Qua đó, ta thấy rằng việc chuyển đổi các mô hình, từ các điểm, các hình trong mặt phẳng đến các số trong một tập hợp và ngược lại giúp cho bài toán có một dáng vẻ mới khá thú vị. Chúng ta thử nhắc đến một bài toán trong kì thi IMO 1983:

**Bài toán 9.** Người ta tô tất cả các điểm nằm trên cạnh của tam giác đều  $ABC$  bởi hai màu xanh và đỏ. Hỏi với mọi cách tô màu như thế, có luôn tồn tại một tam giác vuông có ba đỉnh được tô cùng màu hay không?

**LỜI GIẢI.** Bài toán này có thể giải quyết không quá khó khăn bằng cách xét các điểm chia các cạnh của tam giác  $ABC$  theo tỉ số  $2 : 1$ , có khá nhiều tam giác vuông được tạo thành từ 6 điểm này và nhờ vậy mà ta có thể áp dụng nguyên lí Dirichlet để giải quyết bài toán.  $\square$

Tuy nhiên, nếu chúng ta thay đổi cách phát biểu thành tọa độ trong mặt phẳng thì bài toán sẽ thú vị hơn nhiều. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , một tam giác đều  $ABC$  có tọa độ đỉnh là  $A(0; \sqrt{3}), B(-1; 0), C(1; 0)$  thì phương trình đường thẳng chứa các cạnh  $AB, AC$  có thể viết là  $|\sqrt{3}x| + y = \sqrt{3}$ , đường thẳng chứa cạnh  $BC$  trùng với trục  $Ox$ . Hơn nữa, rõ ràng độ dài của  $BC$  có thể thay bằng một số bất kì nào khác nên ta có bài toán sau:

**Bài toán 10.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , xét phần mặt phẳng giới hạn bởi đồ thị của  $y = \sqrt{3}(a - |x|)$  ( $a > 0$ ) và trục hoành. Gọi  $S$  là tập hợp các điểm nằm trên phần bao lồi của miền đó. Chứng minh rằng với mọi cách chia  $S$  thành hai tập hợp con rời nhau thì luôn tồn tại ba điểm là đỉnh của một tam giác vuông.

Cách giải bài này hoàn toàn tương tự bài trên và vấn đề mấu chốt là nhìn nhận được bao lồi ở trên thực chất là một tam giác đều và cách chia tập con cũng giống như việc tô các điểm bởi hai màu.

Tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu một mô hình khá thông dụng nữa để giải các bài Toán đếm là xây dựng một bảng thích hợp và đếm theo hai chiều của bảng đó.

Bài toán tiếp theo khá điển hình cho phương pháp này xuất hiện trong kì thi chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2001 (số 2001 xuất hiện trong bài toán có thể thay bằng một số nguyên dương bất kì nào khác).

**Bài toán 11.** Cho dãy số  $\{a_n\}$  thỏa mãn  $0 < a_{n+1} - a_n < 2001$ . Chứng minh rằng tồn tại vô số cặp số nguyên dương  $(p, q)$  thỏa mãn nếu  $p < q$  thì  $a_p \mid a_q$ .

**LỜI GIẢI.** Từ cách xác định dãy, ta thấy rằng số hạng tiếp theo sẽ không lớn hơn số hạng liền trước nó cộng thêm 2001 đơn vị. Như thế, chỉ cần xét 2002 số nguyên dương liên tiếp thì sẽ có ít nhất một số hạng thuộc dãy, đặt số đó là  $a$ . Ta xây dựng bảng như sau:

$a_{(1,1)} = a$	$a_{(1,2)} = a + 1$	$\dots$	$a_{(1,2002)} = a + 2001$
$a_{(2,1)} = a_{(1,1)}$ $+ \prod_{i=1}^{2002} a_{(1,i)}$	$a_{(2,2)} = a_{(1,2)}$ $+ \prod_{i=1}^{2002} a_{(1,i)}$	$\dots$	$a_{(2,2002)} = a_{(1,2001)}$ $+ \prod_{i=1}^{2002} a_{(1,i)}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$a_{(2002,1)} = a_{(2001,1)}$ $+ \prod_{i=1}^{2002} a_{(2001,i)}$	$a_{(2002,2)} = a_{(2001,2)}$ $+ \prod_{i=1}^{2002} a_{(2001,i)}$	$\dots$	$a_{(2002,2002)} = a_{(2001,2002)}$ $+ \prod_{i=1}^{2002} a_{(2001,i)}$

Bảng này có tất cả 2002 cột và 2003 hàng. Trong đó, mỗi số hạng ở hàng thứ 2 trở đi bằng tích của tất cả số hạng ở hàng liền trước nó cộng với số hạng cùng cột với nó. Rõ ràng, trong mỗi hàng, có ít nhất một số hạng thuộc dãy đã cho. Từ đó theo nguyên lý Dirichlet, ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 12.** Cho  $n$  số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  bất kì. Chứng minh rằng tồn tại số thực  $x$  sao cho các số  $a_1 + x, a_2 + x, \dots, a_n + x$  đều là các số vô tỉ.

**LỜI GIẢI.** Giả sử  $t$  là một số vô tỉ bất kì. Ta sẽ chứng minh rằng trong các số  $t, 2t, 3t, \dots, (n+1)t$  có ít nhất một số thỏa mãn đề bài.

Giả sử không có số nào trong  $n+1$  số trên thỏa mãn đề bài. Tức là với mỗi  $i = \overline{1, n+1}$ , trong các số  $it + a_1, it + a_2, \dots, it + a_n$  luôn tồn tại một số hữu tỉ. Xét bảng  $(n+1) \times n$  như sau:

$t + a_1$	$t + a_2$	$\dots$	$t + a_n$
$2t + a_1$	$2t + a_2$	$\dots$	$2t + a_n$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(n+1)t + a_1$	$(n+1)t + a_2$	$\dots$	$(n+1)t + a_n$

Theo nhận xét trên thì trong mỗi hàng tồn tại ít nhất một số hữu tỉ. Tức là trong toàn bộ bảng, ta có ít nhất  $n+1$  số hữu tỉ. Vì bảng có  $n$  cột nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai số hữu tỉ thuộc cùng một cột, giả sử là  $xt + a_i$  và  $yt + a_i$ . Khi đó  $(x-y)t = (xt + a_i) - (yt + a_i)$  cũng phải là số hữu tỉ. Điều này vô lí vì  $x, y$  nguyên và  $t$  vô tỉ. Mâu thuẫn trên chứng tỏ điều giả sử của chúng ta là sai và bài toán được chứng minh.  $\square$



## 2. Xây dựng đồ thị

### 2.1. Đồ thị một chiều

Về phương pháp quỹ đạo này, chúng ta thường gặp quỹ đạo xét trong mặt phẳng tọa độ hai chiều và các kết quả xây dựng trên đó. Trong phần này, chúng ta sẽ thử đi phân tích thêm một số dạng mở rộng nữa để tìm các vấn đề mới mẻ hơn.

Trước hết, ta xét bài toán sau:

**Bài toán 13.** Có một người đi từ gốc tọa độ  $O$  đến điểm  $A$  có tọa độ là  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) trên trục tọa độ. Người này mỗi lần có thể bước một hoặc hai bước. Hỏi có bao nhiêu cách bước để người này đi được đến  $A$ ?

Nếu chúng ta tiếp cận bài toán này theo suy luận thông thường thì có thể giải như sau:

Gọi  $x, y$  lần lượt là số lần bước 1 bước và số lần bước 2 bước. Như thế người này bước tổng cộng  $x + y$  bước và hai số này phải thỏa mãn  $x + 2y = n$ . Ứng với một trong số  $x + y$  lần bước, số cách bước tương ứng là số cách chọn  $x$  lần bước 1 bước, tức là  $\binom{x+y}{x}$  và số cách cần tính là

$$\sum_{0 \leq x, y \leq n, x+2y=n} \binom{x+y}{x}.$$

Rõ ràng tổng này không dễ dàng rút gọn được!

Ta xét một trường hợp đơn giản, chẳng hạn với  $n = 4$ . Ta cần xét phương trình nghiệm nguyên  $x + 2y = 4$ . Dễ thấy phương trình này có các nghiệm là  $(x; y) = (0; 2), (2; 1), (4; 0)$  nên số cách bước trong trường hợp này là  $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{4} = 1 + 3 + 1 = 5$ .

Nhưng nếu đề thay giá trị  $n = 4$  bởi  $n = 2011$  thì sao? Việc xét tất cả các bộ nghiệm của phương trình  $x + 2y = 2011$  rõ ràng không đơn giản. Nếu ta viết dưới dạng công thức tổng quát thì sẽ có bộ nghiệm là  $x = 1 + 2t, y = 1005 - t$  và số nghiệm cần xét là 1006.

Chúng ta thử đổi cách tiếp cận sang một phương pháp quen thuộc là đếm bằng truy hồi. Gọi  $S(n)$  là số cách bước ứng với trường hợp tọa độ của  $A$  là  $n$ .

Ta tính được  $S(1) = 1, S(2) = 2$  và nếu  $n \geq 3$  thì ta có hai trường hợp: nếu ở bước cuối cùng, người này bước 1 bước thì khi đó, số cách để bước  $n - 1$  bước trước là  $S(n - 1)$ ; nếu ở bước cuối cùng, người này bước 2 bước thì khi đó, số cách để bước  $n - 2$  bước trước là  $S(n - 2)$ .

Hai trường hợp này là rời nhau và có tổng là  $S(n)$  nên suy ra  $S(n) = S(n - 1) + S(n - 2), n \geq 3$ .

Vậy dãy số các bước cần tính chính là dãy Fibonacci  $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$  và  $S(n) = F_{n+1}$  (ta xét dãy Fibonacci có hai số hạng đầu là  $1, 1$ ). Như thế, ta có thể rút ra một kết quả khá thú vị

là  $\sum_{0 \leq x, y \leq n, x+2y=n} \binom{x+y}{x} = F_{n+1}$  bằng một sự thật hiển nhiên là nếu một số lượng mà đếm bằng

hai cách thì phải cho cùng kết quả.

Chúng ta sẽ không dừng lại ở đây mà thử mở rộng bài toán này hơn nữa. Chúng ta có thể thay hai loại bước là 1 bước và 2 bước bởi nhiều bước hơn, phương trình nghiệm nguyên khi đó cần xét cũng sẽ phức tạp hơn và dãy số cũng sẽ ở dạng truy hồi nhiều cấp hơn. Chẳng hạn, nếu thay giả thiết bài toán trên bởi bước từ 1 đến 3 bước chân thì công thức phương trình nghiệm nguyên sẽ là

$$\sum_{0 \leq x, y, z \leq n, x+2y+3z=n} \binom{x+y+z}{x} \binom{x+y+z}{y}$$

$$S(1) = 1, S(2) = 2, S(3) = 4, S(n) = S(n - 1) + S(n - 2) + S(n - 3), n \geq 4$$

Các ý tưởng lập luận và mô hình giải vẫn tương tự. Nếu ta thay đổi giả thiết thêm chút nữa thì ta sẽ có bài toán sau:

**Bài toán 14.** Có một người đi từ gốc tọa độ  $O$  đến điểm  $A$  có tọa độ  $n$  trên trục tọa độ. Người này bị say rượu nên chỉ bước mỗi lần một bước và có thể bước tới hoặc quay lui lại. Ban đầu, ngay tại  $O$  người đó vẫn có thể quay lui được nhưng nếu người đó đi đến  $A$  thì không thể bước tới nữa.

Hỏi người có đó bao nhiêu cách bước nếu số bước đi thực hiện là  $m$ ?

(Rõ ràng số bước có thể là vô hạn nên ta chỉ xét trường hợp cụ thể với  $m$  bước nào đó).

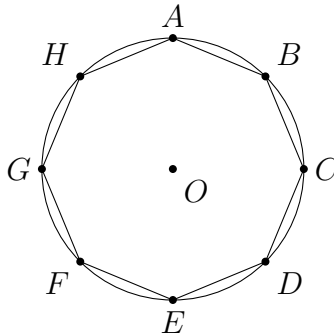
Trước hết, chúng ta sẽ thử đếm trong trường hợp đơn giản hơn là  $n = 5$ . Rõ ràng nếu chỉ đi tới thì người đó cần 5 bước nhưng ở đây có các bước lùi lại nên nếu gọi  $x, y$  lần lượt là số bước tiến và bước lùi thì  $x + y = m$  và  $x - y = 5$ . Tuy nhiên trong suốt quá trình thực hiện cho đến khi đủ  $m$  bước thì đại lượng  $x - y$  không được bằng 5 mà phải là  $x - y \leq 4$  theo quy ước là “đến  $A$  thì không thể bước tiếp nữa”.

Đến đây, các bạn thử giải tiếp để xây dựng các công thức và các kết quả tương tự như bài toán đầu tiên ở trên.

Nói về bài toán này, chúng ta lại nhớ đến một bài toán nổi tiếng khác trong kì thi IMO 1979 về con ếch nhảy trên hình bát giác đều, kì thi mà lần đầu tiên Việt Nam có được một giải đặc biệt của TS. Lê Bá Khánh Trình.

**Bài toán 15.** Một con ếch nhảy từ đỉnh  $A$  đến đỉnh  $E$  của một hình bát giác đều  $ABCDEFGH$ . Tại bất cứ đỉnh nào trừ  $E$ , con ếch có thể nhảy tới hai đỉnh liền kề với đỉnh đó. Gọi  $a_n$  là số đường đi phân biệt từ  $A$  đến  $E$  có đúng  $n$  bước nhảy. Chứng minh rằng

$$a_{2n-1} = 0, a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1} \right]$$



**LỜI GIẢI.** Dễ dàng thấy rằng số cách bước phải là chẵn nên  $a_{2n-1} = 0$ .

Gọi  $b_n$  là số đường đi phân biệt của ếch từ  $C$  (hoặc  $G$ ) đến  $E$ . Rõ ràng sau hai bước nhảy đầu tiên, ếch có thể đến  $C$ , hoặc  $G$  hoặc quay trở về  $A$ . Ta có công thức sau  $a_{2n} = 2a_{2n-2} + 2b_{2n-2}$ . Từ điểm  $C$  (hoặc điểm  $G$ ), cũng bằng hai bước nhảy, ếch có thể trở về chỗ cũ hoặc đến  $A$  (nếu đến  $E$  thì ếch đã dừng lại), ta có  $b_{2n} = 2b_{2n-2} + a_{2n-2}$ .

Từ hai quan hệ này, ta suy ra  $a_{2n} = 4a_{2n-2} - 2a_{2n-4}, n \geq 3$ .

Ta tính được  $a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_4 = 2$  nên dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.  $\square$

Bài toán này nếu cắt hình bát giác ra và xếp thành đường thẳng thì ta có thể phát biểu thành:

**Bài toán 16.** Có một người đi từ gốc tọa độ  $O$  đến điểm  $A$  hoặc  $B$  (xem như là đi về một trong hai ngôi nhà) có tọa độ lần lượt là  $4, -4$  trên trục tọa độ. Người này bị say rượu nên chỉ bước mỗi lần một bước và có thể bước tới hoặc quay lui lại. Ban đầu, ngay tại  $O$  người đó vẫn có thể quay lui hoặc tiến tới nhưng nếu người đó đi đến  $A$  hoặc  $B$  thì phải dừng lại.

Hỏi người có đó bao nhiêu cách bước về nhà nếu số bước đi thực hiện là  $m$ ?

Kết quả của bài này hoàn toàn giống với bài toán trong kì thi IMO ở trên.

Nếu ta thử làm khó vấn đề hơn một chút thì có bài toán sau:

**Bài toán 17.** Có một người đi từ gốc tọa độ  $O$  đến điểm  $A$  có tọa độ  $n$  trên trục tọa độ. Người này bị say rượu nên chỉ bước mỗi lần một bước và có thể bước tới hoặc quay lui lại. Ban đầu, ngay tại  $O$  người đó không thể quay lui được và nếu người đó đi đến  $A$  thì không thể bước tới nữa.

Hỏi người có đó bao nhiêu cách bước nếu số bước đi thực hiện là  $m$ ?

Rõ ràng ở đây có một vấn đề khá rắc rối là nếu người đó bước một bước rồi lại quay về  $O$  rồi cứ thế lặp lại nhiều lần thì công thức truy hồi sẽ không xây dựng được (do từ  $O$  thì không bước lùi được nhưng từ vị trí có tọa độ là  $1$  thì có thể được nên hai trường hợp không tương ứng).

Nói chung, vẫn còn nhiều điều khá thú vị trong trục tọa độ một chiều thế này.

Trước khi kết thúc, ta thử xét một bài toán tổ hợp nổi tiếng xuất hiện trong kì thi IMO năm 2009:

**Bài toán 18.** Cho  $n$  là một số nguyên dương và  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số nguyên dương phân biệt. Giả sử  $T = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$  là một tập hợp gồm  $n - 1$  số nguyên dương nhưng không chứa  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Trên trục số thực có một con châu chấu lúc đầu đứng ở điểm  $0$ . Con châu chấu nhảy đúng  $n$  bước về hướng dương của trục số. Các bước nhảy của nó có độ dài là  $a_1, a_2, \dots, a_n$  theo một thứ tự nào đó. Trên trục số, người ta đặt sẵn  $n - 1$  cái bẫy ở các vị trí  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ .

Chứng minh rằng con châu chấu có thể sắp xếp thứ tự các bước nhảy của mình để không bao giờ nhảy vào bẫy.

Đây là bài toán được đánh giá là khó thứ nhì trong 50 năm thi IMO (chỉ sau bài 3, IMO 2007 tổ chức tại Việt Nam). Bài toán sử dụng quy nạp theo  $n$  là ý tưởng chính.

**LỜI GIẢI.** Trường hợp  $n = 1$ , theo giả thiết thì trên trục không có bẫy nên con châu chấu có thể nhảy được và như thế thì khẳng định đúng.

Giả sử con châu chấu có thể nhảy được trong mọi trường hợp từ  $1$  đến  $n - 1$ . Xét  $n$  bước nhảy  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $n - 1$  cái bẫy  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ . Không mất tính tổng quát, ta sắp thứ tự  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  và  $s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1}$ . Ta sẽ chỉ ra một cách nhảy thỏa mãn điều kiện.

Đầu tiên con châu chấu nhảy bước có độ dài  $a_n$ .

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có thể cho con châu chấu nhảy các bước có độ dài  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  sao cho nó không rơi vào bất cứ bẫy nào trong số các bẫy  $s_2, s_3, \dots, s_{n-1}$ .

Nếu trong quá trình nhảy nói trên con châu chấu không rơi vào bẫy  $s_1$  thì hiển nhiên ta có một cách nhảy thỏa mãn điều kiện. Còn nếu con châu chấu rơi vào bẫy  $s_1$ , ta sẽ chỉ ra một

cách đổi chỗ các bước nhảy để nó không nhảy vào một bẫy nào. Thật vậy, giả sử các bước  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  được con châu chấu nhảy theo thứ tự  $a_{f(1)}, a_{f(2)}, \dots, a_{f(n-1)}$ . Có hai khả năng xảy ra:

- Con châu chấu rơi vào bẫy ngay từ bước nhảy đầu tiên, tức là  $s_1 = a_n$ . Ta chỉ cần đổi chỗ hai bước nhảy đầu tiên của con châu chấu. Cụ thể nó sẽ nhảy theo thứ tự

$$a_{f(1)}, a_n, a_{f(2)}, a_{f(3)}, \dots, a_{f(n-1)}$$

Do ta đã sắp thứ tự nên  $a_{f(1)} < a_n = s_1$  và hiển nhiên con châu chấu không vướng vào bẫy  $s_1$  nữa. Từ bước thứ hai trở đi, con châu chấu nhảy như cũ nên không vướng thêm bẫy nào.

- Con châu chấu rơi vào bẫy trong bước nhảy  $a_{f(t)}, t \geq 1$ . Ta xét 3 bước nhảy  $a_{f(t-1)}, a_{f(t)}, a_n$ . Ta đổi chỗ bước nhảy đầu tiên và bước nhảy  $a_{f(t+1)}$ . Tức là cho con châu chấu nhảy theo thứ tự

$$a_{f(t+1)}, a_{f(1)}, a_{f(2)}, \dots, a_{f(t-1)}, a_{f(t)}, a_n, a_{f(t+2)}, \dots, a_{f(n-1)}$$

Chú ý rằng  $s_1$  là phần tử nhỏ nhất trong tập  $n - 1$  cái bẫy nên trước  $s_1$ , con châu chấu sẽ không rơi vào cái bẫy nào cả. Cũng do sự đổi chỗ  $a_{f(t+1)}$  và  $a_n$  nên con châu chấu sẽ không rơi vào bẫy  $s_1$  nữa. Tóm lại, từ đầu đến bước  $a_n$ , con châu chấu không rơi vào bẫy nào. Và vì các bước nhảy sau đó được giữ nguyên nên con châu chấu cũng không nhảy vào bẫy.

Từ hai trường hợp trên, ta suy ra bài toán cũng đúng với  $n$ . Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có điều cần chứng minh.  $\square$

Bài toán khó nhất theo đánh giá là bài có nội dung như sau (tất nhiên là trong Shortlist vẫn còn nhiều bài khó hơn nữa):

**Bài toán 19.** Trong một kì thi Toán, một số thí sinh có quen biết nhau và tính quen biết là hai chiều. Một nhóm những thí sinh gọi là nhóm “bạn bè” nếu như tất cả những người trong đó đều có quen biết với nhau. Nếu nhóm có ít hơn 2 người thì cũng được xem là nhóm “bạn bè”. Số lượng thí sinh trong một nhóm “bạn bè” được gọi là “cỡ” của nhóm đó.

Giả sử rằng trong kì thi này, “cỡ” lớn nhất của một nhóm “bạn bè” tìm được là số chẵn. Chứng minh rằng có thể sắp xếp những thí sinh này vào hai phòng sao cho “cỡ” lớn nhất của nhóm “bạn bè” trong hai phòng là bằng nhau.

## 2.2. Đồ thị hai chiều

Bài toán khá điển hình cho phương pháp này xuất hiện trong kì thi Olympic của Việt Nam là bài 1, đề chọn đội tuyển tham dự IMO năm 2003 với nội dung như sau:

**Bài toán 20.** Trong mặt phẳng tọa độ, cho bốn điểm phân biệt  $A(0, 0), B(p, 0), C(m, q), D(m, n)$  với  $m, n, p, q$  là bốn số nguyên dương thỏa mãn  $p < m$  và  $n < q$ . Xét một đường đi  $f$  từ  $A$  đến  $D$  và một đường đi  $g$  từ  $B$  đến  $C$  thỏa mãn điều kiện: các đường này chỉ đi theo chiều dương

của các trục tọa độ và chỉ đổi hướng (từ hướng dương của trục tọa độ này sang hướng dương của trục tọa độ kia) tại các điểm có tọa độ nguyên. Gọi  $S$  là số các cặp đường đi  $(f, g)$  sao cho chúng không có điểm chung. Chứng minh rằng

$$S = \binom{m+n}{n} \binom{m+q-p}{q} - \binom{m+q}{q} \binom{m+n-p}{n}$$

Cũng như các mô hình đã phân tích ở trên thì sử dụng quỹ đạo để giải các bài toán Tổ hợp giúp cho lời giải và lập luận rõ ràng hơn dựa trên các nhận xét trực quan. Tuy nhiên, chúng ta cũng phải công nhận rằng phương pháp này chỉ được áp dụng trên một số bài toán đặc trưng nhất định nào đó. Một số bài toán đếm thuần túy cũng có thể giải bằng cách dùng quỹ đạo thế này.

Trước hết, chúng ta sẽ xây dựng một số khái niệm cơ sở cho phương pháp này:

**Định nghĩa 1.** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , mỗi điểm có các tọa độ đều nguyên gọi là một điểm nguyên và tập hợp các điểm nguyên gọi là lưới điểm nguyên (hay lưới Gauss).

**Định nghĩa 2.** Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , người ta gọi một đường đi từ  $M$  tới  $N$  là một đường gấp khúc nối  $M$  và  $N$ , còn đường đi ngắn nhất là đường gấp khúc tạo bởi các đoạn thẳng đơn vị ngang và dọc sao cho số đoạn thẳng là ít nhất. Phương pháp chứng minh một công thức tổ hợp bởi số đường đi ngắn nhất gọi là phương pháp quỹ đạo.

Ta sẽ chứng minh một số kết quả cơ sở của phương pháp này :

**Định lý 1.** Số đường đi ngắn nhất từ gốc tọa độ  $O$  đến điểm  $A(m, n)$  với  $m, n \in \mathbb{N}^*$  là  $\binom{m+n}{m}$ .

CHỨNG MINH. Từ  $O$  đến  $A$ , ta cần thực hiện  $m$  bước dịch chuyển theo chiều ngang và  $n$  bước dịch chuyển theo chiều dọc, tức là tổng cộng có  $m+n$  bước. Các đường đi như thế chỉ khác nhau ở cách chọn thứ tự dọc và ngang. Do đó, số đường đi cần tìm chính là số cách chọn  $m$  đoạn ngang trong  $m+n$  đoạn dọc - ngang đó và có tổng cộng  $\binom{m+n}{m}$  đường đi.  $\square$

Từ đây, ta có một số kết quả sau:

- Số cách chọn đoạn ngang và số cách chọn các đoạn dọc cũng giống nhau nên  $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$ .
- Số đường đi ngắn nhất từ điểm  $A(m, n)$  đến điểm  $B(p, q)$  với  $0 \leq m < p, 0 \leq n < q$  là  $\binom{p+q-m-n}{p-m}$ .
- Số đường đi ngắn nhất từ điểm  $O$  đến điểm  $B(p, q)$  và đi qua điểm  $A(m, n)$  chính là tích  $\binom{m+n}{m} \binom{p+q-m-n}{p-m}$  và số đường đi từ  $O$  đến  $B$  không đi qua  $A$  là  $\binom{p+q}{p} - \binom{m+n}{m} \binom{p+q-m-n}{p-m}$ . Từ đó ta suy ra  $\binom{p+q}{p} > \binom{m+n}{m} \binom{p+q-m-n}{p-m}$  với  $0 \leq m < p, 0 \leq n < q$ .

Tiếp theo, ta thử dùng phương pháp này chứng minh một số bài toán:

**Bài toán 21** (Đẳng thức Pascal). Với  $k, n$  là các số nguyên và  $1 \leq k \leq n-1$ , ta có

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

LỜI GIẢI. Ta thấy rằng có  $\binom{n}{k}$  đường đi ngắn nhất từ  $O(0, 0)$  đến  $A(k, n - k)$ .

Xét hai điểm  $B(k - 1, n - k)$  và  $C(k, n - k - 1)$ . Rõ ràng mỗi đường đi từ  $O$  đến  $A$  nhất thiết phải qua  $B$  hoặc  $C$ .

Số đường đi từ  $O$  đến  $B$  là  $\binom{n-1}{k-1}$  và số đường đi ngắn nhất từ  $O$  tới  $C$  là  $\binom{n-1}{k}$ .

Do đó, ta có  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ .  $\square$

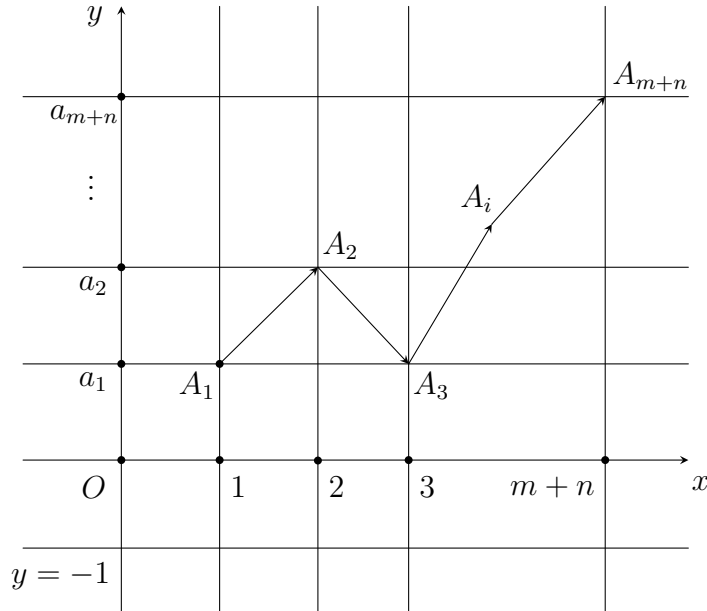
**Bài toán 22.** Chứng minh rằng với  $m, n, k \in \mathbb{Z}^+, m > k$  thì

$$C_{m+n+1}^k = C_m^k C_n^0 + C_{m-1}^{k-1} C_{n+1}^1 + \cdots + C_{m-k}^0 C_{n+k}^k$$

LỜI GIẢI. Có  $\binom{m+n+1}{k}$  đường đi nối  $O(0, 0)$  với  $M(m + n - k + 1, k)$ . Rõ ràng có  $\binom{m-i}{k-i} \binom{n+i}{i}$  đường cắt đường thẳng  $x = n + \frac{1}{2}$  tại điểm có tung độ  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) gồm:  $\binom{n+i}{i}$  đường nối  $O$  với điểm  $(n, i)$ , một đường nối điểm  $(n, i)$  với điểm  $(n + 1, i)$  và  $\binom{m-i}{k-i}$  đường nối điểm  $(n + 1, i)$  với  $M$ . Từ đó ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 23.** Có  $m + n$  người đi mua vé ( $m \leq n$ ), trong đó có  $m$  người mang tiền loại 2 đồng,  $n$  người mang tiền loại 1 đồng và mỗi vé giá 1 đồng. Biết rằng ban đầu người bán vé không mang theo tiền, hỏi có bao nhiêu cách xếp  $m + n$  người vào mua vé để người nào cũng được thối tiền (nếu cần) ngay lập tức?

LỜI GIẢI. Đặt  $a_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i$ , trong đó  $x_j$  bằng 1 nếu người thứ  $j$  mang tiền loại 1 đồng và bằng  $-1$  nếu ngược lại.



Bài toán quy về việc đếm số đường đi qua các điểm  $A_i(i, a_i)$  mà không nằm dưới trục hoành trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Muốn vậy ta sẽ đếm số đường đi cắt đường thẳng  $(d) : y = -1$ . Xây dựng một song ánh từ mỗi đường  $Q$  như vậy đến một đường  $Q'$  là đường nhận được từ  $Q$  khi cho đối xứng phần của  $Q$  kể từ điểm đầu tiên gặp  $(d)$ . Nếu  $Q'$  có  $x$  đoạn hướng lên và  $y$  đoạn hướng xuống thì  $x + y = m + n, y - x = n - m + 2$  hay  $y = n + 1$ .

Vậy số đường  $Q'$  là  $\binom{m+n}{n+1}$ , nên đáp số cần tìm là  $\binom{m+n}{n} - \binom{m+n}{n+1}$ .  $\square$

Để thấy rõ hơn hiệu quả của phương pháp này, ta sẽ dùng một cách khác để giải bài toán này trong trường hợp đặc biệt hơn là khi  $m = n$ . Cụ thể như sau: Giả sử có  $2n$  người khách,  $n$  người trong đó có 1 đồng và  $n$  người còn lại có 2 đồng. Ta cũng cần tính số cách sắp xếp  $2n$  người này thỏa mãn điều kiện đề bài, tức là người bán vé có thể bán được ngay vé cho những người khách mà không có ai phải đứng chờ.

Ta xét bài toán dưới một hình thức khác cho dễ lập luận.

Đặt  $2n$  số, bao gồm  $n$  số 1 và  $n$  số 2 lên một hàng và đánh số chúng từ 1 đến  $2n$  theo chiều từ trái sang phải. Với mỗi  $1 \leq i \leq 2n$ , ta gọi  $a_i, b_i$  lần lượt là số các số 1 và số các số 2 tính từ vị trí  $i$  trở về trước, dễ thấy rằng  $i = a_i + b_i, \forall i = \overline{1, 2n}$ . Chúng ta cần tính số trường hợp thỏa  $a_i \leq b_i \forall i = \overline{1, 2n}$ .

Gọi  $S$  là tập hợp các hoán vị  $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{2n})$  của  $2n$  phần tử trên thỏa đề bài,  $T$  là tập hợp còn lại.

Suy ra  $|T| = C_{2n}^n - |S|$  và ta sẽ tính  $|T|$  trước.

Do cách xác định  $T$  nên với mỗi phần tử  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  của  $T$ , ta thấy tồn tại ít nhất một số  $i$  thỏa  $a_i < b_i$ . Gọi  $f(t)$  là số thứ tự đầu tiên thỏa mãn  $a_i < b_i$ , tức là trước đó,  $a_i$  vẫn không bé hơn  $b_i$  và ngay tại thời điểm đó thì  $b_i$  hơn  $a_i$  đúng một phần tử, tức là  $f(t)$  phải là số lẻ vì  $f(t) = a_i + b_i$ . Khi đó, ta tính được  $a_{f(t)} = \frac{f(t)-1}{2}, b_{f(t)} = \frac{f(t)+1}{2}, t_{f(t)} = 2$ . Tại thời điểm này, số các số 2 hơn số các số 1 đúng một đơn vị nên khi ta đổi giá trị của các vị trí phía sau  $t_{f(t)}$ , từ 1 sang 2, từ 2 sang 1 thì ta sẽ có một hoán vị  $g(t)$  của  $n+1$  số 2 và  $n-1$  số 1.

Xét ví dụ minh họa trong trường hợp  $n = 6$  như sau

$$\begin{aligned} t &= \{1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1\} \\ a_i &= \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6\}, b_i = \{0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6\} \\ f(t) &= 3, a_2 = 1, b_2 = 1, t_3 = 10 \\ g(t) &= \{1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2\} \end{aligned}$$

Khi đó,  $g$  là một ánh xạ từ  $T$  sang  $U$ , với  $U$  là một hoán vị của  $n+1$  số 2 và  $n-1$  số 1. Ta sẽ chứng minh  $g$  là song ánh. Thật vậy:

Gọi  $u$  là một phần tử của  $U$ . Ta sẽ đếm số các số 1 và số các số 2 từ trái sang phải. Cũng gọi  $i$  là vị trí nhỏ nhất sao cho số các số 2 lớn hơn số các số 1, do cách xác định  $U$  nên vị trí đó luôn tồn tại duy nhất. Tiếp tục chuyển đổi 1 sang 2, 2 sang 1 ở các vị trí phía sau  $i$  Ban đầu, số các số 2 hơn số các số 1 đúng một đơn vị tại  $i$  vị trí đầu và điều này cũng đúng tại  $2n-i$  vị trí sau. Sau khi thay đổi số các số hơn số các số 2 đúng một đơn vị tại  $2n-i$  vị trí sau; nghĩa là số các số 1 và số các số 2 là bằng nhau; tức là nó tương ứng với 1 phần tử của  $T$ . Do đó,  $g$  là một toàn ánh.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh  $g$  là đơn ánh. Gọi  $t$  và  $t'$  là hai phần tử khác nhau của  $T$ . Giả sử  $i$  là vị trí đầu tiên mà các số ở  $t$  và  $t'$  khác nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử  $t_i = 1, t'_i = 2$ . Khi đó dễ thấy  $f(t) \neq i$ . Ta có hai trường hợp.

- Nếu  $f(t) < i$  thì  $f(t') < f(t)$  vì tại  $i-1$  vị trí đầu, các số là giống nhau. Mà tại vị trí thứ  $i, t_i = 1, t'_i = 2$  nên  $g(t) \neq g(t')$ .
- Nếu  $f(t) > i$ . Khi đó vị trí thứ  $i$  của  $g(t)$  là  $t_i = 5$ . Tại  $i-1$  vị trí đầu, cả hai bên

đều giống nhau nên  $f(t') \geq 1$ . Do đó, vị trí thứ  $i$  của  $g(t')$  là  $t'_i = 2$ . Tức là ta cũng có  $g(t) \neq g(t')$ .

Do đó, luôn có  $g(t) \neq g(t')$ , với mọi  $t \neq t'$  nên  $g$  là đơn ánh.

Kết hợp hai điều trên lại, ta thấy  $g$  là song ánh.

Ta được  $|T| = |U| = \binom{2n}{n-1}$ , suy ra  $|S| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$ .

Kết quả này tương ứng với điều ta thu được trong bài toán trên và rõ ràng để nhận được điều này thì các bước lập luận rắc rối hơn khá nhiều. Quay lại bài toán ban đầu trong kì thi TST 2003 của Việt Nam, ta có một lời giải đầy đủ như sau :

**LỜI GIẢI.** Ta gọi một đường đi thỏa mãn đề bài là đường đi “tốt”. Trước hết, ta thấy số đường đi “tốt” từ điểm  $A(0, 0)$  đến điểm  $D(m, n)$  là  $\binom{m+n}{n}$  và từ  $B(p, 0)$  đến  $C(m, q)$  là  $\binom{m+q-p}{q}$ . Do đó, số cặp đường đi “tốt”  $(f, g)$  tùy ý là  $\binom{m+n}{n} \binom{m+q-p}{q}$ .

Ta sẽ tính số cặp đường đi “tốt”  $(f', g')$  trong đó  $f'$  đi từ  $A$  đến  $C$  và  $g'$  đi từ  $B$  đến  $D$ , rõ ràng hai đường đi này phải có ít nhất một điểm chung  $K(i, j)$ ,  $p \leq i \leq m, 0 \leq j \leq q$ .

Tương tự trên, số cặp đường đi “tốt”  $(f', g')$  là  $\binom{m+q}{q} \binom{m+n-p}{n}$ .

Ta lại thấy rằng, số đường đi “tốt” từ  $A$  đến  $C$  đi qua  $K$  là  $\binom{i+j}{j} \binom{(q-j)+(m-i)}{q-j}$ , số đường đi “tốt” từ  $B$  đến  $D$  đi qua  $K$  là  $\binom{i+j-p}{j} \binom{(n-j)+(m-i)}{n-j}$ .

Do đó  $\binom{m+q}{q} \binom{m+n-p}{n} = \sum_{j=0}^q \sum_{i=p}^m \binom{i+j}{j} \binom{(q-j)+(m-i)}{q-j} \binom{i+j-p}{j} \binom{(n-j)+(m-i)}{n-j}$ .

Ta lại thấy  $K$  là điểm chung của các cặp đường đi  $(f, g)$  mà chúng có ít nhất một điểm chung nên ta tính được số cặp đường đi này là  $\sum_{j=0}^q \sum_{i=p}^m \binom{i+j}{j} \binom{(q-j)+(m-i)}{q-j} \binom{i+j-p}{j} \binom{(n-j)+(m-i)}{n-j}$ .

Điều này có nghĩa là số cặp đường đi tốt  $(f', g')$  cũng chính bằng số cặp đường đi  $(f, g)$  mà chúng có ít nhất một điểm chung.

Vậy số cặp đường đi  $(f, g)$  thỏa mãn đề bài chính là  $\binom{m+n}{n} \binom{m+q-p}{q} - \binom{m+q}{q} \binom{m+n-p}{n}$ . Ta có điều cần chứng minh.  $\square$

Tiếp theo ta xét một số khái niệm mở đầu về phương pháp quỹ đạo

**Định nghĩa 3.** Cho  $x > 0$  và  $y$  là các số nguyên. Quỹ đạo từ gốc tọa độ đến điểm  $(x, y)$  là đường gấp khúc nối các điểm  $(0, 0), (1, s_1), (2, s_2), \dots, (x, s_x)$  trong đó  $|s_i - s_{i+1}| = 1, s_x = y$ .

Gọi  $N_{x,y}$  là số các quỹ đạo nối điểm  $0, 0$  với điểm  $(x, y)$ . Ta có các định lý sau

**Định lý 2.**  $N_{x,y} = \binom{p+q}{p}$  với  $p = \frac{x+y}{2}, q = \frac{x-y}{2}$  nếu  $x, y$  cùng tính chẵn lẻ và  $N_{x,y} = 0$  nếu  $x, y$  khác tính chẵn lẻ.

**CHỨNG MINH.** Giả sử quỹ đạo gồm  $p$  đoạn hướng lên trên và  $q$  đoạn hướng xuống dưới. Khi đó, ta có  $p + q = x, p - q = y$  hay  $p = \frac{x+y}{2}, q = \frac{x-y}{2}$ .

Vì  $p$  và  $q$  là các số nguyên nên  $x, y$  cần phải có cùng tính chẵn lẻ. Do quỹ đạo sẽ hoàn toàn được xác định nếu ta chỉ ra các đoạn được hướng lên trên, do đó số các quỹ đạo từ điểm  $O$  đến điểm  $(x, y)$  là  $N_{x,y} = \binom{p+q}{p}$ . Trường hợp  $x, y$  khác tính chẵn lẻ có thể thấy do không tồn tại các số  $p, q$  nguyên để có thể thực hiện được đường đi của quỹ đạo nên  $N_{x,y} = 0$ .  $\square$

**Định lý 3** (Nguyên lý đối xứng gương). Giả sử  $A(a, \alpha)$  và  $B(\beta, b)$  là các điểm có tọa độ nguyên với  $b > a \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0$  và  $A'(a, -\alpha)$  là điểm đối xứng với  $A$  qua trục  $Ox$ . Khi đó số các quỹ đạo từ  $A$  đến  $B$  cắt trục  $Ox$  hoặc có điểm chung với  $Ox$  bằng số các quỹ đạo từ  $A'$  đến  $B$ .



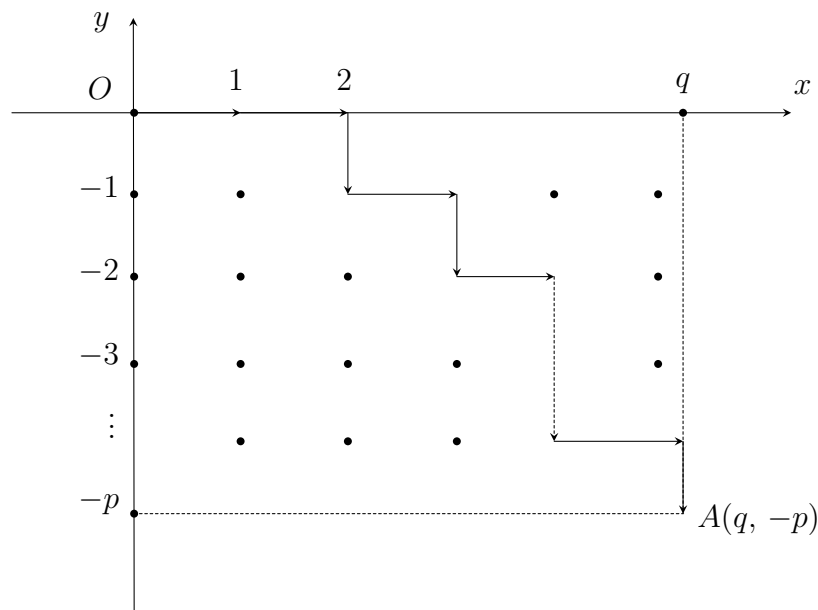
CHỨNG MINH. Mỗi một quỹ đạo  $T$  từ  $A$  đến  $B$ , cắt trục  $Ox$  hoặc có điểm chung với  $Ox$  ta cho tương ứng với quỹ đạo  $T'$  từ  $A'$  đến  $B$  theo quy tắc sau: xét đoạn quỹ đạo  $T$  từ  $A$  cho đến điểm gặp nhau đầu tiên giữa  $T$  và  $Ox$  và lấy đối xứng đoạn này qua  $Ox$ , tiếp theo  $T$  và  $T'$  trùng nhau. Như vậy mỗi một quỹ đạo  $T$  từ  $A$  đến  $B$  cắt  $Ox$  tương ứng với một quỹ đạo xác định từ  $A'$  đến  $B$ . Ngược lại mỗi một quỹ đạo từ  $A'$  đến  $B$  tương ứng với một và chỉ một quỹ đạo từ  $A$  đến  $B$  cắt  $Ox$  (lấy đoạn quỹ đạo từ  $A'$  đến  $B$  đến điểm gặp đầu tiên và lấy đối xứng đoạn này qua  $Ox$ ).

Như vậy, ta đã thiết lập được song ánh từ tập hợp các quỹ đạo từ  $A$  đến  $B$  cắt  $Ox$  vào tập hợp các quỹ đạo từ  $A'$  đến  $B$ . Định lý được chứng minh.  $\square$

Ta xét tiếp bài toán sau xuất hiện trong IMO Shortlist 41.

**Bài toán 24.** Cho  $p, q \in \mathbb{Z}^+$ ,  $(p, q) = 1$ . Hỏi có bao nhiêu tập  $S$  gồm các số tự nhiên sao cho  $0$  thuộc  $S$  và nếu  $x$  thuộc  $S$  thì  $x + p, x + q$  cũng thuộc  $S$ ?

LỜI GIẢI. Mỗi số nguyên  $n$  biểu diễn duy nhất dưới dạng  $px + qy$ , với  $0 \leq x < q$ , nên ta có thể đồng nhất mỗi số nguyên  $n$  với điểm  $(x, y)$  trong mặt phẳng tọa độ.



Rõ ràng  $S$  chứa mọi điểm  $n$  không nằm dưới trục hoành, nên bài toán quy về việc tìm số cách đánh dấu các điểm nằm trong tam giác vuông cạnh huyền  $OA$  với  $A(q, -p)$ , sao cho nếu một điểm được đánh dấu thì những điểm bên phải và nằm trên nó cũng được đánh dấu. Ta thấy rằng mỗi cách đánh dấu như vậy tương ứng với một chuỗi gồm  $q$  số 0 và  $p$  số 1 thể hiện một con đường đi từ  $O$  tới  $A$  (0 là sang phải, còn 1 là đi xuống) mà nằm hoàn toàn trên đường  $OA$  (để ý là trừ hai đầu mút, đoạn  $OA$  không chứa điểm nguyên nào).

Phân hoạch tất cả các chuỗi thành các lớp, mà hai chuỗi bất kỳ trong một lớp là hoán vị vòng quanh của nhau. Dễ thấy mỗi lớp có  $p + q$  chuỗi, hơn nữa trong mỗi lớp chỉ có đúng một chuỗi thoả mãn. Từ đó ta đi tới đáp số là  $\frac{p+q}{p+q}$ .  $\square$

Nếu ta mở rộng bài toán ra trong không gian 3 chiều thì vấn đề sẽ trở nên thú vị hơn rất nhiều. Các định lý và các kết quả của những phép đếm nói chung vẫn tương tự như trong trường hợp

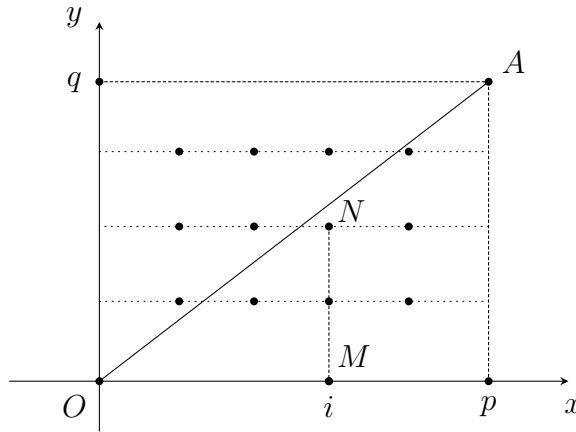
hai chiều nhưng chúng ta sẽ có dịp để tưởng tượng, hình dung ra các quỹ đạo, những con đường đi xuất hiện trong đó và từ đây, ta hoàn toàn có thể xây dựng được nhiều bài toán, biểu thức phức tạp hơn.

Ta xét tiếp một số ứng dụng khác trong Số học.

**Bài toán 25.** Cho  $p, q \in \mathbb{Z}^+$ ,  $(p, q) = 1$ . Chứng minh rằng

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(p-1)q}{p} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

**LỜI GIẢI.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , xét các điểm nguyên nằm trong hình chữ nhật đường chéo  $OA$ , với  $A(p, q)$ . Ta thấy ngay là có  $(p-1)(q-1)$  điểm. Do  $(p, q) = 1$  nên không có điểm nào nằm trên đường chéo, do đó  $OA$  chia chúng thành hai phần đối xứng nhau.



Xét phần nằm dưới  $OA$ , ta thấy số điểm nằm trên đường thẳng  $x = i, 0 < i < p$  là

$$[MN] = \left\lfloor \frac{OM \cdot AB}{OA} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor$$

Do đó số điểm nằm dưới đường chéo  $OA$  là

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

Do tính đối xứng của  $p$  và  $q$ , ta có điều cần chứng minh. □

**Bài toán 26.** Với mọi số dương  $t$ , ta gọi  $d(t)$  là số các phân số tối giản  $\frac{p}{q}$  mà  $0 < p, q \leq t$ . Tính tổng sau với  $m, n \in \mathbb{Z}^+$

$$S = d\left(\frac{m}{1}\right) + d\left(\frac{m}{2}\right) + \cdots + d\left(\frac{m}{n}\right)$$

**LỜI GIẢI.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , ta đồng nhất mỗi phân số  $\frac{a}{b}$  (không nhất thiết tối giản) với điểm  $M(a, b)$  trong đó  $a, b$  là các số nguyên dương.

Xét các điểm nguyên không nằm ngoài hình chữ nhật đường chéo  $AB$ , với  $A(1, 1), B(m, n)$ . Giả sử một đường thẳng  $l$  nào đó qua  $O$  và chứa các điểm nguyên  $(p, q), (2p, 2q), \dots, (kp, kq)$  với  $(p, q) = 1$ . Vì  $kp \leq m, kq \leq n$  nên suy ra

$$p \leq \frac{m}{k} < \frac{m}{k-1} < \cdots < \frac{m}{1}, q \leq \frac{n}{k} < \frac{n}{k-1} < \cdots < \frac{n}{1}$$

Suy ra phân số tối giản  $\frac{p}{q}$  được tính  $k$  lần trong các số  $d\left(\frac{m}{1}\right), d\left(\frac{m}{2}\right), \dots, d\left(\frac{m}{k}\right)$ . Điều đó cho thấy  $S$  chính là số tất cả các điểm không nằm ngoài hình chữ nhật đường chéo  $AB$ , nên  $S = mn$ . □

**Bài toán 27.**

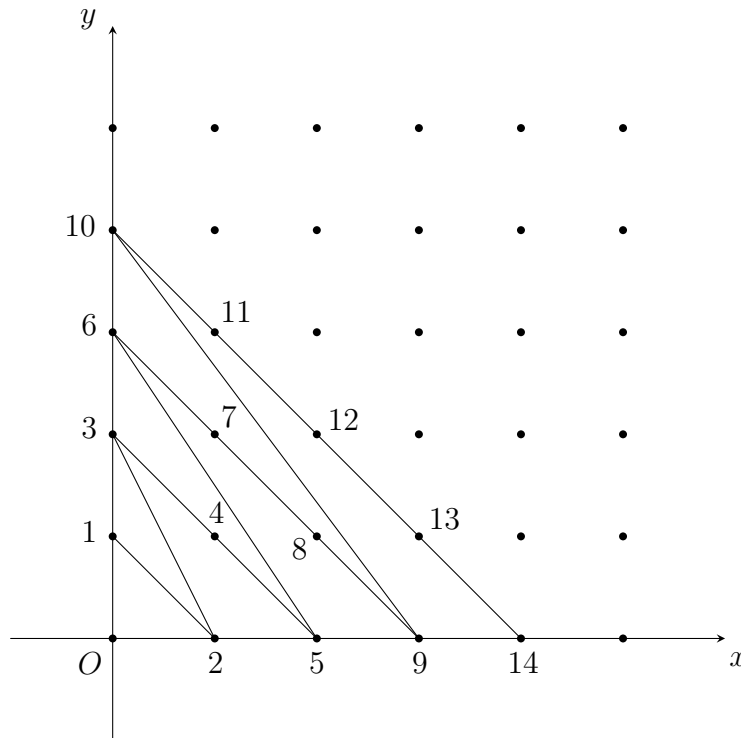
(a) Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên  $n$ , tồn tại duy nhất  $x_n, y_n \in \mathbb{N}$  sao cho

$$2n = (x_n + y_n)^2 + 3x_n + y_n$$

(b) Với  $(x_n, y_n)$  được xác định ở trên, chứng minh rằng

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2015} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{2015} = 41664$$

**LỜI GIẢI.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , gọi  $T_n$  là điểm thứ  $n$  trong dãy điểm chỉ ra trên hình vẽ dưới đây.



Dễ chứng minh nếu tọa độ của  $T_n$  là  $(x_n, y_n)$  thì  $(x_n + y_n)^2 + 3x_n + y_n = 2n$ . Từ đó câu (a) là hiển nhiên. Bây giờ ta chứng minh câu (b).

Để ý rằng  $T_{2015}$  là điểm thứ 62 trên trục hoành và  $\vec{V} = \sum_{i=1}^{2015} \vec{OT}_i = \left( \sum_{i=1}^{2015} x_i, \sum_{i=1}^{2015} y_i \right)$ .

Gọi  $\vec{v}$  là vector đường chéo của hình vuông đơn vị, dễ thấy tổng các vector  $\vec{OT}_i$  với các điểm  $T_i$  nằm trên cạnh huyền của tam giác cạnh  $k$  vuông cân tại  $O$  bằng  $\frac{k(k+1)}{2} \cdot \vec{v}$ . Do đó

$$\vec{V} = \frac{\vec{v}}{2} \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 62 \cdot 63) = \frac{\vec{v}}{6} \cdot (1 \cdot 2 \cdot (3-0) + 2 \cdot 3 \cdot (4-1) + \cdots + 62 \cdot 63 \cdot (64-61)) = 41664 \cdot \vec{v}$$

Ta có điều cần chứng minh. □

**Tài liệu tham khảo**

- [1] Nguyễn Văn Mậu, *Chuyên đề Tổ hợp và rời rạc*, NXBGD, 2007.

- [2] Trần Nam Dũng, *Tài liệu tập huấn đội tuyển thi IMO 2010*.
- [3] Huỳnh Tấn Châu, *Ứng dụng điểm nguyên để giải Toán số học và tổ hợp*, 2011.
- [4] Nguyễn Khắc Minh, Nguyễn Việt Hải, *Các bài thi Olympic Toán THPT Việt Nam*, 2007.
- [5] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.
- [6] Các diễn đàn Toán học :
  - Diễn đàn Art of Problem Solving (Mathlinks)  
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/index.php>
  - Diễn đàn MathScope  
<http://forum.mathscope.org/index.php>

# PHƯƠNG PHÁP HÀM SINH

Hoàng Minh Quân<sup>1</sup>

## 1. Tóm tắt lý thuyết

### 1.1. Định nghĩa

**Định nghĩa 1.** Hàm sinh của dãy số thực  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  là hàm số được xác định bởi

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

**Định nghĩa 2.** Cho dãy số thực  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  Hàm số cho bởi công thức

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

được gọi là hàm sinh dạng mũ của dãy  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

### 1.2. Một số đẳng thức liên quan đến hàm sinh

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+n-1}^i x^i$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-ax)^2} = 1 + 2ax + 3a^2x^2 + 4a^3x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x^r} = 1 + x^r + x^{2r} + x^{3r} + \dots$$

Hai mệnh đề thường được sử dụng :

**Mệnh đề 1.** Cho hàm sinh  $G(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^n$ .

(a) Đặt  $a_r$  là hệ số của  $x^r$  trong khai triển của  $G(x)$  thì  $a_r = C_{r+n-1}^n$ ;

(b)  $(1 - x^m)^n = 1 - C_n^1 x^m + C_n^2 x^{2m} - \dots + (-1)^n x^{mn}$ ;

---

<sup>1</sup>Giáo viên trường THPT Ngọc Tảo, Hà Nội.

$$(c) (1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})^n = (1 - x^m)^n (1 + x + x^2 + \cdots)^n.$$

**Mệnh đề 2** (Công thức xác định hệ số tích của hai hàm sinh). Cho hai hàm sinh của hai dãy  $(a_n), (b_n)$  lần lượt là

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$$

Đặt

$$\begin{aligned} G(x) &= A(x)B(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Khi đó hệ số của  $x^r$  trong khai triển của  $G(x)$  là

$$a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \cdots + a_{r-2}b_2 + a_{r-1}b_1 + a_rb_0 \quad (*)$$

**Chú ý.** Trong các ví dụ ứng dụng hàm sinh để giải bài toán đếm nâng cao ở phần II chúng ta rất hay sử dụng đẳng thức (\*).

## 2. Ứng dụng hàm sinh giải các bài toán đếm điển hình

### 2.1. Ứng dụng hàm sinh giải bài toán chia kẹo Euler

Ý tưởng chung của phương pháp sử dụng hàm sinh giải bài toán đếm là đi tìm hệ số của  $x^r$  trong khai triển của hàm sinh với  $r$  là số phần tử được chọn ra trong  $n$  đối tượng với những điều kiện ràng buộc cho trước. Bây giờ chúng ta sẽ vận dụng những kiến thức hàm sinh trên vào việc giải quyết các bài toán đếm tổ hợp nâng cao. Thông qua nhiều ví dụ khác nhau dưới đây chúng ta sẽ định hình và nắm chắc được cách sử dụng hàm sinh trong việc giải bài toán đếm tổ hợp nâng cao.

**Ví dụ 1.** Vào ngày nghỉ chủ nhật, cô Hoa đi chơi và mua quà là 12 quả cam cho 3 đứa trẻ An, Bình, Chi. Hỏi cô Hoa có bao nhiêu cách phân phối 12 quả cam sao cho An có ít nhất 4 quả, Bình và Chi mỗi người đều có ít nhất 2 quả, nhưng Chi không được nhiều hơn 5 quả?

**LỜI GIẢI.** Hàm sinh cho số cách chọn quả cho An là

$$A(x) = x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 = x^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = x^4 \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả cho Bình là

$$B(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = x^2 \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả cho Chi là

$$C(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = x^2(1 + x + x^2 + x^3) = x^2 \cdot \frac{1 - x^4}{1 - x}$$

Hàm sinh cho số cách phân phối 12 quả cam thỏa mãn điều kiện đề bài là

$$\begin{aligned} G(x) &= A(x)B(x)C(x) = x^4 \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot x^2 \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot x^2 \cdot \frac{1-x^4}{1-x} = \frac{x^8(1-x^5)^2(1-x^4)}{(1-x)^3} \\ &= x^8(1-2x^5+x^{10})(1-x^4)\left(\frac{1}{x-1}\right)^3 \\ &= (x^8-x^{12}-2x^{13}+2x^{17}+x^{18}-x^{22})\left(\frac{1}{x-1}\right)^3 \end{aligned}$$

Do cần tìm hệ số của  $x^{12}$  trong khai triển của  $G(x)$  nên ta chỉ quan tâm tới hệ số của  $U(x) = (x^8 - x^{12} - 2x^{13} + 2x^{17} + x^{18} - x^{22})$  với bậc  $\leq 12$ . Do đó  $U(x)$  chỉ có các hệ số  $a_8, a_{12}$  là thỏa mãn.

Và hệ số của  $x^r$  trong khai triển  $V(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^3$  là  $b_r = C_{r+2}^r$ .

Vậy hệ số của  $x^{12}$  trong khai triển của  $G(x)$  là  $a_8b_4 + a_{12}b_0 = 1.C_6^4 - 1.C_2^0 = 14$ .

Kết luận : Cô Hoa có 14 cách phân chia 12 quả cam cho 3 đứa trẻ thỏa mãn yêu cầu An có ít nhất 4 quả, Bình và Chi mỗi người đều có ít nhất 2 quả, nhưng Chi không được nhiều hơn 5 quả.  $\square$

**Nhận xét.** Thoạt nhìn ban đầu chúng ta thấy cách giải bằng liệt kê cho lời giải ngắn gọn hơn cách hàm sinh nhưng suy nghĩ sâu thêm chúng ta sẽ thấy đối với bài toán có dữ kiện lớn thì cách làm liệt kê tỏ ra kém hiệu quả thậm chí khó làm ra được, chẳng hạn bài toán trên chúng ta thay đổi một chút như sau : “Vào ngày nghỉ chủ nhật, cô Hoa đi chơi và mua quà là 50 cái kẹo cho 3 đứa trẻ An, Bình, Chi. Hỏi cô Hoa có bao nhiêu cách phân phối 50 cái kẹo sao cho An có ít nhất 4 kẹo, Bình và Chi mỗi người đều có ít nhất 2 kẹo, nhưng Chi không được nhiều hơn 5 kẹo?”

Rõ ràng cách làm liệt kê đối với bài toán này trở nên kém hiệu quả, khó khăn và mất thời gian hơn rất nhiều vì chúng ta phải xét quá nhiều trường hợp. Khi đó giải pháp hàm sinh trong bài toán này đem lại cho chúng ta hiệu quả rõ rệt vì chúng ta chỉ cần quan tâm tới hệ số trong khai triển của hàm sinh tương ứng đề bài.

Trong thực tiễn thì dữ liệu rất đa dạng, với những bài toán đếm có nhiều điều kiện ràng buộc khác nhau việc sử dụng hàm sinh sẽ cho chúng ta lời giải hiệu quả.

**Ví dụ 2.** Có bao nhiêu cách xếp một giỏ gồm  $n$  trái cây gồm (táo, chuối, cam, đào), sao cho số táo phải là chẵn, số chuối chia hết cho năm, chỉ có thể nhiều nhất 4 quả cam và nhiều nhất 1 quả đào.

**LỜI GIẢI.** Hàm sinh cho số cách chọn quả táo (số chẵn) là

$$A(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả chuối (số chia hết cho 5) là

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots = \frac{1}{1-x^5}$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả cam (nhiều nhất 4 quả) là

$$C(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả đào (nhiều nhất 1 quả) là

$$D(x) = 1 + x = \frac{1 - x^2}{1 - x}$$

Hàm sinh cho số cách chọn cả 4 loại quả là

$$G(x) = A(x)B(x)C(x)D(x) = \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i + 1)x^i$$

Vậy số cách chọn trái cây thỏa mãn đề bài là  $n + 1$  cách.  $\square$

**Ví dụ 3.** Có bao nhiêu cách chọn ra 15 USD từ 20 người nếu 19 người đầu, mỗi người có thể đưa ra nhiều nhất 1 USD, người thứ 20 có thể đưa ra 1 USD hoặc 5 USD hoặc không USD nào.

**LỜI GIẢI.** Hàm sinh cho số cách chọn nhiều nhất 1 USD từ 19 người là

$$A(x) = (1 + x)^{19}$$

Hàm sinh cho số cách chọn 1 USD hoặc 5 USD hoặc không USD nào ở người thứ 20 là

$$B(x) = 1 + x + x^5$$

Hàm sinh cho số cách chọn ra 15 USD là

$$G(x) = A(x)B(x) = (1 + x)^{19}(1 + x + x^5)$$

Chúng ta tìm hệ số của  $x^{15}$  trong khai triển của  $G(x)$ .

Ta có:

$$(1 + x)^{19} = \sum_{k=0}^{19} C_{19}^k x^{19-k}$$

Đặt  $a_r$  là hệ số của  $x^r$  trong khai triển của  $A(x)$ ,  $b_r$  là hệ số của  $x^r$  trong khai triển của  $B(x)$ .

Khi đó ta có  $a_r = C_{19}^r$  và  $b_0 = b_1 = b_5 = 1$ .

Vậy hệ số của  $x^{15}$  trong khai triển của  $G(x)$  là

$$a_{15}b_0 + a_{14}b_1 + a_{13}b_2 + \cdots + a_0b_{15}$$

Ta có

$$a_{15}b_0 + a_{14}b_1 + a_{10}b_5 = C_{19}^{15} + C_{19}^{14} + C_{19}^{10} = 107882$$

Vậy có 107882 cách chọn ra 15 USD thỏa mãn điều kiện đề bài.  $\square$

**Ví dụ 4.** Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình

$$u + v + w + z = 27 \quad \text{với} \quad 3 \leq u, v, w, z \leq 8$$

**LỜI GIẢI.** Hàm sinh cho số nghiệm nguyên dương của phương trình là

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^3 + x^4 + \cdots + x^8)^4 \\ &= [x^3(1 + x + x^2 + \cdots + x^5)]^4 \\ &= x^{12}(1 + x + x^2 + \cdots + x^5)^4 \end{aligned}$$



Số nghiệm nguyên dương của phương trình là hệ số của  $x^{27}$  trong khai triển của  $G(x)$  và là hệ số của  $x^{15}$  trong khai triển của  $H(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^5)^4$ .

Ta có

$$H(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^5)^4 = \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = (1-x^6)^4 \left(\frac{1}{1-x}\right)^4$$

Đặt  $A(x) = (1-x^6)^4$ ,  $B(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^4$ . Ta có

$$\begin{aligned} A(x) &= (1-x^6)^4 = 1 - C_4^1 x^6 + C_4^2 x^{12} - C_4^3 x^{18} + x^{24} \\ B(x) &= \left(\frac{1}{1-x}\right)^4 = 1 + C_4^1 x + C_4^2 x^2 + C_4^3 x^3 + \dots \end{aligned}$$

Do tìm hệ số của  $x^{15}$  trong khai triển của  $H(x)$  nên ta chỉ quan tâm tới hệ số của  $A(x)$  với bậc  $\leq 15$ . Do đó  $A(x)$  chỉ có các hệ số  $a_0, a_6, a_{12}$  là thỏa mãn.

Và hệ số của  $x^r$  trong khai triển  $B(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^4$  là  $b_r = C_{r+4-1}^r = C_{r+3}^r$ .

Vậy hệ số của  $x^{15}$  trong khai triển của  $H(x)$  là

$$a_0 b_{15} + a_6 b_9 + a_{12} b_3 = 1 \cdot C_{18}^{15} - C_4^1 C_{12}^9 + C_4^2 C_6^3$$

Vậy số nghiệm nguyên dương của phương trình là  $C_{18}^{15} - C_4^1 C_{12}^9 + C_4^2 C_6^3$ . □

**Ví dụ 5.** Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên dương thỏa mãn

$$0 \leq x_1, x_2 \leq 10; 3 \leq x_3, x_4, x_5 \leq 5 \quad \text{và} \quad x_1, x_2 \quad \text{chẵn}$$

**HƯỚNG DẪN.** Hàm sinh cho số nghiệm nguyên dương của phương trình là

$$G(x) = (1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{10})^2 (x^3 + x^4 + x^5)^3$$

Công việc tìm hệ số  $x^{30}$  xin dành cho bạn đọc. □

## 2.2. Ứng dụng hàm sinh chứng minh đẳng thức tổ hợp

**Ví dụ 6.** Chứng minh đẳng thức sau với  $n$  là số tự nhiên

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

**LỜI GIẢI.** Xét đa thức  $(1+x)^{2n}$  có hệ số của  $x^n$  là  $\binom{2n}{n}$ . Mặt khác ta có

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$$

Xét hàm sinh  $G(x) = H(x) = (1+x)^n$  có hệ số  $a_r = b_r = \binom{n}{r}$ . Hệ số  $x^n$  của  $G(x)H(x)$  là

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$

Vì vậy ta có

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

□

**Ví dụ 7** (Đẳng thức Vandermonde). Chứng minh đẳng thức sau với  $r \leq \min\{m, n\}$

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

LỜI GIẢI. Dựa vào ý tưởng lời giải ví dụ ??? bạn đọc có thể tự chứng minh đẳng thức Vandermonde.  $\square$

**Ví dụ 8** (China 1994). Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^n 2^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

LỜI GIẢI. Ta có  $\binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$  là hệ số tự do trong khai triển  $(1+x)(x+x^{-1})^k$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1+x) \left(x + \frac{1}{x}\right)^k 2^{n-k} &= (1+x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(x + \frac{1}{x}\right)^k 2^{n-k} \\ &= (1+x) \left(2 + x + \frac{1}{x}\right)^n \\ &= \frac{1}{x^n} (1+x)(2x + x^2 + 1)^n \\ &= \frac{1}{x^n} (1+x)^{2n+1} \end{aligned}$$

So sánh hệ số tự do ta có

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

$\square$

**Ví dụ 9.** Chứng minh các số Fibonacci có thể được viết dưới dạng

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots$$

LỜI GIẢI. Chúng ta đã biết công thức dạng truy hồi của số Fibonacci

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}, n \geq 3$$

Đặt  $G(x)$  là hàm sinh cho dãy  $(F_n)$  và giả sử  $F_0 = 0$ , ta có:

$$\begin{aligned} G(x) &= F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \dots \\ -xG(x) &= -F_0x - F_1x^2 - F_2x^3 - \dots \\ -x^2G(x) &= -F_0x^2 - F_1x^3 - F_2x^4 - \dots \end{aligned}$$

Cộng vế với vế ba đẳng thức trên, ta có

$$(1 - x - x^2)G(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + (F_2 - F_1 - F_0)x^2 + \dots = x$$

Do đó

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Ta viết lại  $G(x)$  như sau:

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{1 - x(1 + x)} = 1 + x(1 + x) + x^2(1 + x)^2 + \cdots + x^n(1 + x)^n$$

Hệ số của  $x^n$  trong khai triển cuối là  $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots$ . □

### 2.3. Ứng dụng hàm sinh giải bài toán phân hoạch

Một phân hoạch của số tự nhiên  $r$  là một cách viết  $r$  thành tổng của các số nguyên dương hay một bộ số không thứ tự  $(a_i)$  thỏa mãn  $\sum a_i = r$ .

Ví dụ về phân hoạch :

$$2 = 1 + 1$$

$$3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Đặt  $e_k$  là số nguyên dương thành phần xuất hiện  $k$  lần. Ta có

$$1e_1 + 2e_2 + \cdots + ke_k + \cdots + re_r = r$$

Xây dựng hàm sinh cho phương trình trên ta có

$$\begin{aligned} G(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots) \\ &\quad \times (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots) \\ &\quad \times (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots + x^{3n} + \cdots) \\ &\quad \cdots \\ &\quad \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots + x^{kn} + \cdots) \\ &\quad \cdots \end{aligned}$$

**Ví dụ 10.** Xây dựng hàm sinh đếm số nghiệm nguyên dương của phương trình

$$2x + 3y + 5z = r \quad \text{với } x, y, z \geq 0$$

**LỜI GIẢI.** Hàm sinh cho phương trình trên là

$$(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n})(1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{3n})(1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{5n})$$

□

**Ví dụ 11.** Hỏi có bao nhiêu cách đổi từ 500 nghìn đồng thành các tờ 1 nghìn, 2 nghìn, 5 nghìn, 10 nghìn, 20 nghìn.

HƯỚNG DẪN. Bài toán đã cho quy về đếm số nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 20x_5 = 500$$

Số nghiệm nguyên dương của phương trình chính là hệ số của  $x^{500}$  trong khai triển của hàm sinh

$$\begin{aligned} G(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots) (1 + x^2 + x^4 + \cdots) (1 + x^5 + x^{10} + \cdots) \\ &\quad \times (1 + x^{10} + x^{20} + \cdots) (1 + x^{20} + x^{40} + \cdots) \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})} \end{aligned}$$

□

**Ví dụ 12** (China 1996). Cho  $n$  là số nguyên dương. Tìm số đa thức  $P(x)$  với hệ số thuộc  $\{0; 1; 2; 3\}$  thỏa mãn  $P(2) = n$ .

LỜI GIẢI. Đặt  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots$

Theo giả thiết  $P(2) = n$  nên ta có  $a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \cdots + 2^k a_k + \cdots = n$  với  $0 \leq a_k \leq 3$ .

Chúng ta xây dựng hàm sinh:

$$\begin{aligned} G(x) &= (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^4 + x^8 + x^{12}) \cdots \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2^k} + x^{2^{k+2}} + x^{3 \cdot 2^k}) \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 - x^{2^{k+2}}}{1 - x^{2^k}} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{2}(n+1) \right) x^n \end{aligned}$$

Vậy có  $\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{2}(n+1) \right)$  đa thức thỏa mãn đề bài.

□

### 3. Một số bài toán tổng hợp

**Ví dụ 13.** Huấn luyện viên bóng đã có  $n$  cầu thủ tập luyện hàng ngày. Đầu tiên huấn luyện viên chia các cầu thủ thành 2 nhóm và yêu cầu các cầu thủ mỗi nhóm xếp thành hàng. Nhóm thứ nhất có thể chọn áo da cam, áo trắng hoặc áo xanh, nhóm thứ hai có thể chọn áo đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện công việc chọn áo như thế.

HƯỚNG DẪN. Giả sử huấn luyện viên chọn  $k$  người từ nhóm thứ nhất. Đặt  $a_k$  là số cách mà  $k$  người này chọn các áo màu da cam, trắng, xanh và nhóm xếp thẳng hàng nên có  $a_k = k!3^k$ .

Do đó hàm sinh lũy thừa cho  $a_k$  là

$$A(x) = \sum_{k \geq 0} k! 3^k \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{1-3x}$$

Tương tự đặt  $b_m$  là số cách chọn  $m$  người từ nhóm thứ hai xếp hàng thẳng và chọn áo đỏ, ta có  $b_m = m!$ . Hàm sinh cho dãy  $b_m$  là

$$B(x) = \sum_{m \geq 0} m! \frac{x^m}{m!} = \frac{1}{1-x}$$

Vậy hàm sinh cho cả 2 nhóm chọn áo là

$$G(x) = A(x)B(x) = \frac{1}{1-3x} \cdot \frac{1}{1-x}$$

Đến đây bạn đọc chỉ cần tìm hệ số của  $\frac{x^n}{n!}$  trong khai triển  $G(x)$  là xong.

Đáp số :  $\frac{n!(3^{n+1}-1)}{2}$ . □

**Ví dụ 14.** Cho  $r$  đồ vật. Hỏi có bao nhiêu cách phân phối  $r$  đồ vật khác nhau vào trong  $n$  cái hộp sao cho không có hộp nào rỗng.

**LỜI GIẢI.** Hàm sinh lũy thừa cho số cách phân phối  $r$  đồ vật là

$$\begin{aligned} G(x) &= \left( x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right)^n \\ &= (e^x - 1)^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (e^x)^{n-i} (-1)^i \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left( \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n-i)^r x^r}{r!} \right)^{n-i} (-1)^i \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r \right) \frac{x^r}{r!} \end{aligned}$$

Do đó ta có  $a_r = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r$ . □

**Ví dụ 15.** Cho số tự nhiên  $r$ . Đếm số phân hoạch  $r$  gồm các thành phần xuất hiện các số 1, 2, 3, 5, 7.

**HƯỚNG DẪN.** Xây dựng hàm sinh

$$G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)}$$

□

**Ví dụ 16.** Có bao nhiêu cách phân phối 25 quả bóng giống hệt nhau vào bảy hộp riêng biệt sao cho hộp đầu tiên có không quá 10 quả bóng và số bóng là tùy ý ở mỗi hộp trong sáu hộp còn lại.

LỜI GIẢI. Hàm sinh cho số cách phân phối  $r$  quả bóng vào bảy hộp riêng biệt sao cho hộp đầu tiên có không quá 10 quả bóng là:

$$\begin{aligned} G(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{10})(1 + x + x^2 + \cdots)^6 \\ &= \left( \frac{1 - x^{11}}{1 - x} \right) \left( \frac{1}{1 - x} \right)^6 = (1 - x^{11}) \left( \frac{1}{1 - x} \right)^7 \end{aligned}$$

Đặt  $A(x) = 1 - x^{11}$ ,  $B(x) = \left( \frac{1}{1-x} \right)^7$ .

Chúng ta có hệ số khác 0 trong hàm số  $A(x)$  là  $a_0 = 1$ ;  $a_{11} = -1$ .

Và  $B(x) = \left( \frac{1}{1-x} \right)^7 = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+6}^r$  nên hệ số của  $x^r$  là  $C_{r+6}^r$ .

Vậy hệ số của  $x^{25}$  trong khai triển của  $G(x)$  là  $a_0 b_{25} + a_{11} b_{14} = C_{31}^{25} - C_{20}^{14} = 697521$ .

Vậy có 697521 cách phân phối 25 quả bóng giống hệt nhau vào bảy hộp riêng biệt sao cho hộp đầu tiên có không quá 10 quả bóng và số bóng là tùy ý ở mỗi hộp trong sáu hộp còn lại.  $\square$

**Ví dụ 17.** Có bao nhiêu cách chọn 25 đồ chơi từ bảy loại đồ chơi khác nhau sao cho mỗi loại đồ chơi có từ 2 đến 6 đồ chơi được chọn.

LỜI GIẢI. Hàm sinh cho số cách chọn  $r$  đồ chơi từ bảy loại đồ chơi khác nhau sao cho mỗi loại có từ 2 đến 6 đồ chơi được chọn là:

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7 \\ &= [x^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)]^7 = x^{14}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^7 \end{aligned}$$

Để tìm hệ số của  $x^{25}$  trong khai triển của  $G(x)$  thì chúng ta tìm hệ số của  $x^{11}$  trong khai triển

$$H(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^7 = \left( \frac{1 - x^5}{1 - x} \right)^7 = (1 - x^5)^7 \left( \frac{1}{1 - x} \right)^7$$

Đặt

$$A(x) = (1 - x^5)^7; B(x) = \left( \frac{1}{1 - x} \right)^7$$

$$B(x) = \left( \frac{1}{1 - x} \right)^7 = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+6}^r x^r$$

Do tìm hệ số của  $x^{11}$  trong khai triển của  $H(x)$  nên ta chỉ quan tâm tới hệ số của  $A(x)$  với bậc  $\leq 11$ . Do đó  $A(x)$  chỉ có các hệ số  $a_0; a_5; a_{10}$  là thỏa mãn. Và hệ số của  $x^r$  trong khai triển  $B(x)$  là  $b_r = C_{r+6}^r$ .

Vậy hệ số của  $x^{11}$  trong khai triển của  $H(x)$  là  $a_0 b_{11} + a_5 b_6 + a_{10} b_1 = C_{17}^{11} + (-C_7^1) C_{12}^6 + C_7^2 C_7^1 = 6055$ .  $\square$

**Ví dụ 18.** Tính tổng

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

LỜI GIẢI. Xuất phát từ hàm sinh

$$\frac{x}{(1-x)^2} = 1x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots$$

Ta có

$$x \left( \frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + r^2x^r + \cdots$$

Nhân cả 2 vế của đẳng thức cuối với 2 ta có

$$G(x) = \frac{2x(1+x)}{(1-x)^3} = 2(1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + r^2x^r + \cdots)$$

Vậy hệ số  $a_r = 2r^2$ . Ta có cần tính  $\frac{1}{2}(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ .

Ta có

$$G^*(x) = \frac{G(x)}{2(1-x)} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^4} = x(1-x)^{-4} + x^2(1-x)^{-4}$$

Hệ số của  $x^n$  trong khai triển  $x(1-x)^{-4}$  là hệ số của  $x^{n-1}$  trong khai triển  $(1-x)^{-4}$ .

Hệ số của  $x^n$  trong khai triển  $x^2(1-x)^{-4}$  là hệ số của  $x^{n-2}$  trong khai triển  $(1-x)^{-4}$ .

Do đó

$$S = \binom{(n-1)+4-1}{n-1} + \binom{(n-2)+4-1}{n-2} = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3}$$

□

**Ví dụ 19.** Trong một túi sách của Long có chứa bao gồm 10 chiếc nhẫn vàng, 20 chiếc nhẫn bạc và 30 viên kim cương. Hỏi Long có bao nhiêu cách chọn ra 30 đồ vật để đem bán, biết rằng mỗi loại trang sức có ít nhất 1 đồ vật được lấy ra.

**LỜI GIẢI.** Hàm sinh cho số cách chọn ít nhất một chiếc nhẫn vàng được chọn là

$$M(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{10}$$

Hàm sinh cho số cách chọn ít nhất một chiếc nhẫn bạc được chọn là

$$N(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{20}$$

Hàm sinh cho số cách chọn ít nhất một viên kim cương được chọn là

$$P(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{30}$$

Vậy hàm sinh cho số cách chọn 30 đồ vật để đem bán, biết rằng mỗi loại trang sức có ít nhất

một đồ vật được lấy ra là:

$$\begin{aligned}
G(x) &= M(x)N(x)P(x) \\
&= (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{10})(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{20})(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{30}) \\
&= x^3(1 + x + x^2 + \cdots + x^9)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{19})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{29}) \\
&= x^3 \frac{1 - x^{10}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{20}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{30}}{1 - x} \\
&= \frac{x^3(1 - x^{10})(1 - x^{20})(1 - x^{30})}{(1 - x)^3} \\
&= \frac{x^3(1 - x^{20} - x^{10} + x^{30})(1 - x^{30})}{(1 - x)^3} \\
&= \frac{x^3(1 - x^{30} - x^{20} + x^{50} - x^{10} + x^{40} + x^{30} - x^{60})}{(1 - x)^3} \\
&= \frac{x^3(1 - x^{10} - x^{20} + x^{40} + x^{50} - x^{60})}{(1 - x)^3} \\
&= (x^3 - x^{13} - x^{23} + x^{43} + x^{53} - x^{63}) \frac{1}{(1 - x)^3} \\
&= \frac{x^3(1 - x^{10} - x^{20} + x^{40} + x^{50} - x^{60})}{(1 - x)^3} \\
&= (x^3 - x^{13} - x^{23} + x^{43} + x^{53} - x^{63}) \frac{1}{(1 - x)^3}
\end{aligned}$$

Đặt  $A(x) = x^3 - x^{13} - x^{23} + x^{43} + x^{53} - x^{63}$ ;  $B(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ .

Hệ số khác không và có bậc nhỏ hơn 30 của  $A(x)$  là  $a_3 = 1$ ;  $a_{13} = -1$ ;  $a_{23} = -1$ .

Trong khi đó  $B(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+3-1}^r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+2}^r x^r$  có hệ số của  $x^r$  là  $b^r = C_{r+2}^r$ .

Vậy hệ số của  $x^{30}$  trong khai triển của hàm sinh  $G(x)$  là

$$a_3 b_{27} + a_{13} b_{17} + a_{23} b_7 = C_{29}^{27} - C_{19}^{17} - C_9^7 = 199$$

Vậy Long có 199 cách chọn 30 đồ vật để đem bán mà mỗi loại trang sức có ít nhất một đồ vật được lấy ra.  $\square$

**Ví dụ 20.** Có bao nhiêu cách phân hoạch số tự nhiên  $n$  thành các thành phần gồm các số nguyên dương lẻ khác nhau?

**HƯỚNG DẪN.** Bài toán trở thành tìm hệ số của  $x^n$  trong khai triển của hàm sinh

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^7} \cdots$$

$\square$

**Ví dụ 21.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên?

$$u + v + w + z = 20 \quad \text{với} \quad u \geq 0, v \geq 0, w = 2m, z = 2k + 1$$



HƯỚNG DẪN. Xét hàm sinh

$$G(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^2(1 + x + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots)$$

□

**Ví dụ 22** (Đẳng thức Pascal). Chứng minh rằng

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

LỜI GIẢI. Xét hàm sinh  $G_n(x) = (1+x)^n$ . Ta viết lại như sau :

$$G_n(x) = (1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} = (1+x)G_{n-1}(x) = G_{n-1}(x) + xG_{n-1}(x)$$

Để ý rằng : Hệ số của  $x^k$  trong khai triển  $G_n(x) = (1+x)^n$  là  $\binom{n}{k}$ , còn hệ số của  $x^k$  trong khai triển  $G_{n-1}(x) + xG_{n-1}(x)$  là  $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ .

Vậy  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ . □

**Ví dụ 23** (PTNK 2009). Tìm số tất cả các số có  $n$  chữ số lập từ các chữ số 3, 4, 5, 6 và chia hết cho 3.

LỜI GIẢI. Một số chia hết cho 3 nếu tổng các chữ số của nó chia hết cho 3. Mỗi chữ số có thể là 3, 4, 5, 6. Xét hàm sinh  $G(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \cdots + g_{6n}x^{6n}$ . Gọi số tất cả các số có  $n$  chữ số lập từ các chữ số 3, 4, 5, 6 và chia hết cho 3 là  $S_n$  thì  $S_n$  chính là tổng các hệ số của các số mũ chia hết cho 3.

Gọi  $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$  là căn bậc ba nguyên thủy của phương trình  $x^3 = 1$ , ta có  $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ . Suy ra

$$\begin{aligned} G(1) + G(\varepsilon) + G(\varepsilon^2) &= 3g_0 + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)g_1 + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)g_2 + 3g_3 + \cdots \\ &= 3(g_0 + g_3 + g_6 + \cdots) = 3S_n \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3} (G(1) + G(\varepsilon) + G(\varepsilon^2)) \\ &= \frac{1}{3} [(1+1+1+1)^n + (\varepsilon^2+1+\varepsilon+1)^n + (\varepsilon+1+\varepsilon^2+1)^n] \\ &= \frac{1}{3} (4^n + 2) \end{aligned}$$

□

**Ví dụ 24.** Cho số nguyên dương  $n$ . Gọi  $\alpha_n$  là số cách phân tích  $n$  thành tổng các số tự nhiên lẻ,  $\beta_n$  là số cách phân tích  $n$  thành tổng các số tự nhiên đôi một khác nhau. Hãy chứng tỏ rằng  $\alpha_n = \beta_n$ .

LỜI GIẢI. Xét hàm sinh  $F(x) = \prod_{i \in \mathbb{N}, i \text{ lẻ}} (1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \cdots)$ .

Hệ số của  $x^n$  trong khai triển của  $F(x)$  chính là  $\alpha_n$ .

Xét hàm sinh  $G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$ .

Hệ số của  $x^n$  trong khai triển của  $G(x)$  chính là  $\beta_n$ .

Ta có  $F(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots$  và  $G(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^5} \cdots = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots$

Do đó  $F(x) \equiv G(x)$  hay  $\alpha_n = \beta_n$ . □

**Ví dụ 25** (IMO 1998 Shortlist). Cho dãy số  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  là dãy số không giảm sao cho mọi số tự nhiên đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng  $a_i + 2a_j + 4a_k$  với  $i, j, k$  là các số tự nhiên không nhất thiết khác nhau. Tìm  $a_{1998}$ .

**LỜI GIẢI.** Xét hàm sinh  $G(x) = x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \dots$

Ta có  $G(x^2) = x^{2a_0} + x^{2a_1} + x^{2a_2} + \dots$  và  $G(x^4) = x^{4a_0} + x^{4a_1} + x^{4a_2} + \dots$

Vậy ta có hàm sinh  $F(x) = G(x)G(x^2)G(x^4) = \sum_{i,j,k} x^{a_i+2a_j+4a_k}$

Theo giả thiết: Mọi số tự nhiên đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng  $a_i + 2a_j + 4a_k$  với  $i, j, k$  là các số tự nhiên không nhất thiết khác nhau nên ta có thể biểu diễn

$$F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} F(x) &= G(x)G(x^2)G(x^4) = \frac{1}{1-x} \\ F(x^2) &= G(x^2)G(x^4)G(x^8) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Vì thế  $\frac{G(x)}{G(x^8)} = 1 + x$  hay  $G(x) = (1+x)G(x^8) = (1+x)(1+x^8)G(x^{8^2}) = \dots$

Vậy  $G(x) = (1+x)G(x^8) = (1+x)(1+x^8)G(x^{8^2}) = (1+x)(1+x^8)(1+x^{8^2})G(x^{8^3}) \dots$

Ta có  $a_i$  là số tự nhiên nên viết theo cơ số 8 thì được biểu diễn bởi các số 0 và 1. Do đó ta biểu diễn 1998 theo cơ số 2, rồi thay cơ số 2 bởi cơ số 8. Ta có  $1998 = 11111001110_{(2)}$ . Do đó  $a_{1998} = 11111001110_{(8)}$ .  $\square$

**Ví dụ 26.** Tìm số các tập con của tập  $\{1, 2, 3, \dots, 2003\}$  sao cho tổng các phần tử của chúng chia hết cho 5.

**HƯỚNG DẪN.** Xét hàm sinh  $G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots (1+x^{2003})$ .

Giả sử khai triển được  $G(x) = \sum a_n x^n$ . Ta cần tính tổng các hệ số có số mũ chia hết cho 5, tức là tính  $a_0 + a_5 + a_{10} + \dots$

Đáp số :  $\frac{1}{5}(2^{2003} + 2^{401})$ .  $\square$

## 4. Các bài tập tự luyện

**Bài tập 1.** Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình

$$u + v + w + z = 20, 1 \leq u, v, w, z \leq 7$$

**Bài tập 2.** Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình

$$u + v + w + z = 20 \quad \text{với} \quad 1 \leq u \leq 4; 3 \leq v, w, z \leq 8$$

**Bài tập 3.** Có bao nhiêu cách phân phối 10 quả bóng giống nhau cho 2 cậu bé và 2 cô bé sao cho mỗi cậu bé được ít nhất 1 quả bóng và mỗi cô bé được ít nhất 2 quả bóng?

**Bài tập 4.** Cô Trang có 25 bông hoa và 4 lọ hoa. Hỏi cô Trang có bao nhiêu cách phân phối 25 bông hoa vào 4 lọ hoa sao cho mỗi lọ có ít nhất là 3 bông hoa và nhiều nhất là 7 bông hoa.

**Bài tập 5.** Hỏi có bao nhiêu cách chọn 25 quả bóng gồm 3 loại bóng, xanh, đỏ, trắng sao cho số bóng đỏ chọn nhiều nhất là 2, số bóng xanh chọn nhiều nhất là 3 và số bóng trắng chọn nhiều nhất là 4.

**Bài tập 6.** Một cậu bé được cha tặng 30 viên bi làm đồ chơi. Hỏi cậu bé có bao nhiêu cách phân phối 30 viên bi đó vào 5 cái hộp sao cho hai hộp đầu có chứa số chẵn viên bi và số bi trong mỗi hộp đó không vượt quá 10 viên, và số bi trong mỗi hộp còn lại có ít nhất 3 viên và nhiều nhất là 5 viên.

**Bài tập 7.** Có bao nhiêu cách sưu tầm 24 con tem từ 4 bạn nam và 6 bạn nữ. Biết rằng mỗi người có ít nhất một con tem nhưng mỗi bạn nam có nhiều nhất 4 con tem còn mỗi bạn nữ có nhiều nhất 7 con tem.

**Bài tập 8** (IMO 1995). Cho  $p$  là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con  $A$  của tập hợp  $\{1, 2, \dots, 2p\}$  thỏa mãn

- i) Tập  $A$  có đúng  $p$  phần tử.
- ii) Tổng các phần tử của tập  $A$  chia hết cho  $p$ .

**Bài tập 9.** Chứng minh rằng số cách thêm dấu ngoặc vào vào tích gồm  $n + 1$  nhân tử là số Catalan  $C_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$ .

**Bài tập 10** (Rookie Contest 1990). Cho  $n$  là số nguyên tố và  $a_1, a_2, \dots, a_m$  là các số nguyên dương. Gọi  $f(k)$  là số các bộ  $m$  số  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$  thỏa mãn điều kiện  $0 \leq c_i \leq a_i$  và  $c_1 + c_2 + \dots + c_m \equiv k \pmod{m}$ . Chứng minh rằng  $f(0) = f(1) = \dots = f(n-1)$  khi và chỉ khi  $n \mid a_j$  với  $j$  nào đó thuộc  $\{1, 2, \dots, m\}$ .

**Bài tập 11.** Tìm hệ số của  $x^{18}$  trong khai triển

$$(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)^7$$

**Bài tập 12** (AMM 2010). Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  ta có

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}^2}{(2k+1)\binom{2n}{2k}} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$$

## Tài liệu tham khảo

- [1] Kim Đình Sơn, *Hàm sinh*.
- [2] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Biến phức, định lý và áp dụng*, NXB Giáo dục, 2009.
- [3] Titu Andreescu, Zuming Feng, *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Birkhäuser, 2003.
- [4] Titu Andreescu, Zuming Feng, *102 Combinatorial Problems*, Birkhäuser, 2003.

- [5] Daniel A. Marcus, *Combinatorics a problem oriented approach*, The Mathematical Association of America, 1999.
- [6] Philippe Flajolet, Robert Sedgewick, *Analytic combinatorics*, Cambridge, 2009.
- [7] John Michael Harris, Jeffrey L. Hirst, Michael J. Mossinghoff, *Combinatorics and graph theory*, Springer, 2000.
- [8] Diễn đàn MathScope  
<http://forum.mathscope.org/index.php>

# PHƯƠNG PHÁP HÀM SINH

Lê Hữu Phước<sup>1</sup>

Trần Nguyễn Quốc Cường<sup>2</sup>

## 1. Cơ sở lý thuyết

### 1.1. Hàm sinh

**Định nghĩa 1.** Cho một dãy  $(a_n)_{n \geq 0}$ , khi đó, hàm số  $f$  xác định như sau:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

được gọi là hàm sinh bởi dãy  $(a_n)_{n \geq 0}$ .

Rõ ràng các hệ số của  $f$  cho ta thông tin của dãy  $(a_n)_{n \geq 0}$ .

**Các phép toán.** Cho hàm  $f$  sinh bởi dãy  $(a_n)_{n \geq 0}$  và hàm  $g$  sinh bởi dãy  $(b_n)_{n \geq 0}$ . Khi đó ta có các phép toán thường dùng sau:

- Phép cộng:

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$$

Đây là hàm sinh của dãy  $(a_n + b_n)_{n \geq 0}$ .

- Phép nhân:

$$f(x) \times g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

Trong đó  $c_i = \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k}$ .

Từ đây ta cũng suy ra được phép nhân với hằng số.

- Phép chia: Khi  $b_0 \neq 0$  ta có thể định nghĩa được phép chia:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \overline{g(x)}$$

Trong đó  $g(x) \times \overline{g(x)} = 1$ . Điều kiện  $b_0 \neq 0$  ở đây là điều kiện cần và đủ để tồn tại  $\overline{g(x)}$ .

---

<sup>1</sup>SV Cử nhân Khoa học tài năng Toán học K15, ĐHKHTN - ĐHQGHN.

<sup>2</sup>Lớp 11A1, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng.

- Đạo hàm:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$$

Ngoài ra, ta cũng thường sử dụng loại hàm sinh khác của dãy  $(a_n)_{n \geq 0}$  sau:

$$F(x) = x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \dots$$

Với kiểu hàm sinh như thế này, ta có phép toán nhân như sau:

Cho hàm  $F$  sinh bởi  $(a_n)_{n \geq 0}$  và  $G$  sinh bởi  $(b_n)_{n \geq 0}$ , khi đó:

$$F(x) \times G(x) = \sum_{c \in C} x^c$$

trong đó  $C = \{a_i + b_j | i, j \geq 1\}$ .

## 1.2. Một số công cụ bổ sung

**Định lý 1** (Khai triển lũy thừa của một hàm). Cho hàm  $f$  khả vi vô hạn lần trên  $\mathbb{R}$ , khi đó:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

**Định lý 2** (RUF (Root of Unity Filter)). Cho số nguyên dương  $n$ , định nghĩa  $\epsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ . Xét đa thức

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

( $a_k = 0$  nếu  $k > \deg F$ ).

Khi đó:

$$a_0 + a_n + a_{2n} + \dots = \frac{1}{n}(F(1) + F(\epsilon) + F(\epsilon^2) + \dots + F(\epsilon^{n-1}))$$

**Định lý 3.** Cho  $p$  là một số nguyên tố, đặt  $\epsilon = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$ . Khi đó, nếu:

$$a_0 + a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2 + \dots + a_{p-1} \epsilon^{p-1} = 0$$

thì

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1}$$

Các bạn nên tự chứng minh các vấn đề trên (không khó) và thực hiện khai triển lũy thừa đối với một số hàm quen thuộc như  $e^x, \ln x, \sin x, \cos x, (x+1)^\alpha$  với  $\alpha \in \mathbb{R}, \dots$

### 1.3. Khai triển của một số hàm

$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k$
$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$	$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$	$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$	$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

## 2. Một số kĩ thuật dùng hàm sinh

Thực ra sử dụng đa thức trong giải toán không quá xa lạ, ta có thể lấy ngay ví dụ như để chứng minh

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

ta có thể xét  $F(x) = (1+x)^n$  và thay  $x = 1$ ; để chứng minh:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

ta lại xét  $G(x) = (1+x)^{2n}$  và so sánh hệ số của  $x^n$  trong hai cách khai triển.

Những phần sau sẽ nói rõ hơn một phần của việc dùng đa thức để giải toán qua các ví dụ.

### 2.1. Tìm công thức tổng quát của dãy số

**Ví dụ 1.** Tìm công thức tổng quát của dãy Fibonacci xác định bởi

i)  $f_0 = 1, f_1 = 1$ ;

ii)  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .

LỜI GIẢI. Xét hàm sinh của dãy Fibonacci:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (f_i + f_{i+1}) x^{i+2} + f_1 x + f_0 \\ &= x^2 F(x) + x(F(x) - 1) + x + 1 \end{aligned}$$

Suy ra:

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Ta phân tích

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}x} \left( \frac{1}{1 - \alpha_1 x} - \frac{1}{1 - \alpha_2 x} \right)$$

Trong đó  $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , nên:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{i+1} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{i+1} x^i$$

Vậy ta có

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

□

**Ví dụ 2.** Tìm công thức tổng quát của số Catalan  $C_n$  xác định bởi công thức:  $C_0 = 1$  và

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$$

LỜI GIẢI. Xét hàm sinh:

$$F(x) = \sum_{t=0}^{\infty} C_t x^t$$

Ta có:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{t=0}^{\infty} C_t x^t = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} C_t x^t \\ &= 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{t-1} C_k C_{t-1-k} x^t \\ &= 1 + x F^2(x) \end{aligned}$$

Suy ra:

$$F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

Ta khai triển lũy thừa của  $\sqrt{1 - 4x}$ :

$$\sqrt{1 - 4x} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} \binom{2m-2}{m-1} x^m$$



Do  $F(x)$  có hệ số không âm nên ta có:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \binom{2m-2}{m-1} x^{m-1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m} x^m \end{aligned}$$

Vậy  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Số Catalan có nhiều ý nghĩa về mặt tổ hợp và các cách chứng minh khác, các bạn có thể tham khảo trong nhiều tài liệu.  $\square$

**Ví dụ 3.** Tìm công thức tổng quát của số hoán vị derangement  $D_n$ .<sup>3</sup>

LỜI GIẢI. Ta có công thức sau:

$$n! = \sum_{i=0}^n D_{n-i} \binom{n}{i}$$

Tương đương với

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{D_i}{i! \cdot (n-i)!}$$

Thật vậy, tập các hoán vị của  $\{1, 2, \dots, n\}$  có thể được chia thành các tập con, mà trong mỗi tập con đó, mỗi hoán vị có đúng  $i$  điểm cố định. Số phần tử của mỗi tập con đó sẽ bằng cách chọn ra  $i$  điểm cố định và hoán vị derangement  $n-i$  phần tử còn lại.

Đặt  $a_i = \frac{D_i}{i!}$ . Xét hàm sinh:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{t=0}^{\infty} a_t x^t = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} a_t x^t \\ &= 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \left( 1 - \sum_{i=0}^{t-1} \frac{a_i}{(t-i)!} \right) x^t = \frac{1}{1-x} - \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{t-1} \frac{a_i}{(t-i)!} x^t \\ &= \frac{1}{1-x} - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{t=i+1}^{\infty} \frac{a_i}{(t-i)!} x^t = \frac{1}{1-x} - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{t=i+1}^{\infty} \frac{x^{t-i}}{(t-i)!} \\ &= \frac{1}{1-x} - (e^x - 1)F(x) \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{e^{-x}}{1-x} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!} \end{aligned}$$

Bằng phép nhân hai hàm, dễ dàng suy ra:

$$a_n = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

Tương đương

$$D_n = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

$\square$

---

<sup>3</sup>Hoán vị  $\sigma$  của  $\{1, 2, \dots, n\}$  được gọi là derangement nếu  $\sigma(i) \neq i$  với mọi  $1 \leq i \leq n$ .

## 2.2. Tính các tổng tổ hợp

**Ví dụ 4.** Cho số tự nhiên  $n$ . Tính tổng sau:

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{3k}$$

LỜI GIẢI. Đặt  $\epsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1 + \epsilon)^n + (1 + \epsilon^2)^n + (1 + 1)^n}{3} \\ &= \frac{(-1)^n(\epsilon^{2n} + \epsilon^n) + 2^n}{3} \end{aligned}$$

Nếu  $n$  chia hết cho 3:

$$A = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$$

Nếu  $n$  không chia hết cho 3:

$$A = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$$

□

**Ví dụ 5.** Cho số tự nhiên  $n$ . Tính tổng:

$$\sum_k \binom{n}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} x^k$$

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} x^k &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^{2i} + \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^{2i+1} \\ &= (1 + x^2)^n + x(1 + x^2)^n \\ &= (x + 1)(1 + x^2)^n \end{aligned}$$

□

**Ví dụ 6.** Cho hai số nguyên dương  $n$  và  $m$  thỏa mãn  $n \geq m$ . Tính tổng:

$$\sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

LỜI GIẢI. (i) *Cách 1.* Ta có đẳng thức sau:

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

Như vậy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} &= \binom{n}{m} \sum_{k=m}^n \binom{n-m}{k-m} \\ &= 2^{n-m} \binom{n}{m} \end{aligned}$$

(ii) *Cách 2.* Đặt

$$a_n = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

Xét hàm:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^n \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^n = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} x^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{n-k} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{k-m} \frac{x^{k-m}}{(1-x)^{k-m}} \\ &= \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{1-x}\right)^{m+1}} \\ &= \frac{x^m}{(1-2x)^{m+1}} \end{aligned}$$

Vậy hệ số của  $x^n$  trong khai triển của  $f$  là:

$$a_n = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

□

**Ví dụ 7.**

$$\sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

LỜI GIẢI. (i) *Cách 1.* Ta có  $\binom{k}{m}$  là hệ số tự do trong khai triển  $\frac{(1+x)^k}{x^m}$ . Đặt

$$S = \sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

thì  $S$  là hệ số tự do trong khai triển:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(1+x)^k}{x^m} &= \frac{(-1)^n}{x^m} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (1+x)^k \\ &= \frac{(-1)^n x^n}{x^m} \end{aligned}$$

Do đó:

i) nếu  $m = n$  thì  $S = (-1)^n$ ;

ii) nếu  $m \neq n$  thì  $S = 0$ .

(ii) *Cách 2.* Đặt:

$$a_m = \sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

Xét hàm sinh:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} x^m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} (1+x)^k
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$F(x) = (-x)^n$$

Ta thu được kết quả tương tự lời giải trước. □

**Ví dụ 8.** Tính tổng:

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-1}$$

LỜI GIẢI. (i) *Cách 1.* Đặt:

$$a_k = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{k}$$

Xét hàm sinh:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{k} x^k \\
 &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2n-2r}{k} x^k \\
 &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} (1+x)^{2n-2r} \\
 &= (x^2 + 2x)^n
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$F(x) = x^n (x+2)^n$$

Vậy  $a_{n-1} = 0$ .

(ii) *Cách 2.* Ta có  $\binom{2n-2r}{n-1}$  là hệ số tự do trong khai triển  $\frac{(1+x)^{2n-2r}}{x^{n-1}}$ , do đó:

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n-1}$$

là hệ số tự do trong khai triển:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x^{n-1}} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} (1+x)^{2n-2r} &= \frac{(x^2 + 2x)^n}{x^{n-1}} \\
 &= x(x+2)^n
 \end{aligned}$$

Mà hệ số tự do của biểu thức này bằng 0, ta thu được cùng kết quả với lời giải trước.  $\square$

Trong lời giải 1, ta thay lượng  $n - 1$  thành biến mới là  $k$ , điều này làm điều cần chứng minh trở nên nhiều hơn (tổng quát hơn) nhưng lại làm tăng tính độc lập cho các biến.

## 2.3. Các bài toán đếm

**Ví dụ 9.** Cho số tự nhiên  $n$  và số nguyên dương  $m$ . Tính số nghiệm tự nhiên  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  của phương trình

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$$

**LỜI GIẢI.** Gọi số nghiệm của phương trình trên là  $f_{m,n}$  thì nó chính là hệ số của  $y^n$  trong khai triển của:

$$F(y) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} y^i \right)^m = \frac{1}{(1-y)^m}$$

Sử dụng khai triển lũy thừa ta có:

$$F(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F^{(i)}(y_0)}{i!} (y - y_0)^i$$

Cho  $y_0 = 0$  ta được:

$$F(y) = \sum_{i=0}^{\infty} y^i \binom{m+i-1}{m-1}$$

Từ đó suy ra:

$$f_{m,n} = \binom{m+n-1}{m-1}$$

$\square$

Trong nhiều trường hợp,  $x_i$  nhận giá trị thuộc tập  $A_i \subseteq \mathbb{N}$ , khi đó ta xét hàm sinh:

$$F(y) = \prod_{i=1}^m \left( \sum_{a \in A_i} y^a \right)$$

**Ví dụ 10.** Andrian có các đồng xu  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Với mỗi  $k, C_k$  được đúc sao cho khi tung lên, xác suất để nó xấp là  $\frac{1}{2k+1}$ . Tung tất cả  $n$  đồng xu, tính xác suất để số đồng xấp là lẻ (biểu diễn ở dạng rút gọn).

**LỜI GIẢI.** Xác suất để số đồng xấp là lẻ là tổng hệ số bậc lẻ của đa thức:

$$P(x) = \prod_{k=1}^n \left( \frac{2k}{2k+1} + \frac{x}{2k+1} \right)$$

Tổng hệ số này bằng

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2} = \frac{n}{2n+1}$$

$\square$

**Ví dụ 11.** Tìm tất cả  $n$  sao cho có thể tô màu xanh và đỏ cho tập  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  để  $S^3$  chứa đúng 2007 bộ  $(x, y, z)$  mà  $x, y, z$  cùng màu và  $x + y + z$  chia hết cho  $n$ .

**LỜI GIẢI.** Gọi các số được tô màu đỏ là  $a_1, a_2, \dots, a_u$  và các số được tô màu xanh là  $b_1, b_2, \dots, b_v$ . Xét hai đa thức:

$$U(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_u}$$

$$V(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + \dots + x^{b_v}$$

Như vậy số bộ số thỏa mãn đề bài chính là hệ số của các đơn thức có số mũ chia hết cho  $n$  trong khai triển  $U^3(x) + V^3(x)$ .

Ta có:

$$U^3(x) + V^3(x) = (U(x) + V(x))(U^2(x) - U(x)V(x) + V^2(x))$$

Để ý rằng:

$$U(x) + V(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

Với mỗi đơn thức trong khai triển của  $U^2(x) - U(x)V(x) + V^2(x)$  sẽ tồn tại duy nhất một đơn thức trong  $U(x) + V(x)$  sao cho tích của chúng là một đơn thức có số mũ chia hết cho  $n$ . Từ đó suy ra tổng các bộ số thỏa mãn đề bài là:

$$U^2(1) - U(1)V(1) + V^2(1) = u^2 - uv + v^2$$

□

**Ví dụ 12.** Với một tập hợp  $A$ , định nghĩa  $s(A)$  là tổng tất cả phần tử của  $A$  (nếu  $A = \emptyset$  thì  $s(A) = 0$ ). Đặt

$$S = \{1, 2, \dots, 1999\}$$

Với  $0 \leq r \leq 6$ , định nghĩa:

$$T_r = \{T \mid T \subseteq S, s(T) \equiv r \pmod{7}\}$$

Với mỗi  $r$ , tính số phần tử của  $T_r$ .

**LỜI GIẢI.** Xét hàm sinh:

$$F(x) = \prod_{i=1}^{1999} (x^i + 1)$$

Đặt  $\epsilon = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ , ta có:

$$\begin{aligned} F(\epsilon) &= 2^{285} (1 + \epsilon)(1 + \epsilon^2)(1 + \epsilon^3)(1 + \epsilon^4) \\ &= 2^{285} (1 + \epsilon^3) \end{aligned}$$

Mặt khác, ta viết

$$F(\epsilon) = \sum_{r=0}^6 |T_r| \epsilon^r$$

Như vậy

$$T_0 - 2^{285} = T_1 = T_2 = T_3 - 2^{285} = T_4 = T_5 = T_6$$

Mà

$$T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 = 2^{1999}$$

Suy ra

$$T_1 = T_2 = T_4 = T_5 = T_6 = \frac{2^{1999} - 2^{286}}{7}$$

$$T_0 = T_3 = \frac{2^{1999} + 5 \cdot 2^{285}}{7}$$

Ở đây, ta có thể tính  $T_0$  một cách đơn giản bằng RUF như sau:

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{7} \sum_{i=0}^6 F(\epsilon^i) \\ &= \frac{2^{1999} + 5 \cdot 2^{285}}{7} \end{aligned}$$

Cũng bằng cách này, chỉ cần một chút điều chỉnh đơn giản, ta có thể tính được các  $T_r$  khác, các bạn nên tự thực hiện việc này.  $\square$

**Ví dụ 13.** Cho  $p$  là một số nguyên tố lẻ và đặt  $A = \{1, 2, \dots, 2p\}$ . Tính số tập con của  $A$  có  $p$  phần tử và tổng các phần tử của nó chia hết cho  $p$ .

**LỜI GIẢI.** Đặt  $\epsilon = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$ . Xét đa thức:

$$\begin{aligned} F(x) &= \prod_{i=1}^{2p} (x - \epsilon^i) \\ &= (x^p - 1)^2 \\ &= x^{2p} - 2x^p + 1 \end{aligned}$$

Ta viết:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{2p} (-1)^i a_i x^i \\ a_i &= \sum_{t=0}^{p-1} A_{i,t} \epsilon^t \end{aligned}$$

Khi đó ta sẽ thấy rằng  $A_{i,t}$  chính là số tập con có  $2p - i$  phần tử và tổng các phần tử đồng dư  $t$  theo modulo  $p$ .

Ta có

$$a_p = \sum_{t=0}^{p-1} A_{p,t} \epsilon^t = 2$$

Do  $A_{p,t}$  đều là số nguyên nên:

$$A_{p,0} - 2 = A_{p,1} = A_{p,2} = \dots = A_{p,p-1}$$

Lại có

$$A_{p,0} + A_{p,1} + A_{p,2} + \dots + A_{p,p-1} = \binom{2p}{p}$$

Suy ra

$$A_{p,0} = \frac{\binom{2p}{p} + 2(p-1)}{p}$$

□

**Ví dụ 14.** Cho  $p$  là một số nguyên tố lẻ và  $n$  là một số nguyên dương không chia hết cho  $p$ . Tính số tất cả các bộ  $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}) \in \{0, 1, \dots, n-1\}^{p-1}$  sao cho:

$$\sum_{i=1}^{p-1} ix_i$$

chia hết cho  $p$ .

LỜI GIẢI. Xét hàm sinh:

$$F(x) = \prod_{i=1}^{p-1} (1 + x^i + x^{2i} + \dots + x^{(n-1)i})$$

Ta có:

$$F(1) = n^{p-1}$$

Đặt  $\epsilon = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$ . Khi đó, với mọi  $1 \leq j \leq p-1$ :

$$\begin{aligned} F(\epsilon^j) &= \prod_{i=1}^{p-1} \frac{1 - \epsilon^{nij}}{1 - \epsilon^{ij}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Theo định lý RUF ta có số bộ cần tính là:

$$\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} F(\epsilon^j) = \frac{n^{p-1} + p - 1}{p}$$

□

## 2.4. Các bài toán chứng minh

**Ví dụ 15.** Xét các cặp  $(a_i, b_i) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{N}$  với  $1 \leq i \leq k$ , ( $k \geq 2$ ). Biết rằng với mỗi số nguyên không âm  $n$ , tồn tại duy nhất một chỉ số  $i$  sao cho  $n \equiv b_i \pmod{a_i}$ . Chứng minh rằng:

(a) Tồn tại  $i \neq j$  sao cho  $a_i = a_j$ ;

(b)  $\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} = 1$ ,

(c)  $\sum_{i=1}^k \frac{b_i}{a_i} = \frac{n-1}{2}$ .



LỜI GIẢI. Theo đề bài, ta có:

$$\sum_{i=1}^k x^{b_i}(1 + x^{a_i} + x^{2a_i} + \dots) = 1 + x + x^2 + \dots$$

Tương đương

$$\sum_{i=1}^k \frac{x^{b_i}}{1 - x^{a_i}} = \frac{1}{1 - x}$$

Hay

$$\sum_{i=1}^k \frac{x^{b_i}}{1 + x + x^2 + \dots + x^{a_i-1}} = 1$$

(a) Giả sử phản chứng, các  $a_i$  là đôi một phân biệt.

Với mỗi  $i$  từ 1 đến  $k$  đặt:

$$r_i = 1 + x + x^2 + \dots + x^{a_i-1}$$

và

$$A = \prod_{i=1}^k r_i$$

Ta có:

$$\sum_{i=1}^k x^{b_i} \frac{A}{r_i} = A$$

Đặt  $a_k = \max\{a_i | 1 \leq i \leq k\}$ ,  $\epsilon = \cos \frac{2\pi}{a_k} + i \sin \frac{2\pi}{a_k}$ . Như vậy ta có  $\epsilon$  là nghiệm của  $r_k$  và không là nghiệm của tất cả các  $r_i$  còn lại, điều này cho ta mâu thuẫn với biểu thức trên.

(b) Thay  $x = 1$  trong biểu thức:

$$\sum_{i=1}^k \frac{x^{b_i}}{1 + x + x^2 + \dots + x^{a_i-1}} = 1$$

Ta được

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} = 1$$

(c) Lấy đạo hàm của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^k \frac{x^{b_i}}{1 + x + x^2 + \dots + x^{a_i-1}} = 1$$

ta có:

$$\sum_{i=1}^k \frac{b_i x^{b_i-1}(1 + x + \dots + x^{a_i-1}) - x^{b_i}(1 + 2x + \dots + (a_i - 1)x^{a_i-2})}{(1 + x + \dots + x^{a_i-1})^2} = 0$$

Lúc này thay  $x = 1$  ta thu được:

$$\sum_{i=1}^k \frac{b_i a_i - \frac{a_i(a_i-1)}{2}}{a_i^2} = 0$$

Suy ra:

$$\sum_{i=1}^k \frac{b_i}{a_i} = \frac{k-1}{2}$$

□

**Ví dụ 16.** Tìm hàm sinh của dãy số  $(p_n)_{n \geq 1}$  trong đó  $p_n$  là số cách phân hoạch số nguyên dương  $n$ .

**LỜI GIẢI.** Trong một phân hoạch của  $n$ , ta xác định một dãy các số tự nhiên  $(a_i)_{i \geq 1}$  với định nghĩa trong phân hoạch có đúng  $a_i$  phần có giá trị bằng  $i$ .

Như vậy dễ thấy rằng hàm sinh của dãy  $(p_n)_{n \geq 1}$  sẽ là:

$$\begin{aligned} F(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots) \cdots \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \cdots} \end{aligned}$$

□

**Ví dụ 17.** Chứng minh rằng số cách phân hoạch  $n$  thành các phần đôi một phân biệt bằng số cách phân hoạch  $n$  thành các phần lẻ.

**LỜI GIẢI.** Số phân hoạch  $n$  thành các phần đôi một phân biệt là hệ số của  $x^n$  trong khai triển

$$P(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdots$$

Số cách phân hoạch  $n$  thành các phần lẻ là hệ số của  $x^n$  trong khai triển

$$Q(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots) \cdots$$

Ta có:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots \\ Q(x) &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots \end{aligned}$$

Vậy  $P(x) \equiv Q(x)$ , suy ra điều cần chứng minh.

□

### 3. Bài tập

**Bài tập 1.** Cho số tự nhiên  $n$ . Tính tổng:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \binom{n-i}{i} 2^{n-2i}$$

**Bài tập 2.** Cho số tự nhiên  $n$ . Tính tổng:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n-i}{\lfloor \frac{n-i}{2} \rfloor}$$

**Bài tập 3.** Cho  $m, n$  là hai số tự nhiên. Tính tổng:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{m-k}{2} \rfloor}$$

**Bài tập 4.** Cho số tự nhiên  $n$ . Tính tổng:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k}$$

**Bài tập 5.** Cho  $m, n$  là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^m \binom{2m-k}{m+n} 2^k = 4^m - \sum_{j=1}^n \binom{2m+1}{m+j}$$

**Bài tập 6.** Tìm công thức tổng quát của dãy số  $(a_{n,k})$  xác định như sau:  $a_{n,0} = 2n+1, a_{0,k} = 1$ , với  $n \geq 0$  và  $k \geq 1$ , ta có:

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + a_{n,k-1} + \cdots + a_{n,0}$$

**Bài tập 7.** Cho số tự nhiên  $n$ . Biết rằng các phương trình  $ix + (i+1)y = n+1-i$  có đúng  $R_i$  nghiệm  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  với mọi  $1 \leq i \leq n+1$ . Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{n+1} R_i = n+1$$

**Bài tập 8.** Cho dãy  $(a_n)$  xác định bởi  $a_1 = 0, a_2 = 1$ , và với mọi  $n \geq 3$ :

$$a_n = \frac{na_{n-1}}{2} + \frac{n(n-1)a_{n-2}}{2} + \frac{(-1)^{n-1}n}{2} + (-1)^n$$

Tính tổng:

$$a_n + 2 \binom{n}{1} a_{n-1} + \cdots + n \binom{n}{n-1} a_1$$

**Bài tập 9.** Đếm số đường đi với  $k$  bước đi để đi từ  $(0,0)$  đến  $(m,n)$  sao cho mỗi bước đi là đi từ  $(i,j)$  đến đúng một trong bốn vị trí  $(i-1,j), (i+1,j), (i,j-1), (i,j+1)$ .

**Bài tập 10.** Cho  $2n$  số thực phân biệt  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Bảng  $n \times n$  được điền số theo quy tắc: ô ở hàng  $i$  cột  $j$  thì được điền số  $a_i + b_j$ . Chứng minh rằng tích các số ở mỗi cột là bằng nhau thì tích các số ở mỗi hàng cũng bằng nhau.

**Bài tập 11.** Chứng minh rằng số phân hoạch một số nguyên dương  $n$  thành các phần mà các phần chẵn đôi một phân biệt bằng số cách phân hoạch  $n$  thành các phần mà mỗi giá trị xuất hiện không quá 3 lần.

**Bài tập 12.** Gọi  $a_n$  là số cách biểu diễn  $n$  dưới dạng tổng có thứ tự của các số 1 và số 2,  $b_n$  là số cách biểu diễn  $n$  dưới dạng tổng có thứ tự của các số không nhỏ hơn 2. Chứng minh rằng  $a_n = b_{n+2}$ .

**Bài tập 13.** Cho hai tập  $A = \{a_i | i = \overline{1, n}\}, B = \{b_i | i = \overline{1, n}\}$  phân biệt. Xác định hai tập  $A_2 = \{a_i + a_j | 1 \leq i < j \leq n\}, B_2 = \{b_i + b_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ . Giả sử ta có  $A_2 = B_2$ . Chứng minh rằng  $n$  là một lũy thừa của 2.

**Bài tập 14.** Cho tập  $E = \{1, 2, \dots, 2008\}$ , mỗi số thuộc  $E$  được tô bởi đúng 1 trong 3 màu đỏ, vàng, xanh. Gọi  $A$  là số bộ  $(x, y, z) \in E^3$  mà  $x, y, z$  cùng màu và  $x + y + z$  chia hết cho 2008,  $B$  là số bộ  $(x, y, z) \in E^3$  mà  $x, y, z$  đôi một khác màu và  $x + y + z$  chia hết cho 2008. Chứng minh rằng  $2A > B$ .

**Bài tập 15.** Xét một phân hoạch của tập các số nguyên không âm thành hai tập  $A, B$  sao cho, với mỗi số nguyên không âm  $n$ , số cách biểu diễn  $n = a_1 + a_2$  ( $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ ) bằng số cách biểu diễn  $n = b_1 + b_2$  ( $b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$ ). Chứng minh rằng cách phân hoạch này tồn tại và duy nhất.

**Bài tập 16.** Xét một phân hoạch  $\pi$  của số nguyên dương  $n$ . Gọi  $\alpha(\pi)$  là số số 1 trong phân hoạch  $\pi$ ,  $\beta(\pi)$  là số phần phân biệt trong phân hoạch  $\pi$ . Chứng minh rằng

$$\sum \alpha(\pi) = \sum \beta(\pi)$$

(tổng lấy theo tất cả các phân hoạch  $\pi$  của  $n$ )

**Bài tập 17.** Cho số nguyên dương  $n \geq 3$ . Kí hiệu  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i(\sigma)$  là số cặp nghịch thế trong hoán vị  $\sigma$  của  $[n]$ , và  $a_k$  là số hoán vị  $\sigma$  của  $[n]$  sao cho  $i(\sigma) = k$ . Chứng minh rằng:

$$\sum_{k \geq 0} a_{3k+1} = \sum_{k \geq 0} a_{3k+2}$$

**Bài tập 18.** Cho số nguyên tố lẻ  $p$ . Chứng minh rằng trong  $2p - 1$  số nguyên bất kì, luôn tồn tại  $p$  số có tổng chia hết cho  $p$ .

**Bài tập 19.** Một dãy số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gọi là  $p$ -cân bằng nếu ta có tổng  $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \dots$  bằng nhau với mọi  $1 \leq k \leq p$ . Chứng minh rằng nếu một dãy có 50 phần tử là  $p$ -cân bằng với  $p$  bằng 3, 5, 7, 11, 13, 17 thì dãy đó gồm toàn các số 0.

**Bài tập 20.** Cho hai họ tập hợp  $(A_n)_{n \geq 1}, (B_n)_{n \geq 1}$  thỏa mãn:

i)  $A_1 = \emptyset, B_1 = \{0\};$

ii)  $A_n = \{x + 1 | x \in B_{n-1}\}, B_n = A_{n-1} \cup B_{n-1} - A_{n-1} \cap B_{n-1}.$

Tìm tất cả số nguyên dương  $n$  sao cho  $B_n = \{0\}$ .

## 4. Lời giải

**Bài tập 1.** Cho số tự nhiên  $n$ . Tính tổng:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \binom{n-i}{i} 2^{n-2i}$$

LỜI GIẢI. Ta có:

$$a_n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \binom{n-i}{i} 2^{n-2i}$$

là hệ số tự do trong khai triển:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \frac{2^{n-2i}(1+x)^{n-i}}{x^i} &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} \frac{(2+2x)^{n-i}}{(2x)^i} \\ &= \left(2x + 2 + \frac{1}{2x}\right)^n \\ &= \frac{(2x+1)^{2n}}{(2x)^n} \end{aligned}$$

Do đó suy ra:

$$a_n = \binom{2n}{n}$$

□

**Bài tập 2.** Cho số tự nhiên  $n$ . Tính tổng:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n-i}{\lfloor \frac{n-i}{2} \rfloor}$$

LỜI GIẢI. Ta có  $\binom{n-i}{\lfloor \frac{n-i}{2} \rfloor}$  là hệ số tự do trong khai triển của  $(x+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-i}$ .

Do đó:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} 2^k$$

là hệ số tự do trong khai triển:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (1+x) \left(x + \frac{1}{x}\right)^{n-k} 2^k &= (1+x) \left(x + \frac{1}{x} + 2\right)^n \\ &= \frac{(1+x)^{2n+1}}{x^n} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} 2^k = \binom{2n+1}{n}$$

□

**Bài tập 3.** Cho  $m, n$  là hai số tự nhiên. Tính tổng:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{m-k}{2} \rfloor}$$

LỜI GIẢI. Chú ý rằng  $\binom{n-k}{\lfloor \frac{m-k}{2} \rfloor}$  là hệ số tự do trong khai triển của:

$$y^{n-m}(1+y) \left(y + \frac{1}{y}\right)^{n-k}$$

Do đó:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{m-k}{2} \rfloor} x^k$$

là hệ số tự do trong khai triển theo  $y$  của:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} y^{n-m} (1+y) \left(y + \frac{1}{y}\right)^{n-k} x^k &= (1+y) y^{n-m} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(y + \frac{1}{y}\right)^{n-k} x^k \\ &= (1+y) y^{n-m} \left(x + y + \frac{1}{y}\right)^n \\ &= \frac{(1+y)(xy + y^2 + 1)^n}{y^m} \end{aligned}$$

Từ đó ta có được cách tính tổng đã cho. □

**Bài tập 4.** Cho số tự nhiên  $n$ . Tính tổng

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k}$$

LỜI GIẢI. (i) *Cách 1.* Ta có:

$$\begin{aligned} \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} &= \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} \\ &= \frac{(2n)!}{(2n-k)!k!} \cdot \frac{(2n-k)!}{(2n-2k)!k!} \\ &= \binom{2n}{k} \binom{2n-k}{k} \end{aligned}$$

Do đó:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k}$$

là hệ số tự do trong khai triển:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{2^{2n-2k} (x+1)^{2n-k}}{x^k} &= (2x+2)^{2n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{(4x^2+4x)^k} \\ &= (2x+2)^{2n} \left(1 + \frac{1}{4x^2+4x}\right)^{2n} \\ &= \frac{(2x+1)^{4n}}{(2x)^{2n}} \end{aligned}$$

Tức là:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$$

(ii) *Cách 2.* Ta có  $\binom{2k}{k}$  là hệ số tự do trong khai triển  $\frac{(x+1)^{2k}}{x^k}$ . Như vậy ta có:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k}$$

là hệ số tự do trong khai triển của

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \frac{(1+x)^{2k}}{x^k} 2^{2n-2k}$$

tức là hệ số tự do trong khai triển:

$$2^{2n-1} \left( \left( 1 + \frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right)^{2n} + \left( 1 - \frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right)^{2n} \right) = \frac{(1+\sqrt{x})^{4n} + (1-\sqrt{x})^{4n}}{2x^n}$$

Ta có đáp số là  $\binom{4n}{2n}$ .

(iii) *Cách 3.* Xét hàm sau:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{2n}{2k} (2\sqrt{x})^{2n} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\binom{2n}{2k} (2\sqrt{x})^{2n} = \frac{1}{2} (2\sqrt{x})^{2k} \left( \frac{1}{(1-2\sqrt{x})^{2k+1}} + \frac{1}{(1+2\sqrt{x})^{2k+1}} \right)$$

Như vậy:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2(1-2\sqrt{x})} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \left( \frac{x}{(1-2\sqrt{x})^2} \right)^k + \frac{1}{2(1+2\sqrt{x})} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \left( \frac{x}{(1+2\sqrt{x})^2} \right)^k \\ &= \frac{1}{2(1-2\sqrt{x})} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1-2\sqrt{x})^2}}} + \frac{1}{2(1+2\sqrt{x})} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+2\sqrt{x})^2}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-4\sqrt{x}}} + \frac{1}{2\sqrt{1+4\sqrt{x}}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \sqrt{x}^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (-\sqrt{x})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{2n} x^n \end{aligned}$$

Ta thu được điều cần chứng minh. □

**Bài tập 5.** Cho  $m, n$  là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^m \binom{2m-k}{m+n} 2^k = 4^m - \sum_{j=1}^n \binom{2m+1}{m+j}$$

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\begin{aligned} 2^{2m+1} &= \sum_{i=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{i} \\ &= 2 \sum_{i=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{i} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$4^m = \sum_{i=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{i}$$

Như vậy ta được:

$$4^m - \sum_{j=1}^n \binom{2m+1}{m+j} = \sum_{j=m+n+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{j}$$

Ta đặt:

$$a_t = \sum_{j=t+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{j}$$

Xét hàm sinh:

$$F(x) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t x^t$$

Vậy:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=t+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{j} x^t \\ &= \sum_{j=1}^{2m+1} \sum_{t=0}^{j-1} \binom{2m+1}{j} x^t \\ &= \sum_{j=1}^{2m+1} \binom{2m+1}{j} \frac{x^j - 1}{x - 1} \\ &= \frac{1}{x - 1} \left( \sum_{j=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{j} x^j - \sum_{j=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{j} \right) \\ &= \frac{1}{x - 1} ((1 + x)^{2m+1} - 2^{2m+1}) \\ &= (1 + x)^{2m} + 2(1 + x)^{2m-1} + \dots + 2^{2m} \end{aligned}$$

Từ đó ta được hệ số của  $x^t$  trong khai triển của  $F$  là:

$$a_t = \sum_{j=0}^{2m} \binom{j}{t} 2^{2m-j}$$

Suy ra đẳng thức cần chứng minh. □

**Bài tập 6.** Tìm công thức tổng quát của dãy số  $(a_{n,k})$  xác định như sau:  $a_{n,0} = 2n+1$ ,  $a_{0,k} = 1$ , với  $n \geq 0$  và  $k \geq 1$ , ta có:

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + a_{n,k-1} + \dots + a_{n,0}$$

**LỜI GIẢI.** Ta có:

$$\begin{aligned} a_{n+1,k+1} &= a_{n,k+1} + a_{n,k} + \dots + a_{n,0} \\ &= a_{n,k+1} + a_{n+1,k} \end{aligned}$$



Xét hàm sinh:

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} x^n y^k \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} x^n + \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k} y^k - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x^n y^k \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} x^n + \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k} y^k - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n-1,k} + a_{n,k-1}) x^n y^k \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} x^n + \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k} y^k - 1 + y \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} x^n y^k + x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x^n y^k
 \end{aligned}$$

Ngoài ra ta có:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^n \\
 &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
 &= \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \\
 \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k} y^k &= \sum_{k=0}^{\infty} y^k \\
 &= \frac{1}{1-y} \\
 y \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} x^n y^k &= y \left( F(x, y) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k} y^k \right) \\
 &= yF(x, y) - \frac{y}{1-y} \\
 x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x^n y^k &= x \left( F(x, y) - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} x^n \right) \\
 &= xF(x, y) - \frac{x^2 + x}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

Như vậy ta suy ra:

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \frac{1+x}{(1-x)(1-x-y)} \\
 &= \frac{1+x}{1-x} \sum_{t=0}^{\infty} (x+y)^t \\
 &= \frac{1+x}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} y^k \sum_{t=k}^{\infty} \binom{t}{k} x^{t-k} \\
 &= \frac{1+x}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{(1-x)^{k+1}}
 \end{aligned}$$

Vậy  $a_{n,k}$  bằng hệ số của  $x^n$  trong khai triển của  $\frac{1+x}{(1-x)^{k+2}}$  tức là:

$$a_{n,k} = \binom{n+k+1}{k+1} + \binom{n+k}{k+1}$$

□

**Bài tập 7.** Cho số tự nhiên  $n$ . Biết rằng các phương trình  $ix + (i + 1)y = n + 1 - i$  có đúng  $R_i$  nghiệm  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  với mọi  $1 \leq i \leq n + 1$ . Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{n+1} R_k = n + 1$$

LỜI GIẢI. Ta có  $R_i$  là hệ số tự do trong khai triển của:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^{n+1-i}(1-x^i)(1-x^{i+1})} \\ &= \frac{(1-x^{i+1}) - (1-x^i)}{(1-x)x^{n+1}(1-x^i)(1-x^{i+1})} \\ &= \frac{1}{x^{n+1}(1-x)} \left( \frac{1}{1-x^i} - \frac{1}{1-x^{i+1}} \right) \end{aligned}$$

Như vậy:

$$\sum_{k=1}^{n+1} R_k$$

là hệ số tự do trong khai triển:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^{n+1}(1-x)} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{n+2}} \right) \\ &= \frac{1}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left( \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^{k(n+2)} \right) \end{aligned}$$

tức là hệ số tự do trong khai triển:

$$\frac{1}{x^n} (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)^2$$

Từ đó ta có:

$$\sum_{k=1}^{n+1} R_k = n + 1$$

□

**Bài tập 8.** Cho dãy  $(a_n)$  xác định bởi  $a_1 = 0, a_2 = 1$ , và với mọi  $n \geq 3$ :

$$a_n = \frac{na_{n-1}}{2} + \frac{n(n-1)a_{n-2}}{2} + \frac{(-1)^{n-1}n}{2} + (-1)^n$$

Tính tổng

$$a_n + 2 \binom{n}{1} a_{n-1} + \cdots + n \binom{n}{n-1} a_1$$

LỜI GIẢI. Bổ sung thêm  $a_0 = 1$ .

Đặt  $b_n = \frac{a_n}{n!}$ . Khi đó:

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{2} + \frac{b_{n-2}}{2} + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{2(n-1)!}$$

Khi đó, xét:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

Ta có:

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} b_k x^k \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \left( \frac{b_{k-1}}{2} + \frac{b_{k-2}}{2} + \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{k-1}}{2(k-1)!} \right) x^k \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}(F(x) - 1) + \frac{x^2}{2}(F(x) - 1) + e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}(e^{-x} - 1 + x) \end{aligned}$$

Suy ra:

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

Ta tính tổng:

$$\begin{aligned} &a_n + 2 \binom{n}{1} a_{n-1} + \cdots + n \binom{n}{n-1} a_1 + (n+1) \binom{n}{n} a_0 \\ &= n! \sum_{i=0}^n \frac{(i+1)b_{n-i}}{i!} \end{aligned}$$

Để thấy:

$$\sum_{i=0}^n \frac{(i+1)b_{n-i}}{i!}$$

là hệ số của  $x^n$  trong khai triển của:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} x^k \\ &= \frac{e^{-x}}{1-x} (xe^x + e^x) \\ &= 1 + \frac{2x}{1-x} \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + \cdots \end{aligned}$$

Vậy ta có kết quả:

$$a_n + 2 \binom{n}{1} a_{n-1} + \cdots + n \binom{n}{n-1} a_1 = 2n! - n - 1$$

□

**Bài tập 9.** Đếm số đường đi với  $k$  bước đi để đi từ  $(0, 0)$  đến  $(m, n)$  sao cho mỗi bước đi là đi từ  $(i, j)$  đến đúng một trong bốn vị trí  $(i-1, j)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i, j-1)$ ,  $(i, j+1)$ .

**LỜI GIẢI.** Điều kiện tồn tại đường đi là  $k + m + n$  chẵn và  $k \geq m + n$ .

Xét hàm:

$$f(x, y) = \left( x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^k$$

Hệ số của  $x^m y^n$  trong  $f$  chính là số đường đi cần tìm.

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x + y)^k \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^k \\ &= (x + y)^k \sum_{t=0}^k \frac{1}{(xy)^t} \binom{k}{t} \end{aligned}$$

Như vậy ta cần tìm hệ số của  $x^r y^s$  trong  $(x + y)^k$  với  $r, s$  thỏa mãn  $r - s = m - n, r + s = k$ .  
Tức là:

$$\begin{aligned} r &= \frac{k + m - n}{2} \\ s &= \frac{k - m + n}{2} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra hệ số của  $x^m y^n$  trong  $f$  là:

$$\binom{k}{\frac{k+m-n}{2}} \binom{k}{\frac{k-m+n}{2}}$$

Ta có kết quả cần tìm. □

**Bài tập 10.** Cho  $2n$  số thực phân biệt  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Bảng  $n \times n$  được điền số theo quy tắc: ô ở hàng  $i$  cột  $j$  thì được điền số  $a_i + b_j$ . Chứng minh rằng tích các số ở mỗi cột là bằng nhau thì tích các số ở mỗi hàng cũng bằng nhau.

LỜI GIẢI. Xét đa thức sau:

$$P(x) = (x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n) - U$$

Trong đó  $U = (a_1 + b_1)(a_2 + b_1) \cdots (a_n + b_1)$ .

Theo đề bài thì  $P(x)$  có  $n$  nghiệm là  $b_1, b_2, \dots, b_n$  mà  $P(x)$  bậc  $n$  nên ta phải có:

$$P(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)$$

Như vậy ta suy ra với mọi  $i = \overline{1, n}$  ta có:

$$P(-a_i) = (-1)^n (a_i + b_1)(a_i + b_2) + \cdots + (a_i + b_n)$$

Mặt khác,  $P(-a_i) = -U$ .

Từ đó suy ra:

$$\prod_{j=1}^n (a_1 + b_j) = \prod_{j=1}^n (a_2 + b_j) = \cdots = \prod_{j=1}^n (a_n + b_j)$$

Như vậy tích tất cả các số ở mỗi hàng cũng bằng nhau. □

**Bài tập 11.** Chứng minh rằng số phân hoạch một số nguyên dương  $n$  thành các phần mà các phần chẵn đôi một phân biệt bằng số cách phân hoạch  $n$  thành các phần mà mỗi giá trị xuất hiện không quá 3 lần.

LỜI GIẢI. Số cách phân hoạch  $n$  thành tổng của các phần mà các phần chẵn đôi một phân biệt là hệ số của  $x^n$  trong khai triển:

$$P(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^4) \dots$$

Số cách phân hoạch  $n$  thành tổng các phần mà mỗi giá trị xuất hiện không quá 3 lần là hệ số của  $x^n$  trong khai triển:

$$Q(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6) \dots$$

Ta có:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(1 - x^4)(1 - x^8) \dots}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4) \dots} \\ Q(x) &= \frac{(1 - x^4)(1 - x^8) \dots}{(1 - x)(1 - x^2) \dots} \end{aligned}$$

Vậy  $P(x) \equiv Q(x)$ , ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài tập 12.** Gọi  $a_n$  là số cách biểu diễn  $n$  dưới dạng tổng có thứ tự của các số 1 và số 2,  $b_n$  là số cách biểu diễn  $n$  dưới dạng tổng có thứ tự của các số không nhỏ hơn 2. Chứng minh rằng  $a_n = b_{n+2}$ .

LỜI GIẢI. Xét hai hàm sau:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (x + x^2)^k \\ &= \frac{1}{1 - x - x^2} - 1 \\ G(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (x^2 + x^3 + \cdots)^k \\ &= \frac{x^2}{1 - x - x^2} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$G(x) = x^2 F(x) + x^2$$

Ta có ngay đpcm.  $\square$

**Bài tập 13.** Cho hai tập  $A = \{a_i | i = \overline{1, n}\}$ ,  $B = \{b_i | i = \overline{1, n}\}$  phân biệt. Xác định hai tập  $A_2 = \{a_i + a_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ ,  $B_2 = \{b_i + b_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ . Giả sử ta có  $A_2 = B_2$ . Chứng minh rằng  $n$  là một lũy thừa của 2.

LỜI GIẢI. Đặt:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{i=1}^n x^{a_i} \\ B(x) &= \sum_{i=1}^n x^{b_i} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\sum_{a \in A_2} x^a = \frac{1}{2} (A^2(x) - A(x^2))$$

$$\sum_{b \in B_2} x^b = \frac{1}{2} (B^2(x) - B(x^2))$$

Vậy suy ra:

$$A^2(x) - A(x^2) = B^2(x) - B(x^2)$$

tương đương:

$$(A(x) - B(x))(A(x) + B(x)) = A(x^2) - B(x^2)$$

Do  $A(1) = B(1) = n$  nên ta có thể viết  $A(x) - B(x) = (x-1)^k P(x)$  trong đó  $P$  là một đa thức sao cho  $P(1) \neq 0$  và  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Khi đó:

$$P(x)(A(x) + B(x)) = (x+1)^k P(x^2)$$

Thay  $x = 1$  ta được  $n = 2^{k-1}$ . Yêu cầu bài toán được chứng minh xong.  $\square$

Ta có thể chứng minh được nếu  $n$  là một lũy thừa của 2 thì sẽ tồn tại hai tập  $A$  và  $B$  thỏa mãn giả thiết bằng quy nạp, các bạn có thể thử tự chứng minh.

**Bài tập 14.** Cho tập  $E = \{1, 2, \dots, 2008\}$ , mỗi số thuộc  $E$  được tô bởi đúng 1 trong 3 màu đỏ, vàng, xanh. Gọi  $A$  là số bộ  $(x, y, z) \in E^3$  mà  $x, y, z$  cùng màu và  $x + y + z$  chia hết cho 2008,  $B$  là số bộ  $(x, y, z) \in E^3$  mà  $x, y, z$  đôi một khác màu và  $x + y + z$  chia hết cho 2008. Chứng minh rằng  $2A > B$ .

**LỜI GIẢI.** Gọi các số trong  $E$  được đánh lần lượt màu đỏ là  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , màu vàng là  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , màu xanh là  $c_1, c_2, \dots, c_p$ .

Xét các đa thức:

$$A(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_m}$$

$$B(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + \dots + x^{b_n}$$

$$C(x) = x^{c_1} + x^{c_2} + \dots + x^{c_p}$$

Khi đó số bộ  $(x, y, z)$  cùng màu thỏa mãn tổng của chúng chia hết cho 2008 chính là hệ số của  $x^{2008}$  trong khai triển của  $(A(x))^3 + (B(x))^3 + (C(x))^3$ . Số những bộ khác màu là hệ số của  $x^{2008}$  trong khai triển của  $6A(x)B(x)C(x)$ .

$$2(A^3(x) + B^3(x) + C^3(x) - 3A(x)B(x)C(x))$$

$$= (A(x) + B(x) + C(x))((A(x) - B(x))^2 + (B(x) - C(x))^2 + (C(x) - A(x))^2)$$

$$= (x + x^2 + \dots + x^{2008})((A(x) - B(x))^2 + (B(x) - C(x))^2 + (C(x) - A(x))^2)$$

Ta cần chứng minh tổng hệ số của các đơn thức có số mũ chia hết cho 2008 trong biểu thức trên là dương.

Thật vậy, với mỗi đơn thức trong  $((A(x) - B(x))^2 + (B(x) - C(x))^2 + (C(x) - A(x))^2)$ , tồn tại duy nhất một đơn thức trong  $(x + x^2 + \dots + x^{2008})$  sao cho tích của chúng là một đơn thức có số mũ chia hết cho 2008, như vậy ta được hệ số của các đơn thức có số mũ chia hết cho 2008 trong

khai triển ban đầu bằng tổng hệ số của  $((A(x) - B(x))^2 + (B(x) - C(x))^2 + (C(x) - A(x))^2)$  tức là

$$(A(1) - B(1))^2 + (B(1) - C(1))^2 + (C(1) - A(1))^2$$

Mà rõ ràng lượng này không âm và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $m = n = p$  nhưng rõ ràng điều này vô lý do  $m + n + p = 2008$ .

Vậy ta có  $2A > B$ . □

**Bài tập 15.** Xét một phân hoạch của tập các số nguyên không âm thành hai tập  $A, B$  sao cho, với mỗi số nguyên không âm  $n$ , số cách biểu diễn  $n = a_1 + a_2$  ( $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ ) bằng số cách biểu diễn  $n = b_1 + b_2$  ( $b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$ ). Chứng minh rằng cách phân hoạch này tồn tại và duy nhất.

**LỜI GIẢI.** Giả sử đã tồn tại một cách phân hoạch thỏa mãn đề bài. Không mất tổng quát, ta cho rằng  $0 \in A$ .

Xét hai hàm sau:

$$F(x) = \sum_{a \in A} x^a$$

$$G(x) = \sum_{b \in B} x^b$$

Theo đề ta có:

$$F(x) + G(x) = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$F^2(x) - F(x^2) = G^2(x) - G(x^2)$$

Từ đó suy ra:

$$F(x) - G(x) = (1 - x)(F(x^2) - G(x^2))$$

Đặt  $P(x) = F(x) - G(x)$ , hệ số tự do của  $P$  bằng 1. Như vậy, lập luận tương tự như bài trước, ta có:

$$P(x) = (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^4) \dots$$

Từ đó ta suy ra tập  $A$  gồm các số nguyên không âm mà biểu diễn nhị phân của số đó có một số chẵn số 1, tập  $B$  gồm các số nguyên không âm mà biểu diễn nhị phân của số đó có một số lẻ số 1.

Dễ dàng kiểm tra được cách phân hoạch này thỏa mãn đề bài.

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

**Bài tập 16.** Xét một phân hoạch  $\pi$  của số nguyên dương  $n$ . Gọi  $\alpha(\pi)$  là số các số 1 trong phân hoạch  $\pi$ ,  $\beta(\pi)$  là số phần phân biệt trong phân hoạch  $\pi$ . Chứng minh rằng

$$\sum \alpha(\pi) = \sum \beta(\pi)$$

(tổng lấy theo tất cả các phân hoạch  $\pi$  của  $n$ )

**LỜI GIẢI.** Xét:

$$P(y) = (1 + xy + x^2y^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots$$

$$Q(y) = (1 + xy + x^2y + \dots)(1 + x^2y + x^4y + \dots)(1 + x^3y + x^6y + \dots) \dots$$

Ta thấy rằng tổng số số 1 trong tất cả phân hoạch  $\pi$  của  $n$  là hệ số của  $x^n$  trong  $P'(1)$  và tổng số phần phân biệt trong tất cả phân hoạch  $\pi$  của  $n$  là hệ số của  $x^n$  trong  $Q'(1)$ . Ta có:

$$\begin{aligned} P(y) &= \frac{1}{1-xy} \prod_{m=2}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} \\ Q(y) &= \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 - y + \frac{y}{1-x^m} \right) \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-x^m+yx^m}{1-x^m} \end{aligned}$$

Định nghĩa:

$$R = \prod_{m=2}^{\infty} \frac{1}{1-x^m}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} P'(y) &= \frac{x}{(1-xy)^2} R \\ Q'(y) &= \left( \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-x^m+yx^m}{1-x^m} \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{x^m}{1-x^m}}{1+\frac{yx^m}{1-x^m}} \right) \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} P'(1) &= \frac{x}{(1-x)^2} R \\ Q'(1) &= \left( \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} x^m \right) \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} R \end{aligned}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh. □

**Bài tập 17.** Cho số nguyên dương  $n \geq 3$ . Kí hiệu  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i(\sigma)$  là số cặp nghịch thế trong hoán vị  $\sigma$  của  $[n]$ , và  $a_k$  là số hoán vị  $\sigma$  của  $[n]$  sao cho  $i(\sigma) = k$ . Chứng minh rằng:

$$\sum_{k \geq 0} a_{3k+1} = \sum_{k \geq 0} a_{3k+2}$$

**LỜI GIẢI.** Với mỗi hoán vị  $\sigma$  của  $[n]$  ta xác định một dãy  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  với  $x_i$  được định nghĩa là số chỉ số  $1 \leq t \leq i$  mà  $\sigma(t) > \sigma(i+1)$ , từ đó  $0 \leq x_i \leq i$ . Ta "dễ" thấy rằng có một tương ứng song ánh giữa tập các dãy  $(x_i)$  và tập các hoán vị của  $[n]$ .

Như vậy:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{\sigma \in S_n} x^{i(\sigma)} \\ &= (1+x)(1+x+x^2) \dots (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) \end{aligned}$$

Đặt  $\epsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3}i$ , ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} a_{3k+1} &= \frac{F(1) + \epsilon^2 F(\epsilon) + \epsilon F(\epsilon^2)}{3} \\ \sum_{k \geq 0} a_{3k+2} &= \frac{F(1) + \epsilon F(\epsilon) + \epsilon^2 F(\epsilon^2)}{3} \end{aligned}$$



Mà  $F(\epsilon) = F(\epsilon^2) = 0$  nên ta có ngay điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài tập 18.** Cho số nguyên tố lẻ  $p$ . Chứng minh rằng trong  $2p - 1$  số nguyên bất kì, luôn tồn tại  $p$  số có tổng chia hết cho  $p$ .

**LỜI GIẢI.** Gọi  $2p - 1$  số nguyên đó là  $a_1, a_2, \dots, a_{2p-1}$ . Giả sử phản chứng rằng: tổng của  $p$  số bất kì trong này đều không chia hết cho  $p$ . Từ đó, theo định lý nhỏ Fermat:

$$(a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_p})^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

với  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq 2p - 1$ .

Suy ra:

$$\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p)} (a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_p})^{p-1} \equiv \binom{2p-1}{p} \pmod{p}$$

Ta có  $\binom{2p-1}{p}$  không chia hết cho  $p$ , bây giờ ta sẽ chứng minh:

$$\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p)} (a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_p})^{p-1}$$

chia hết cho  $p$ .

Vì

$$(a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_p})^{p-1} = \sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_p = p-1} \binom{p-1}{x_1, x_2, \dots, x_p} a_{i_1}^{x_1} a_{i_2}^{x_2} \dots a_{i_p}^{x_p}$$

nên

$$\begin{aligned} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p)} (a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_p})^{p-1} &= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p)} \sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_p = p-1} \binom{p-1}{x_1, x_2, \dots, x_p} a_{i_1}^{x_1} a_{i_2}^{x_2} \dots a_{i_p}^{x_p} \\ &= \sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_p = p-1} \binom{p-1}{x_1, x_2, \dots, x_p} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p)} a_{i_1}^{x_1} a_{i_2}^{x_2} \dots a_{i_p}^{x_p} \end{aligned}$$

(các tổng ở hàng dưới lấy theo các tập không thứ tự)

Ta đếm số lần xuất hiện của giá trị  $a_{i_1}^{x_1} a_{i_2}^{x_2} \dots a_{i_p}^{x_p}$  trong tổng.

Trong các số  $x_1, x_2, \dots, x_p$  có đúng  $1 \leq m \leq p - 1$  số có giá trị bằng 0. Như vậy ta có  $\binom{p-1+m}{m}$  cách chọn các số  $a_j$  ứng với các giá trị bằng 0 này. Tức là giá trị  $a_{i_1}^{x_1} a_{i_2}^{x_2} \dots a_{i_p}^{x_p}$  lặp  $\binom{p-1+m}{m}$  trong tổng.

Mà  $\binom{p-1+m}{m}$  chia hết cho  $p$ , suy ra tổng chia hết cho  $p$ .

Ta có mâu thuẫn với giả thiết phản chứng, và bài toán được chứng minh.  $\square$

**Bài tập 19.** Một dãy số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gọi là  $p$ -cân bằng nếu ta có tổng  $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \dots$  bằng nhau với mọi  $1 \leq k \leq p$ . Chứng minh rằng nếu một dãy có 50 phần tử là  $p$ -cân bằng với  $p$  bằng 3, 5, 7, 11, 13, 17 thì dãy đó gồm toàn các số 0.

**LỜI GIẢI.** Xét đa thức:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{50} a_i x^{i-1}$$

Theo giả thiết ta có, tất cả các nghiệm của các phương trình  $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1 = 0$  với  $p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$  đều là nghiệm của  $F$ . Tổng số nghiệm này là  $2 + 4 + 6 + 10 + 12 + 16 = 50$ , như vậy  $F$  là một đa thức bậc 49 nhưng có đến 50 nghiệm, suy ra tất cả các hệ số của  $F$  đều bằng 0.  $\square$

**Bài tập 20.** Cho hai họ tập hợp  $(A_n)_{n \geq 1}, (B_n)_{n \geq 1}$  thỏa mãn:

i)  $A_1 = \emptyset, B_1 = \{0\};$

ii)  $A_n = \{x + 1 | x \in B_{n-1}\}, B_n = A_{n-1} \cup B_{n-1} - A_{n-1} \cap B_{n-1}.$

Tìm tất cả số nguyên dương  $n$  sao cho  $B_n = \{0\}.$

LỜI GIẢI. Ta xét hai dãy đa thức sau:

$$a_n(x) = \sum_{a \in A_n} x^a$$

$$b_n(x) = \sum_{b \in B_n} x^b$$

Ta thấy rằng nếu xét hệ số của hai dãy đa thức này theo modulo 2 ta sẽ có:

$$b_n(x) = a_{n-1}(x) + b_{n-1}(x)$$

và

$$a_n(x) = xb_{n-1}(x)$$

suy ra:

$$b_n(x) = b_{n-1}(x) + xb_{n-2}(x)$$

Bây giờ ta sẽ xét dãy đa thức  $K_n(x)$  thỏa mãn:  $K_1(x) = K_2(x) = 1,$

$$K_n(x) = K_{n-1}(x) + xK_{n-2}(x)$$

Nếu lấy các hệ số của  $K_n(x)$  theo modulo 2 ta sẽ được  $b_n(x)$ . Sau đây ta đi tìm công thức cho  $K_n(x)$ , xét hàm sinh:

$$f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} K_{i+1}(x)y^i$$

Biến đổi từ công thức truy hồi ta có:

$$(1 - y - xy^2)f(y) = 1$$

hay

$$f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} (y + xy^2)^i$$

Từ đó ta tính được

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \binom{n-1-k}{k}$$

Bằng cách tính thử vài giá trị đầu của  $b_n(x)$  ta sẽ có dự đoán  $b_n(x) = 1$  khi  $n = 2^m$ . Vậy ta sẽ chứng minh điều này. Xét  $n = 2^m$ , ta chứng minh:  $\binom{n-1-k}{k}$  chia hết cho 2 với mọi  $1 \leq k \leq n-1$ .

$$\begin{aligned} v_2 \left( \binom{n-1-k}{k} \right) &= \sum_{t=1}^{\infty} \left( \left\lfloor \frac{2^m - 1 - k}{2^t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{2^t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2^m - 1 - 2k}{2^t} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{t=1}^m \left( \left\lfloor \left\{ \frac{k}{2^t} \right\} + \left\{ \frac{-1-2k}{2^t} \right\} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{t=1}^m \left( \left\lfloor \left\{ \frac{k}{2^t} \right\} + 1 - \left\{ \frac{1+2k}{2^t} \right\} \right\rfloor \right) \end{aligned}$$

Ta chọn  $t$  sao cho  $2^{t-1} \leq k < 2^t$  (do  $k \geq 1$  nên ta chọn được như vậy), khi đó:

$$\left\{ \frac{k}{2^t} \right\} = \frac{k}{2^t}$$

$$\left\{ \frac{1+2k}{2^t} \right\} = \frac{1+2k}{2^t} - 1$$

Suy ra:

$$\left| \left\{ \frac{k}{2^t} \right\} + 1 - \left\{ \frac{1+2k}{2^t} \right\} \right| = \left| \frac{2^t - 1 - k}{2^t} \right| + 1 = 1$$

Ta đã chứng minh được nếu  $n = 2^m$  thì  $\binom{n-k-1}{k}$  chia hết cho 2 với mọi  $1 \leq k \leq n-1$ .

Bây giờ đặt  $n = 2^m r$ ,  $r$  lẻ,  $r > 1$ . Ta sẽ cmr tồn tại  $n-1 \geq k \geq 1$  sao cho  $\binom{n-1-k}{k}$  là số lẻ: Ta chọn  $k = 2^{m-1}(r-1)$ , khi đó:

$$\begin{aligned} v_2 \left( \binom{n-1-k}{k} \right) &= \sum_{t=1}^{\infty} \left( \left\lfloor \frac{2^m r - 1 - 2^{m-1}(r-1)}{2^t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2^{m-1}(r-1)}{2^t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2^m r - 1 - 2^m(r-1)}{2^t} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \left( \left\lfloor \left\{ \frac{2^{m-1}(r-1)}{2^t} \right\} + \left\{ \frac{2^m r - 1 - 2^m(r-1)}{2^t} \right\} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \left( \left\lfloor \left\{ \frac{2^{m-1}(r-1)}{2^t} \right\} + \left\{ \frac{2^m - 1}{2^t} \right\} \right\rfloor \right) \end{aligned}$$

Nếu  $t \leq m$  thì

$$\left\lfloor \left\{ \frac{2^{m-1}(r-1)}{2^t} \right\} + \left\{ \frac{2^m - 1}{2^t} \right\} \right\rfloor = 0$$

Nếu  $t \geq m+1$  thì đặt  $0 \leq \alpha < 2^t$

$$\alpha \equiv 2^{m-1}(r-1) \pmod{2^t}$$

suy ra:  $\alpha = 2^m s \leq 2^m(2^{t-m} - 1)$ . Khi đó:

$$\left\lfloor \left\{ \frac{2^{m-1}(r-1)}{2^t} \right\} + \left\{ \frac{2^m - 1}{2^t} \right\} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha + 2^m - 1}{2^t} \right\rfloor$$

$$= 0$$

Vậy nếu  $n \neq 2^m$  thì sẽ tồn tại  $1 \leq k \leq n-1$  để  $\binom{n-1-k}{k}$  là số lẻ.

Từ đó ta có tất cả giá trị cần tìm của  $n$  là các phần tử của tập  $\{2^m | m \in \mathbb{N}\}$ .  $\square$

## Tài liệu tham khảo

- [1] Titu Andreescu, Zuming Feng, *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Birkhäuser, 2003.
- [2] Milan Novakovic, *Generating Functions*, Olympiad Training Materials, The IMO Compendium Group, 2007.



# GIẢI TOÁN TỔ HỢP BẰNG ĐẠI LƯỢNG BẤT BIẾN

Trần Gia Huy<sup>1</sup>

## 1. Thuật toán

**Định nghĩa 1.** Cho tập  $A \neq \emptyset$  và ta gọi là không gian các trạng thái, mỗi phần tử của  $A$  gọi là một trạng thái. Khi đó, mỗi ánh xạ  $T : A \rightarrow A$  gọi là một thuật toán (ôtomat).

## 2. Các bài toán về thuật toán

**Bài toán 1** (Bài toán tìm kiếm thuật toán). Cho trạng thái ban đầu  $\alpha_0$  và trạng thái kết thúc  $\alpha_n$ . Hỏi có hay không thuật toán  $T$  trên  $A$  sao cho khi thực hiện  $T$  hữu hạn lần ta thu được  $\alpha_n$ ?

$$\alpha_0 \xrightarrow{T} \alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2 \xrightarrow{T} \cdots \xrightarrow{T} \alpha_n.$$

**Bài toán 2.** Cho thuật toán  $T$  trên  $A$  và trạng thái ban đầu  $\alpha \in A$ .

- Giả sử  $\beta \in A$ . Hỏi có thể nhận được  $\beta$  từ  $\alpha$  sau một số hữu hạn bước thực hiện  $T$  hay không?
- Tìm tập tất cả các trạng thái có thể nhận được từ  $\alpha$  sau một số hữu hạn bước thực hiện thuật toán  $T$ :

$$\bar{\alpha} = \{\beta \in A : \beta = T^n(\alpha)\}.$$

## 3. Hàm bất biến

Cho  $T$  là một thuật toán trên  $A$ ,  $I$  là một tập hợp khác rỗng mà ta gọi là không gian các mẫu bất biến.

Khi đó ánh xạ  $H : A \rightarrow I$  gọi là hàm bất biến trên  $A$  nếu:

$$\forall a, b \in A : b \in \bar{a} \Rightarrow H(a) = H(b).$$

Để giải các bài toán bằng nguyên lý bất biến thì việc quan trọng nhất chính là phát hiện ra các yếu tố bất biến, sau đó là việc sử dụng các yếu tố đó vào trong bài toán một cách thích hợp. Trong mỗi bài toán sau khi giải xong chúng tôi đều phân tích những bất biến nằm trong bài toán. Đó chính là chìa khóa để tìm lời giải cho bài toán.

---

<sup>1</sup>Giáo viên trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước.

## 4. Các ví dụ

**Ví dụ 1.** Trên bảng, người ta viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 99 sau đó thực hiện trò chơi như sau: mỗi lần xóa hai số bất kỳ và viết một số mới bằng tổng hai số đã xóa. Việc làm này thực hiện liên tục cho đến khi còn một số trên bảng. Hỏi số cuối cùng còn lại trên bảng là bao nhiêu? Tại sao?

**LỜI GIẢI.** Vì mỗi lần thực hiện trò chơi thì thay hai số bằng tổng của chúng nên tổng các số trên bảng không thay đổi trong mọi thời điểm. Tổng các số lúc đầu là

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 = \frac{(1 + 99) \times 99}{2} = 4950$$

Suy ra số cuối cùng là 4950. □

**Nhận xét.** Bất biến trong bài toán trên là tổng của các số trên bảng không thay đổi trong mọi thời điểm. Với mọi cách thực hiện trò chơi thì số cuối cùng còn lại trên bảng là 4950.

**Ví dụ 2.** Trên bảng, người ta viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 999 sau đó thực hiện trò chơi như sau: mỗi lần xóa hai số bất kỳ và viết một số mới bằng hiệu hai số đã xóa (lấy số lớn trừ số nhỏ). Việc làm này thực hiện liên tiếp cho đến khi còn một số trên bảng. Hỏi số cuối cùng còn lại trên bảng có thể là 1 không? Tại sao?

**LỜI GIẢI.** Ta thấy rằng nếu xóa đi hai số  $a, b$  ( $a > b$ ) và thay bằng hiệu  $a - b$  thì tổng các số trên bảng giảm đi một đại lượng là  $a + b - (a - b) = 2b$  là số chẵn. Như vậy tổng các số trên bảng không thay đổi tính chẵn lẻ tại mọi thời điểm thực hiện trò chơi. Tổng các số lúc đầu là:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 999 = \frac{(1 + 999) \times 999}{2} = 499500$$

là số chẵn. Suy ra số còn lại cuối cùng là số chẵn và do đó không thể là số 1. □

**Nhận xét :** Bất biến của bài toán là tổng của các số trên bảng không thay đổi tính chẵn lẻ tại mọi thời điểm dựa vào đặc điểm tổng các số giảm đi một lượng chẵn.

**Ví dụ 3.** Trên bảng, người ta viết 100 chữ số 1 và 10 chữ số 2 sau đó thực hiện trò chơi như sau: mỗi lần xóa hai số bất kỳ và viết một số mới bằng tích hai số đã xóa. Việc làm này thực hiện liên tục cho đến khi còn một số trên bảng. Hỏi số cuối cùng trên bảng còn lại là bao nhiêu? Tại sao?

**LỜI GIẢI.** Vì mỗi lần thực hiện trò chơi thay hai số bằng tích của chúng nên tích các số trên bảng không thay đổi trong mọi thời điểm. Tích các số lúc đầu là  $1^{100} \times 2^{10} = 1024$  nên số còn lại cuối cùng là 1024. □

**Nhận xét.** Bất biến của bài toán trên là tích các số trên bảng không thay đổi trong mọi thời điểm.

**Ví dụ 4.** Trên bảng, người ta viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 100 sau đó thực hiện trò chơi như sau: mỗi lần xóa hai số bất kỳ và viết một số mới bằng tổng lập phương của hai số đã cho. Việc làm này thực hiện liên tục cho đến khi còn một số trên bảng. Hỏi số cuối cùng còn lại trên bảng có thể là  $987654321^{2008}$  hay không? Tại sao?

**LỜI GIẢI.** Ta thấy rằng nếu xóa hai số  $a, b$  ( $a > b$ ) và thay bằng tổng lập phương  $a^3 + b^3$  thì tổng các số trên bảng tăng một đại lượng là:

$$a^3 + b^3 - (a + b) = (a^3 - a) + (b^3 - b)$$

là số chia hết cho 3. Tổng các số trên bảng lúc đầu và tổng các số trên bảng tại mọi thời điểm kém nhau một bội số của 3. Tổng các số lúc đầu là

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{(1 + 100) \times 100}{2} = 5050$$

là số chia cho 3 dư 1 (vì tổng các chữ số của 5050 bằng 10 chia 3 dư 1). Suy ra số còn lại cuối cùng phải là số chia 3 dư 1. Số 987654321 chia hết cho 3 vì tổng các chữ số của số này là 45 chia hết cho 3. Suy ra  $987654321^{2008}$  chia hết cho 3. Vậy số còn lại cuối cùng không thể là  $987654321^{2008}$ .  $\square$

**Nhận xét.** Bất biến của bài toán trên là tổng các số trên bảng tại mọi thời điểm hơn kém nhau một bội số của 3.

**Ví dụ 5.** Cho số tự nhiên có 8 chữ số là 12456789. Từ số này người ta đổi vị trí các chữ số của nó, hỏi có thể tạo được số chính phương hay không?

**LỜI GIẢI.** Tại mọi thời điểm thay đổi vị trí các số hạng thì số được tạo thành có tổng các chữ số là:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 42$$

chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9. Suy ra số được tạo thành chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không thể là số chính phương.  $\square$

**Nhận xét.** Bất biến của bài toán chính là tổng của các số được tạo thành luôn không đổi bằng 42.

**Ví dụ 6.** Xét một bảng vuông  $4 \times 4$  ô. Tại mỗi ô của bảng vuông có chứa dấu + hoặc dấu -. Mỗi một lần thực hiện, cho phép đổi dấu của tất cả các ô trên cùng một hàng hoặc cùng một cột. Giả sử bảng vuông ban đầu có một dấu + và 15 dấu -. Hỏi có thể đưa bảng ban đầu về bảng có toàn dấu cộng được không?

**LỜI GIẢI.** Câu trả lời là không. Và lời giải khá đơn giản. Thay dấu cộng bằng số 1 và dấu trừ bằng  $-1$ . Xét tích tất cả các số trên bảng vuông. Khi đó, qua mỗi phép biến đổi, tích này không thay đổi (vì sẽ đổi dấu 4 số). Vì vậy, cho dù ta thực hiện bao nhiêu lần, từ bảng vuông  $(1, 15)$  sẽ chỉ đưa về các bảng vuông có số lẻ dấu  $-$ , có nghĩa là không thể đưa về bảng có toàn dấu cộng.  $\square$

**Nhận xét.** Việc thay dấu cộng bằng số 1 và dấu trừ bằng số  $-1$  để tìm ra bất biến của bài toán trên. Bất biến của nó là tích của các số trên bảng không thay đổi qua mỗi lần thực hiện.

**Ví dụ 7.** Trên một cái bảng, người ta viết 2008 dấu (+) và 2009 dấu (-). Giả sử mỗi lần, hai dấu bất kỳ bị xóa đi và viết thay bởi một dấu (+) nếu chúng giống nhau và thay bằng một dấu (-) nếu chúng khác nhau. Sau khi thực hiện 4016 lần như vậy, dấu nào sẽ còn lại trên bảng?

LỜI GIẢI. (i) *Cách 1.* Sau mỗi lần xóa, số các dấu  $(-)$  được giữ nguyên hoặc giảm đi 2. Vì thế, tính chẵn lẻ của số dấu  $(-)$  trên bảng không thay đổi. Ban đầu, số dấu trừ là số lẻ nên cuối cùng dấu còn lại trên bảng là dấu  $(-)$ .

(ii) *Cách 2.* Thay mỗi dấu  $(+)$  bởi số 1, thay mỗi dấu  $(-)$  bởi số  $-1$ . Khi đó mỗi lần thực hiện cách làm theo đề bài có thể mô tả dưới dạng như sau: hai số bất kỳ được xóa đi và thay bằng tích của chúng. Như vậy tại mọi thời điểm thực hiện thì tích của các số trên bảng không thay đổi. Ban đầu tích các số trên bảng là  $-1$  nên cuối cùng tích các số trên bảng cũng là  $-1$ . Vậy dấu còn lại trên bảng là dấu  $(-)$ .

(iii) *Cách 3.* Thay mỗi dấu  $(+)$  bởi số 0, thay mỗi dấu  $(-)$  bởi số 1. Khi đó, tổng hai số bị xóa đi cùng tính chẵn lẻ với số được viết thay chúng, như vậy tổng các số trên bảng không thay đổi tính chẵn lẻ. Vì tổng các số lúc đầu bằng 2009, là số lẻ nên số còn lại cuối cùng là số lẻ. Do đó dấu còn lại trên bảng là dấu  $(-)$ .  $\square$

### Nhận xét.

- Trong cách 1, đại lượng bất biến là tính chẵn lẻ của số dấu  $(-)$  trên bảng.
- Trong cách 2, đại lượng bất biến là tích tất cả các số trên bảng.
- Trong cách 3, đại lượng bất biến là tính chẵn lẻ của tổng các số trên bảng.

Ta có thể lập một tình huống mới tương đương với tình huống được xác định ở điều kiện và yêu cầu trong bài toán để dễ tìm đại lượng bất biến.

**Ví dụ 8.** Ngoài biển đông, trên một hòn đảo sinh sống ba giống thần lùn có ba loại màu: màu xám có 133 con, màu nâu có 155 con và màu đỏ có 177 con. Nếu hai con thần lùn khác màu gặp nhau thì chúng đồng thời đổi sang màu thứ ba (ví dụ nếu thần lùn màu xám gặp thần lùn màu nâu thì cả hai con đều đổi sang màu đỏ). Trong những trường hợp hai con thần lùn cùng màu gặp nhau thì chúng giữ nguyên không đổi màu. Có xảy ra tình trạng là trên đảo tất cả thần lùn cùng một màu được không?

LỜI GIẢI. Đặc điểm của bài toán này nằm ở bộ số 133, 155, 177 vì khi chia cho 3 ta được bộ số dư 1, 2 và 0. Ta thử xét nếu một con thần lùn xám gặp một con thần lùn nâu, thì chúng đồng thời đổi màu đỏ. Khi đó ta có 132 con xám, 154 con nâu và 179 con đỏ. Những số dư của 132, 154 và 179 cho 3 tương ứng là 0, 1 và 2, nghĩa là gặp đầy đủ các số dư đã có. Nếu một con thần lùn xám gặp con thần lùn màu đỏ, thì chúng đồng thời đổi màu nâu. Khi đó ta có 132 thần lùn xám, 157 thần lùn nâu và 176 thần lùn đỏ. Lấy những số trên chia cho 3 cho số dư tương ứng là 0, 1, 2 nghĩa là gặp lại cả ba khả năng của số dư. Nếu con thần lùn nâu và thần lùn đỏ gặp nhau, thì chúng cùng đổi màu xám. Khi đó có 135 thần lùn xám, 154 thần lùn nâu và 176 thần lùn đỏ. Số dư của những số thần lùn trên chia cho 3 tương ứng là 0, 1 và 2, vẫn có đầy đủ các số dư khi chia cho 3. Dù thay đổi màu thế nào thì số dư của các số lượng thần lùn chia cho 3 đều có đầy đủ ba số là 0, 1, 2. Số lượng tất cả thần lùn trên đảo là  $133 + 155 + 177 = 465$  là một số chia hết cho 3. Nếu tất cả thần lùn cùng một màu thì số dư lượng thần lùn màu xám, màu nâu, và đỏ chia cho 3 có dư tương ứng là 0, 0, 0. Điều này vô lý vì các số dư phải có đầy đủ các số dư khi chia cho 3. Như vậy câu trả lời là *không được*.  $\square$



**Nhận xét.** Bất biến ở đây là dù thay đổi màu thẻ nào thì số dư của các số lượng thẻ lần chia cho 3 đều có đầy đủ ba số là 0, 1, 2.

**Ví dụ 9.** Những số  $1, 2, 3, \dots, 1974$  được viết trên một bảng. Người ta thay hai số bất kỳ bằng một số hoặc là tổng hoặc là hiệu của hai số đó. Chứng minh rằng sau 1973 lần thực hiện thao tác trên, chỉ còn một số còn lại trên bảng không thể là số 0.

**LỜI GIẢI.** Ta quan tâm đến tính chẵn lẻ của các số đã cho và sau mỗi lần thao tác được số chẵn lẻ như thế nào. Khi bắt đầu trên bảng có 987 số lẻ. Mỗi lần ta thực hiện thay đổi, số của những số lẻ hoặc là còn nguyên (khi ta lấy hai số có tính chẵn lẻ khác nhau hoặc hai số cùng tính chẵn) hoặc là giảm đi hai số (khi ta lấy hai số cùng tính lẻ). Như vậy số các số lẻ còn lại sau mỗi lần thực hiện thay đổi luôn là một số lẻ. Vậy khi còn lại một số cuối cùng trên bảng thì nó phải là số lẻ, do đó nó không thể là số 0.  $\square$

**Nhận xét.** Bất biến của bài toán là số các số lẻ sau mỗi phép biến đổi còn lại là số lẻ.

**Ví dụ 10.** Trên bảng có các số  $\frac{1}{96}, \frac{2}{96}, \dots, \frac{96}{96}$ . Mỗi một lần thực hiện, cho phép xoá đi hai số  $a, b$  bất kỳ trên bảng và thay bằng  $a + b - 2ab$ . Hỏi sau 95 lần thực hiện phép xoá, số còn lại trên bảng là số nào?

**LỜI GIẢI.** Giả sử các số trên đang là  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Ta cho tương ứng bảng này với tích số

$$(2a_1 - 1)(2a_2 - 1) \cdots (2a_k - 1)$$

Khi đó, sau mỗi lần biến đổi, tích trên bị mất đi hai thừa số  $(2a - 1), (2b - 1)$  và được thêm vào thừa số

$$2(a + b - 2ab) - 1 = -(2a - 1)(2b - 1)$$

Do đó tích trên vẫn không đổi (chỉ đổi dấu). Vì tích ban đầu bằng 0 (do bảng ban đầu có chứa số  $\frac{48}{96} = \frac{1}{2}$ !) nên số cuối cùng  $s$  cũng phải cho tích số bằng 0, tức là

$$2s - 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

$\square$

**Nhận xét.** Bất biến của bài toán là tích số của bảng không thay đổi. Dĩ nhiên trong bài này ta phải thiết lập được bất biến của các số trên bảng là cho tương ứng với tích số trên. Bài toán trên được tạo ra từ đẳng thức  $2(a + b - 2ab) + 1 = (2a - 1)(1 - 2b)$ , nếu ta có nhiều đẳng thức dạng này thì có thể chế tạo ra nhiều bài toán tổ hợp dạng này.

**Ví dụ 11.** Từ một điểm  $S(a, b)$  trên mặt phẳng với  $0 < a < b$ , Ta xây dựng các điểm được xác định bởi :

$$x_1 = a; y_1 = b; x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}; y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}.$$

Tìm giới hạn của dãy  $(x_n), (y_n)$ .

**LỜI GIẢI.** Ta dễ dàng thấy được tính bất biến của dãy số này đó là

$$x_n \cdot y_n = a \cdot b, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad (1)$$

Dùng bất đẳng thức Cauchy ta suy ra rằng  $x_n > y_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ . Dấu bằng không thể xảy ra vì  $x_n$  luôn khác  $y_n$  (điều này dùng quy nạp có thể dễ dàng chứng minh được) (2)

Nhưng ta lại có  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$  (điều này cũng có thể dễ dàng có được bằng quy nạp) (3).

Từ các kết luận (1) và (3), ta suy ra  $(x_n)$  là một dãy giảm còn  $(y_n)$  là một dãy tăng (4).

Từ (1), (2) và (4) ta suy ra  $\lim x_n = \lim y_n = \sqrt{ab}$ .  $\square$

**Nhận xét.** Bất biến của bài toán trên là tích của hai dãy luôn là một hằng số.

**Ví dụ 12.** Mỗi số trong các số  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  nhận một trong hai giá trị là  $-1$  hoặc  $1$ . Biết rằng:

$$S = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 a_5 + \dots + a_n a_1 a_2 a_3 = 0$$

Hãy chứng minh rằng  $n$  chia hết cho 4.

**LỜI GIẢI.** Đây là một bài toán lý thuyết số, nhưng ta vẫn sẽ dùng bất biến để giải nó. Tính bất biến này như sau:  $S$  sẽ không thay đổi số dư khi chia cho 4 nếu như ta đổi dấu của 4 số hạng liên tiếp. Thật vậy, nếu có 2 số dương và 2 số âm thì sẽ không có chuyện gì thay đổi, nếu có 1 số khác dấu 3 số còn lại thì khi đổi dấu giá trị của  $S$  sẽ thay đổi 4 hoặc  $-4$  và điều này không ảnh hưởng gì tới số dư của  $S$  khi chia cho 4 cả, cuối cùng nếu 4 số cùng dấu thì khi đổi dấu  $S$  sẽ thay đổi một đại lượng là 8 hay  $-8$  điều này dĩ nhiên cũng không ảnh hưởng gì tới số dư của  $S$  khi chia cho 4. Bây giờ quay lại bài toán của chúng ta. Ta thực hiện thuật toán đổi dấu của 4 số hạng liên tiếp sao cho cuối cùng đưa tất cả  $n$  số thành số dương. Khi đó  $S = n$  và theo tính bất biến thì  $S$  chia hết cho 4 (vì ban đầu  $S = 0$  chia hết cho 4) Vậy  $n$  chia hết cho 4. Ta đã có kết luận cho bài toán.  $\square$

**Nhận xét.**  $S$  sẽ không thay đổi số dư khi chia cho 4 nếu như ta đổi dấu của 4 số hạng liên tiếp.

**Ví dụ 13.** Hai người chơi cờ, mỗi ván người thắng được 2 điểm, người thua được 0 điểm, nếu trận hòa thì mỗi người được 1 điểm. Hỏi sau một số ván cờ có thể xảy ra trường hợp một người được 9 điểm và người kia được 10 điểm hay không?

**LỜI GIẢI.** Tổng số điểm của hai người trong mỗi ván luôn bằng 2. Suy ra tại mọi thời điểm thì tổng điểm của hai người luôn là số chẵn. Mà  $9 + 10 = 19$  là số lẻ nên không thể xảy ra trường hợp một người được 9 điểm và người kia được 10 điểm.  $\square$

**Nhận xét.** Bất biến của bài toán là tổng điểm của hai người trong mỗi ván luôn bằng 2.

**Ví dụ 14.** Có 1981 tách uống trà đặt trên một bàn. Lúc đầu tất cả các tách đều được đặt ngửa lên. Giả sử mỗi lần người ta làm cho 200 tách trong chúng lật ngược lại. Hỏi sau một số lần như vậy, có thể làm cho tất cả các tách đều úp xuống được không?

**LỜI GIẢI.** Nếu có 1981 tách, ta không thể quay úp xuống tất cả được. tại mỗi thời điểm có  $x$  tách đặt ngửa được làm úp xuống và có  $200 - x$  tách úp xuống được lật ngửa lên. Do đó số các tách đang úp đã thay đổi đi một số là  $|200 - 2x|$ , và đây là một số chẵn. Điều này có nghĩa là số các tách đặt úp xuống không bị thay đổi về tính chẵn lẻ. Ban đầu số này bằng 0, là số chẵn. Do đó không thể thay đổi số này thành 1981, là số lẻ.  $\square$

**Nhận xét.** Bất biến của bài toán là các tách đang úp luôn thay đổi một lượng chẵn. Trong đề toán ta có thể thay đổi 1981 bằng một số lẻ bất kỳ và 200 bằng một số chẵn bất kỳ nhỏ hơn số ban đầu.

**Ví dụ 15.** Có 2005 đồng xu, mỗi đồng xu có hai mặt, một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ. Xếp các đồng xu trên bảng sao cho các mặt màu xanh ngửa lên. Thực hiện trò chơi như sau: mỗi lần thực hiện cho phép đổi bốn mặt của bốn đồng xu tùy ý. Hỏi có thể nhận được kết quả mà tất cả các đồng xu đều có mặt đỏ ngửa lên trên được không?

**LỜI GIẢI.** Thay mỗi đồng xu mặt màu xanh ngửa lên trên bởi số  $-1$ . Thay mỗi đồng xu màu đỏ ngửa lên trên bởi số  $(+1)$ . Khi đó mỗi cách thực hiện theo đề bài có thể mô tả dưới dạng khác như sau: bốn số bất kỳ được xóa đi và thay mỗi số bằng số đối của nó. Ban đầu có 2005 số  $(-1)$  tương ứng với 2005 đồng xu có mặt màu xanh ngửa lên trên. Ta thấy rằng nếu thay bốn số  $a, b, c, d$  bởi bốn số  $-a, -b, -c, -d$  thì tích của các số mới thay vào là

$$(-a)(-b)(-c)(-d) = abcd$$

bằng tích của các số ban đầu. Như vậy tại mọi thời điểm thì tích của các số không đổi. Ban đầu có 2005 số  $-1$  nên tích của chúng là  $(-1)$ , suy ra tại mọi thời điểm tích các số luôn là  $(-1)$ . Vậy không thể nhận được kết quả mà tất cả các đồng xu đều có mặt đỏ ngửa lên trên.  $\square$

**Nhận xét.** Bài toán trên được thay đổi để dễ tìm bất biến hơn, bất biến là trong mọi thao tác thì tích các chữ số là không đổi.

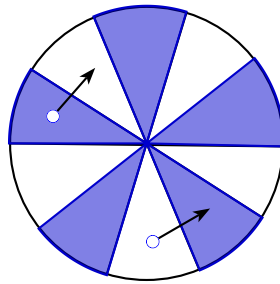
**Ví dụ 16.** Trong dãy  $1, 9, 9, 9, 8, \dots$ , mỗi chữ số bắt đầu từ chữ số thứ năm bằng chữ số hàng đơn vị của tổng bốn chữ số liền trước nó. Hỏi trong dãy này có gặp các bộ 1234 và 5678 không?

**LỜI GIẢI.** Ta thay mỗi chữ số của dãy đã cho bằng số 0 nếu nó là số chẵn và bằng số 1 nếu nó là số lẻ. Ta nhận được dãy số 111101111011110..., trong đó cứ sau bốn chữ số 1 có một chữ số 0 và cứ sau mỗi số 0 có bốn chữ số 1. Các bộ số 1234 và 5678 ứng với các bộ 4 chữ số 1010 và 1001 nên không thể có mặt trong dãy số đã cho.  $\square$

**Nhận xét.** Đây là bài toán tôi rất thích, nó thể hiện được tư duy chuyển bài toán khó thành bài toán dễ để có thể phát hiện được bất biến. Rõ ràng để nguyên rất khó để tường minh được lời giải, tuy nhiên khi chuyển hóa thì bất biến chính là cứ sau bốn chữ số 1 có một chữ số 0 và cứ sau mỗi số 0 có bốn chữ số 1.

**Ví dụ 17.** Một hình tròn được chia thành 10 ô hình quạt, trên mỗi ô người ta đặt 1 viên bi. Nếu ta cứ di chuyển các viên bi theo quy luật: mỗi lần lấy ở 2 ô bất kì mỗi ô 1 viên bi, chuyển sang ô liền kề theo chiều ngược nhau thì có thể chuyển tất cả các viên bi về cùng 1 ô hay không?

## LỜI GIẢI.



Trước tiên, ta tô màu xen kẽ các ô hình quạt, như vậy sẽ có 5 ô được tô màu (ô màu) và 5 ô không được tô màu (ô trắng). Ta có nhận xét : Nếu di chuyển 1 bi ở ô màu và 1 bi ở ô trắng thì tổng số bi ở 5 ô màu không đổi. Nếu di chuyển ở 2 ô màu, mỗi ô 1 bi thì tổng số bi ở 5 ô màu giảm đi 2. Nếu di chuyển ở 2 ô trắng, mỗi ô 1 bi thì tổng số bi ở 5 ô màu tăng lên 2. Vậy tổng số bi ở 5 ô màu hoặc không đổi, hoặc giảm đi 2 hoặc tăng lên 2. Nói cách khác, tổng số bi ở 5 ô màu sẽ không thay đổi tính chẵn lẻ so với ban đầu. Ban đầu tổng số bi ở 5 ô màu là 5 viên (là số lẻ) nên sau hữu hạn lần di chuyển bi theo quy luật trên thì tổng số bi ở 5 ô màu luôn khác 0 và khác 10, do đó không thể chuyển tất cả các viên bi về cùng 1 ô.  $\square$

**Nhận xét.** Bài toán được giải dễ dàng bằng cách tô màu xen kẽ các ô hình quạt. Trong rất nhiều bài toán thì việc tô màu chính là ý tưởng chính để giải bài toán. Và bất biến trong bài toán này là tổng số bi ở 5 ô màu sẽ không thay đổi tính chẵn lẻ.

**Ví dụ 18.** Mỗi số trong dãy

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2005}$$

đều được thay thế bởi tổng các chữ số của nó. Tiếp tục làm như vậy với các số nhận được cho tới khi tất cả các số trong dãy đều có 1 chữ số. Chứng minh trong dãy này: số các số 2 nhiều hơn số các số 1.

**LỜI GIẢI.** Ta thấy : “Số tự nhiên  $A$  và tổng các chữ số của  $A$  luôn cùng số dư trong phép chia cho 9”.

Mặt khác ta có :  $2^1$  chia cho 9 dư 2;  $2^2$  chia cho 9 dư 4;  $2^3$  chia cho 9 dư 8;  $2^4$  chia cho 9 dư 7;  $2^5$  chia cho 9 dư 5;  $2^6$  chia cho 9 dư 1;  $2^7$  chia cho 9 dư 2;...

Do đó  $2^{6k} + r$  lần lượt nhận các số dư trong phép chia cho 9 là 2, 4, 8, 7, 5, 1 tương ứng với các giá trị của  $r$  là 1, 2, 3, 4, 5, 0. Dãy cuối cùng nhận được gồm 2005 số thuộc tập hợp  $\{2; 4; 8; 7; 5; 1\}$ . Ta có  $2005 = 334 \times 6 + 1$  nên dãy cuối cùng có 335 số 2 (nhiều hơn số các số khác 1 số). Vậy số các số 2 nhiều hơn số các số 1 đúng 1 số.  $\square$

**Nhận xét.** Bài toán trên xuất phát từ tính chất trong số học. Số tự nhiên  $A$  và tổng các chữ số của  $A$  luôn cùng số dư trong phép chia cho 9 và dãy các số dư khi chia  $a^n$  cho  $m$  luôn tuần hoàn (có thể không xuất phát từ chỉ số đầu tiên). Và bất biến của bài toán là dãy số trên được chuyển thành dãy các số dư của nó 248751248751...

**Ví dụ 19.** Một tờ giấy bị cắt nhỏ thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh. Các mảnh nhận được lại có thể chọn để cắt (thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh nhỏ hơn),... Cứ như vậy ta có thể nhận được 2005 mảnh cắt không ?

**LỜI GIẢI.** Sau mỗi lần cắt một mảnh giấy thành 6 mảnh hoặc 11 mảnh thì số mảnh giấy tăng lên là 5 hoặc 10. Như vậy tính bất biến của bài toán là “số mảnh giấy luôn tăng lên một bội số của 5”. Vậy số mảnh giấy sau các lần cắt có dạng  $1 + 5k$ , mặt khác 2005 có dạng  $5k$  nên với cách cắt như trên, từ một tờ giấy ban đầu, ta không thể cắt được thành 2005 mảnh.  $\square$

**Nhận xét.** Bất biến của bài toán là số mảnh giấy tăng lên luôn là một bội số của 5.

**Ví dụ 20.** Ta xét bảng 4 hàng 4 cột bao gồm những dấu + và dấu – như sau:

+	+	–	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Người ta có thể đồng thời thay đổi dấu của tất cả các dấu trong một hàng bất kỳ, một cột bất kỳ, hoặc trong một đường bất kỳ mà nó song song với một trong những đường chéo (thực tế người ta có thể thay đổi dấu ở 4 góc). Có khả năng hay không nhận được một bảng không chứa dấu – nào?

**LỜI GIẢI.** Ta xét bảng thứ hai như sau:

0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0

Bảng này có tính chất: trong mỗi hàng, mỗi cột hoặc những đường thẳng song song với đường chéo có đúng hai số 1 hoặc không có số 1 nào. Bây giờ ta gọi những phần tử trong bảng thứ nhất là *phần tử tốt* nếu nó được đặt vào đúng vị trí có số 1 như ở bảng thứ hai. Sau khi ta thay đổi dấu thì chỉ có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

- *Trường hợp 1.* Hai dấu + phần tử tốt được chuyển thành hai dấu – phần tử tốt.
- *Trường hợp 2.* Hai dấu – phần tử tốt được chuyển thành hai dấu – phần tử tốt.
- *Trường hợp 3.* Một cặp phần tử tốt gồm một dấu + và một dấu – chuyển đổi cho nhau.

Như vậy số lượng dấu – phần tử tốt luôn là số lẻ. Do đó luôn tồn tại ít nhất một dấu – trên bảng.  $\square$

**Ví dụ 21.** Có hai đồng đá, một đồng có  $n$  hòn và đồng kia có  $k$  hòn. Cứ mỗi phút một máy tự động lại chọn một đồng có số hòn đá là chẵn và chuyển một nửa số hòn đá của đồng đá được chọn sang đồng kia (nếu cả hai đồng đều có số hòn đá là chẵn thì máy sẽ chọn ngẫu nhiên một đồng). Nếu trong hai đồng số hòn đá đều là lẻ thì máy sẽ ngừng làm việc. Hỏi tồn tại bao nhiêu cặp thứ tự  $(n, k)$ , với  $n$  và  $k$  là các số tự nhiên không vượt quá 1000, để máy tự động sau khoảng thời gian hữu hạn sẽ dừng.

**LỜI GIẢI.** Giả sử  $n = 2^a u$  và  $k = 2^b v$ , với  $u$  và  $v$  là các số lẻ. Chúng ta sẽ chứng minh rằng máy tự động nhất thiết sẽ dừng đối với các cặp và chỉ các cặp số  $(n, k)$  với  $a = b$ . Nếu  $a = b$  thì từ cặp  $(n, k)$  máy tự động có thể nhận được cặp  $(2a^{-1}u, 2a^{-1}(u + v))$  hoặc  $(2a^{-1}(2u + v), 2a^{-1}v)$ . Vì các số  $(2u + v)$  và  $(2v + u)$  lại là lẻ, nên máy tự động đã làm giảm số mũ của 2 xuống 1 đơn vị. Qua  $a$  bước thì số mũ này trở nên bằng 0, và máy tự động sẽ dừng lại. Bây giờ giả sử  $a < b$  (trường hợp  $a > b$  xét tương tự). Nếu  $a \leq b - 2$ , thì từ cặp  $(n, k)$  máy tự động có thể nhận được cặp  $(2^a(u + 2^{b-1-a}v), 2^{b-1}v)$  với các số mũ trong lũy thừa của 2 khác nhau. Nếu  $a = b - 1$ , thì từ cặp  $(n, k)$  máy tự động có thể nhận được cặp  $(2a(u + v), 2au) = (2^a + 1 \frac{u+v}{2}, 2^a u)$  lại với các số mũ trong lũy thừa của 2 khác nhau. Dễ dàng thấy rằng trong trường hợp này máy tự động sẽ làm việc mãi mãi không dừng. Chỉ còn việc đếm các cặp số khả dĩ. Có 500 số lẻ không vượt quá 1000, bởi vậy số cặp  $(n, k) = (2^a u, 2^b v)$  với  $a = b = 0$  bằng  $500^2$ ; có 250 số không vượt quá 1000 chia hết cho 2 và không chia hết cho 4, bởi vậy số lượng cặp với  $a = b = 1$  bằng  $250^2$ . Cứ tiếp tục như vậy, ta nhận được đáp số của bài toán:

$$500^2 + 250^2 + 125^2 + 63^2 + 31^2 + 16^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 = 333396$$

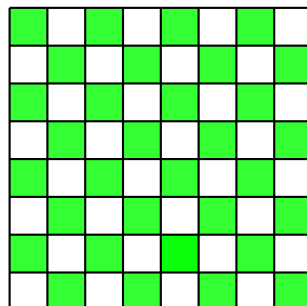
□

**Ví dụ 22.** Trên bảng viết 10 dấu cộng và 15 dấu trừ. Với 24 lần thực hiện, mỗi lần xóa đi 2 dấu bất kì rồi lại thêm vào 1 dấu (cộng hoặc trừ) để cuối cùng trên bảng chỉ còn lại 1 dấu duy nhất. Biết rằng dấu được thêm vào sẽ là dấu trừ nếu trước đó đã xóa đi 2 dấu khác nhau, ngược lại dấu được thêm vào sẽ là dấu cộng. Hỏi dấu còn lại trên bảng là dấu gì ?

**LỜI GIẢI.** Ta thấy, nếu xóa đi 2 dấu cộng thì phải thêm vào 1 dấu cộng, vì vậy số dấu trừ trên bảng không thay đổi. Nếu xóa đi 2 dấu trừ thì phải thêm vào 1 dấu cộng, vì vậy số dấu trừ giảm đi 2. Nếu xóa đi 1 dấu cộng và 1 dấu trừ thì phải thêm vào 1 dấu trừ, vì vậy số dấu trừ trên bảng không thay đổi. Như vậy, tính bất biến là : sau mỗi lần thực hiện việc xóa và thêm dấu, số dấu trừ trên bảng hoặc không thay đổi hoặc giảm đi 2. Mặt khác, số dấu trừ ban đầu là số lẻ nên sau mỗi lần thực hiện thì số dấu trừ còn lại trên bảng bao giờ cũng là số lẻ. Sau 24 lần thực hiện, trên bảng chỉ còn lại 1 dấu duy nhất mà dấu trừ không thể mất hết nên dấu còn lại trên bảng phải là dấu trừ. □

**Ví dụ 23.** Cho một bàn cờ quốc tế  $8 \times 8$ . Hỏi rằng quân mã có thể đi nước đầu tiên từ ô dưới cùng bên trái và kết thúc ở ô trên cùng bên phải hay không? Với điều kiện nó phải đi qua tất cả các ô trên bàn cờ và mỗi ô chỉ đi qua đúng một lần

**LỜI GIẢI.** Ta tô các ô trên bàn cờ xen kẽ các màu đen trắng như bàn cờ vua (hình dưới)



Do sự “bình đẳng màu” nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng ô dưới cùng bên trái có màu trắng. Từ cách đi của con mã ta nhận thấy rằng sau mỗi nước đi con mã sẽ sang một ô khác màu với ô mà nó đang đứng. Vì thế sau một số lẻ nước đi con mã sẽ ở ô màu đen, sau một số chẵn nước đi con mã sẽ ở ô màu trắng. Đây là tính bất biến của chúng ta. Trở lại bài toán ta thấy rằng đi từ ô dưới cùng bên trái lên ô trên cùng bên phải cần đi 63 nước đi. Vì thế ô trên cùng bên phải sẽ cần mang màu đen (theo như tính bất biến). Điều này là vô lý. Vậy quân mã không thể đi từ ô dưới cùng bên trái nên ô trên cùng bên phải như yêu cầu của đầu bài được.  $\square$

**Nhận xét.** Bài toán đã được giải quyết nhưng xung quanh bài toán này vẫn còn rất nhiều điều cần phải suy nghĩ. Chẳng hạn như khi xét bàn cờ  $X \times X$  với  $X$  là một số lẻ thì liệu có một cách đi từ ô dưới cùng bên trái lên ô trên cùng bên phải và thoả mãn các yêu cầu của bài toán hay không? Nếu có thì hãy chỉ ra một cách đi như thế? Câu hỏi này khá khó.

**Ví dụ 24.** Cho một bảng ô vuông chứa số như hình 4a. Ta thực hiện một thuật toán  $T$  như sau: Chọn ra 2 số bất kì nằm ở hai ô vuông cạnh nhau và cộng 2 số đó với một số nguyên nào đó. Hỏi rằng sau một số lần thực hiện thuật toán  $T$  thì bảng hình vuông chứa các số như hình 4a có thể thành bảng hình vuông như hình 4b hay không?

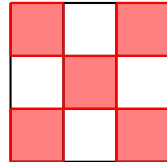
1	2	3
4	5	6
7	8	9

hình 4a

7	8	9
6	2	4
3	5	1

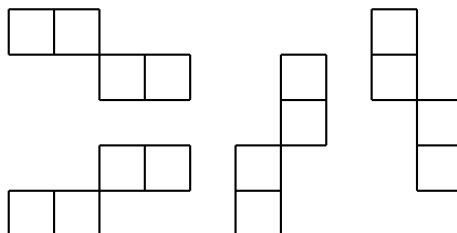
hình 4b

**LỜI GIẢI.** Tô màu các ô của hình vuông như hình dưới đây.



Đặt  $B$  là tổng các số ở các ô màu đen và  $W$  là tổng các số ở các ô màu trắng. Ta thấy vì mỗi lần thực hiện thuật toán  $T$  ta cộng thêm 2 số ở 2 ô cạnh nhau với một số nguyên nên dễ thấy rằng hiệu  $B - W$  là không đổi. Nhưng với giả thuyết của bài toán thì ở hình 4a thì  $B - W = 5$ , còn ở hình 4b thì  $B - W = -1$ . Điều này trái với quy tắc bất biến ở trên. Vậy sau những lần thực hiện thuật toán  $T$  thì từ hình 4a ta không thể nhận được hình 4b.  $\square$

**Ví dụ 25 (VMO 2006).** Xét bảng ô vuông  $m \times n$  ( $m, n$  là các số nguyên dương lớn hơn 3). Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần đặt 4 viên bi vào 4 ô của bảng (mỗi ô 1 viên) mà 4 ô đó tạo thành một trong các hình dưới đây:

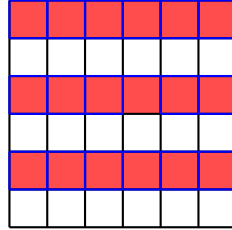


Hỏi sau một số lần ta có thể nhận được bảng mà số bi trong các ô bằng nhau được không nếu:

- a)  $m = 2004$  và  $n = 2006$ ?  
 b)  $m = 2005$  và  $n = 2006$ ?

LỜI GIẢI. a) Bảng đã cho có thể chia thành các hình chữ nhật  $4 \times 2$  nên có thể nhận được trạng thái mà số bi trong các ô bằng nhau.

- b) Tô màu các ô của bảng như hình vẽ (tô các hàng 1, 3, ..., 2005).



Để thấy, mỗi lần đặt bi có 2 viên được đặt vào các ô được tô màu và 2 viên được đặt vào các ô không tô màu. Do đó, nếu gọi  $S(n)$  là số bi trong các ô được tô màu và  $T(n)$  là số bi trong các ô không được tô màu sau lần đặt bi thứ  $n$  thì  $S(n) - T(n)$  là bất biến. Ta có

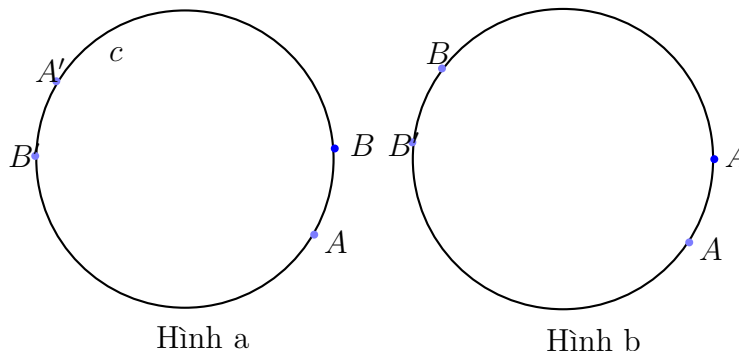
$$S(n) - T(n) = S(0) - T(0) = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Do đó, nếu nhận được bảng mà số bi trong các ô bằng nhau thì số ô được tô màu và số ô không được tô màu bằng nhau. Điều này không thể xảy ra vì  $m$  là số lẻ.

□

**Ví dụ 26.** Có  $2n$  ngài đại sứ được mời đến một bữa tiệc. Mỗi ngài đại sứ có nhiều nhất  $n - 1$  kẻ thù. Chứng minh rằng có thể xếp các ngài đại sứ ngồi quanh một bàn tròn để không ai phải ngồi cạnh kẻ thù của mình.

LỜI GIẢI. Đầu tiên ta xếp chỗ ngồi cho các ngài đại sứ theo mọi cách có thể. Gọi  $H$  là số cặp kẻ thù ngồi cạnh nhau. Gọi  $(A, B)$  là một cặp kẻ thù, với  $B$  ngồi bên phải của  $A$  (hình a). Chúng ta sẽ phải tách chúng ra. Xét một cặp  $(A', B')$  với  $A'$  là một người bạn của  $A$ . Ta sẽ đạt được mục đích bằng cách đảo 2 đầu mút của cung  $BA'$  (hình b).  $H$  sẽ bị giảm nếu  $(A, A')$  và  $(B, B')$  trong hình b là 1 cặp thân thiện.





Ta cần chỉ ra rằng luôn tồn tại  $B'$  nằm bên phải của  $A'$  và  $B$  là bạn của  $B'$ . Ta bắt đầu từ  $A$  và đi khắp xung quanh bàn theo chiều kim đồng hồ. Ta có ít nhất  $n$  người bạn của  $A$ , và bên phải họ sẽ có  $n$  chỗ ngồi. Chúng không thể bị chiếm giữ bởi tất cả kẻ thù của  $B'$  vì  $B'$  chỉ có  $n - 1$  kẻ thù. Như vậy luôn tồn tại một điểm  $A'$  để cho bên phải của nó có  $B'$ , một người bạn của  $B$ . Kết hợp với nguyên lý bất biến mà ta đã tìm ra ở trên thì việc làm giảm  $H$  là luôn thực hiện được. Vậy sau một số lần nhất định thực hiện thuật toán như với cặp  $(A, B)$  thì ta sẽ có một cách xếp thỏa mãn yêu cầu của bài toán.  $\square$

**Ví dụ 27.** Các số tự nhiên  $0, 1, 2, 3, \dots$  được viết trong các ô của một bảng ô vuông kính thước  $2003 \times 2003$  theo vòng xuáy tròn ốc (xoay ngược kim đồng hồ) sao cho số 0 nằm ở ô trung tâm (tâm của bảng). Các dòng và cột của bảng được đánh số tăng dần từ dưới lên trên và từ trái sang phải (bắt đầu từ số 1).

a) Số 2004 nằm ở dòng nào, cột nào? Vì sao?

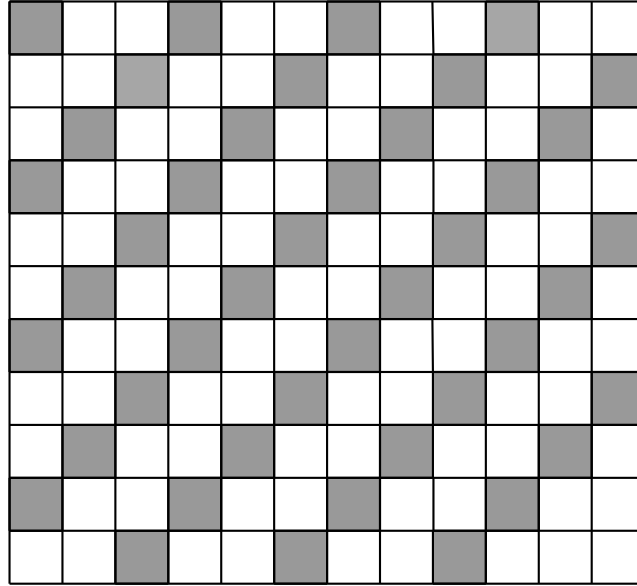
b) Thực hiện thuật toán sau: lần đầu tiên, thay số 0 ở ô trung tâm bởi số 1998; mỗi lần tiếp theo, cho phép lấy ra 12 số trong 12 ô liên tiếp trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột hoặc trong cùng một hình chữ nhật  $3 \times 4$  rồi tăng mỗi số đó lên một đơn vị. Hỏi sau một số lần như vậy ta có thể làm cho tất cả các số trong bảng đều là bội của 2004 hay không? Tại sao?

	20	19	18	17	16	
	21	6	5	4	15	
	22	7	0	3	14	
	23	8	1	2	13	
	24	9	10	11	12	

**LỜI GIẢI.** a) Xét hình vuông cạnh  $2n + 1$  có tâm là ô chứa số 0; số được viết ở đỉnh dưới, bên trái của hình vuông này là  $(2n + 1)^2 - 1$  (ví dụ các số 8, 24, ...).

Vì  $(2 \times 22 + 1)^2 - 1 = 2024$  và số 0 nằm ở ô dòng số 1002, cột số 1002 nên số 2024 nằm ở hàng số  $1002 - 22 = 980$  và cột số  $1002 - 22 = 980$ . Vậy số 2004 nằm ở hàng số  $980 + 20 = 1000$  và cột số 980.

a) Ta tô màu các ô của bản như hình vẽ.



Gọi  $S(n)$  là tổng các số trong các ô được tô màu ở bước thứ  $n$ . Do mỗi lần thực hiện thuật toán (kể từ lần thứ 2) có đúng 4 ô được tô màu nên

$$S(n+1) = S(n) + 4, \quad \forall n \geq 1.$$

Do đó  $S(n)$  bất biến theo module 4. Suy ra

$$S(n) \equiv S(1) \pmod{4}, \forall n \geq 1.$$

Ta xét số dư của  $S(0)$  khi chia cho 4:

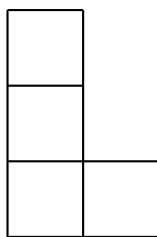
Xét các đường chéo gồm những ô được tô màu, các đường chéo đó gồm một trong ba loại sau đây:

- Loại 1: chứa toàn các số chia hết cho 4 (đường chéo đi qua ô trung tâm).
- Loại 2: chứa toàn các số chia cho 4 dư 2. Do tính chất đối xứng của bảng nên có chẵn đường chéo loại này và như vậy tổng các số trên các đường chéo loại này chia hết cho 4.
- Loại 3: chứa toàn các số lẻ: Trên mỗi đường chéo loại này có một nửa số ô chứa các số chia cho 4 dư 1 và một nửa số ô chứa các số chia cho 4 dư  $-1$  và như vậy tổng các số trong các đường chéo loại này cũng chia hết cho 4.

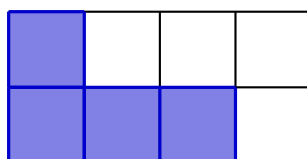
Từ đó có  $S(0) \equiv 4 \pmod{4}$ , suy ra  $S(1) = S(0) + 1994 \equiv 2 \pmod{4}$  hay  $S(n) \equiv 2 \pmod{4}, \forall n \geq 1$ . Vậy không thể có trạng thái mà tất cả các số trong bảng đều là bội của 2004 được.

□

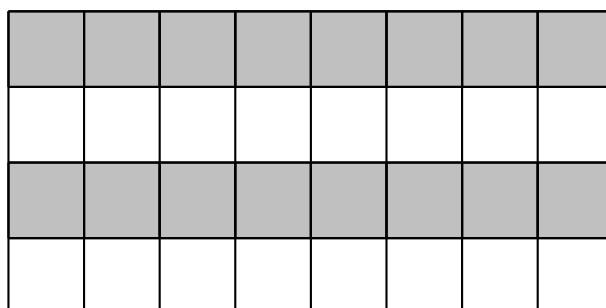
**Ví dụ 28.** Xác định các số nguyên dương  $m, n$  sao cho bảng  $m \times n$  có thể lát được bởi các quân hình chữ  $L$  dưới đây



LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử  $m \leq n$ . Để lát được bảng thì  $m \geq 2, n \geq 3$ . Giả sử ta có thể lát được bảng bởi  $a$  quân hình chữ  $L$ , ta có  $m.n = 4a$ . Vì  $m.n \geq 6$  nên  $a \geq 2$ . Xét  $a = 2$ , ta có bảng  $2 \times 4$ . Bảng  $2 \times 4$  có thể lát được bởi hai quân chữ hình  $L$  như hình vẽ dưới đây:



Với  $a = 3$  ta có  $m \times n = 12$  nên có hai bảng thỏa mãn là  $2 \times 6$  và  $3 \times 4$ . Dễ dàng kiểm tra hai bảng này đều không lát được bởi các quân hình chữ  $L$ . Điều đó khiến ta dự đoán, để lát được bảng bởi các quân hình chữ  $L$  thì  $a$  chẵn. Để chứng minh dự đoán này ta tô màu các ô của bảng như sau: Giả sử được  $m$  chẵn. Các ô ở dòng có thứ tự lẻ (tính từ trên xuống dưới) được tô màu đen, có ô ở dòng có thứ tự chẵn được tô màu trắng.

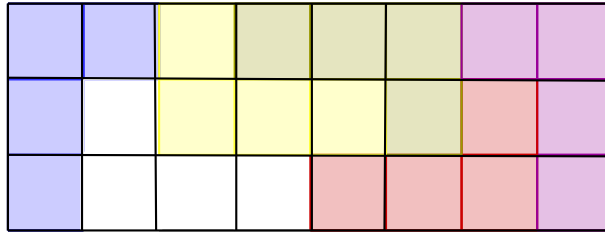


Khi đó, số ô đen và số ô trắng bằng nhau và bằng  $2a$ . Mỗi quân hình chữ  $L$  lát vào bảng chiếm 3 ô đen và 1 ô trắng hoặc chiếm 3 ô trắng và 1 ô đen. Giả sử lát được bởi  $x$  quân hình chữ  $L$  chiếm 3 ô đen và 1 ô trắng và  $y$  quân hình chữ  $L$  chiếm 3 ô trắng và 1 ô đen. Ta có hệ

$$\begin{cases} x + y = a \\ 3x + y = 3y + x = 2a. \end{cases}$$

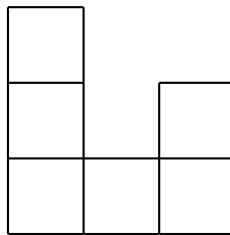
Suy ra  $x = y$  và  $a = 2x$ . Điều đó có nghĩa là  $a$  chẵn.

Bây giờ ta chứng minh nếu  $a$  chẵn, tức là  $m \times n$  chia hết cho 8 thì có thể lát được bảng bởi các quân hình chữ  $L$ . Thật vậy, nếu  $m$  chia hết cho 2 và  $n$  chia hết cho 4 thì bảng có thể thành có hình chữ nhật  $2 \times 4$  nên lát được. Nếu  $m$  lẻ và  $n$  chia hết cho 8 thì do  $m$  có thể được viết dưới dạng  $m = 2s + 3$  nên có thể chia bảng đã cho thành các hình chữ nhật  $2 \times 4$  và  $3 \times 8$ . Do đó, nếu hình chữ nhật  $3 \times 8$  lát được thì bảng đã cho sẽ lát được. Hình vẽ dưới đây chứng tỏ có thể lát được hình chữ nhật này.



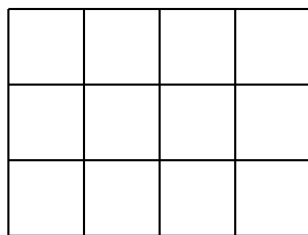
Vậy để lát được bảng đã cho bởi các quân hình chữ  $L$  thì điều kiện cần và đủ là  $m \times n$  chia hết cho 8 và  $m, n \geq 2$ .  $\square$

**Ví dụ 29** (IMO 2004). Ta định nghĩa viên gạch hình móc câu là hình gồm 6 ô vuông đơn vị như hình vẽ dưới đây, hoặc hình nhận được do lật hình đó (sang trái, sang phải, lên trên, xuống dưới) hoặc hình nhận được do xoay hình đó đi một góc.

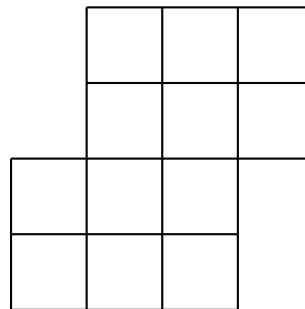


Hãy xác định tất cả các hình chữ nhật  $m \times n$ , trong đó  $m, n$  là các số nguyên dương sao cho có thể lát hình chữ nhật đó bằng các viên gạch hình móc câu.

**LỜI GIẢI.** Dễ thấy  $m, n \notin \{1, 2, 5\}$ . Chia hình chữ nhật  $m \times n$  thành  $m \times n$  ô vuông và đánh số các hàng, các cột từ dưới lên trên, từ trái sang phải. Ta gọi ô  $(p, q)$  là ô nằm ở giao của hàng thứ  $p$  và cột thứ  $q$ . Hai viên gạch hình móc câu chỉ có thể ghép lại để được một trong hai hình dưới đây



$(H_1)$



$(H_2)$

Do đó, để lát được hình chữ nhật  $m \times n$  thì  $m \cdot n$  phải chia hết cho 12. Nếu ít nhất một trong hai số  $m$  hoặc  $n$  chia hết cho 4 thì có thể lát được hình chữ nhật  $m \times n$ . Thật vậy, giả sử được  $m$  chia hết cho 4. Nếu  $n$  chia hết cho 3 thì có thể chia hình chữ nhật  $m \times n$  thành các hình chữ nhật  $4 \times 3$ , do đó có thể lát được. Nếu  $n$  không chia hết cho 3 thì có thể viết  $n$  dưới dạng  $n = 3a + 4b$  với  $a, b$  là các số nguyên dương, do đó có thể lát được.

Bây giờ ta chứng minh một trong hai số  $m, n$  chia hết cho 4. Giả sử ngược lại, khi đó cả  $m$  và  $n$  chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 4. Để chứng minh điều này không xảy ra ta tạo bất biến. Để tạo bất biến ta điền các số vào các ô của hình chữ nhật theo quy tắc sau: Xét ô  $(p, q)$ .

Nếu chỉ một trong hai tọa độ  $p$  và  $q$  chia hết cho 4 thì điền số 1 vào ô đó. Nếu chỉ một trong hai tọa độ  $p$  và  $q$  chia hết cho 4 thì điền số 2 vào ô đó. Với cách điền số như vậy ta thu được bất biến là tổng các số trong hình  $(H_1)$  và tổng các số trong hình  $(H_2)$  luôn là số lẻ. Do  $m, n$  chẵn nên tổng các số trong toàn bộ hình chữ nhật  $m \times n$  là một số chẵn. Muốn lát được hình chữ nhật  $m \times n$  thì tổng số hình  $(H_1)$  và  $(H_2)$  được sử dụng phải là số chẵn. Khi đó,  $m.n$  chia hết cho 24. Điều này không xảy ra vì cả  $m, n$  đều không chia hết cho 4.  $\square$

**Kết luận.** Qua các ví dụ trên các bạn có thể thấy được sức mạnh của việc tìm ra các đại lượng bất biến trong mỗi bài toán tổ hợp. Các đại lượng bất biến xuất hiện trong tất cả các dạng của bài toán tổ hợp. Tìm ra cũng như phát hiện các đại lượng bất biến chính là con đường giải cũng như sáng tạo các bài toán liên quan đến nội dung này.

## 5. Các bài toán luyện tập

**Bài tập 1.** Trên một bảng gồm  $4 \times 4$  ô vuông được viết các dấu cộng và dấu trừ. Đổi dấu đồng thời các ô nằm trên cùng một hàng hoặc trên cùng một cột hoặc trên các ô dọc theo các đường thẳng song song với một trong hai đường chéo. Bằng cách như vậy ta có thể nhận được bảng chứa toàn dấu cộng không ?

**Bài tập 2.** Tại đỉnh  $A_1$  của một đa giác đều 12 cạnh  $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$  được viết dấu trừ, các đỉnh còn lại được viết dấu cộng. Chứng minh rằng: bằng cách đổi dấu đồng thời tại 6 đỉnh liên tiếp bất kì với số lần tùy ý, ta không thể nhận được đa giác mà tại đỉnh  $A_2$  viết dấu trừ còn các đỉnh khác viết dấu cộng.

**Bài tập 3.** Cho dãy số  $1, 2, 3, \dots, 2006$ . Ta thay đổi vị trí các số theo nguyên tắc: mỗi lần lấy ra 4 số bất kì rồi đặt chúng vào 4 vị trí cũ nhưng theo thứ tự ngược lại. Bằng cách này, ta có thể sắp xếp dãy số trên về dãy số  $2006, 2005, \dots, 2, 1$  không?

**Bài tập 4.** Mỗi người sống trên trái đất đã thực hiện một số cái bắt tay nhất định với những người khác. Chứng minh rằng số người đã thực hiện một số lẻ cái bắt tay là số chẵn.

**Bài tập 5.** Cho các số  $1, 2, 3, \dots, n$  sắp xếp theo một thứ tự nào đó. Tiến hành trao đổi vị trí của hai số bất kì đứng kề nhau. Chứng minh rằng nếu thực hiện một số lẻ lần như vậy thì không thể nhận được sắp xếp ban đầu.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Tạ Duy Phượng, *Toán trò chơi: Phân loại, công cụ và phương pháp giải*, chuyên đề của Hội Toán học Hà Nội, 2011.
- [2] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc tổ hợp và toán rời rạc*, NXB Giáo dục, 2008.
- [3] Nguyễn Hữu Điển, *Giải toán bằng đại lượng bất biến*, NXB Giáo dục, 2004.

- [4] Yao Zhang, *Combinatorial Problems in Mathematical Competitions*, East China Normal University Press, 2011.
- [5] Arthur Engel, *Problem solving strategies*, Springer, 1991.

# MỘT SỐ BÀI TOÁN TÔ MÀU

Lê Tuấn Linh<sup>1</sup>

Khi gặp những bài toán có đề bài phức tạp, một công việc chúng ta cần làm là đưa nó trở về với ngôn ngữ Toán học quen thuộc, giúp chúng ta dễ dàng tư duy và việc trình bày lời giải cũng trở nên đơn giản hơn. Một phương pháp thường hay được sử dụng để làm công việc này là Tô màu. Ta sẽ chia đối tượng đang xét ra thành nhiều đối tượng và tô bởi những màu khác nhau. Không chỉ vậy, nhiều khi Tô màu sẽ thực sự giúp chúng ta làm vấn đề bài ra trở nên sáng sủa hơn và đi tới lời giải nhanh chóng, ngắn gọn và dễ hiểu.

## 1. Tóm tắt lý thuyết

### 1.1. Nguyên lí Dirichlet

Dạng đơn giản nhất của nguyên lí Dirichlet là :

**Nguyên lý 1.** *Nếu nhốt  $n + 1$  thỏ vào  $n$  lồng thì tồn tại một lồng có ít nhất hai con thỏ.*

Và dạng tổng quát của nó:

**Nguyên lý 2.** *Nếu nhốt  $n$  thỏ vào  $m$  lồng mà phép chia  $n$  cho  $m$  có thương là  $k$  và còn dư thì tồn tại một lồng có ít nhất  $k + 1$  con thỏ.*

**CHỨNG MINH.** Giả sử lồng nào cũng có không quá  $k$  thỏ thì  $m$  lồng có không quá  $mk$  con thỏ, ít hơn  $n$  thỏ (vô lí). Vì vậy ta có điều cần chứng minh.  $\square$

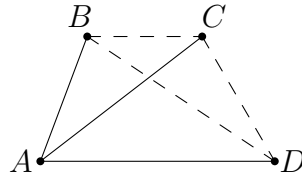
**Nhận xét.** Ưu điểm của nguyên lí Dirichlet là nó cho phép khẳng định được sự tồn tại của một đối tượng có tính chất nào đó mà không cần chỉ ra mô hình cụ thể của nó.

**Ví dụ 1** (Bài toán 6 người). Chứng minh rằng trong 6 người bất kì luôn có thể tìm ra ba người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau.

**LỜI GIẢI.** Đây là một bài toán rất cổ điển của Toán học và là một phần nhỏ trong lớp rất rộng các bài toán dạng Turan. Để giải quyết bài toán này, ta có thể phát biểu lại bài toán như sau : Cho 6 điểm trong đó hai điểm nào cũng được nối với nhau bằng một đoạn thẳng và tô bởi chỉ một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh bao giờ cũng tìm ra được một tam giác có ba cạnh cùng màu.

---

<sup>1</sup>Lớp 10T, trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hoá.



Gọi 6 điểm là  $A, B, C, D, E, F$ .

Từ điểm  $A$  ta kẻ được 5 đoạn thẳng là  $AB, AC, AD, AE, AF$ . Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ba đoạn thẳng được tô bởi cùng một màu. Không mất tính tổng quát giả sử đó là các đoạn thẳng  $AB, AC, AD$  và cùng tô màu xanh.

Nếu tồn tại ít nhất một đoạn thẳng trong ba đoạn thẳng  $BC, CD, DB$  được tô xanh thì bài toán được chứng minh (giả sử  $BC$  được tô xanh thì tam giác  $ABC$  thỏa mãn)

Nếu cả ba đoạn thẳng  $BC, CD, DB$  đều được tô đỏ thì tam giác  $BCD$  thỏa mãn.

Vậy bài toán đã được chứng minh.  $\square$

**Ví dụ 2.** Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm cùng màu có khoảng cách bằng 1.

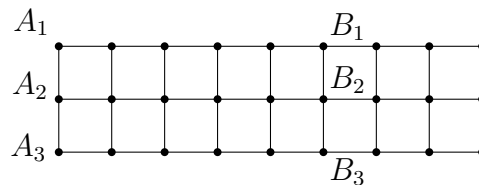
**LỜI GIẢI.** Chọn ba điểm bất kì trong mặt phẳng sao cho chúng tạo thành một tam giác đều cạnh 1. Theo nguyên lí Dirichlet, vì ba điểm được tô bởi hai màu nên tồn tại hai điểm cùng màu và đó chính là hai điểm cần tìm.  $\square$

**Ví dụ 3.** Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu. Chứng minh tồn tại một hình chữ nhật có 4 đỉnh được tô bởi cùng một màu. Hãy phát biểu và chứng minh mệnh đề tổng quát.

**LỜI GIẢI.** Xét các giao điểm của ba đường thẳng ngang và 9 đường thẳng đứng như hình vẽ. Số cách tô màu ba giao điểm trên cùng một đường thẳng đứng là  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  cách.

Do có 9 đường thẳng đứng nên tồn tại hai đường thẳng có cách tô màu ba giao điểm giống hệt nhau.

Giả sử hai đường thẳng đó là hai đường thẳng chứa các giao điểm là  $A_1, A_2, A_3$  và  $B_1, B_2, B_3$  như hình vẽ.



Ba điểm  $A_1, A_2, A_3$  được tô bởi hai màu nên tồn tại hai điểm cùng màu. Giả sử là  $A_1$  và  $A_3$ . Như vậy hình chữ nhật  $A_1A_3B_3B_1$  có 4 đỉnh được tô bởi cùng một màu.  $\square$

**Mệnh đề tổng quát:** Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong  $n$  màu ( $n$  là số nguyên dương). Chứng minh tồn tại một hình chữ nhật có 4 đỉnh được tô bởi cùng một màu.

Chứng minh mệnh đề tổng quát tương tự như với trường hợp  $n = 2$ . Ta sẽ xét giao điểm của của ba đường thẳng ngang và  $n^3 + 1$  đường thẳng đứng.



## 1.2. Nguyên lý cực hạn

**Nguyên lý 3** (Nguyên lý cực hạn). *Trong một tập hợp hữu hạn (khác rỗng) các số thực, luôn tồn tại số nhỏ nhất và số lớn nhất.*

Nhờ nguyên lý cực hạn ta có thể xét các phần tử mà một đại lượng nào đó có giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất như khoảng cách nhỏ nhất (lớn nhất) trong các khoảng cách giữa hai điểm hay giữa một điểm với một đường thẳng, xét điểm ở phía bên trái nhất hay bên phải nhất trong các điểm nằm trên một đoạn thẳng, điểm được nối với nhiều điểm nhất, ... Ta cùng đến với các ví dụ dưới đây:

**Ví dụ 4.** Cho một số hữu hạn điểm, trong đó có một số điểm màu đen, còn lại là điểm trắng. Biết rằng:

- (i) Mỗi điểm đen đều được nối với ít nhất một điểm trắng.
- (ii) Không có điểm trắng nào được nối với tất cả các điểm đen.

Chứng minh rằng tồn tại một nhóm 4 điểm gồm 2 điểm trắng, 2 điểm đen mà mỗi điểm được nối với đúng một điểm khác màu của nhóm đó.

**LỜI GIẢI.** Gọi  $A$  là điểm trắng được nối với nhiều điểm đen nhất.

Do điều kiện (ii) nên tồn tại điểm đen không được nối với  $A$ , gọi điểm đó là  $B$ .

Do điều kiện (i) mà  $B$  phải được nối với 1 điểm trắng khác  $A$ , gọi điểm đó là  $C$ .

Trong tất cả các điểm đen được nối với  $A$  tồn tại một điểm không được nối với  $C$ , gọi đó là  $D$  (vì nếu không tồn tại thì điểm trắng  $C$  được nối với nhiều điểm đen hơn  $A$ , trái với cách chọn điểm  $A$ ).

Như vậy nhóm 4 điểm  $A, B, C, D$  là nhóm cần tìm. □

**Ví dụ 5.** Cho tập hợp  $X$  gồm hữu hạn các điểm trên mặt phẳng. Mỗi cặp điểm bất kì được nối với nhau bởi một đoạn thẳng và tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Biết rằng nếu hai điểm  $A$  và  $B$  thuộc tập hợp  $X$  là đầu mút của cùng một số đoạn thẳng xanh thì không tồn tại điểm  $C$  thuộc tập hợp  $X$  sao cho  $AC$  và  $BC$  cùng tô xanh. Chứng minh rằng tồn tại một điểm mà nó chỉ là đầu mút của đúng một đoạn thẳng xanh.

**LỜI GIẢI.** Vì số điểm thuộc  $X$  là hữu hạn nên có thể tìm được một điểm  $A$  là đầu mút của nhiều đoạn thẳng tô màu xanh nhất. Giả sử  $AB_1, AB_2, \dots, AB_k$  tô màu xanh và  $B_i$  là đầu mút của  $n_i$  đoạn thẳng xanh.

Từ điều kiện bài toán ra ta suy ra  $n_1, n_2, \dots, n_k$  đôi một khác nhau.

Mặt khác các số  $n_1, n_2, \dots, n_k$  nhận các giá trị nguyên trong khoảng từ một đến  $k$  nên chắc chắn tồn tại  $n_i = 1$ . Ta có điều cần chứng minh. □

## 1.3. Tính chất bất biến

Trong các bài toán tổ hợp, ngoài các bài toán sử dụng nguyên lý Dirichlet và nguyên lý cực hạn, ta còn gặp các bài toán sử dụng tính chất bất biến của các đối tượng khi chúng thay đổi. Mặc dù các đối tượng này thay đổi nhưng vẫn có những tính chất không bị thay đổi trong suốt quá

trình biến đổi và đó được gọi là tính chất bất biến. Sử dụng tính chất bất biến ta có thể loại bỏ những trường hợp, những khả năng không thể xảy ra.

Một bất biến đơn giản nhất và thường gặp là tính chẵn lẻ của số, tức là ta sẽ xét số dư khi chia cho 2. Ngoài ra ta cũng có thể xét số dư cho các số bất kì khác.

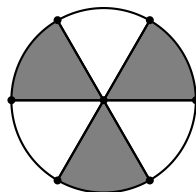
Để thiết lập các bất biến đôi khi ta cũng sử dụng phương pháp tô màu, tức là chia các đối tượng đang xét ra làm nhiều nhóm, các phần tử của mỗi nhóm được tô bởi cùng một màu.

**Ví dụ 6.** Cho 13 đoạn thẳng thẳng đứng, đầu trên tô đỏ, đầu dưới tô xanh. Mỗi lượt người ta đổi màu hai đầu của 4 đoạn thẳng: đỏ thành xanh, xanh thành đỏ. Có cách nào sau một số lượt đổi màu, đầu trên của 13 đoạn thẳng được tô xanh hay không?

**LỜI GIẢI.** Nhận thấy rằng sau mỗi lần đổi màu thì số đầu trên màu đỏ của 13 đoạn thẳng luôn thay đổi một số chẵn, mà ban đầu số đầu trên màu đỏ là số lẻ (13) nên không thể có khả năng không có đầu trên nào màu đỏ sau một số lần đổi, tức là không xảy ra trường hợp cả 13 đầu trên của 13 đoạn thẳng đều có màu xanh.  $\square$

**Ví dụ 7.** Một hình tròn được chia thành 6 hình quạt, trong mỗi hình quạt ta đặt một viên bi. Thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần chuyển một viên bi ở một hình quạt nào đó sang hình quạt kề với nó. Hỏi sau 20 lần chuyển bi ta có thể nhận được trạng thái mà cả 6 viên bi đều ở cùng một hình quạt hay không?

**LỜI GIẢI.** Tô màu các hình quạt như hình vẽ. Gọi  $S_n$  là tổng số viên bi trong các hình quạt màu đen sau lần chuyển bi thứ  $n$ .



Ta thấy  $S_n$  thay đổi sau mỗi lần chuyển bi, tuy nhiên  $S_n \equiv n + 1 \pmod{2}$  với mọi  $n \geq 0$ .

Suy ra  $S_{20}$  là số lẻ. Nếu sau 20 lần chuyển bi mà ta có thể nhận được khả năng 6 viên bi cùng thuộc một hình quạt thì  $S_n = 0$  hoặc  $S_n = 6$ .

Vậy sau 20 lần chuyển bi ta không thể nhận được kết quả mà cả 6 viên bi đều thuộc một hình quạt.  $\square$

**Ví dụ 8.** Cho một bàn cờ quốc tế. Được phép sơn lại các ô của một đường nằm ngang hoặc đường thẳng đứng nào đó thành màu khác. Hỏi bằng cách đó có thể nhận được một bàn cờ chỉ gồm duy nhất một ô đen hay không ?

**LỜI GIẢI.** Khi tô lại một đường nằm ngang hoặc một đường thẳng đứng có  $k$  ô đen và  $8 - k$  ô trắng ta được  $8 - k$  ô đen và  $k$  ô trắng. Do đó số ô đen thay đổi đi  $(8 - k) - k = 8 - 2k$ , tức là thay đổi một số chẵn ô. Bởi vì tính chẵn lẻ của số ô đen không thay đổi, mà ban đầu có một số chẵn các ô đen (32 ô) nên ta không thể nhận được khả năng bàn cờ chỉ có duy nhất một ô đen.  $\square$

## 2. Một số dạng toán thường gặp về tô màu

### 2.1. Bài toán liên quan đến đồ thị

Ví dụ 1 đã trình bày ở trên là một bài toán mà lời giải của nó được trình bày theo ngôn ngữ đồ thị. Dưới đây là một số ví dụ khác về các bài toán dạng này.

**Ví dụ 9.** Cho 17 điểm trên mặt phẳng sao cho hai điểm nào cũng được nối với nhau bởi đúng một đoạn thẳng và tô bởi chỉ một trong ba màu xanh; đỏ hoặc vàng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

**LỜI GIẢI.** Theo nguyên lý Dirichlet, từ mỗi điểm ta kẻ được 16 đoạn thẳng và tô bởi ba màu, do đó tồn tại 6 đoạn thẳng kẻ từ điểm đó và tô cùng một màu.

Gọi 6 đoạn thẳng là  $MA, MB, MC, MD, ME, MF$  và chúng cùng được tô vàng.

Nếu tồn tại ít nhất một đoạn thẳng nối hai trong 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$  tô màu vàng thì bài toán được chứng minh (ví dụ đoạn  $AB$  tô vàng thì tam giác  $MAB$  thỏa mãn)

Nếu không tồn tại đoạn thẳng nào nối hai trong 6 điểm ấy tô màu vàng, tức là 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$  được nối với nhau bởi các đoạn thẳng tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Áp dụng kết quả ví dụ 1, ta có điều cần chứng minh.

Tóm lại ta luôn tìm được một tam giác có ba cạnh cùng màu. □

**Ví dụ 10.** Cho 6 điểm trên mặt phẳng trong đó ba điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác có độ dài ba cạnh khác nhau. Chứng minh tồn tại một đoạn thẳng nối hai trong 6 điểm ấy sao cho nó vừa là cạnh nhỏ nhất của tam giác này, vừa là cạnh lớn nhất của tam giác khác.

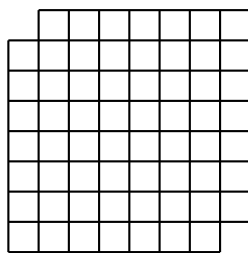
**LỜI GIẢI.** Với mỗi tam giác được tạo thành từ ba trong 6 điểm, ta tô đỏ cạnh lớn nhất. Như vậy bất cứ tam giác nào cũng phải có cạnh đỏ. Làm thao tác trên với tất cả các tam giác. Cuối cùng những đoạn thẳng chưa được tô màu, ta tô màu xanh.

Theo ví dụ 1, tồn tại một tam giác  $ABC$  có ba cạnh cùng màu. Vì tam giác nào cũng có cạnh đỏ nên tam giác này có ba cạnh cùng màu đỏ. Do vậy, giả sử  $BC$  là cạnh nhỏ nhất của tam giác này thì  $BC$  chính là đoạn thẳng cần tìm bởi nó là cạnh nhỏ nhất của tam giác  $ABC$  và là cạnh lớn nhất của một tam giác khác nên mới được tô đỏ. □

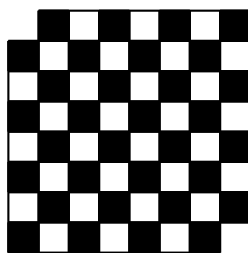
### 2.2. Bài toán tô màu bảng ô vuông

Đối với các bài toán tô màu liên quan đến bảng ô vuông, ngoài cách tô màu một số ô của bảng một cách hợp lý, ta cũng có thể đánh số hoặc đánh tọa độ các ô để đi đến lời giải của bài toán. Dưới đây là một số ví dụ:

**Ví dụ 11.** Hỏi có thể lát một bàn cờ quốc tế bị mất hai ô ở hai góc đối diện (như hình vẽ) bằng các quân cờ domino  $1 \times 2$  được hay không?



LỜI GIẢI. Tô màu phần còn lại của bàn cờ như hình dưới.



Nhận thấy mỗi quân domino khi lát vào bảng luôn chiếm một ô đen và một ô trắng.

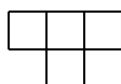
Nếu lát được phần còn lại của bảng bởi các quân domino thì số ô đen và số ô trắng của bảng phải bằng nhau. Nhưng trong hình vẽ ta lại có 32 ô đen và chỉ có 30 ô trắng. Như vậy không thể lát được các quân domino thỏa mãn yêu cầu bài toán.  $\square$

**Ví dụ 12.** Cho một hình chữ nhật  $3 \times 7$  được chia thành 21 ô vuông con. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật tạo bởi các ô vuông con mà 4 ô vuông con ở 4 góc của hình chữ nhật ấy được tô bởi cùng một màu.

LỜI GIẢI. Nếu tồn tại một cột có ba ô vuông được tô cùng màu thì bài toán được chứng minh vì khi đó chắc chắn tồn tại một cột khác có hai ô được tô cùng màu với ba ô đó. Từ đó tìm được hình chữ nhật cần tìm.

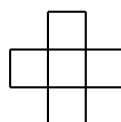
Nếu cột nào cũng chỉ được tô bởi đúng hai màu. Ta thấy số cách tô màu ba ô vuông ở mỗi cột là 6, do đó theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai cột có cách tô màu giống nhau. Và từ hai cột này ta tìm ra được hình chữ nhật thỏa mãn yêu cầu bài toán.  $\square$

**Ví dụ 13.** Có thể đánh số các ô của một bảng ô vuông  $4 \times 4$  bởi các số tự nhiên từ một đến 16 (mỗi số viết một lần) sao cho tổng 4 số ở mọi phần của bảng ô vuông có dạng như hình chữ T dưới đây (có thể xoay về mọi phía) đều chia hết cho 4 hay không?



LỜI GIẢI. Ta sẽ chứng minh rằng không có cách đánh số nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử tồn tại cách đánh số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta xét một phần của bảng vuông như hình dưới đây.



Ta có:  $(a + b + n + d) : 4$  và  $(a + b + n + c) : 4$ . Suy ra  $c \equiv d \pmod{4}$

Tương tự  $a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod{4}$

Như vậy nếu một ô số  $a$  chia cho 4 dư  $m$  thì ô ở vị trí chéo với nó cũng chia 4 dư  $m$ .

Ta tô màu bảng vuông  $4 \times 4$  bởi các màu đen trắng xen kẽ. Giả sử số  $a$  ở vị trí ô đen, thế thì các số ở vị trí ô đen khác (trừ hai ô đen ở góc) đều chia 4 dư  $m$ , suy ra có 6 ô đen chứa số có cùng số dư trong phép chia cho 4.


		$m$	
	$m$		$m$
$m$		$m$	
	$m$		

Trong bảng không thể có 6 số có cùng số dư khi chia cho 4 vì trong các số từ 1 đến 16 chỉ có 4 số chia 4 dư 0, 4 số chia 4 dư một, 4 số chia 4 dư hai, 4 số chia 4 dư ba.

Vậy không thể đánh số các ô của bảng ô vuông thỏa mãn yêu cầu bài toán.  $\square$

## 2.3. Các bài toán khác

**Ví dụ 14.** Người ta tô đỏ một số cạnh của một đa giác lồi và tô xanh các cạnh còn lại. Biết rằng tổng độ dài các cạnh đỏ nhỏ hơn nửa chu vi đa giác, và không có 2 cạnh kề nhau nào được tô cùng màu xanh. Hỏi đa giác đó có thể là đa giác ngoại tiếp một đường tròn được hay không?

**LỜI GIẢI.** Giả sử  $BC$  là cạnh xanh,  $AB, CD$  là các cạnh kề với cạnh  $BC$ . Theo giả thiết,  $AB$  và  $CD$  là các cạnh đỏ. Giả sử đa giác ngoại tiếp được đường tròn  $(O)$ . Gọi  $M, N, P$  là các tiếp điểm của đường tròn trên  $AB, BC, CD$ .

Ta có  $BC = BN + NC = BM + CP$ . Do đó tổng độ dài các cạnh xanh nhỏ hơn hoặc bằng tổng độ dài các cạnh đỏ (dấu nhỏ hơn xảy ra khi tồn tại hai cạnh đỏ kề nhau. Dấu bằng xảy ra khi không tồn tại hai cạnh đỏ kề nhau).

Từ đó suy ra tổng độ dài các cạnh xanh không lớn hơn nửa chu vi đa giác, tức là tổng độ dài các cạnh đỏ lớn hơn hoặc bằng nửa chu vi đa giác, trái với giả thiết.

Vậy đa giác đã cho không thể ngoại tiếp một đường tròn được.  $\square$

**Ví dụ 15.** Cho một đường tròn. Ta tô màu xanh một số cung của đường tròn, tổng độ dài các cung màu xanh của đường tròn nhỏ hơn nửa chu vi đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại một đường kính của đường tròn mà hai đầu không bị tô màu.

**LỜI GIẢI.** Tô đỏ các cung đối xứng với các cung xanh qua  $O$ . Do tổng độ dài các cung xanh nhỏ hơn nửa chu vi đường tròn nên tổng độ dài các cung xanh và cung đỏ nhỏ hơn chu vi đường tròn. Suy ra tồn tại một điểm  $A$  không được tô màu xanh hay đỏ. Điểm  $B$  đối xứng với điểm đó qua  $O$  cũng không được tô màu và vì thế, đường kính  $AB$  là đường kính cần tìm.  $\square$

**Ví dụ 16.** Có 13 ô vuông xếp thành một hàng ngang, mỗi ô được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Biết rằng số ô mà bên phải là ô cùng màu bằng số ô mà bên phải là ô khác màu. Ô đầu tiên bên trái là ô đỏ. Hỏi ô cuối cùng bên phải là ô màu gì? Cũng hỏi như trên nếu số ô vuông là 15 ô.

**LỜI GIẢI.** Ta gọi một lần đi từ một ô sang ô liền kề bên phải nó là một bước chuyển. Từ ô số 1 đến ô số 13 có 12 bước chuyển.

Theo giả thiết, số ô mà bên phải là ô cùng màu bằng số ô mà bên phải là ô khác màu, nên số bước chuyển đổi màu bằng số bước chuyển không đổi màu. Do đó có 6 bước chuyển đổi màu và 6 bước chuyển không đổi màu.

Nếu từ ô  $a$  đến ô  $b$  có chẵn bước đổi màu thì ô  $b$  cùng màu với ô  $a$ , nếu có lẻ bước đổi màu thì ô  $b$  khác màu với ô  $a$ .

Do vậy nếu có 13 ô thì từ ô một đến ô 13 có 6 bước chuyển đổi màu, do đó 13 có cùng màu đỏ với ô một. Tương tự, nếu có 15 ô thì từ ô một đến ô 15 có 7 bước chuyển đổi màu, do đó 15 có màu xanh.  $\square$

### 3. Các bài toán tổng hợp

**Bài toán 1.** Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng một và một góc nhọn bằng  $60^\circ$  và ba đỉnh của tam giác này có cùng màu.

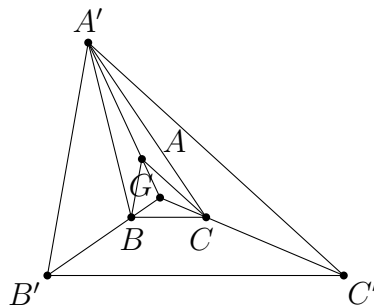
**LỜI GIẢI.** Giả sử ta tô bằng hai màu đen và trắng.

Theo như ví dụ 2 thì tồn tại một tam giác đều  $ABC$  có ba cạnh bằng 1 và có hai trong ba đỉnh của nó có cùng màu.

Gọi  $AXYBZT$  là một lục giác đều nhận  $AB$  làm đường chéo lớn nhất. Nếu một trong các đỉnh  $X, Y, Z, T$  (chẳng hạn  $X$ ) có màu trắng thì ba đỉnh của tam giác  $ABX$  (có  $\widehat{AXB} = 90^\circ$ ,  $\widehat{XAB} = 60^\circ$ ) sẽ có ba đỉnh cùng màu trắng như yêu cầu đề bài. Ngược lại, hiển nhiên ta thấy tam giác  $XYT$  (có  $\widehat{YXT} = 90^\circ$ ,  $\widehat{XYT} = 60^\circ$ ) có ba đỉnh cùng màu đen. Vậy ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 2.** Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu. Chứng minh tồn tại một tam giác mà các đỉnh và trọng tâm của nó được tô cùng một màu.

**LỜI GIẢI.** Lấy 7 điểm bất kì trên mặt phẳng sao cho không có bộ ba điểm nào thẳng hàng. Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ba điểm cùng màu. Giả sử đó là ba điểm  $A, B, C$  và chúng được tô xanh.



Xét trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ . Nếu  $G$  cũng được tô xanh thì tam giác  $ABC$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu  $G$  được tô đỏ. Trên tia  $GA$  ta lấy điểm  $A'$  sao cho  $GA' = 4GA$ ;  $B', C'$  được định nghĩa tương

tự. Khi đó ta có  $A, B, C, G$  tương ứng là trọng tâm các tam giác  $A'BC, AB'C, ABC', A'B'C'$ . Nếu tồn tại một trong ba điểm  $A', B', C'$  được tô xanh, giả sử  $A'$  tô xanh thì khi đó tam giác  $A'BC$  có ba đỉnh và trọng tâm cùng được tô xanh thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu cả ba điểm  $A', B', C'$  cùng được tô đỏ thì tam giác  $A'B'C'$  có ba đỉnh và trọng tâm  $G$  cùng tô đỏ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy bài toán đã được chứng minh.  $\square$

**Bài toán 3.** Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm cùng màu có khoảng cách bằng một.

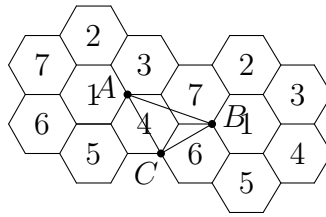
**LỜI GIẢI.** Xét hình thoi  $ABCD$  với các tam giác  $ABD, BCD$  là các tam giác đều. Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai điểm cùng màu.

Nếu hai điểm ấy cùng là đỉnh của một trong hai tam giác đều  $ABD$  hoặc  $BCD$  thì đó là hai điểm cần tìm. Nếu ngược lại thì  $A$  và  $C$  phải cùng màu.

Xét tập hợp các hình thoi như trên với  $A$  cố định. Nếu không có hình thoi nào thỏa mãn tồn tại ít nhất một cạnh của một trong hai tam giác đều  $ABD$  hoặc  $BCD$  có hai đầu cùng màu thì  $C$  phải cùng màu với  $A$ . Khi đó tất cả các điểm nằm trên đường tròn  $(A, \sqrt{3})$  được tô bởi cùng một màu. Do đó hai điểm bất kì trên đường tròn này có khoảng cách bằng một sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.  $\square$

**Bài toán 4.** Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong bảy màu. Hỏi có phải luôn tồn tại hai điểm cùng màu có khoảng cách bằng một hay không?

**LỜI GIẢI.** Ta sẽ đưa ra một ví dụ để chứng tỏ rằng mặt phẳng được tô bằng 7 màu nhưng không có hai điểm cùng màu bất kì có khoảng cách bằng 1. Ta chia mặt phẳng thành các lục giác đều bằng nhau với các cạnh bằng  $a$  và tô chúng như cách ở hình dưới đây (các điểm thuộc hai hay ba lục giác có thể tô bằng một màu bất kì trong số các màu tô các lục giác đó).



Khi đó khoảng cách lớn nhất giữa các điểm cùng màu nằm ở cùng một lục giác không quá  $2a$ , còn khoảng cách giữa các điểm cùng màu ở các lục giác khác nhau không nhỏ hơn độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

Ta có  $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 4a^2 + 3a^2 = 7a^2 > (2a)^2$ .

Do đó nếu ta chọn  $a$  sao cho  $2a < 1 < \sqrt{7}a$ , hay  $\frac{1}{\sqrt{7}} < a < \frac{1}{2}$  thì khoảng cách giữa các điểm cùng màu không thể bằng một.

Vậy không phải luôn tìm được hai điểm cùng màu có khoảng cách bằng 1.  $\square$

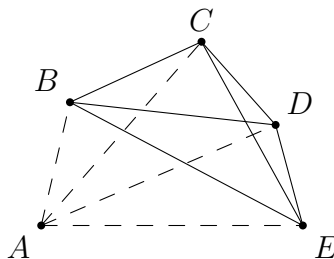
**Bài toán 5.** Mặt phẳng có kẻ ô được tô bằng 10 màu sao cho các ô cạnh nhau (có cạnh chung) được tô bởi các màu khác nhau, đồng thời tất cả 10 màu đều được sử dụng. Hai màu được gọi là cạnh nhau nếu ở đâu đó chúng được dùng để tô hai ô cạnh nhau. Hỏi số nhỏ nhất các cặp màu cạnh nhau có thể bằng bao nhiêu?

**LỜI GIẢI.** Xét một tuyến đường đi qua các ô của tất cả 10 màu và không đi qua một đỉnh nào của các ô. Trên một tờ giấy khác ta vẽ 10 điểm được tô bằng các màu đã cho, mỗi lần khi ta đi từ ô màu này sang ô màu khác, ta sẽ nối bằng một đoạn thẳng các điểm của các màu đó. Cuối cùng ta sẽ được một hình gồm  $n$  đỉnh (trong trường hợp này  $n = 10$ ) được nối bằng những đoạn thẳng, đồng thời theo các đoạn thẳng đó có thể đi từ một đỉnh bất kì sang một đỉnh bất kì khác. Bằng phương pháp quy nạp theo  $n$ , ta có thể chứng minh được hình như thế có không ít hơn  $n - 1$  đoạn thẳng. Vì mỗi đoạn thẳng tương ứng với một cặp các màu cạnh nhau, nên số các cặp các màu cạnh nhau không nhỏ hơn 9.

Ta lấy ví dụ một cách sơn với 9 cặp màu cạnh nhau có thể lập được như sau: Đầu tiên tô màu thứ nhất vào các ô thứ tự như bàn cờ. Sau đó ta sơn các ô chưa được tô màu bằng các màu còn lại theo một thứ tự bất kì sao cho tất cả các màu đều được sử dụng. Khi đó trong số hai ô cạnh nhau bất kì luôn có một ô được tô bằng màu thứ nhất.  $\square$

**Bài toán 6.** Cho 9 điểm trên mặt phẳng, trong đó bất cứ ba điểm nào cũng tạo thành một tam giác mà cạnh được tô màu xanh hoặc đỏ, nhưng luôn có cạnh đỏ. Chứng minh tồn tại một tứ giác có các cạnh và đường chéo được tô cùng màu đỏ.

**LỜI GIẢI.** Nếu tồn tại một điểm  $A$  nào đó sao cho từ điểm đó xuất phát ít nhất 4 đoạn thẳng màu xanh (giả sử là  $AB, AC, AD, AE$ ) thì bài toán được chứng minh (4 điểm  $B, C, D, E$ ) thoả mãn.



Nếu điểm nào trong 9 điểm cũng chỉ là đầu mút của nhiều nhất ba đoạn thẳng xanh, ta thấy rằng không thể xảy ra trường hợp cả 9 điểm đều là đầu mút của đúng ba đoạn thẳng xanh bởi khi ấy số đoạn thẳng xanh là  $\frac{9 \times 3}{2}$  không là số nguyên.

Như vậy tồn tại ít nhất một điểm sao cho nó là đầu mút của nhiều nhất hai đoạn thẳng xanh, đồng nghĩa với nó là đầu mút của ít nhất 6 đoạn thẳng đỏ.

Giả sử điểm đó là  $A$  và 6 đoạn thẳng đỏ là  $AB, AC, AD, AE, AF, AG$ .

Theo ví dụ 1, trong 6 điểm  $B, C, D, E, F, G$  tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu (giả sử là tam giác  $BCD$ ).

Theo bài ra thì tam giác nào cũng có cạnh màu đỏ nên tam giác  $BCD$  có ba cạnh cùng màu đỏ

Do đó 4 điểm  $A, B, C, D$  thoả mãn yêu cầu bài toán.  $\square$

**Bài toán 7.** Trên mặt phẳng cho 18 điểm, sao cho không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng. Nối từng cặp điểm và tô màu cho mọi đoạn thẳng thu được bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tìm được một tứ giác mà các đỉnh của nó nằm trong tập điểm đã cho sao cho cạnh và đường chéo của nó cùng màu.



LỜI GIẢI. Một điểm  $M$  sẽ được nối với 17 điểm còn lại tạo thành 17 đoạn thẳng, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 9 đoạn cùng màu, giả sử là màu xanh.

Xét 9 điểm khác  $M$  ở các đầu mút của các đoạn thẳng xanh kể từ  $M$ .

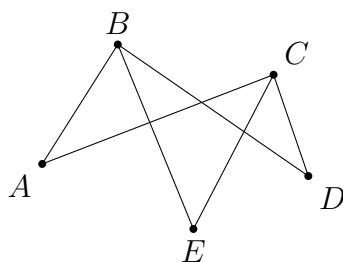
Nếu tồn tại tam giác  $ABC$  có ba cạnh cùng xanh thì 4 điểm  $M, A, B, C$  thoả mãn yêu cầu đề bài.

Nếu không tồn tại tam giác nào có ba cạnh cùng xanh, tức là tam giác nào có đỉnh là ba trong 9 điểm ấy cũng có ba cạnh đỏ

Theo bài toán 6, luôn tồn tại một tứ giác có 4 cạnh và hai đường chéo cùng màu đỏ.  $\square$

**Bài toán 8.** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$  trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Nối tất cả các cặp hai điểm trong năm điểm trên bởi một đoạn thẳng và tô chúng bởi một trong ba màu xanh, đỏ hoặc vàng. Chứng minh tồn tại một đường gấp khúc khép kín có bốn cạnh được tô bởi không quá hai màu.

LỜI GIẢI. Xét 4 đoạn thẳng  $AB, AC, AD, AE$ . Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai đoạn thẳng cùng màu. Giả sử hai đoạn  $AB, AC$  được tô bởi cùng một màu xanh.



Xét hai đoạn thẳng  $DB, DC$ . Nếu tồn tại một đoạn được tô xanh thì đường gấp khúc  $ABDCA$  có 4 cạnh được tô bởi không quá hai màu.

Xét hai đoạn thẳng  $EB, EC$ . Nếu tồn tại một đoạn được tô xanh thì đường gấp khúc  $ABECA$  có 4 cạnh được tô bởi không quá hai màu.

Nếu cả 4 đoạn thẳng  $DB, DC, EB, EC$  đều không được tô xanh thì đường gấp khúc  $BDCEB$  có 4 cạnh được tô bởi không quá hai màu.

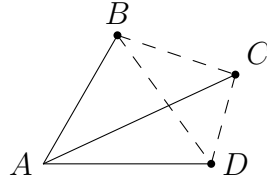
Vậy ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 9.** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$  trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Nối tất cả các cặp hai điểm trong năm điểm trên bởi một đoạn thẳng và tô chúng bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại một đường gấp khúc khép kín được tô bởi cùng một màu.

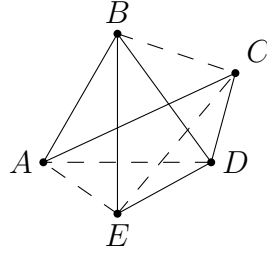
LỜI GIẢI. Nếu trong 5 điểm tồn tại một là đầu mút của ít nhất ba đoạn thẳng cùng màu (giả sử là điểm  $A$  và các đoạn thẳng  $AB, AC, AD$  cùng được tô xanh).

Khi đó nếu một trong các đoạn thẳng  $BC, BD, CD$  được tô xanh thì ta nhận được một đường gấp khúc có ba cạnh cùng màu (ví dụ  $BC$  được tô xanh thì đường gấp khúc  $ABC$  có ba cạnh cùng màu xanh)

Nếu cả ba đoạn thẳng  $BC, BD, CD$  đều được tô đỏ thì đường gấp khúc  $BCD$  thoả mãn yêu cầu bài toán.



Xét trường hợp từ mỗi điểm trong 5 điểm chỉ xuất phát đúng hai đoạn thẳng xanh, hai đoạn thẳng đỏ.



Xét điểm  $A$ . Ta giả sử  $AB, AC$  tô xanh;  $AD, AE$  tô đỏ. Không mất tính tổng quát, giả sử  $CD$  tô xanh.

Từ  $C$  xuất phát đúng hai đoạn thẳng xanh (là  $CA, CD$ ) nên  $CB, CE$  phải tô đỏ.

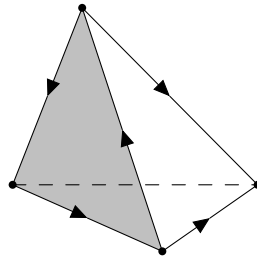
Từ  $E$  xuất phát đúng hai đoạn thẳng đỏ (là  $EA, EC$ ) nên  $EB, ED$  phải tô xanh.

Do đó đường gấp khúc  $ABEDCA$  có 5 cạnh cùng tô xanh thoả mãn yêu cầu bài toán.

Từ các trường hợp đã xét trên, ta suy ra điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 10.** Một đa diện lồi trong không gian có tất cả các mặt đều là hình tam giác. Với mỗi cạnh  $AB$  của đa diện ta vẽ một mũi tên có chiều từ  $A$  đến  $B$  hoặc từ  $B$  đến  $A$  sao cho ở mỗi đỉnh bất kì đều có ít nhất một mũi tên đi vào và một mũi tên đi ra. Chứng minh rằng tồn tại một mặt  $ABC$  của đa diện có các mũi tên trên các cạnh được đánh dấu cùng chiều.

**LỜI GIẢI.** Ở bài toán này chúng ta sẽ đưa ra một khái niệm mới đó là *góc cùng màu*. Ta định nghĩa góc  $\widehat{ABC}$  được gọi là *góc cùng màu* khi và chỉ khi  $AB$  và  $AC$  được đánh dấu mũi tên theo cách có một mũi tên đi vào  $B$  và một mũi tên đi ra từ  $B$ .



Giả sử tồn tại một cách vẽ mũi tên mà không tồn tại mặt nào của đa diện có các mũi tên trên các cạnh được đánh dấu cùng chiều. Gọi  $D, M, C$  lần lượt là số đỉnh, số mặt và số cạnh của đa diện. Theo hệ thức Euler ta có

$$D + M - C = 2 \quad (1)$$

Theo giả sử phản chứng ta thấy rằng do không tồn tại mặt nào của đa diện có các mũi tên trên các cạnh được đánh dấu cùng chiều, mà các mặt của đa diện đều là hình tam giác nên

mỗi mặt của đa diện đó chỉ có đúng một góc cùng màu. Do đó có tổng cộng  $M$  góc cùng màu. Mặt khác xét một đỉnh bất kì của đa diện. Giả sử tại đỉnh đó có  $x$  mũi tên đi ra và  $y$  mũi tên đi vào và  $x \geq y$ . Theo bài ra thì  $x \geq 1$  và  $y \geq 1$ . Số góc cùng màu tại đỉnh này là  $xy$ . Ta lại có một điều nữa là  $xy - (x+1)(y-1) = x - y + 1 \geq 0$ . Do đó tại một đỉnh bậc  $n$  (tức là có  $n$  cạnh có đầu mút là đỉnh này) thì có ít nhất  $n-1$  góc cùng màu. Do đó số góc cùng màu không bé hơn  $2C - D$ .

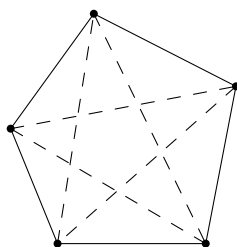
Từ đây ta suy ra bất đẳng thức

$$M \geq 2C - D \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $D + m \geq 2C$  hay  $2 \geq C$ . Điều này không thể xảy ra đối với đa diện lồi nên bất đẳng thức sai, dẫn tới giả sử sai và ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 11** (IMO 1992). Trong không gian cho 9 điểm sao cho không có bất cứ hệ 4 điểm nào đồng phẳng. Cứ hai điểm thì được nối với nhau bằng một đoạn thẳng và được tô bởi chỉ một trong hai màu xanh hoặc đỏ, hoặc không tô gì cả. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $n$  sao cho để có đúng  $n$  đoạn thẳng được tô màu thì tập hợp các cạnh được tô đó phải chứa một tam giác có ba cạnh cùng màu.

**LỜI GIẢI.** Với hệ gồm 5 điểm bất kì và cả 10 cạnh đều được tô màu xanh hoặc đỏ thì kết quả bài toán không đúng. Cách tô màu như dưới đây sẽ chỉ ra điều đó (đoạn thẳng được tô bằng nét đứt tượng trưng cho đoạn thẳng nối hai điểm mà không tô màu)

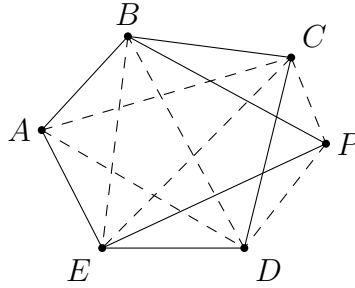


Với hệ gồm 6 điểm bất kì mà cả 15 cạnh đều được tô màu xanh hoặc đỏ thì sẽ luôn tồn tại một tam giác mà có ba cạnh cùng màu. (đã chứng minh ở ví dụ 1)

Xét đến hệ 9 điểm. Nếu chỉ có ba cạnh không được tô màu thì số cạnh được tô màu là  $36 - 3 = 33$ , do đó luôn tồn tại một hệ 6 điểm trong 9 điểm ấy mà tất cả 15 cạnh đều được tô màu. Theo như chứng minh trên thì hệ 6 điểm ấy sẽ chứa một tam giác có ba cạnh cùng màu. Như vậy với  $n = 33$  thì sẽ luôn đảm bảo có được một tam giác có ba cạnh cùng màu.

Với  $n = 32$ . Ta sẽ chỉ ra một trường hợp tô màu mà không tồn tại tam giác có ba cạnh cùng màu.

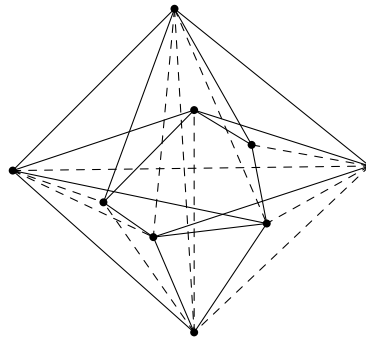
Xuất phát từ 5 điểm  $A, B, C, D, E$ , ta thêm điểm  $P$  rồi nối với  $B, C, D, E$  và tô màu các cạnh  $PB, PC, PD, PE$  sao cho chúng tương ứng cùng màu với  $AB, AC, AD, AE$ . Khi đó ta được hệ 6 điểm, 14 cạnh có màu nhưng không có tam giác nào có ba cạnh cùng màu.



Ta thêm điểm  $Q$  rồi nối với  $P, A, C, D, E$  và tô màu các cạnh  $QP, QA, QC, QD, QE$  sao cho chúng tương ứng cùng màu với  $BP, BA, BC, BD, BE$ . Khi đó ta được hệ 7 điểm, 19 cạnh có màu nhưng không có tam giác nào có ba cạnh cùng màu.

Sau đó ta thêm điểm  $R$  rồi nối với  $P, Q, A, B, D, E$  và tô màu các cạnh  $RP, RQ, RA, RB, RD, RE$  sao cho chúng tương ứng cùng màu với  $CP, CQ, CA, CB, CD, CE$ . Khi đó ta được hệ 8 điểm, 25 cạnh có màu nhưng không có tam giác nào có ba cạnh cùng màu.

Cuối cùng ta thêm điểm  $S$  rồi nối với  $P, Q, R, A, B, C, E$  và tô màu các cạnh  $SP, SQ, SR, SA, SB, SC, SE$  sao cho chúng tương ứng cùng màu với  $DP, DQ, DR, DA, DB, DC, DE$ . Khi đó ta được hệ 9 điểm, 32 cạnh có màu nhưng không có tam giác nào có ba cạnh cùng màu.



Vậy  $n = 33$  là số nhỏ nhất thoả mãn yêu cầu bài toán. □

**Bài toán 12.** Cho  $n$  điểm ( $n \geq 3$ ) trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Hai điểm bất kì được nối với nhau bằng một đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng được tô bởi một màu xanh, đỏ hoặc vàng. Biết rằng: có ít nhất một đoạn thẳng màu xanh, một đoạn thẳng màu đỏ, một đoạn thẳng màu vàng, không có điểm nào mà các đoạn thẳng xuất phát từ đó có đủ cả ba màu và không có tam giác nào tạo bởi các đoạn thẳng đã nối có ba cạnh cùng màu.

(a) Chứng minh rằng không tồn tại ba đoạn thẳng cùng màu xuất phát từ cùng một điểm.

(b) Hãy cho biết có nhiều nhất bao nhiêu điểm thoả mãn yêu cầu bài toán.

**LỜI GIẢI.** (a) Giả sử tồn tại điểm  $A$  mà từ đó có ba đoạn thẳng  $AB, AC, AD$  cùng được tô xanh.

Vì không có tam giác nào có ba cạnh cùng màu nên tam giác  $BCD$  có ba cạnh được tô bởi đúng hai màu đỏ và vàng. Do đó chắc chắn tồn tại một điểm trong ba điểm  $B, C, D$  mà từ đó xuất phát ba đoạn thẳng có đủ cả ba màu (ví dụ tam giác  $BCD$  có cạnh  $BC, BD$  tô đỏ và  $CD$  tô vàng, như thế thì từ điểm  $C$  ta có  $CA$  tô xanh;  $CB$  tô đỏ và  $CD$  tô vàng), điều này trái với

giả thiết “không có điểm nào mà các đoạn thẳng xuất phát từ đó có đủ cả ba màu”, suy ra giả sử sai và ta có điều cần chứng minh.

(b) Từ bài ra kết hợp với chứng minh câu (a), ta có các đoạn thẳng xuất phát từ một điểm có không quá hai màu và có không quá hai đoạn thẳng cùng màu. Như vậy từ một điểm xuất phát không quá  $2 \cdot 2 = 4$  đoạn thẳng, tức là  $n \leq 5$ .

- Với  $n = 5$ . Giả sử 5 điểm  $A, B, C, D, E$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. Theo lập luận trên, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử từ điểm  $A$  xuất phát hai đoạn thẳng xanh  $AB, AC$  và hai đoạn thẳng đỏ  $AD, AE$ .

Do không có tam giác nào có ba cạnh cùng màu nên  $BC$  tô đỏ hoặc vàng.

- Nếu  $BC$  tô đỏ, suy ra  $BD$  và  $BE$  không thể tô vàng, và cũng không thể cùng tô xanh hoặc cùng tô đỏ, như vậy có một đoạn tô đỏ, một đoạn tô xanh.

Vai trò  $D, E$  như nhau nên ta có thể giả sử  $BD$  tô đỏ và  $BE$  tô xanh.

Chứng minh tương tự như thế ta có các đoạn  $CD, CE, DE$  chỉ có thể tô bởi hai màu xanh hoặc đỏ, như vậy tức là không có đoạn thẳng nào tô vàng (Trái với giả thiết có ít nhất một đoạn thẳng màu vàng)

- Nếu  $BC$  tô vàng, suy ra  $BD$  và  $BE$  không thể tô đỏ, và cũng không thể cùng tô xanh hoặc cùng tô vàng, như vậy có một đoạn tô xanh, một đoạn tô vàng.

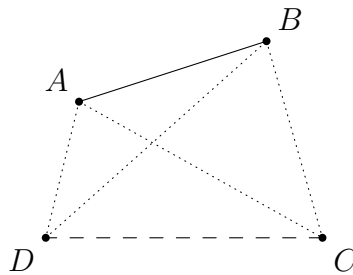
Vai trò  $D, E$  như nhau nên ta có thể giả sử  $BD$  tô vàng và  $BE$  tô xanh.

Xét điểm  $D$ . Ta có  $DA$  tô đỏ và  $DB$  tô vàng, do đó  $DC$  phải tô đỏ hoặc vàng. Nhưng vì  $BD$  và  $BC$  đã tô vàng nên  $DC$  phải tô đỏ  $\Rightarrow DE$  tô vàng.

Xét điểm  $E$  ta có  $EA$  tô đỏ,  $ED$  tô vàng,  $EB$  tô xanh (mâu thuẫn với kết quả câu (a))

Tóm lại  $n$  không thể bằng 5.

- Với  $n = 4$ , ta chỉ ra một hệ điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán như hình vẽ dưới đây



Vậy số điểm lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là 4. □

**Bài toán 13.** Cho hình chóp có đáy là đa giác 9 cạnh. 27 đường chéo của mặt đáy và 9 cạnh bên của hình chóp được tô bởi hai màu xanh, đỏ. Chứng minh bao giờ cũng tìm ra được một tam giác có ba cạnh cùng màu.

**LỜI GIẢI.** Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 5 cạnh bên của hình chóp được tô cùng màu. Giả sử là màu đỏ.

Xét ngũ giác  $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5$  với  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5$  có 5 đỉnh là đỉnh của đa giác 9 đỉnh  $A_1A_2 \dots A_9$  và tương ứng là 5 đầu mút khác  $S$  của 5 đoạn thẳng đỏ đó (điểm  $A'$  nào của ngũ giác có chỉ số lớn hơn thì tương ứng trùng với đỉnh  $A$  của đa giác 9 đỉnh có chỉ số lớn hơn)

Nếu tồn tại một đoạn thẳng nối hai trong 5 điểm  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5$  tô màu đỏ thì bài toán được chứng minh (giả sử  $A'_1A'_3$  tô đỏ thì tam giác  $SA'_1A'_3$  có 3 cạnh đỏ)

Nếu điều này không xảy ra, tức là tất cả các đoạn thẳng nối hai trong 5 điểm  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5$  phải được tô màu xanh.

Ta thấy rằng tất cả các đường chéo của ngũ giác  $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5$  đều được tô màu và luôn tồn tại ít nhất một cạnh của ngũ giác được tô màu (bởi vì không xảy ra trường hợp cả 5 cạnh của ngũ giác  $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5$  đều là cạnh của đa giác 9 đỉnh  $A_1A_2 \dots A_9$ ). Khi đó tam giác có ba đỉnh mà hai trong số đó là đầu mút của cạnh ngũ giác  $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5$  được tô màu, đỉnh còn lại là đỉnh đối diện với cạnh đó, là tam giác cần tìm. Bài toán được chứng minh.  $\square$

**Bài toán 14** (IMO 1979). Cho hình lăng trụ có đáy trên và đáy dưới là hai ngũ giác  $A_1A_2A_3A_4A_5$  và  $B_1B_2B_3B_4B_5$ . Mỗi cạnh của hai ngũ giác cũng như các đoạn thẳng  $A_iB_j$  ( $i, j = \overline{1, 5}$ ) đều được tô bởi chỉ một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Biết rằng bất kì tam giác nào có ba đỉnh là đỉnh của lăng trụ mà cả ba cạnh đều được tô màu thì luôn tồn tại hai cạnh có màu khác nhau. Chứng minh tất cả 10 cạnh của hai ngũ giác này (ở đáy trên và đáy dưới) có cùng một màu.

**LỜI GIẢI.** Trước tiên ta chứng minh rằng tất cả 5 cạnh của ngũ giác  $A_1A_2A_3A_4A_5$  đều có cùng màu.

Thật vậy, giả sử điều ngược lại xảy ra, tức là tồn tại hai cạnh kề nhau của ngũ giác  $A_1A_2A_3A_4A_5$  khác màu. Giả sử cạnh  $A_1A_2$  tô xanh và  $A_1A_5$  tô đỏ. Xét 5 đoạn thẳng  $A_1B_i$  với  $i = \overline{1, 5}$ . Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ba trong 5 đoạn thẳng ấy cùng màu, không mất tính tổng quát có thể giả sử ba đoạn thẳng này màu xanh, và ba cạnh đó là  $A_1B_k, A_1B_m, A_1B_n$ . Lúc này ta xét các tam giác  $A_1A_2B_k, A_1A_2B_m, A_1A_2B_n$ , ta có ba cạnh  $A_2B_k, A_2B_m, A_2B_n$  cùng màu đỏ. Mặt khác hai trong ba đỉnh  $B_k, B_m, B_n$  là hai đỉnh kề nhau của ngũ giác  $B_1B_2B_3B_4B_5$  nên chúng được tô xanh hoặc đỏ, giả sử hai đỉnh đó là  $B_k, B_m$ . Từ đây ta thấy:

- Nếu  $B_kB_m$  tô xanh thì tam giác  $A_1B_kB_m$  có ba cạnh tô xanh.
- Nếu  $B_kB_m$  tô đỏ thì tam giác  $A_2B_kB_m$  có ba cạnh tô đỏ.

Từ đây suy ra điều mâu thuẫn nên giả sử sai. Như vậy 5 cạnh của ngũ giác  $A_1A_2A_3A_4A_5$  có cùng màu.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được 5 cạnh của ngũ giác  $B_1B_2B_3B_4B_5$  tô cùng màu.

Bây giờ chỉ cần chứng minh màu các cạnh của hai ngũ giác giống nhau thì bài toán kết thúc.

Giả sử ngược lại, chẳng hạn 5 cạnh của ngũ giác  $A_1A_2A_3A_4A_5$  màu xanh, còn của ngũ giác  $B_1B_2B_3B_4B_5$  màu đỏ. Chứng minh tương tự như trên ta có ba trong 5 cạnh  $A_1B_i$  với  $i = \overline{1, 5}$  có cùng màu và hai trong ba đỉnh  $B_i$  là hai đỉnh kề nhau, từ đó ta có hai đỉnh này tạo với  $A_1$  thành tam giác có ba cạnh đỏ (mâu thuẫn). Như vậy ba trong 5 cạnh  $A_1B_i$  với  $i = \overline{1, 5}$  có cùng màu xanh.

Lập luận tương tự ta có ba trong 5 cạnh  $A_2B_i$  với  $i = \overline{1, 5}$  có cùng màu xanh.

Trong số ba cạnh  $A_1B_i$  (tập hợp một) và ba cạnh  $A_2B_i$  (tập hợp hai) vừa chỉ ra ở trên, chắc chắn có  $B_k$  nào đó cùng ở tập một và tập hai. Khi đó tam giác  $A_1A_2B_k$  có ba cạnh màu xanh (mâu thuẫn), do đó giả sử sai.

Tóm lại ta đã có điều cần chứng minh.  $\square$

**Bài toán 15.** Tô màu các đỉnh của đa giác đều 12 cạnh bằng hai màu khác nhau. Hãy tìm tất cả các cách tô màu sao cho không có đa giác đều nào có các đỉnh cùng màu.

**LỜI GIẢI.** Ta gọi một đa giác có các đỉnh cùng màu là đa giác cùng màu.

Trong đa giác đều 12 cạnh  $A_1A_2 \dots A_{12}$  có 4 tam giác đều ( $A_1A_5A_9, A_2A_6A_{10}, A_3A_7A_{11}, A_4A_8A_{12}$ ), 3 hình vuông ( $A_1A_4A_7A_{10}, A_2A_5A_8A_{11}, A_3A_6A_9A_{12}$ ) và hai lục giác đều. Nếu các đỉnh của lục giác đều cùng màu thì sẽ có hai tam giác đều có các đỉnh cùng màu. Do vậy ta chỉ cần quan tâm đến số cách tô màu các đỉnh của các tam giác đều và các hình vuông đã liệt kê trên.

Với mỗi tam giác đều, số cách tô màu để không có ba đỉnh cùng màu là  $2^3 - 2 = 6$  cách, do đó có tất cả  $6^4 = 1296$  cách tô màu sao cho không có tam giác đều cùng màu.

Trong 1296 cách tô này có những cách tô không thỏa mãn yêu cầu bài toán vì tồn tại hình vuông cùng màu. Bây giờ ta sẽ đếm số cách tô màu sao cho tồn tại ít nhất một hình vuông cùng màu.

Để có một hình vuông cùng màu ta có  $2 \cdot 3^4 = 162$  cách vì chẳng hạn nếu một hình vuông có cùng màu đỏ, đồng nghĩa với việc mỗi tam giác đều chắc chắn có một đỉnh màu đỏ thì hai đỉnh còn lại của mỗi tam giác không cùng màu chỉ có thể nhận một trong ba trạng thái màu là : xanh - đỏ, đỏ - xanh, xanh - xanh.

Để có hai hình vuông cùng màu (các đỉnh của hai hình vuông này có thể có cùng màu hoặc 4 đỉnh hình vuông này khác màu 4 đỉnh hình vuông kia) ta có số các cách tô là:  $2 + 2 \cdot 2^4 = 34$  cách.

Để có ba hình vuông cùng màu (lưu ý chỉ cần xét trường hợp mỗi hình vuông có 4 đỉnh cùng màu nhưng cả 12 đỉnh của ba hình vuông không cùng màu), có tất cả 6 cách.

Do vậy số các cách tô màu để không có đa giác đều nào cùng màu là

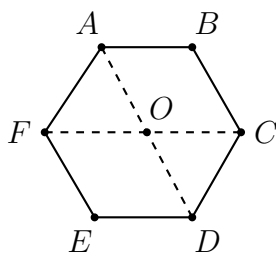
$$1296 - (3 \cdot 162 - (3 \cdot 34 - 6)) = 906 \text{ (cách)}$$

$\square$

**Bài toán 16.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$ , trong đó đỉnh  $A$  được tô đỏ, các đỉnh còn lại được tô xanh. Đổi màu các đỉnh của lục giác theo quy tắc mỗi lần đổi màu đồng thời ba đỉnh liên tiếp (xanh thành đỏ, đỏ thành xanh). Hỏi sau một số hữu hạn lần đổi màu như vậy có thể đạt được kết quả là đỉnh  $B$  tô đỏ còn các đỉnh còn lại tô xanh hay không?

**LỜI GIẢI.** Câu trả lời là không.

Thật vậy. Xét hai cặp đỉnh đối xứng nhau qua tâm  $O$  của lục giác là  $(A, D)$  và  $(C, F)$ . Khi ta đổi màu ba đỉnh liên tiếp của lục giác thì không bao giờ xảy ra trường hợp cả hai điểm trong một cặp nói trên đều đổi màu.



Ban đầu điểm  $A$  tô đỏ, điểm  $D$  tô xanh nên muốn chúng cùng màu xanh thì cần một số lẻ lần đổi màu.

Trong khi đó, ban đầu điểm  $C$  tô xanh, điểm  $F$  tô xanh nên muốn chúng vẫn cùng màu xanh thì cần một số chẵn lần đổi màu.

Hai điều trên mâu thuẫn nhau nên không xảy ra trường hợp  $B$  tô đỏ, các đỉnh còn lại tô xanh sau một số hữu hạn lần đổi màu.  $\square$

**Nhận xét :** Bài toán sử dụng phương pháp phản chứng bằng cách chỉ ra sau một số  $m$  lần đổi màu, nếu xét một cặp đỉnh này thì  $m$  là số chẵn, xét một cặp đỉnh khác thì  $m$  là số lẻ. Đối với bài toán tổng quát hơn cho  $2n$  giác đều ( $n \in \mathbb{N}; n \geq 3$ ) thì ta cũng có lời giải tương tự như trên.

Bằng phương pháp tương tự, ta giải quyết được hai bài toán sau :

**Bài toán 17.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$ , trong đó đỉnh  $A$  và  $D$  được tô đỏ, các đỉnh còn lại được tô xanh. Đổi màu các đỉnh của lục giác theo quy tắc mỗi lần đổi màu đồng thời ba đỉnh của một tam giác cân có đỉnh là đỉnh lục giác (xanh thành đỏ; đỏ thành xanh). Hỏi sau một số hữu hạn lần đổi màu như vậy có thể đạt được kết quả là đỉnh  $B$  tô đỏ còn các đỉnh còn lại tô xanh hay không?

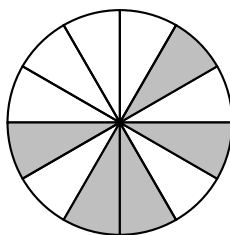
**Bài toán 18.** Có 41 học sinh của hai lớp Toán và Văn xếp thành một hàng dọc. Biết rằng số học sinh mà người đứng liền trên là bạn cùng lớp bằng số học sinh mà người đứng liền trên là bạn khác lớp. Người đứng đầu là học sinh lớp Toán. Hỏi người đứng cuối cùng là học sinh lớp nào? Nếu có 43 học sinh thì người đứng cuối là học sinh lớp nào?

Tổng quát bài toán : Nếu có  $4k + 1$  học sinh thì học sinh đứng đầu và học sinh đứng cuối cùng lớp. Nếu có  $4k + 3$  học sinh thì học sinh đứng đầu và học sinh đứng cuối khác lớp.

**Bài toán 19.** Cho hai đĩa hình tròn bằng nhau, mỗi đĩa được chia thành 12 hình quạt bằng nhau và tô màu đỏ 5 hình quạt một cách tùy ý. Đặt đĩa thứ hai lên trên đĩa thứ nhất sao cho các hình quạt ở hai đĩa trùng nhau. Lần lượt quay đĩa thứ hai quanh tâm của nó một góc  $30^\circ$  theo chiều kim đồng hồ, ta có tất cả 12 vị trí. Chứng minh rằng trong 12 vị trí đó, số vị trí có từ ba cặp hình quạt đỏ trùng nhau trở lên không quá 8.

**LỜI GIẢI.** Mỗi hình quạt được tô màu đỏ ở đĩa thứ nhất sẽ lần lượt trùng với 5 hình quạt đỏ ở đĩa thứ hai. Như vậy số cặp hình quạt đỏ trùng nhau trong 12 vị trí là  $5 \cdot 5 = 25$ .





Gọi  $a$  là số vị trí có từ ba cặp hình quạt đỏ trùng nhau trở lên và  $n$  là số cặp hình quạt đỏ trùng nhau trong  $a$  vị trí đó

Ta có  $3a \leq n$  và  $n \leq 25$ . Suy ra  $3a \leq 25$  hay  $a \leq 8$ . □

**Bài toán 20.** Cho hai đĩa hình tròn bằng nhau, mỗi đĩa được chia thành 2000 hình quạt bằng nhau và tô màu đỏ 200 hình quạt một cách tùy ý. Đặt đĩa thứ hai lên trên đĩa thứ nhất sao cho các hình quạt ở hai đĩa trùng nhau. Lần lượt quay đĩa thứ hai quanh tâm của nó một góc  $\frac{360^\circ}{2000}$  theo chiều kim đồng hồ, ta có tất cả 2000 vị trí. Chứng minh rằng trong 2000 vị trí đó, có ít nhất 96 vị trí có không quá 20 cặp hình quạt đỏ trùng nhau.

**LỜI GIẢI.** Gọi  $m$  là số vị trí có không quá 20 cặp hình quạt đỏ trùng nhau trở lên và  $n$  là số vị trí có từ 21 cặp hình quạt đỏ trùng nhau trở lên. Khi đó  $m + n = 2000$ .

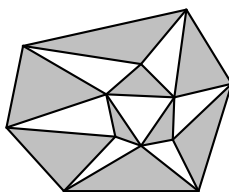
Tương tự bài toán trên, ta có  $21n \leq 40000$ . Vì  $n$  là số tự nhiên nên  $n \leq 1904$ .

Do đó  $m \geq 2000 - 1904 = 96$ . □

**Bài toán 21.** Cho một lục giác lồi. Chứng minh có thể chia lục giác đó thành các tam giác con và tô hai màu đen trắng sao cho hoặc có cạnh chung (khi đó chúng được tô bởi hai màu khác nhau), hoặc có chung đỉnh, hoặc không có điểm chung. Ngoài ra mỗi cạnh của lục giác là cạnh của một tam giác màu đen.

Nếu thay lục giác lồi bằng đa giác có 8 cạnh, 10 cạnh thì bài toán còn đúng hay không?

**LỜI GIẢI.** Hình vẽ dưới đây sẽ chỉ ra một cách tô thỏa mãn yêu cầu bài toán khi đa giác có 6 cạnh.



Ta sẽ chứng minh nếu đa giác có  $k$  cạnh mà  $k$  không là bội của ba thì bài toán không còn đúng. Thật vậy. Gọi số tam giác trắng là  $n$ . Ta có số cạnh tam giác trắng là  $3n$ .

Mỗi cạnh của một tam giác trắng sẽ là cạnh của duy nhất một tam giác đen, mặt khác ta có mỗi cạnh của đa giác là cạnh của một tam giác đen, do đó số tam giác đen là  $\frac{3n+k}{3}$ .

Vì  $k$  không là bội của 3 nên  $\frac{3n+k}{3}$  không là số nguyên (vô lí)

Từ đây ta suy ra nếu đa giác có 8 hay 10 cạnh thì bài toán không còn đúng. □

**Bài toán 22.** Trong mặt phẳng cho bát giác lồi  $A_1A_2 \dots A_8$  mà không có ba đường chéo nào của nó đồng quy tại một điểm (khác đỉnh đa giác). Ta gọi mỗi giao điểm của hai đường chéo của bát giác là một “nút”.

Xét các tứ giác lồi mà mỗi tứ giác đều có cả 4 đỉnh là đỉnh của bát giác. Ta gọi mỗi tứ giác như vậy là “tứ giác con”.

Hãy tìm số nguyên dương  $n$  nhỏ nhất có tính chất: Có thể tô màu  $n$  nút sao cho với mọi  $i, k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$  và  $i$  khác  $k$ , nếu kí hiệu  $S(i, k)$  là số tứ giác con nhận  $A_i, A_k$  làm đỉnh và đồng thời có giao điểm hai đường chéo là một nút đã được tô màu thì tất cả các giá trị  $S(i, k)$  đều bằng nhau.

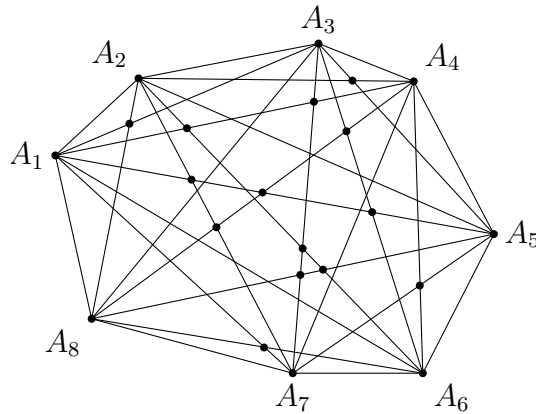
LỜI GIẢI. Giả sử có một phương án tô màu thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đặt  $S(i, j) = k$  với  $k$  là số nguyên dương. Ta thấy rằng một điểm được tô màu chung cho 6 cặp điểm phân biệt  $(A_i, A_j)$  mà  $A_i, A_j$  là đỉnh của tứ giác có giao điểm của các đường chéo được tô màu đó.

Số cặp  $(A_i, A_j)$  là  $C_8^2 = 28$  nên số cặp điểm được tô màu là  $n = \frac{28k}{6} = \frac{14k}{3}$ .

Do  $n$  nguyên dương và  $n \geq C_8^4 = 70$  nên  $k$  chia hết cho ba, do đó  $n \leq 14$ .

Ta sẽ chỉ ra một phương án tô màu với  $n = 14$  tương ứng với  $k = 3$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trên hình dưới đây các điểm tô màu được đánh dấu chấm.

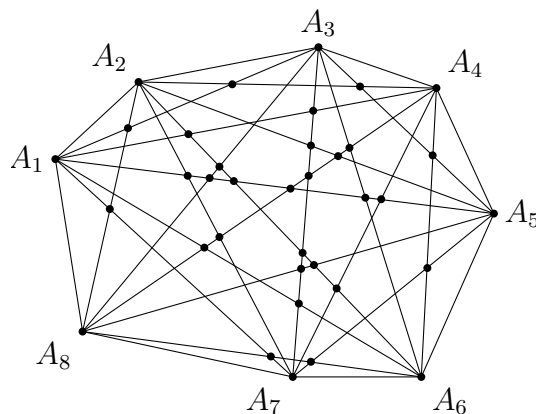


Vậy  $n$  nhỏ nhất bằng 14. □

Một câu hỏi nữa được đặt ra là : Với những giá trị nào của  $n$  ta có thể tô  $n$  trong số 70 giao điểm của các đường chéo của các tứ giác lồi con có được thỏa mãn điều kiện bài toán?

Từ công thức  $n = \frac{14k}{3}$  suy ra  $n$  là bội của 14 và  $k \in \{3; 6; 9; 12; 15\}$ . Hơn nữa ta thấy rằng nếu có một phương án tô màu  $n$  điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán thì cũng có một phương án tô màu  $(70 - n)$  điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng cách đổi lại cách gọi điểm “tô màu” thành các điểm “không tô màu” và ngược lại. Như vậy ứng với một cách tô màu  $n = 14$  ( $k = 3$ ) sẽ có cách tô màu  $n = 56$  ( $k = 12$ ) điểm.

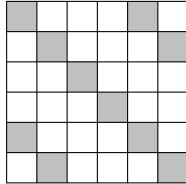
Với  $n = 28$  ( $k = 6$ ) ta chỉ ra cách tô màu thỏa mãn yêu cầu bài toán như hình dưới đây :



Như vậy thì với  $n = 70 - 28 = 42$  ( $k = 9$ ) sẽ có phương án tô màu tương ứng thoả mãn. Cuối cùng hiển nhiên với  $n = 70$  ( $k = 15$ ) có phương án tô màu tất cả 70 điểm thoả mãn. Do đó với mọi số nguyên dương  $n, n \geq 70, n$  là bội của 14 thì đều có phương án tô màu thoả mãn yêu cầu bài toán.

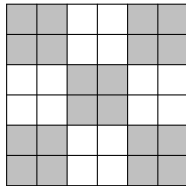
**Bài toán 23.** Cho một bàn cờ hình vuông kích thước  $6 \times 6$ . Có thể dùng 9 mảnh gỗ hình chữ nhật kích thước  $1 \times 4$  ghép kín bàn cờ được hay không?

LỜI GIẢI. (i) *Cách 1.* Tô màu bàn cờ như hình vẽ.



Khi đặt lên bàn cờ mỗi mảnh gỗ che lấp một ô đen và ba ô trắng, do đó 9 mảnh gỗ che lấp 9 ô đen. Nhưng trên bàn cờ có 10 ô đen nên không thể dùng 9 mảnh gỗ  $1 \times 4$  để lấp kín bàn cờ.

(ii) *Cách 2.* Tô màu bàn cờ như hình dưới.



Khi đặt lên bàn cờ, mỗi mảnh gỗ  $1 \times 4$  che lấp hai ô đen và hai ô trắng. Do đó 9 mảnh gỗ che lấp 18 ô đen. Nhưng bàn cờ có 20 ô đen nên không thể dùng 9 mảnh gỗ  $1 \times 4$  để che lấp bằng được.  $\square$

**Bài toán 24.** Trên giấy kẻ ô vuông có thể tô màu 8 ô sao cho mỗi ô được tô đều có một số lẻ các ô bên cạnh được tô hay không? (hai ô cạnh nhau là hai ô có một cạnh chung). Cũng hỏi như trên nếu số ô là 9

LỜI GIẢI. Nếu số ô là 8, ta tô màu như hình dưới đây



Như vậy nếu số ô là 8 thì ta có cách tô thoả mãn. Ta sẽ chứng minh rằng nếu số ô phải tô là 9 thì không tồn tại cách tô thoả mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử có 9 ô được tô trong đó gồm  $x$  ô có một ô bên cạnh được tô màu,  $y$  ô có ba ô bên cạnh được tô màu. Ta có  $x + y = 9$ .

Gọi  $m$  là số cạnh chung của các ô được tô, do mỗi cạnh là chung của hai ô nên  $m = \frac{x+3y}{2}$ .

Ta có  $m = \frac{x+y}{2} + y$ . Suy ra  $x + y$  chẵn. Điều này mâu thuẫn với  $x + y = 9$ .

Vậy không thể tô màu 9 ô để thoả mãn bài toán.  $\square$

**Bài toán 25.** Cho  $n$  đường thẳng trên mặt phẳng. Chúng chia mặt phẳng ấy thành các miền. Chứng minh rằng có thể tô màu các miền ấy bằng hai màu trắng, đen sao cho hai miền kề nhau được tô bởi hai màu khác nhau.

**LỜI GIẢI.** Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp toán học.

Ta thấy với  $n = 1$ , mặt phẳng được chia thành hai miền và hiển nhiên ta có cách tô màu thoả mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử bài toán đúng đến  $n = k$ . Kẻ thêm đường thẳng thứ  $k + 1$ , đường thẳng này chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng I và II. Đối với các phần ở nửa mặt phẳng I, ta giữ nguyên như cũ. Còn đối với các phần ở nửa mặt phẳng II, ta đổi màu đen thành trắng, trắng thành đen. Mặt phẳng được chia ra thành các miền mà hai miền kề nhau có màu khác nhau.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có điều cần chứng minh. □

**Nhận xét :** Bài toán vẫn đúng nếu ta thay  $n$  đường thẳng bằng  $n$  đường bất kì, trong đó có cả đường tròn. Lời giải hoàn toàn tương tự.

# CỰC TRỊ VÀ BẤT ĐẲNG THỨC RỜI RẠC

Nguyễn Hiền Trang<sup>1</sup>

Toán rời rạc là loại toán ít đòi hỏi tính toán mà đòi hỏi sự thông minh và tư duy logic. Cực trị rời rạc là một bộ phận của toán rời rạc, yêu cầu tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một đại lượng rời rạc. Phương pháp giải dạng toán này là dự đoán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức  $f(x)$  đạt tại giá trị nào của  $x$  nào đó và chứng minh được dự đoán đó. Trong phương pháp này ta thường sử dụng kiến thức của số học, tổ hợp, toán rời rạc, việc dự đoán thường được tiến hành vào một số tính toán ban đầu.

## 1. Cực trị trong dãy số nguyên

Hạn chế các biến trên tập  $\mathbb{R}^+$  thành tập  $\mathbb{N}^*$  của một số bất đẳng thức ta sẽ được bất đẳng thức dạng này. Những bất đẳng thức này nếu nhìn được bài toán ban đầu sẽ khá dễ dàng trong việc chứng minh. Ta xét một số ví dụ sau :

**Ví dụ 1.** Cho  $a, b$  là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{a+b}{1+(a^a b^b)^{\frac{1}{a+b}}}$$

LỜI GIẢI. Nhận thấy  $a^a b^b = a \times a \times \cdots \times a \times b \times b \times \cdots \times b$  ( $a$  thừa số  $a$ ,  $b$  thừa số  $b$ ).

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+1} &= \underbrace{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} + \cdots + \frac{1}{a+1}}_{a \text{ số hạng}} \\ \frac{b}{b+1} &= \underbrace{\frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+1} + \cdots + \frac{1}{b+1}}_{b \text{ số hạng}} \end{aligned}$$

Như vậy ta nghĩ đến một bất đẳng thức với  $n$  biến, áp dụng cho  $a$  lần  $a$  và  $b$  lần  $b$ .

**Bổ đề.** Với  $x_i \geq 1, i = \overline{1, n}$  ta có:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \geq \frac{n}{1+\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}} \quad (1)$$

CHỨNG MINH. Để chứng minh được bất đẳng thức sau với  $a, b \geq 1$  :

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

---

<sup>1</sup>K39, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An.

Do đó với  $a, b \geq 1$  thì

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

Theo bất đẳng thức Jensen thì (1) đúng với  $n = 2$  nên (1) đúng với  $n$  nguyên lớn hơn 2.  $\square$

Trở lại bài toán. Áp dụng bổ đề trên cho :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_a = a$$

$$x_{a+1} = x_{a+2} = \dots = x_{a+b} = b$$

Ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Nhận xét.** Với bổ đề trên ta có xây dựng được rất nhiều bất đẳng thức dạng như trên.

**Bài toán 1.** Với  $a, b, c$  nguyên dương, ta có

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{c+1} \geq \frac{a+b+c}{1+(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}}$$

**Bài toán 2.** Cho  $a, b, c, m, n, p$  nguyên dương. Chứng minh

$$\frac{ma}{1+a} + \frac{nb}{1+b} + \frac{pc}{1+c} \geq \frac{ma+nb+pc}{1+(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}}$$

Ta có thể xây dựng bài toán 1 bằng cách sau :

Sử dụng nhận xét  $x^x \geq x, \forall x \geq 1$  suy ra  $\frac{a^a}{1+a^a} \geq \frac{a}{1+a}$ , ta có:

$$\frac{a^a}{1+a^a} + \frac{b^b}{1+b^b} + \frac{c^c}{1+c^c} \geq \frac{a+b+c}{1+(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}}$$

Xét bất đẳng thức sau : Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  thỏa mãn:  $\prod_{i=1}^n a_i = 1$ , và  $k$  nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt[k]{(n^k-1)a_i+1}} \geq 1 \quad (2)$$

**CHỨNG MINH.** Giả sử tồn tại các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn  $\prod_{i=1}^n a_i = 1$  mà bất đẳng thức trên không đúng, tức là tồn tại  $p > 1$  thỏa mãn:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt[k]{(n^k-1)a_i+1}} = \frac{1}{p}$$

Tương đương với

$$\sum_{i=1}^n \frac{p}{\sqrt[k]{(n^k-1)a_i+1}} = 1$$

Đặt  $\frac{p}{\sqrt[k]{(n^k-1)a_i+1}} = x_i$ , ta có

$$(n^k-1)^n = \prod_{i=1}^n \left( \frac{p^k}{x_i^k} - 1 \right) > \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i} - 1 \right), x_i > 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

Mặt khác với mọi  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  thỏa mãn  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  thì

$$\prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i^k} - 1 \right) \geq (n^k - 1)^n$$

Thật vậy:

$$\prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i^k} - 1 \right) = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + x_i + x_i^2 + \dots + x_i^{k-1}) \times \prod_{i=1}^n (x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n)}{(x_1 x_2 \dots x_n)^k}$$

Ta có

$$\prod_{i=1}^n (x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n) \geq (n-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$$

Ta cần chứng minh

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_1 + \dots + x_i^{k-1}) \geq \left( \frac{n^k - 1}{n - 1} \right)^n (x_1 x_2 \dots x_n)^{k-1}$$

Đặt  $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ , suy ra  $\frac{1}{nG} \geq 1$ .

Ta có

$$\prod_{i=1}^n \frac{x_j^i}{1 + x_j + \dots + x_j^i} \geq \frac{n \sqrt[n]{(x_1 x_2 \dots x_n)^i}}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1 + x_j + \dots + x_j^{k-1})}} \quad (i = \overline{0, n})$$

Suy ra

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_j + \dots + x_j^{k-1}) \geq (1 + G + \dots + G^{K-1})^n$$

Mà

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_j + \dots + x_j^{k-1}) \geq (n^{k-1} + \dots + n + 1)^n (G^n)^{k-1} = \left( \frac{n^k - 1}{n - 1} \right) (x_1 x_2 \dots x_n)^{k-1}$$

Ta có điều cần chứng minh. Như vậy điều giả sử sai. Vậy (2) đúng.  $\square$

Từ (2), chọn  $n = a + b$ , ta có

$$a_1 = a_2 = \dots = a_a = \frac{a}{a^a b^b} = \frac{1}{a^{a-1} b^b}$$

$$a_{a+1} = a_{a+2} = \dots = a_{a+b} = \frac{b}{a^a b^b} = \frac{1}{a^a b^{b-1}}$$

Chọn tiếp  $k = ab$  ta có bất đẳng thức sau

**Ví dụ 2.** Cho  $a, b$  là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^{\frac{a-1}{ab}+1} \cdot b^{\frac{1}{a}}}{\sqrt[ab]{(ab)^{ab} - 1 + a^{a-1} \cdot b^b}} + \frac{b^{\frac{b-1}{ab}+1} \cdot a^{\frac{1}{b}}}{\sqrt[ab]{(ab)^{ab} - 1 + a^a \cdot b^{b-1}}} \geq 1$$

Xét bất đẳng thức sau : Cho hai bộ số thực dương  $x_1, x_2, \dots, x_n$  và  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n x_i$ . Khi đó ta có

$$\prod_{i=1}^n x_i^{a_i} \geq \prod_{i=1}^n a_i^{a_i} \quad (3)$$

CHỨNG MINH. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{i=1}^n a_i \ln x_i \geq \sum_{i=1}^n a_i \ln a_i$$

Hàm số  $f(x) = \ln x$  là hàm lồi nên

$$f(x_i) \leq f'(a_i)(x - a_i) + f(a_i) = \frac{1}{a_i}(x - a_i) + f(a_i)$$

Suy ra

$$a_i f(x_i) \leq x_i - a_i + a_i + a_i f(a_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(a_i)$$

Tương đương với

$$\sum_{i=1}^n a_i \ln x_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \ln a_i$$

Do đó (3) đúng. □

Áp dụng bất đẳng thức (3) với

$$x_1 = x_2 = \dots = x_a = \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$x_{a+1} = x_{a+2} = \dots = x_{a+b} = \frac{b}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$x_{a+b+1} = x_{a+b+2} = \dots = x_{a+b+c} = \frac{c}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Chọn  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{a+b+c}$ , ta có bất đẳng thức:

**Ví dụ 3.** Cho  $a, b, c$  là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$a^a b^b c^c \geq \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} \right)^{a+b+c}$$

Xét bất đẳng thức sau : Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  thì

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq \frac{n(n-1) \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}}{1 + \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + x_i} \quad (4)$$



CHỨNG MINH. Nếu đặt  $S = \sum_{i=1}^n x_i$  thì (4) tương đương với dãy các bất đẳng thức sau :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{S - x_i}{1 + x_i} &\geq \frac{n(n-1) \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}}{1 + \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}} \\ \sum_{i=1}^n \left( \frac{S - x_i}{1 + x_i} + 1 \right) &\geq \frac{n(n-1) \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}}{1 + \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}} + n \\ \sum_{i=1}^n \left( \frac{S - x_i}{1 + x_i} + 1 \right) &\geq \frac{n^2 \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} + n}{1 + \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và (1), ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \frac{S - x_i}{1 + x_i} + 1 \right) &\geq (1 + S) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + x_i} \\ &\geq \left[ 1 + n \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \right] \times \frac{n}{1 + \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{n^2 \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} + n}{1 + \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

Do đó (4) đúng. □

Áp dụng (4) cho:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = \cdots = x_a = a \\ x_{a+1} &= x_{a+2} = \cdots = x_{a+b} = b \\ x_{a+b+1} &= x_{a+b+2} = \cdots = x_{a+b+c} = c \end{aligned}$$

Ta được bài toán sau:

**Ví dụ 4.** Cho  $a, b, c$  là các số nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$\left( \sum a^2 \right) \left( \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \right) \geq \frac{(a+b+c)(a+b+c-1) (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}}{1 + (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}} + \sum \frac{a^2}{1+a}$$

**Ví dụ 5.** Cho hai số nguyên dương  $x, y$  thỏa mãn  $x + y = 100$ . Tìm GTNN, GTLN của

(a)  $A = xy$ ;

(b)  $B = x! + y!$ ;

(c)  $C = x!y!$ ;

(d)  $D = x^2 + y^2 f(x) \leq g(x)$ .

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát giả sử  $x \leq y$ .

Đặt  $d = y - x$  ( $d \geq 0$ ).

1. Ta chứng minh nếu  $d > 1$  thì  $A$  chưa đạt GTLN.

Thật vậy. Xét cặp  $(x + 1; y - 1)$  ta có  $(x + 1)(y - 1) = xy + y - x + 1 > xy$ .

Do đó  $A$  chỉ đạt GTLN khi  $d = 0$  hoặc  $d = 1$ . Mà  $x + y = 100$  nên  $A$  đạt GTLN khi  $x = y = 50$ .

Vậy  $\max A = 50^2 \Leftrightarrow x = y = 50$ .

2. Ta chứng minh nếu  $1 < x \leq y$  thì  $A$  chưa đạt GTNN.

Thật vậy. Chọn bộ  $(x - 1; y + 1)$ , ta có  $(x - 1)(y + 1) = xy + x - y - 1 < xy$ .

Cứ tiếp tục như vậy, ta suy ra  $\min A = 99$  khi  $x = 1, y = 99$ .

Tương tự với  $B, C, D$  ta được các kết quả sau:

(a)  $\max A = 50^2 \Leftrightarrow x = y = 50; \min A = 99 \Leftrightarrow x = 1, y = 99;$

(b)  $\min B = 2.50! \Leftrightarrow x = y = 50; \max B = 1 + 99! \Leftrightarrow x = 1, y = 99;$

(c)  $\min C = (50!)^2 \Leftrightarrow x = y = 50; \max C = 99! \Leftrightarrow x = 1, y = 99;$

(d)  $\min D = 2.50^2 \Leftrightarrow x = y = 50; \max D = 1 + 99^2 \Leftrightarrow x = 1, y = 99.$

Ta có thể mở rộng bài toán trên như sau :

**Ví dụ 6.** Cho  $n$  số nguyên dương  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn  $\sum_{i=1}^n x_i = k$ . Tìm GTLN, GTNN của

(a)  $P = x_1 x_2 \cdots x_n;$

(b)  $Q = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2;$

(c)  $R = x_1! + x_2! + \cdots + x_n!;$

(d)  $S = x_1! x_2! \cdots x_n!.$

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát giả sử  $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$

Đặt  $d = x_n - x_1$  Sau đó làm tương tự ví dụ 5, ta có các kết quả sau Nếu đặt  $k = nq + r, r < n$  thì

(a)  $\min P = k - n + 1; \max P = q^{n-r} \cdot (q + 1)^r;$

(b)  $\min Q = (n - r) \cdot q^2 + r \cdot (q + 1)^2; \max Q = (n - 1) + (k - n + 1)^2;$

(c)  $\min R = (n - r)! \cdot q! + r \cdot (q + 1)!; \max R = (n - 1)! + (k - n + 1)!;$

$$(d) \min S = (q!)^{n-r} \cdot [(q+1)!]^r; \max S = (k-n-1)!.$$

Bài toán trên cũng có thể phát biểu dưới dạng sau : Ví dụ lấy  $k = 2011; n = 10$ .

1. Hãy viết 2011 thành tổng của một số số nguyên dương sao cho tích các số đó đạt GTLN.
2. Cho 10 số nguyên dương thỏa mãn  $\sum_{i=1}^{10} a_i = 2011$ . Đặt  $A = \{x \mid x = BCNN(a_1, \dots, a_{10})\}$ .  
Tìm  $y_0 = \max \{y \mid y \in A\}$ .
3. Cho một số nguyên dương có 2011 chữ số được viết từ các chữ số  $0; 1; \dots; 9$ . Chữ số  $i$  được viết  $a_i$  lần ( $i = \overline{0, 9}$ ).  
Tìm các bộ số  $a_i$  để tồn tại nhiều nhất các số có 2011 chữ số thỏa mãn trên.

## 2. Một số bài toán bất đẳng thức tổ hợp

### 2.1. Sử dụng một số tính chất của ánh xạ

Cho  $A$  và  $B$  là hai tập hữu hạn.

1. Nếu có một đơn ánh  $f : A \rightarrow B$  thì  $|A| \leq |B|$ ;
2. Nếu có một song ánh  $f : A \rightarrow B$  thì  $|A| = |B|$ ;
3. Nếu có một toàn ánh  $f : A \rightarrow B$  thì  $|A| \geq |B|$ .

Trong một số bài toán đếm, định lí trên thường được áp dụng bằng cách : Muốn đếm số phần tử của tập hợp  $A$ , ta thiết lập một song ánh từ  $A$  đến  $B$  mà  $B$  là một tập hợp đã biết số phần tử.

Trong bài toán bất đẳng thức tổ hợp, ý tưởng trên thường được áp dụng như sau : Muốn chứng minh  $|A| \leq |B|$ , ta tìm một ánh xạ đi từ  $A$  vào  $B$  (hoặc  $B \rightarrow A$ ). Sau đó chứng minh ánh xạ đó là một đơn ánh (hoặc toàn ánh) nhưng không phải là song ánh.

**Ví dụ 7** (IMO 1989). Một hoán vị  $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$  của tập hợp  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  ( $n$  là số nguyên dương) được gọi là có tính chất  $P$  nếu  $|x_i - x_{i+1}| = 1$  với ít nhất một  $i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ . Chứng minh rằng mỗi  $n$ , số hoán vị có tính chất  $P$  lớn hơn số hoán vị không có tính chất  $P$ .

**LỜI GIẢI.** (i) *Cách 1.* Đặt  $A$  là tập tất cả hoán vị của  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ ;  $B$  là tập tất cả hoán vị của  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  có tính chất  $P$ ;  $C$  là tập tất cả hoán vị của  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  không có tính chất  $P$ .

Ta chia các số  $1, 2, \dots, 2n$  thành  $n$  cặp sau :  $(1; n+1), (2; n+2); \dots; (n; 2n)$ .

Giả sử  $(x_1; x_2; \dots; x_{k-1}, x_k; x_{k+1}, \dots; x_{2n})$  là một hoán vị thuộc  $C$ .

Giả sử  $x_k$  là số cùng cặp với  $x_{2n}$ , suy ra  $k \leq 2n-2$ .

Ta xây dựng ánh xạ  $f : C \rightarrow B$  như sau

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{2n}) \mapsto Y = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{2n}, \dots, x_{k+1})$$

Dễ thấy rằng  $f$  là đơn ánh và  $f$  không phải là toàn ánh.

Thật vậy, xét  $y_0 = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, n, 2n)$ .

Khi đó không tồn tại  $x_0$  để  $f(x_0) = y_0$ . Do đó  $f$  không phải là toàn ánh.

Từ đó ta suy điều cần chứng minh.

**Nhận xét.** Ta có  $|C| \cap |B| = \emptyset$  mà  $|C| + |B| = |A| = (2n)!$  nên  $|B| > \frac{(2n)!}{2} = n(2n-1)!$  và  $|C| < n(2n-1)!$ . Từ đó dẫn đến cách chứng minh thứ 2 sau :

(ii) *Cách 2.* Gọi  $A_k$  là tập tất cả hoán vị thỏa mãn  $k$  và  $k+n$  đứng cạnh nhau,  $A$  là tập hợp tất cả các hoán vị có tính chất  $P$ . Suy ra  $A = \bigcup_k A_k$ .

Theo nguyên lý bao hàm loại trừ, ta có

$$|A| = \sum_k |A_k| - \sum_{k < h} |A_k \cap A_h| + \sum_{k < h < m} |A_k \cap A_h \cap A_m| - \dots \geq \sum_k |A_k| - \sum_{k < h} |A_k \cap A_h|$$

Ta có

$$|A_k| = (2n-1)!, |A_k \cap A_h| = 4(2n-1)!$$

Suy ra

$$\sum_k |A_k| = 2n(2n-1)!, \sum_{k < h} |A_k \cap A_h| = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4(2n-2)!$$

Vì vậy

$$|A| \geq 2n(2n-1)! - \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4(2n-2)! = 2n^2(2n-2)! > \frac{(2n)!}{2}$$

Từ đó ta có điều cần chứng minh. □

**Ví dụ 8** (Romania TST 2002). Với mọi số nguyên dương, ta gọi  $f(n)$  là số cách chọn các dấu  $+$ ,  $-$  trong biểu thức:  $E_n = \pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n$  sao cho  $E_n = 0$ . Chứng minh rằng

(a)  $f(n) = 0$  khi  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ .

(b) Khi  $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$  ta có  $\frac{(\sqrt{2})^n}{2} \leq f(n) \leq 2^n - 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ .

**LỜI GIẢI.** (a) Giả sử tồn tại một cách đặt dấu  $+$ ,  $-$  với  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$  để  $E_n = 0$ .

Khi đó  $1 + 2 + \dots + n \equiv 0 \pmod{2}$ , suy ra  $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod{2}$ . Mà điều này xảy ra khi và chỉ khi  $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$ . Ta có điều cần chứng minh.

(b) Ta chứng minh  $f(n) \leq 2^{n-1}$ .

Thật vậy, chia tất cả biểu thức thành  $2^{n-1}$  cặp theo dạng:  $(1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n; -1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n)$  với  $a_i \in \{1; -1\}, i = \overline{1, 2n}$ .

Nếu  $f(n) > 2^{n-1}$  thì theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 biểu thức cùng nằm trong một cặp như trên, hiệu của chúng bằng 2. Do đó chúng không thể đồng thời bằng 0 được (mâu thuẫn).

Do đó  $f(n) \leq 2^{n-1} = 2^n - 2^{n-1} \leq 2^n - 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$

Ta chứng minh  $f(n) \geq \frac{(\sqrt{2})^n}{2}$ .

Xét biểu thức  $E_n$ , gọi  $A_n$  là tập hợp các số xuất hiện trong  $E_n$  với dấu  $+$  ở trước.

Nếu  $E_n = 0$  thì tổng các phần tử của  $A_n$  bằng  $\frac{n(n+1)}{4}$

Từ  $E_n$  ta sẽ xây dựng  $E_{n+4}$

Ta định nghĩa  $A_{n+4}$  như sau

- Nếu  $1 \in A_n$  thì chọn  $A_{n+4} = A_n \setminus \{1\} \cup \{n+2; n+4\}$ ;

- Nếu  $1 \notin A_n$  thì chọn  $A_{n+4} = A_n \cup \{1; n+1; n+3\}$ ;
- Nếu  $2 \in A_n$  thì chọn  $A_{n+4} = A_n \setminus \{2\} \cup \{n+3; n+4\}$ ;
- Nếu  $2 \notin A_n$  thì chọn  $A_{n+4} = A_n \cup \{2; n+1; n+2\}$ .

Như vậy với mỗi cách chọn  $A_n$  ta có thể xây dựng ít nhất 4 tập  $A_{n+4}$ .

Giả sử cho trước tập  $A_{n+4}$ . Ta thấy tập  $A_{n+4}$  được xây dựng từ tập  $A_n$  và thêm đúng một cặp trong tập  $\{n+1; n+2; n+3; n+4\}$  và  $A_n$  chứa đúng một cặp như thế.

Do đó ta có thể chỉ ra 6 trường hợp khi xây dựng  $A_{n+4}$  từ đó xác định được  $A_n$  là duy nhất.

Do đó ánh xạ từ  $A_n$  đến  $A_{n+4}$  là đơn ánh.

Mặt khác với mỗi  $A_n$  ta xác định được duy nhất một  $E_n$ , với mỗi  $E_n$  cũng xác định được duy nhất một  $A_n$ .

Do đó  $f(n+4) \geq 4f(n)$ . Ta có  $f(3) = f(4) = 2$ . Suy ra

$$f(4k+3) = f((4k-1)+4) \geq 4f(4k-1) \geq 4^2 f(4k-5) \geq \dots \geq 4^k f(3) = \frac{(\sqrt{2})^{4k+3}}{2}$$

Vì vậy  $f(n) \geq \frac{(\sqrt{2})^n}{2}$ .

Vậy ta có điều cần chứng minh. □

**Ví dụ 9.** Cho tập hợp  $A = \{1; 2; \dots; 2n\}$ . Một tập con  $C$  của  $A$  được gọi là một tập tốt nếu trong tập đó số các số chẵn ít hơn số các số lẻ. Một tập con  $B$  của  $A$  được gọi là một tập cân nếu trong tập đó số số chẵn bằng số số lẻ. Đặt số tập tốt là  $\mathcal{T}$ , số tập cân là  $\mathcal{C}$ . Chứng minh rằng

$$\mathcal{T} + \mathcal{C} < 2^{2n-1}$$

**LỜI GIẢI.** Kí hiệu  $X = \{2; 4; \dots; 2n\}$  là tập tất cả các số chẵn của  $A$ ;  $Y = \{1; 3; \dots; 2n-1\}$  là tập tất cả các số lẻ của  $A$ .

Gọi  $D$  là họ tất cả các tập cân của  $A$ ;  $E$  là họ tất cả tập con  $n$  phần tử của  $A$ .

- Tính số tập cân:

Giả sử  $B$  là một tập cân của  $A$ .  $B_1, B_2$  lần lượt là tập các số chẵn và lẻ của  $B$ , khi đó  $|B_1| = |B_2|$ .

Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow E \\ B &\mapsto B_1 \cap (Y \setminus B_2) \end{aligned}$$

Ta có

$$|f(B)| = |B_1 \cap (Y \setminus B_2)| = |B_1| + |Y| - |B_2| = |Y| = n$$

Suy ra  $f(B) \in E$ . Dễ thấy  $f$  là đơn ánh. Ta chứng minh  $f$  là toàn ánh.

Thật vậy, giả sử  $M$  là một tập con có  $n$  phần tử của  $A$ .

Gọi  $M_1, M_2$  lần lượt là tập các số chẵn, các số lẻ của  $M$ .

Đặt  $B_1 = M_1, B_2 = Y \setminus M_2, B = B_1 \cup B_2$ .

Suy ra  $|B_1| = |M_1|, |B_2| = |Y \setminus M_2| = |Y| - |M_2| = n - |M_2| = |M_1|$ . Do đó  $B$  là một tập cân hay  $f$  là toàn ánh.

Vì vậy  $f$  là song ánh. Từ đó suy ra số tập cân là  $C_{2n}^n$ .

• Tính số tập tốt:

Giả sử  $C$  là một tập tốt của  $A$ .

Gọi  $C_1, C_2$  lần lượt là tập số chẵn và lẻ của  $C$  thì  $|C| < |C_1|$ .

Gọi  $F$  là họ tất cả tập tốt của  $A$ .

Ta thiết lập ánh xạ sau

$$\begin{aligned} g : E &\rightarrow F \\ C &\mapsto C_1 \cap (Y \setminus C_2) \end{aligned}$$

Suy ra  $|g(C)| < n$ .

Ta có  $g$  là một đơn ánh nên  $|F| < C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{m-1} = 2^{2n-1} - C_{2n}^m$ .

Từ các đẳng thức và bất đẳng thức trên, ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Nhận xét.** Ta có

$$C_{2n}^m = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)(n+2) \cdots 2n}{n!} > 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Từ đó ta có bài toán sau:

**Ví dụ 10.** Cho tập  $A = \{1; 2; \dots; 2n\}$ . Tập con  $B$  của  $A$  được gọi là tập tốt nếu trong các phần tử của  $B$  số số chẵn nhỏ hơn số số lẻ. Chứng minh rằng số tập tốt của  $A$  nhỏ hơn  $2^{2n-1} - 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .

**Ví dụ 11.** Chứng minh rằng số các cách biểu diễn một số nguyên dương  $n$  thành tổng của các số nguyên dương mà không có số nào chia hết cho  $p$  ( $p$  là một số cho trước) xuất hiện quá một lần không lớn hơn số cách biểu diễn  $n$  thành tổng các số nguyên dương mà không có số nào chia hết cho  $p^2$ .

**LỜI GIẢI.** Xét bộ  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  sao cho trong bộ không có phần tử nào chia hết cho  $p$  xuất hiện quá một lần và  $\sum_{i=1}^m a_i = n$

Biểu diễn tất cả các số chia hết cho  $p$  dưới dạng  $p^r \cdot t$  ( $r \geq 1; t \not\equiv p$ ).

Giả sử  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{b_1, b_2, \dots, b_k, p^{r_1} \cdot t_1; \dots; p^{r_t} t_t\}$

Gọi  $M$  là tập tất cả các cách biểu diễn  $n$  thành tổng của các số nguyên dương mà không có số nào chia hết cho  $p$  ( $p$  là một số cho trước) xuất hiện quá một lần và  $N$  là tập tất cả các số biểu diễn  $n$  thành tổng các số nguyên dương mà không có số nào chia hết cho  $p^2$ .

Xét ánh xạ sau :

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow N \\ \{a_1, a_2, \dots, a_n\} &\mapsto \left\{ b_1, b_2, \dots, b_k, \underbrace{pt_1, pt_1, \dots, pt_1}_{p^{r_1-1} \text{ số}}, \underbrace{pt_2, pt_2, \dots, pt_2}_{p^{r_2-1} \text{ số}}, \dots, \underbrace{pt_t, pt_t, \dots, pt_t}_{p^{r_t-1} \text{ số}} \right\} \end{aligned}$$

Để thấy  $f$  là một đơn ánh nên ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Ví dụ 12.** Cho tập  $X$  gồm  $n$  số thực phân biệt. Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_k$  là các số thỏa mãn  $\forall u \neq v \in X$  thì  $\exists a_i$  sao cho  $(u - a_i)(v - a_i) \leq 0$ . Chứng minh rằng  $k \geq \lfloor \log_3 n \rfloor$ .

LỜI GIẢI. Với mỗi  $u \in X$  ta lập bộ  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  tương ứng thỏa mãn

$$u_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu } u < a_i \\ 1 & \text{nếu } u = a_i \\ 2 & \text{nếu } u > a_i \end{cases}$$

Phép lập này là một đơn ánh. Thật vậy, nếu tồn tại  $a_i$  thỏa mãn  $(u - a_i)(v - a_i) \leq 0$  mà  $u_i = v_i, \forall i = \overline{1, k}$  thì  $u, v < a_i$  hoặc  $u = v = a_i$  hoặc  $u, v > a_i$  (không thỏa mãn).

Suy ra có tối đa  $3^k$  bộ mà  $|X| = n$ . Do đó  $n \leq 3^k$  hay  $k \geq \lceil \log_3 n \rceil$ .  $\square$

## 2.2. Sử dụng nguyên lí Dirichlet

Nguyên lí Dirichlet được phát biểu lần đầu tiên bởi G. Lejeune Dirichlet (1805-1859), nhà toán học gốc Pháp như sau

**Nguyên lí 1** (Nguyên lí Dirichlet). *Nếu nhốt  $m$  con thỏ vào  $n$  cái chuồng ( $m, n \in \mathbb{N}^*$ ) thì luôn tồn tại ít nhất một chuồng có  $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$  con thỏ.*

**Nguyên lí 2** (Nguyên lí Dirichlet đối ngẫu). *Cho tập hữu hạn  $S \neq \emptyset$  và  $S_1, S_2, \dots, S_n$  là các tập con  $S_i, i = \overline{1, n}$  của  $S$  sao cho  $|S_1| + |S_2| + \dots + |S_n| > k|S|$ . Khi đó tồn tại một phần tử  $x$  thuộc  $S$  sao cho  $x$  là phần tử chung của  $k+1$  tập  $S_i, i = \overline{1, n}$ .*

**Ví dụ 13** (Czech 1998). Cho  $X$  là một tập hợp gồm 14 số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng có một số nguyên dương  $k < 8$  và có hai tập con  $k$  phần tử  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  và  $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$  rời nhau của  $X$  sao cho

$$\left| \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} \right) - \left( \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k} \right) \right| < \frac{1}{1000}$$

LỜI GIẢI. Có 3432 tập con 7 phần tử của  $X$ .

Tổng nghịch đảo các phần tử của mỗi tập con 7 phần tử của  $X$  không vượt quá  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{7} < 2,6$ .

Xét 2600 khoảng  $(0, \frac{1}{1000}]$ ,  $(\frac{1}{1000}, \frac{2}{1000}]$ ,  $\dots$ ,  $(\frac{2599}{2600}, \frac{2600}{1000}]$ .

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai tập con 7 phần tử của  $X$  có tổng nghịch đảo các phần tử thuộc cùng một khoảng trong các khoảng trên.

Bỏ các phần tử giống nhau của hai tập trên ta thu được hai tập con thỏa mãn bài toán.  $\square$

**Ví dụ 14.** Một tập hợp  $M$  là hợp của các đoạn thẳng nằm trong đoạn  $[0; 1]$ . Biết rằng khoảng cách giữa hai điểm bất kì của  $M$  khác 0, 1. Chứng minh rằng tổng độ dài của những đoạn tạo nên  $M$  không vượt quá 0,5.

LỜI GIẢI. Giả sử tổng độ dài các đoạn trong  $M$  lớn hơn 0,5.

Chia đoạn  $[0; 1]$  thành 10 phần  $[0, \frac{1}{10}]$ ,  $[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}]$ ,  $\dots$ ,  $[\frac{9}{10}, 1]$ .

Kí hiệu  $M_i$  là phần của  $M$  nằm trong đoạn  $[\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}]$ , ( $i = \overline{0, 9}$ ) và  $D_i$  là tổng các đoạn thẳng tạo ra  $M_i$ .

Bằng các phép tịnh tiến thích hợp ta chuyển các đoạn  $[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}]$ ;  $\dots$ ;  $[\frac{9}{10}, 1]$  về đoạn  $[0; \frac{1}{10}]$ .

Kí hiệu  $M'_i$  là ảnh của  $M_i$ .

Ta có  $D = D_0 + D_1 + \dots + D_9 > 0,5 = 5.0,1$

Theo nguyên lí Dirichlet đối ngẫu có ít nhất 6 tập hợp trong  $M_0, M'_1, M'_2, \dots, M'_9$  có điểm chung. Tức là một số nào đó trong  $[0; \frac{1}{10}]$  là kết quả của 6 điểm khác nhau  $x_1, x_2, \dots, x_6$  của  $M$  trừ đi những số tương ứng có dạng  $\frac{k_1}{10}, \frac{k_2}{10}, \dots, \frac{k_6}{10}$  với  $k_i$  là một số nào đó trong  $\{0; 1; 2; \dots; 9\}$  và  $i = \overline{1, 6}$

Theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai trong các số  $k_1, k_2, \dots, k_6$  là hai số tự nhiên liên tiếp.

Giả sử  $k_2 = k_1 + 1$ , suy ra  $x_2 - x_1 = \frac{k_2 - k_1}{10} = \frac{1}{10}$  (mâu thuẫn với giả thiết). Ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Nhận xét.** Nguyên lí Dirichlet còn có ứng dụng rất quan trọng như sau : Xét đoạn  $[m; n]$  và  $k$  số thực  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ( $k > n - m$ ) thì luôn tồn tại hai số  $x_i, x_j$  ( $i, j = \overline{1, k}$ ) thỏa mãn  $|x_i - x_j| = 1$ .

**Ví dụ 15.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n > 1$ , từ  $n + 2$  phần tử bất kì của tập  $\{1; 2; \dots; 3n\}$  có thể chọn ra hai số có hiệu lớn hơn  $n$  và nhỏ hơn  $2n$ .

**LỜI GIẢI.** Đặt  $A = \{1; 2; \dots; 3n\}$ . Xét  $B \subset A$  và  $|B| = n + 2$ .

Khi thêm vào hai số cùng một lượng thì hiệu của chúng không thay đổi nên ta có thể thêm vào các phần tử của  $B$  cùng một lượng sao cho phần tử lớn nhất sau khi thêm là  $3n$ .

Nếu tồn tại phần tử  $x \in \{n + 1, n + 2, \dots, 2n - 1\}$  sau khi thêm vào  $B$  thì, ta có  $n < 3n - x < 2n$  (thỏa mãn bài toán).

Giả sử không tồn tại phần tử  $x \in \{n + 1, n + 2, \dots, 2n - 1\}$  sau khi thêm vào  $B$ . Xét  $C = B \setminus \{3n\}$ , khi đó  $C$  là một tập con  $n + 1$  phần tử của tập  $\{1; 2; \dots; 3n - 1\}$ .

Phân hoạch tập trên thành các tập sau :  $T_1 = \{1; 2n\}, T_2 = \{2; 2n + 1\}, \dots, T_n = \{n; 3n - 1\}$ . Theo nhận xét trên ta suy ra tồn tại ít nhất một tập  $T_i$  chứa hai phần tử của  $B$ , hai phần tử này thỏa mãn bài toán.  $\square$

**Nhận xét.** Ta có thể mở rộng bài toán trên như sau : Với mọi số nguyên dương  $n > 1, k, i \in \mathbb{N}^*$  thì trong  $kn + 2$  phần tử của tập  $\{1; 2; \dots; (2k + i)n\}$  luôn chọn được hai phần tử có hiệu lớn hơn  $kn$  và nhỏ hơn  $(2k + i)n$ .

## 2.3. Phương pháp ghép cặp

**Ví dụ 16** (Liên Xô 1965). Trong cuộc hội thảo có 40 cuộc họp, mỗi cuộc họp có 10 thành viên. Cho biết hai thành viên bất kì chỉ cùng dự họp với nhau tối đa một lần. Chứng minh rằng cuộc hội thảo có nhiều hơn 60 thành viên.

**LỜI GIẢI.** Giả sử cuộc hội thảo có  $n$  thành viên.

Do đó có  $C_n^2$  cách chọn hai thành viên.

Có  $C_{10}^2$  cách chọn hai thành viên từ một cuộc họp. Do hai thành viên chỉ cùng dự họp với nhau tối đa một lần nên  $C_n^2 \geq 40 \cdot C_{10}^2$ , tương đương với  $n(n - 1) \geq 3600$  hay  $n > 60$ . Ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Nhận xét.** Nếu giả thiết đổi thành hai thành viên bất kì cùng đi dự họp với nhau ít nhất một lần thì cuộc hội thảo có nhiều nhất 60 thành viên. Tổng quát bài toán lên với cuộc họp có  $m$



thành viên thì

$$C_n^2 \geq k \cdot C_m^2 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{km(m-1)}{2} \Rightarrow n > \left\lfloor \sqrt{km(m-1)} \right\rfloor$$

**Ví dụ 17.** Cho 5 số, mỗi số có 100 chữ số 1 hoặc 2. Biết trong hai số bất kì có  $r$  hàng bằng nhau và trong mỗi hàng có cả chữ số 1 và 2. Chứng minh rằng  $40 \leq r \leq 60$ .

**LỜI GIẢI.** Gọi  $T$  là số cặp mà mỗi cặp có hai chữ số thuộc hai số có tính chất cùng hàng và bằng nhau.

- Cứ hai số bất kì có  $r$  hàng bằng nhau mà có  $C_5^2$  cách chọn hai số. Suy ra  $T = rC_5^2$ .
- Trong mỗi hàng (gồm 5 chữ số) có cả chữ số 1 và 2 nên có hai trường hợp sau :
  - Có một chữ số 1 (hoặc 2) và 4 chữ số 2 (hoặc 1) nên có  $C_4^2$  cặp thuộc  $T$ .
  - Có hai chữ số 1 (hoặc 2) và 3 chữ số 2 (hoặc 1) nên có  $C_2^2 + C_3^2$  cặp thuộc  $T$ .

Có tất cả 100 hàng nên

$$100(C_3^2 + C_2^2) \leq T = 10r \leq 100C_4^2$$

Từ đó suy ra  $40 \leq r \leq 60$ . □

**Ví dụ 18.** Một hội nghị toán học sử dụng 4 ngôn ngữ chính. Biết hai đại biểu bất kì luôn có một ngôn ngữ mà họ đều biết. Chứng minh rằng có một ngôn ngữ được biết đến bởi nhiều hơn 60% đại biểu.

**LỜI GIẢI.** Giả sử có tất cả  $n$  đại biểu và 4 ngôn ngữ I, II, III, IV.

Gọi  $A, B, C, D$  lần lượt là tập các đại biểu biết ngôn ngữ I, II, III, IV.

- Nếu tồn tại một người chỉ biết duy nhất một ngôn ngữ thì  $n - 1$  người còn lại cũng phải biết ngôn ngữ đó. Do đó ngôn ngữ đó được biết bởi 100% đại biểu.
- Nếu tất cả đại biểu đều biết được ít nhất hai thứ tiếng thì  $C_{|A|}^2 + C_{|B|}^2 + C_{|C|}^2 + C_{|D|}^2 \geq 2C_n^2$ .  
Giả sử  $A$  là tập thỏa mãn  $|A| = \max\{|A|, |B|, |C|, |D|\}$ .  
Suy ra  $\frac{C_n^2}{2} \leq C_{|A|}^2$  hay tương đương với  $2|A|(|A| - 1) \geq n(n - 1)$ .  
Giả sử  $|A| < \frac{3}{5}n$  thì  $2|A|(|A| - 1) < \frac{6}{5} \cdot n \left(\frac{3}{5}n - 1\right) = \frac{18}{25}n^2 - \frac{6}{5}n < n^2 - n$  (mâu thuẫn)  
Do đó  $|A| \geq \frac{3}{5}n$ .

Vậy trong mọi trường hợp, ta có điều cần chứng minh. □

**Ví dụ 19 (IMO 1988).** Cho  $n, k$  là các số nguyên dương,  $n \geq k$  và  $S$  là tập hợp  $n$  điểm trong mặt phẳng thỏa mãn

- Không có ba điểm nào thẳng hàng.
- Với mỗi điểm  $P$  của hệ đều không có ít hơn  $k$  điểm trong hệ cách đều  $P$ .

Chứng minh rằng

$$k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

LỜI GIẢI. Giả sử  $k > \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$ .

Lấy điểm  $P$  thuộc  $S$  thì tồn tại ít nhất  $k$  điểm trong  $S$  cách đều  $P$ . Suy ra tồn tại ít nhất  $C_k^2$  cặp điểm  $(A, B)$  mà  $PA = PB$ .

Có ít nhất  $nC_k^2$  cặp điểm mà trên đường trung trực của đoạn thẳng mà hai đầu mút là hai điểm đó có ít nhất một điểm thuộc  $S$ . Ta có

$$nC_k^2 = n \cdot \frac{k(k-1)}{2} > \frac{1}{2} \cdot n \cdot \left( \frac{1}{2} + \sqrt{2n} \right) \left( \sqrt{2n} - \frac{1}{2} \right) = n \left( n - \frac{1}{8} \right) > n(n-1) = 2C_n^2$$

Lại có  $C_n^2$  là số cặp điểm không thứ tự của  $S$ ,  $2C_n^2$  là số cặp điểm có thứ tự của  $S$ .

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một cặp điểm  $A, B$  và ba điểm  $P_1, P_2, P_3$  thỏa mãn  $AP_i = BP_i$  ( $i = \overline{1; 3}$ )

Suy ra  $P_1, P_2, P_3$  thẳng hàng (vô lý). Vậy ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Nhận xét.** Có thể mở rộng bài toán trên trong không gian như sau :

**Ví dụ 20.** Cho  $n, k$  là các số nguyên dương,  $n \geq k$  và  $S$  là tập hợp  $n$  điểm trong không gian thỏa mãn

- (i) Không có 65 điểm nào thẳng hàng.
- (ii) Mỗi điểm  $P$  của hệ đều không có ít hơn  $k$  điểm trong hệ cách đều  $P$ .

Chứng minh rằng

$$k \leq 1 + 4\sqrt[3]{(n-1)(n-2)}$$

LỜI GIẢI. Gọi  $A$  là tập các bộ điểm  $(M, N, P)$  thỏa mãn  $M, N, P$  là ba điểm của hệ và tồn tại ít nhất một điểm của hệ cách đều ba điểm đó (điểm này được gọi là tâm của hệ).

- Với mỗi điểm  $P$  của hệ có ít nhất  $k$  điểm thuộc hệ cách đều  $P$ . Suy ra số bộ thuộc  $A$  nhận  $P$  làm tâm của bộ lớn hơn hoặc bằng  $C_n^2$ .  
Có  $n$  điểm được tính nên số cặp không nhỏ hơn  $n \cdot C_k^3$ .
- Có  $n$  điểm nên có  $C_n^3$  bộ. Theo (i), mỗi bộ có không quá 64 lần tính. Số cặp được tính không lớn hơn  $64C_n^3$ .

Từ đó suy ra

$$n \cdot C_k^3 \leq 64 \cdot C_n^3$$

Tương đương với

$$nk(k-1)(k-2) \leq 64n(n-1)(n-2)$$

$$k(k-1)(k-2) \leq 64(n-1)(n-2)$$

$$(k-1)^3 < 64(n-1)(n-2)$$

$$k < 1 + 4\sqrt[3]{(n-1)(n-2)}$$

Bất đẳng thức cuối cho chúng ta điều cần chứng minh.  $\square$

**Nhận xét.** Có thể tổng quát giả thiết (i) thành không có quá  $m$  điểm nào thẳng hàng. Khi đó  $k < 1 + \sqrt[3]{m(n-1)(n-2)}$ .

**Ví dụ 21** (IMO 1998). Trong một cuộc thi có  $m$  thí sinh và  $n$  giám khảo,  $n$  là số nguyên dương lẻ và  $n > 2$ . Mỗi giám khảo đánh giá thí sinh theo hai mức “đỗ”, “trượt”. Gọi  $k$  là một số sao cho lấy hai giám khảo tùy ý thì hai người đó có chung đánh giá  $k$  thí sinh. Chứng minh rằng

$$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$$

**LỜI GIẢI.** Gọi  $N$  là bộ ba (hai giám khảo, một thí sinh) thỏa mãn hai giám khảo trong nhóm đó có cùng đánh giá (“đỗ” hoặc “trượt”) cho thí sinh trong bộ đó.

Có  $C_n^2$  cách chọn bộ hai giám khảo. Mà  $k$  là số nguyên dương thỏa mãn nếu lấy hai giám khảo bất kì thì hai giám khảo này đánh giá trùng nhau nhất  $k$  thí sinh nên

$$N \leq kC_n^2 \quad (5)$$

Xét thí sinh  $A$  bất kì. Giả sử có  $x$  giám khảo đánh giá  $A$  đậu.

- Có  $C_x^2$  cặp giám khảo đánh giá  $A$  đậu,  $C_{n-x}^2$  cặp giám khảo đánh giá  $A$  trượt.
- Có tất cả  $C_{n-x}^2 + C_x^2$  cặp giám khảo có cùng đánh giá đối với  $A$ .

Ta có:

$$\begin{aligned} C_{n-x}^2 + C_x^2 &= \frac{x(x-1) + (n-x)(n-x-1)}{2} \\ &= \left(x - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} \\ &\geq \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} = \frac{(n-1)^2}{4} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Mà  $\frac{(n-1)^2}{4} \in \mathbb{N}^*$  nên có ít nhất  $\frac{(n-1)^2}{4}$  cặp giám khảo có cùng đánh giá đối với  $A$ . Suy ra

$$N \geq m \cdot \frac{(n-1)^2}{4} \quad (6)$$

Từ (1) và (2) ta có  $k \cdot \frac{n(n-1)}{2} \geq m \cdot \frac{(n-1)^2}{4}$  Suy ra  $\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$ .  $\square$

## 2.4 Một số bài toán khác

**Ví dụ 22.** Cho  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 1. Gọi  $S$  là tập hợp gồm  $n$  phần tử và  $A_i, i = \overline{1, m}$  là  $m$  tập con đôi một khác nhau của  $S$  thỏa mãn

$$\begin{cases} |A_i| \geq 2; \\ \forall i, j, k : \text{Nếu } |A_i \cap A_j| \neq \emptyset, |A_j \cap A_k| \neq \emptyset, |A_k \cap A_i| \neq \emptyset \text{ thì } |A_i \cap A_j \cap A_k| \neq \emptyset. \end{cases}$$

Chứng minh rằng  $m \leq 2^{n-1} - 1$ .

**LỜI GIẢI.** Ta chứng minh quy nạp theo  $n$ .

- Với  $n = 2, 3$  thì kết luận bài toán đúng.
- Với  $n \geq 4$ . Giả sử bài toán đúng với  $n - 1$ . Ta cần chứng minh với  $n$  thì bài toán đúng. Thật vậy, gọi  $T$  là họ gồm các tập  $A_i$ . Xét hai trường hợp sau :

- Trường hợp 1. Tồn tại tập  $A$  mà  $A$  và  $S \setminus A$  đều thuộc  $T$ .

Chia  $T$  thành 3 họ gồm:  $T_1$  là họ các tập con của  $A$ ,  $T_2$  là họ các tập con của  $S \setminus A$ ,  $T_3 = T \setminus (T_1 \cup T_2)$ .

Ta có nhận xét sau: Với mọi tập  $B \in T_3$  thì  $|B \cap A| > 0$ ,  $|B \cap (S \setminus A)| > 0$ . Do đó với mọi  $B, C \in T_3$  thì  $|B \cap C| = 0$ .

Thật vậy, nếu  $|B \cap C| = 0$  thì  $|A \cap B \cap C| > 0$  và  $|(S \setminus A) \cap B \cap C| > 0$  (theo nhận xét trên), vô lí.

Ta có  $|T_3| \leq \min\{|A|, |S \setminus A|\}$ . Suy ra

$$|T| = |T_1| + |T_2| + |T_3| \leq (2^{|A|} - 1) + (2^{n-|A|+1}) + \min\{|A|, n - |A|\} \leq 2^{n-1} - 1$$

- Trường hợp 2. Với  $\forall A \in T$  thì  $S \setminus A \notin T$ .

Vì  $S$  có  $2^n$  tập con nên  $|T| \leq 2^{n-1}$ .

Giả sử  $|T| \geq 2^{n-1}$ . Suy ra  $|T| = 2^{n-1}$ .

Giả sử  $X = \{1; 2; \dots; n-1\} \in T$ .

Chia  $T$  thành 2 họ như sau:  $T_4$  là họ các tập con của  $X$  và  $T_5$  là họ các tập chứa phần tử  $n$ .

Ta có nhận xét sau:  $\forall B_i, B_j \in T_5$  thì  $|B_i \cap B_j| \geq 1$ .

Thật vậy, nếu  $|B_i \cap B_j| < 1$  thì  $|B_i \cap B_j \cap X| = 0$  mà  $|B_i \cap B_j| > 0$ ;  $|B_i \cap X| > 0$ ;  $|X \cap B_j| > 0$  (Mâu thuẫn)

Xét  $T'_5 = \{B \setminus \{n\} | B \in T_5\}$ , mỗi tập  $T'_5$  là 1 tập con của  $\{1; 2; \dots; n-1\}$  và mọi tập  $C, D$  con của  $T'_5$  thì  $|C \cap D| \geq 1 \Rightarrow |T_5| = |T'_5| \leq 2^{n-2}$

Theo giả thiết quy nạp thì

$$|T_4| \leq 2^{n-2} - 1 \Rightarrow |T| = |T_4| + |T_5| \leq 2^{n-2} - 1 + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1 \text{ (Mâu thuẫn với gt).}$$

Kết hợp cả hai trường hợp ta có điều cần chứng minh.

□

**Ví dụ 23.** Cho hàm  $f$  xác định trên các tập con của tập hữu hạn  $S$  ( $S \neq \emptyset$ ). Chứng minh rằng nếu  $f(S \setminus A) = f(A)$  và  $\max\{f(A); f(B)\} \geq f(A \cup B)$  với mọi tập con  $A, B$  của  $S$  thì  $f$  nhận không quá  $|S|$  giá trị phân biệt.

**LỜI GIẢI.** Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo số phần tử của  $S$ .

- Với  $|S| = 1$  và  $|S| = 2$  số các cặp gồm hai tập con bù nhau của  $S$  tương ứng bằng 1 và 2. Kết luận bài toán đúng.
- Với  $|S| > 2$ . Giả sử bài toán đúng cho số phần tử bé hơn.  
Gọi  $m$  là phần tử lớn nhất của  $\text{Im} f$ .

- Trước hết ta chứng minh  $S$  có một tập con có 1 phần tử  $X = \{x\}$  thỏa mãn  $f(x) = m$ .

Thật vậy, xét tập tất cả tập con nhận giá trị  $m$  qua ánh xạ  $f$ .

Vì  $f(S \setminus A) = f(A)$  nên trong các tập con này có ít nhất một tập con khác rỗng.

Gọi  $X$  là tập con bé nhất thỏa mãn  $f(X) = m$ . Nếu  $X$  có ít nhất 2 phần tử

thì  $X$  có thể viết thành hợp của hai tập phân biệt :  $X = X_1 \cup X_2$ . Suy ra  $\max \{f(X_1); f(X_2)\} \geq f(X_1 \cup X_2) = f(X) = m$

Mà  $m$  là phần tử lớn nhất trong tập giá trị của  $f$  nên trong hai phần tử  $f(X_1); f(X_2)$  có ít nhất một phần tử bằng  $m$  (mâu thuẫn). Do đó  $S$  có một tập con có 1 phần tử  $X = \{x\}$  thỏa mãn  $f(X) = m$ .

– Đặt  $R = S \setminus X$ . Xét hàm  $g : R \rightarrow f(R)$  như sau : Với  $\forall A \subset R$  thì

$$g(A) = \min \{f(A); f(A \cup X)\} = \min \{f(A); f(R \setminus A)\}$$

Với  $\forall A \subset R$  thì

$$\begin{aligned} m &= f(X) = f(S \setminus X) = f(A \cup (R \setminus A)) \\ &\leq \max \{f(A); f(R \setminus A)\} = \max \{f(A); f(S \setminus (R \setminus A))\} \\ &= \max \{f(A); f(A \cup X)\} \end{aligned}$$

Ta chứng minh bằng quy nạp giả thiết cũng đúng với hàm  $g$ , tức là  $g(R \setminus A) = g(A)$  và  $g(A \cup B) \leq \max \{g(A); g(B)\}$

Thật vậy,

$g(R \setminus A) = g(A)$  đúng theo cách xác định hàm  $g$ .

Nếu  $g(A) = m$  hoặc  $g(B) = m$  thì  $g(A \cup B) \leq \max \{g(A); g(B)\}$  (theo định nghĩa số  $m$ ).

Nếu  $g(A), g(B) < m$  thì một trong hai giá trị  $f(A); f(A \cup X) < m$  và một trong hai giá trị  $f(B); f(B \cup X) < m$ .

Nếu  $f(A) < m$  đặt  $C = A$ , nếu  $f(A \cup X) < m$  đặt  $C = A \cup X$ .

Nếu  $f(B) < m$  đặt  $D = B$ , nếu  $f(B \cup X) < m$  đặt  $D = B \cup X$ .

Suy ra  $f(C) = g(A); f(D) = g(B)$  và tập  $C \cup D$  hoặc bằng  $A \cup B$  hoặc bằng  $A \cup B \cup X$ . Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \max \{g(A); g(B)\} &= \max \{f(C); f(D)\} \\ &\geq f(C \cup D) \geq \min \{f(A \cup B); f(A \cup B \cup X)\} \\ &= g(A \cup B) \end{aligned}$$

Vậy  $g$  thỏa mãn giả thiết.

Theo giả thiết quy nạp thì  $g$  chỉ có thể nhận  $|S| - 1$  giá trị khác nhau.

Vậy  $\forall A \subset R$ , một trong hai giá trị  $f(A)$  và  $f(R \setminus A)$  có một giá trị bằng  $m$  và giá trị còn lại bằng  $g(A)$ .

Do đó hàm  $f$  chỉ có thể nhận nhiều hơn hàm  $g$  một giá trị. Từ đó ta có điều cần chứng minh.  $\square$

**Ví dụ 24** (THTT 395). Cho  $X$  là tập con của  $\{1; 2; \dots; 2011\}$  thỏa mãn

(i)  $|X| = 62$ ;

(ii) Với  $\forall x \in X$  đều  $\exists a, b \in X \cup \{0; 2011\} (a; b \neq x)$  thỏa mãn  $x = \frac{a+b}{2}$ .

Chúng minh rằng có hai phần tử  $x, y$  của  $X$  thỏa mãn  $|x - y| \geq 11, \frac{x+y}{2} \notin X$ .

**LỜI GIẢI.** Giả sử  $X$  là tập có 62 phần tử có sắp thứ tự  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{62}$ .

Ta sẽ chứng minh bài toán này bằng phản chứng : Giả sử không tồn tại hai phần tử  $x, y$  của  $X$  thỏa mãn  $|x - y| \geq 11, \frac{x+y}{2} \notin X$ .

Ta chứng minh các phần tử của  $X$  cùng tính chẵn lẻ. Thật vậy :  $X \subset \{1; 2; \dots; 2011\}$ . Suy ra  $x_{i+1} \geq x_i + 1, \forall i = \overline{1, 61}$ .

Do đó  $x_{62} \geq x_k + 11, k = \overline{1, 51}$ . Suy ra  $x_k$  ( $k = \overline{1, 51}$ ) cùng tính chẵn lẻ với  $x_{62}$ , nếu không thì  $\frac{x_k + x_{62}}{2} \notin X$  (mâu thuẫn)

Tương tự ta có  $x_l$  ( $l = \overline{12, 62}$ ) cùng tính chẵn lẻ với  $x_1$ . Vì vậy  $x_i$  ( $i = \overline{1, 62}$ ) cùng tính chẵn lẻ.

Từ giả thiết suy ra  $\exists a, b \in X \cup \{0; 2011\}$  thỏa mãn  $x_{62} = \frac{a+b}{2}$ .

Do  $x_{62} > x_1$  nên  $\exists x_p$  ( $p = 1; 2; \dots; 61$ ) thỏa mãn  $x_{62} = \frac{x_p + 2011}{2}$  hay  $x_p$  lẻ.

Tương tự do  $x_i > x_1$  ( $i = \overline{1; 62}$ ) nên  $\exists x_q$  ( $q = 2; 3; \dots; 61$ ) thỏa mãn  $x_1 = \frac{x_q + 0}{2}$  chẵn (mâu thuẫn). Vậy ta có điều cần chứng minh.  $\square$

### 3. Một số bài toán tìm cực trị tổ hợp

Các bài toán này thường được chứng minh theo các bước sau : Để chứng minh  $\min k = \partial$  hay  $\max k = \partial$  ta sẽ chứng minh  $k \geq \partial$  (hoặc  $k \leq \partial$ ) và chỉ xảy ra một khả năng có dấu bằng hoặc là chỉ ra  $k = \partial$  thỏa mãn rồi chứng minh  $\forall k \leq \partial$  (hoặc  $\forall k \geq \partial$ ) thì không đúng. Cái khó nhất của những bài toán dạng này chính là tìm được  $\partial$  (thường là không tự nhiên). Thực tế toán tổ hợp có rất nhiều ý tưởng giải nên không có điều gì thật sự hữu hiệu ngoài kinh nghiệm và cảm giác có được nhờ sự luyện tập một cách thông minh của chúng ta.

Các bài toán này thường rơi vào một trong hai dạng sau :

- Dạng 1 : Tìm số nguyên dương  $n$  lớn nhất (bé nhất) để tồn tại tập hợp gồm  $n$  phần tử thỏa mãn điều kiện (\*).
- Dạng 2 : Tìm số nguyên dương  $n$  lớn nhất (bé nhất) để mọi tập hợp gồm  $n$  phần tử thỏa mãn điều kiện (\*).

Cách giải hai dạng toán này đã được trình bày ở trên.

**Nhận xét :** Trong những bài toán có nội dung tối ưu mà các phần tử có quan hệ chia hết hoặc nguyên tố cùng nhau, ta thường quan tâm đến những điều sau :

- Xét theo modulo 2 hoặc lũy thừa của 2.
- Nếu việc phân tích trên không thành công thì chúng ta phải quan tâm đến các số nguyên tố và phân tích chính tắc của các số tự nhiên.

**Ví dụ 25.** Tìm số nguyên dương  $k$  nhỏ nhất sao cho ta có thể tô màu các số nguyên dương từ 1 đến 2011 bằng  $k$  màu khác nhau để không có hai số nào cùng màu là bội của nhau.

LỜI GIẢI. Với bài này ta sử dụng lũy thừa của 2.

Vì các số  $2^0; 2^1; 2^2; \dots; 2^{10}$  không thể có hai số nào cùng tô một màu nên  $k \geq 11$ .

Với  $k = 11$  ta có cách tô màu như sau : đặt  $A_i = \{2^i, 2^i + 1; \dots; 2^{i+1} - 1\}$  ( $i = \overline{0; 9}$ ) và  $A_{10} = \{2^{10}, 2^{10} + 1; \dots; 2011\}$ .

Tô màu các số thuộc  $A_i$  bởi màu thứ  $i + 1$ . Cách tô màu này thỏa mãn bài toán. Vậy  $k_{\min} = 11$ .  $\square$

**Nhận xét :** Ta có thể thay 2011 bởi một số nguyên  $n$  dương bất kì, khi đó  $k_{\min} = [\log_2 n] + 1$ .

**Ví dụ 26.** Cho  $S$  là tập hợp gồm 2011 số nguyên dương và chọn ra  $n$  tập con của  $S$  sao cho tổng các phần tử trong  $n$  tập con đó đôi một nguyên tố cùng nhau. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của  $n$ .

LỜI GIẢI. Đáp số là  $2^{2010} + 1$ .

- Trước hết ta chứng minh  $n \leq 2^{2010} + 1$ .

Trong  $2^{2011}$  tập con của  $S$  thì nhiều nhất trong một nửa trong số đó có tổng các phần tử là số lẻ. Thật vậy, nếu tất các phần tử của  $S$  đều là số chẵn thì tất cả các tập con của  $S$  đều có tổng các phần tử đều chẵn nên không có tập con nào trong  $S$  có tổng các phần tử là số lẻ. Nếu tồn tại một phần tử  $x$  của  $S$  là số lẻ thì ta có thể chia  $2^{2011}$  tập con của  $S$  thành  $2^{2010}$  cặp  $(T; T \cup \{x\})$  với  $T$  là tập con của  $S$  mà  $x \notin T$ . Trong mỗi cặp đó có một tập có tổng các phần tử của nó là lẻ, tập còn lại có tổng các phần tử là chẵn. Do đó có tối đa  $2^{2010}$  các tập con của  $S$  có tổng các phần tử là số lẻ.

Vì vậy nếu  $n > 2^{2010} + 1$  thì có ít nhất hai tập có tổng các phần tử đều là số chẵn (trái với giả thiết). Vậy  $n \leq 2^{2010} + 1$ .

- Ta sẽ xây dựng một ví dụ cho  $n = 2^{2010} + 1$ .

Đặt  $k = (2^{2010})!$  và tập  $S = \{k + 1; 2k + 1; 4k + 1; \dots; 2^{2009}k + 1\}$ . Xét  $2^{2010}$  tập con của  $S$  và thêm một tập  $\{k\}$ .

Các tập con của  $S$  chứa phần tử 1 thì có tổng các phần tử có dạng  $ak + 1$  với  $0 \leq a \leq 2^{2010}$  và hai tập khác nhau thì có tổng các phần tử khác nhau. Ta có  $\gcd(k; ak + 1) = 1$ . Nếu  $\gcd(ak + 1; bk + 1) = p$  ( $a \neq b$ ) thì  $p|k(a - b)$ . Suy ra  $p|a - b$  hoặc  $p|k$ , mà  $k > |a - b| > 0$  nên  $p|k$  hay  $p = 1$ . Do đó tổng các phần tử của các tập trên nguyên tố cùng nhau.

Vậy  $\max n = 2^{2010} + 1$ .  $\square$

**Nhận xét :** Cũng giống như bài toán trên ta có thể thay 2011 bởi một số nguyên dương  $k$  bất kì, cách giải hoàn toàn tương tự, khi đó  $\max n = 2^{k-1} + 1$ .

**Ví dụ 27** (Ba Lan 2001, Trung Quốc 2001). Cho tập  $X = \{1; 2; \dots; 2001\}$ . Tìm số  $n$  bé nhất sao cho nếu  $A$  là tập con gồm  $n$  phần tử của  $X$  thì ta luôn có thể tìm được một phần tử là lũy thừa của 2 hoặc hai phần tử có tổng là lũy thừa của 2.

LỜI GIẢI. Đáp số là 999.

Giả sử  $A$  là một tập con của  $X$  không chứa bất kì một lũy thừa nào của 2 và không có 2 phần tử nào có tổng là lũy thừa của 2. Do đó  $A$  không chứa các phần tử  $1; 2; 2^2; \dots; 2^{10}$  và ít nhất một phần tử trong 992 cặp sau đây cũng bị loại:

17 cặp (47; 2001); (48; 2000); ...; (63; 1985)

63 cặp (65; 1983); (66; 1982); ...; (127; 1921)

127 cặp (129; 1919); (130; 1918); ...; (255; 1793)

255 cặp (257; 1981); (258; 1980); ...; (511; 1537)

511 cặp (513; 1535); (514; 1534); ...; (1023; 1025)

(Các cặp này có tổng là  $2^{11}$ )

14 cặp (18; 46); (19; 45); ...; (31; 33) (Các cặp này có tổng là  $2^6$ )

1 cặp (15; 17) (Cặp này có tổng là  $2^5$ )

4 cặp (3; 13); ...; (7; 19) (Các cặp này có tổng là  $2^4$ )

Vậy  $A$  chỉ chứa nhiều nhất 998 phần tử.

Xét tập có 998 phần tử sau:

977 phần tử: 1025; 1026; ...; 2001 (nhóm 1)

14 phần tử: 33; 34; ...; 46 (nhóm 2)

7 phần tử: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17 (nhóm 3)

Dễ thấy tập trên không có phần tử nào là lũy thừa của 2.

Tổng 2 phần bất kì trong nhóm 1 nằm giữa  $2 \cdot 1025 = 2050$  và  $2 \cdot 2001 = 4002$

Tổng 2 phần bất kì trong nhóm 2 nằm giữa  $2 \cdot 33 = 66$  và  $2 \cdot 46 = 92$

Tổng 2 phần bất kì trong nhóm 3 nằm giữa  $2 \cdot 9 = 18$  và  $2 \cdot 17 = 34$

Tổng 2 phần bất kì trong nhóm 1 và nhóm 2 nằm giữa  $33 + 1025 = 1058$  và  $46 + 2001 = 2047$

Tổng 2 phần bất kì trong nhóm 2 và nhóm 3 nằm giữa  $33 + 9 = 42$  và  $46 + 17 = 63$

Tổng 2 phần bất kì trong nhóm 1 và nhóm 3 nằm giữa  $1025 + 9 = 1034$  và  $2001 + 17 = 2018$

Vậy trong các tập con của  $S$  không có tập nào chứa hai phần tử có tổng là một lũy thừa của 2. Do đó  $\min n = 999$ .  $\square$

**Ví dụ 28** (IMO 1991). Xét tập  $S = \{1; 2; \dots; 280\}$ . Tìm số nguyên dương  $n$  nhỏ nhất sao cho  $n$  số bất kì lấy ra từ  $S$  có 5 số nguyên tố cùng nhau.

**LỜI GIẢI.** Đáp số là 217.

- Xét tập hợp  $A = \{k \in S \mid k \text{ chia hết cho } 2, 3, 5 \text{ hoặc } 7\}$ . Ta có

$$\begin{aligned} |A| &= \left\lfloor \frac{280}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{280}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{280}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{280}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{280}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{280}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{280}{14} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{280}{15} \right\rfloor \\ &\quad - \left\lfloor \frac{280}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{280}{35} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{280}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{280}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{280}{70} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{280}{105} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{280}{210} \right\rfloor \\ &= 216 \end{aligned}$$

và trong 5 phần tử bất kì của  $A$  luôn có hai số có ước chung lớn hơn 1. Do đó  $n > 216$ .

- Xét tập con  $T \subset S$ ;  $|T| = 217$ . Ta sẽ chứng minh  $T$  chứa 5 phần tử nguyên tố với nhau từng đôi một. Đặt

$$B_1 = A \setminus \{2; 3; 5; 7\}$$

$$B_2 = \{11^2, 11 \cdot 13; 11 \cdot 17; 11 \cdot 19; 11 \cdot 23; 13 \cdot 17; 13 \cdot 19\}$$

$$P = S \setminus (B_1 \cup B_2)$$



Khi đó ta có  $|P| = |S| - |B_1| - |B_2| = 60$  và  $P$  là hợp của 1 và tất cả các số nguyên tố trong  $S$ .

Nếu  $|T \cap P| \geq 5$  thì ta có điều cần chứng minh.

Nếu  $|T \cap P| < 5$ , ta có  $|T \cap (S \setminus P)| \geq 217 - 4 = 213$ .

Do đó tập hợp các số nguyên tố trong  $S$  có nhiều nhất  $280 - 213 - 60 = 7$  số không thuộc  $T$ . Xét các tập hợp  $M_1 = \{2 \cdot 23; 3 \cdot 19; 5 \cdot 17; 7 \cdot 13; 11 \cdot 17\}$

$$M_2 = \{2 \cdot 29; 3 \cdot 23; 5 \cdot 19; 7 \cdot 17; 11 \cdot 13\}$$

$$M_3 = \{2 \cdot 31; 3 \cdot 29; 5 \cdot 23; 7 \cdot 19; 11 \cdot 17\}$$

$$M_4 = \{2 \cdot 37; 3 \cdot 31; 5 \cdot 23; 7 \cdot 19; 11 \cdot 17\}$$

$$M_5 = \{2 \cdot 41; 3 \cdot 37; 5 \cdot 29; 7 \cdot 23; 11 \cdot 23\}$$

$$M_6 = \{2 \cdot 43; 3 \cdot 41; 5 \cdot 37; 7 \cdot 31; 13 \cdot 17\}$$

$$M_7 = \{2 \cdot 47; 3 \cdot 43; 5 \cdot 41; 7 \cdot 37; 13 \cdot 19\}$$

$$M_8 = \{2^2; 3^2; 5^2; 7^2; 13^2\}$$

Ta có  $M_i \subset S \setminus P$  và các phần tử của  $M_i$  nguyên tố cùng nhau. Tồn tại  $j$  để  $M_j \subset T$ .

Vậy  $\min n = 217$ . □

**Ví dụ 29.** Tìm số nguyên dương  $k$  nhỏ nhất sao cho mọi tập con  $k$  phần tử của tập  $\{1; 2; \dots; 50\}$  đều có chứa 2 phần tử phân biệt  $a$  và  $b$  sao cho  $a^2 + b^2$  là số chính phương.

**PHÂN TÍCH.** Gọi  $(a, b)$  là một cặp Pythagore nếu  $a^2 + b^2$  là số chính phương. Biểu diễn số trong tập  $\{1; 2; \dots; 50\}$  trên một graph, các số trong một cặp Pythagore thì được nối với nhau bằng một đoạn thẳng, các số không cùng nằm trong một cặp Pythagore nào thì không được nối với nhau.

Đầu tiên ta xây dựng tập  $B$  gồm ít phần tử nhất sao cho trong tập  $C = S \setminus B$  không có bộ Pythagore nào. Muốn vậy trên graph  $B$  phải là các đỉnh sao cho khi xóa các đỉnh này và tất cả các đỉnh được nối từ nó thì graph không còn cạnh nào nữa. Ta chọn các điểm thuộc  $B$  như sau:  $(3; 4); (33; 44)$  là 2 đoạn thẳng riêng rẽ nên ta chọn  $B \supset \{3; 33\}$  (hoặc  $B \supset \{3; 44\}$  hoặc  $B \supset \{20; 28\}$  hoặc  $B \supset \{4; 44\}$  đều được) và xóa các đoạn đó đi.

Các đoạn thẳng có một đầu là đỉnh đơn thì đỉnh kia (không đơn) phải thuộc  $B$  nên  $B \supset \{8; 12; 24; 36; 40; 48\}$ . Xóa chúng và các cạnh nối với chúng. Cặp  $(16; 30)$  riêng lẻ nên ta chọn  $B \supset \{16\}$  (hoặc  $B \supset \{30\}$ ). Cuối cùng  $B \supset \{20, 28\}$ . Lúc này graph đã bị xóa hết.

Vậy ta có  $B = \{3; 33; 12; 24; 8; 36; 40; 48; 16; 20; 28\}$ .

Tiếp theo ta sẽ chỉ ra 11 bộ Pythagore rời nhau, trong graph các cặp này chính là các đoạn thẳng rời nhau.

Muốn chọn đủ 11 cặp ta phải chọn được nhiều đoạn nhất.

Trước hết ta chọn 2 cặp  $(3; 4)$  và  $(33; 44)$ .

Tiếp đến ta chọn các cặp sau  $(5; 12); (7; 24); (6; 8); (27; 36); (40; 42); (48; 14); (16; 30)$  và chọn hai trong 4 cặp  $(42; 58); (28; 21); (21; 20); (20; 15)$ . Như vậy 11 cặp Pythagore rời nhau đã được xác định.

**LỜI GIẢI.** Trước hết ta liệt kê tất cả các cặp Pythagore:

$$(3; 4); (6; 8); (9; 12); (12; 16); (15; 20); (18; 24); (21; 28); (24; 32); (27; 36); (30; 40); (33; 44); (36; 48); (8; 15); (16; 30); (24; 45); (12; 35); (5; 12);$$

$(10; 24); (15; 36); (20; 48); (20; 21); (40; 42); (28; 45); (7; 24); (14; 48); (9; 40)$

Xét  $B = \{3; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 33; 36; 40; 48\}$ .

Dễ thấy mỗi cặp Pythagore đều có ít nhất một phần tử thuộc tập  $B$  nên  $C = S \setminus B$  là tập không chứa bất kì 1 cặp Pythagore nào. Vậy  $k > |C| = 39$ .

Xét 11 cặp số Pythagore rời nhau sau:

$(3; 4); (33; 44); (5; 12); (7; 24); (6; 8); (27; 36); (40; 42); (48; 14); (16; 30); (45; 28); (21; 20)$ . Vì mọi tập con chứa  $k$  phần tử của  $S$  phải chứa ít nhất một cặp Pythagore ở trên nên  $\min k = 40$ . Vậy  $\min k = 40$ .  $\square$

**Nhận xét :** Từ bài toán này ta nghĩ đến một bài toán khác có ý tưởng tương tự nhưng việc tìm tập  $B$  và các bộ rời nhau sẽ khó khăn hơn.  $\square$

**Ví dụ 30.** Tìm số nguyên dương  $k$  nhỏ nhất sao cho trong  $k$  phần tử tùy ý của tập  $\{1; 2; \dots; 50\}$  luôn chứa 3 số là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông.

Một bộ 3 số thuộc tập  $\{1; 2; \dots; 50\}$  được gọi là bộ 3 số Pythagore nếu 3 số đó là độ dài 3 cạnh tam giác vuông.

Có 15 bộ 3 số Pythagore sau:

$\{3; 4; 5\}, \{6; 8; 10\}, \{9; 12; 15\}, \{12; 16; 20\}, \{15; 20; 25\},$   
 $\{18; 24; 30\}, \{21; 28; 35\}, \{24; 32; 40\}, \{27; 36; 45\}, \{8; 15; 17\}$   
 $\{16; 30; 34\}, \{5; 12; 13\}, \{10; 24; 26\}, \{15; 36; 39\}, \{30; 40; 50\}$

Xét tập  $B = \{5; 8; 9; 16; 20; 24; 35; 36; 50\}$ .

Dễ thấy mọi bộ 3 số Pythagore đều có ít nhất một số thuộc tập  $B$  nên  $C = A \setminus B$  không chứa bộ 3 số Pythagore nào. Do đó  $k > |C| = 41$ .

Xét 9 bộ 3 số Pythagore rời nhau sau:

$\{3; 4; 5\}, \{6; 8; 10\}, \{12; 35; 37\}, \{27; 36; 45\}, \{9; 40; 41\}$   
 $\{20; 21; 29\}, \{14; 48; 50\}, \{16; 30; 34\}, \{7; 24; 25\}$

Bất cứ tập con 42 phần tử nào của  $A$  cũng phải chứa ít nhất một bộ 3 số Pythagore trong 9 bộ trên. Vậy  $\min k = 42$ .  $\square$

**Ví dụ 31.** Cho  $X = \{1; 2; \dots; 15\}$ .  $M$  là tập con của  $X$  sao cho tích của 3 phần tử khác nhau của  $M$  đều không là số chính phương. Tìm  $\max |M|$ .

**LỜI GIẢI.** Gọi bộ 3 số thuộc  $X$  có tích là số chính phương là một bộ tốt.

Ta chứng minh với mọi tập con  $T$  của  $X$  mà  $|T| = 11$  thì trong  $T$  luôn tồn tại một bộ tốt.

Thật vậy:

Các bộ tốt gồm:

Loại 1 (chứa 2):  $(2; 1; 8); (2; 3; 6) \dots$

Loại 2 (chứa 3, không chứa 2)

Loại 3 (chứa 8, không chứa 2, 3)

Loại 4 (chứa 15, không chứa 2, 3, 8)

Loại 5 (các bộ còn lại)

Trường hợp xấu nhất để  $T$  không chứa bộ tốt nào là 4 số không thuộc  $T$  phải tham gia vào nhiều bộ tốt nhất.

Để trường hợp xấu nhất xảy ra, ta chọn 4 số không thuộc  $T$  là 2; 3; 4; 15 nhưng vẫn còn một

tập loại 5. Do đó  $|M| < 11$ . Khi  $|M| = 10$  ta có tập sau :  $M = \{1; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 13; 14; 15\}$ .  
 Vậy  $\max |M| = 10$ .  $\square$

**Ví dụ 32** (THTT, Hello IMO 2007). Một lớp có 15 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Vào ngày 8/3 có một số nam sinh gọi điện đến chúc mừng một số nữ sinh. Biết rằng ta có thể phân chia tất cả học sinh của lớp một cách duy nhất thành 15 cặp sao cho mỗi cặp đều gồm một nữ sinh và một nam sinh mà nam sinh đó đã gọi điện thoại chúc mừng.  
 Hỏi có tối đa bao nhiêu cuộc điện thoại đã được gọi?

**LỜI GIẢI.** Giả sử 15 bạn nam là  $a_1, a_2, \dots, a_{15}$  và 15 bạn nữ là  $b_1, b_2, \dots, b_{15}$ , cách ghép cặp duy nhất là  $(a_i; b_i), (1 \leq i \leq 15)$ .

Với mỗi cuộc gọi  $(a_i; b_j), (i \neq j; 1 \leq i, j)$  ta cho ứng với một tập con gồm hai phần tử  $\{i; j\}$ .

Dễ thấy ứng với mỗi tập con hai phần tử  $\{i; j\}$  này có hai cuộc gọi  $(a_i; b_j)$  và  $(a_j; b_i)$  thì ta có cách ghép cặp thứ 2  $\{(a_k; b_k) \mid k \neq i, k \neq j\} \cup \{(a_i; b_j); (a_j; b_i)\}$  (mâu thuẫn).

Do đó số cuộc gọi không vượt quá  $15 + C_{15}^2 = 120$ . Cách gọi thoả mãn điều kiện bài toán là người  $a_i$  chỉ gọi cho đúng  $i$  người  $b_1, b_2, \dots, b_i$ . Vậy có tối đa 120 cuộc gọi.  $\square$

## Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Nho, *Tuyển chọn các bài toán từ những cuộc thi tại một số nước Đông Âu - 2 tập*, NXB Giáo dục, 2005.
- [2] Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Nho, *40 năm Olympic toán học quốc tế*, NXB Giáo dục, 2003.
- [3] Nguyễn Văn Nho, *Tuyển chọn các bài toán từ một số cuộc thi tại Trung Quốc*, NXB Giáo dục, 2002.
- [4] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc Tổ hợp và rời rạc*, NXB Giáo dục, 2008.
- [5] Phan Huy Khải, *Các bài toán hình học tổ hợp*, NXB Giáo dục, 2006.
- [6] Một số đề IMO Shortlist, VMO, Việt Nam TST.
- [7] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.
- [8] Tập san Tự học toán của học sinh chuyên toán trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An các khóa K29, K32, K33.
- [9] Tài liệu tập huấn giáo viên chuyên toán năm 2011.



# MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP ĐIỂN HÌNH VỀ BÀN CỜ

Nguyễn Việt Dũng<sup>1</sup>

Tổ hợp bàn cờ bao gồm các bài toán hay và khó. Bài viết này thông qua một số bài toán điển hình nhằm giúp cho bạn đọc có nhìn tổng quan và phương hướng giải quyết khi gặp các bài toán bàn cờ dạng này.

## Bài toán 1.

- (a) Tìm số lớn nhất các quân xe có thể đặt trên bàn cờ  $n \times n$  để sao cho không có hai quân nào tấn công lẫn nhau? Và có bao nhiêu cách đặt thỏa mãn với số lượng quân xe đó?
- (b) Tìm số nhỏ nhất các quân xe có thể sắp xếp trên một bàn cờ  $n \times n$  sao cho bất kì ô vuông nào trên bàn cờ đều bị khống chế bởi ít nhất một quân xe trong số chúng? Có bao nhiêu cách xếp thỏa mãn với số lượng quân xe đó?

LỜI GIẢI. (a) Do không có quân xe nào trên bàn cờ tấn công quân khác nên điều kiện cần và đủ là không có hai quân nào nằm trên cùng hàng hoặc cùng cột. Do đó tổng số các quân xe không vượt quá  $n$ . Ta chỉ ra cách đặt  $n$  quân thỏa mãn điều kiện bài toán là đặt  $n$  quân xe trên đường chéo chính của bàn cờ.

Chúng ta sẽ xác định số cách sắp xếp  $n$  quân xe thỏa mãn điều kiện bài toán. Trước hết chúng ta gọi quân xe ở cột đầu tiên là quân xe đầu tiên, quân xe ở cột thứ 2 là quân xe thứ 2, ... và quân xe ở cột thứ  $n$  là quân xe thứ  $n$ . Quân xe đầu tiên có thể di chuyển trong  $n$  ô. Với bất kì cách đặt quân xe đầu tiên ở hàng nào thì còn lại  $n - 1$  hàng để các quân xe còn lại có thể di chuyển. Hay quân xe thứ 2 có thể di chuyển trong  $n - 1$  hàng. Và các quân xe còn lại có khả năng di chuyển trong  $n - 2$  hàng. ... Cuối cùng chỉ có duy nhất một hàng cho quân xe thứ  $n$  có thể đặt. Theo quy tắc nhân, số cách đặt  $n$  quân xe thỏa mãn bài ra là  $n(n - 1)(n - 2) \cdots 1 = n!$  cách đặt khác nhau.

(b) Rõ ràng không thể dùng ít hơn  $n$  quân xe để đặt lên bàn cờ  $n \times n$  thỏa mãn bài ra vì trái lại dùng ít hơn  $n$  quân thì sẽ có một cột và một hàng không chứa quân xe nào, khi đó ô giao nhau của cột và hàng đó không bị kiểm soát bởi bất kì quân xe nào. Mặt khác, rõ ràng có thể đặt  $n$  quân xe trên bàn cờ thỏa mãn bài toán nên  $n$  là số nhỏ nhất thỏa mãn bài ra.

Nếu  $n$  quân xe trên bàn cờ  $n \times n$  kiểm soát mọi ô vuông trên bàn cờ thì có hoặc một quân xe trên mỗi cột hoặc một quân xe trên mỗi hàng. Ngược lại nếu có một quân xe trên mỗi hàng hoặc một quân xe trên mỗi cột thì chúng sẽ kiểm soát cả bàn cờ. Số các cách sắp xếp  $n$  quân xe trên mỗi cột là  $n^n$  (mỗi quân có thể đặt trên  $n$  hàng). Tương tự có  $n^n$  cách sắp xếp các quân

---

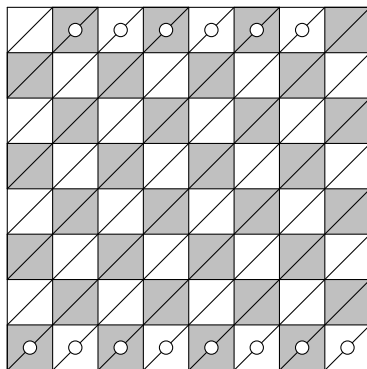
<sup>1</sup>Lớp 12A1, THPT chuyên ĐHKHTN - ĐHQGHN.

xe để mỗi hàng chứa một quân xe. Mặt khác ở hai cách xếp trên bị trùng nhau  $n!$  cách (xem câu a) nên đáp số là  $2n^n - n!$ .  $\square$

## Bài toán 2.

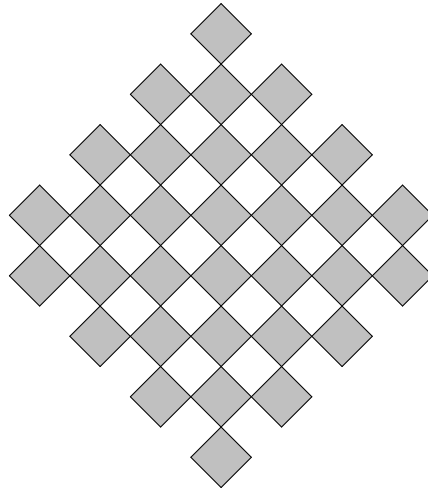
- (a) Tìm số lớn nhất các quân tượng có thể sắp xếp trên bàn cờ  $8 \times 8$  sao cho không có quân nào tấn công quân khác? Giải bài toán với bàn cờ  $n \times n$ ?
- (b) Tìm số nhỏ nhất các quân tượng có thể sắp xếp trên một bàn cờ  $8 \times 8$  sao cho bất kì ô vuông nào trên bàn cờ đều bị khống chế bởi ít nhất một quân tượng trong số chúng? Giải bài toán với bàn cờ  $n \times n$ ?

**LỜI GIẢI.** (a) Xét các đường chéo đi từ góc dưới bên trái lên góc trên bên phải (để gọn hơn ta gọi các đường chéo này là các đường chéo dương). Có tất cả 15 đường chéo như vậy (hình minh họa). Nếu không có hai quân tượng nào tấn công lẫn nhau thì không thể có hơn một quân cùng nằm trên một đường chéo. Do đó tổng số quân tượng không thể lớn hơn 15. Nhưng không thể đặt tất cả 15 quân trên bàn cờ vì quân đầu tiên và quân cuối cùng cùng nằm trên một hàng. Do đó, nhiều nhất 14 quân tượng có thể xếp trên bàn cờ thỏa mãn. Ta chỉ ra cách xếp thỏa mãn trong trường hợp 14 quân tượng như hình sau

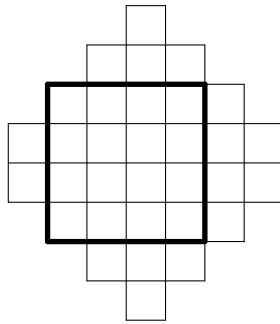


Tổng quát cho bàn cờ  $n \times n$ , với cách lập luận tương tự ta nhận được số lớn nhất các quân tượng có thể đặt là  $2n - 2$ .

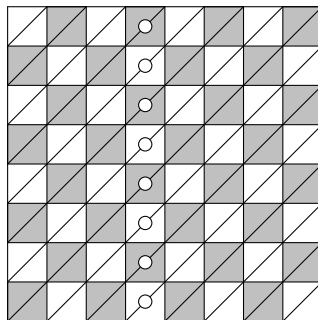
(b) Chúng ta sẽ chứng tỏ rằng cần ít nhất 8 quân tượng để sắp xếp trên bàn cờ  $8 \times 8$  thỏa mãn. Để làm điều này chúng ta tô màu xen kẽ các ô bàn cờ và chứng tỏ phải có ít nhất 4 quân tượng trên mỗi màu. Quy ước quân tượng chiếm giữ ô đen là quân tượng đen và quân tượng chiếm giữ ô trắng là quân tượng trắng. Nếu các hình vuông đen được quay một góc  $45^\circ$  theo chiều ngược chiều kim đồng hồ như hình sau



Để thuận tiện, ta thay đổi thành hình sau



Khi đó các quân tượng có thể di chuyển ngang và dọc như các quân xe. Bây giờ chúng ta thấy rằng cần ít nhất 4 quân xe để đặt vào các hình vuông trong hình trên vì nó chứa hình vuông  $4 \times 4$  (in đậm). Do đó chúng ta cần ít nhất 4 quân tượng đen, và tương tự cần ít nhất 4 quân tượng trắng. Mặt khác, chúng ta chỉ ra cách xếp thỏa mãn cho 8 quân tượng như trong hình sau



Giải bài toán với bàn cờ  $n \times n$ .

Tổng quát hơn, với  $n = 2k$  thì chúng ta có thể chứng minh rằng cần ít nhất  $n$  quân tượng để đặt vào bàn cờ  $n \times n$ . Bằng cách quay một góc  $45^\circ$  các ô vuông màu đen và chuyển các quân tượng thành các quân xe, khi đó sẽ có một ô vuông  $k \times k$  chứa trong hình mới.

Từ đó cần ít nhất  $k$  quân tượng đen, và tương tự cần ít nhất  $k$  quân tượng trắng. Tổng số quân

tượng ít nhất là  $k + k = n$ .

Mặt khác  $n$  quân tượng để xếp trên bàn cờ thỏa mãn bài ra vì chúng ta có thể đặt trên cùng một cột. Khi đó mỗi ô vuông bị khống chế bởi ít nhất một quân tượng.

Trong trường hợp  $n$  lẻ, vị trí các quân cờ được đặt khác một chút vì số ô đen khác với số ô trắng. Tuy nhiên ta vẫn có thể giải tương tự như trong trường hợp bàn cờ  $8 \times 8$ . Một cách đặt thỏa mãn là đặt các quân cờ trên cùng một cột của bàn cờ.

Tương tự như trên, quay bàn cờ một góc  $45^\circ$ , ta thu được hai hình tương ứng với các ô màu đen và các ô màu trắng. Trong đó hình tương ứng với các ô đen chứa hình vuông  $4 \times 4$  và hình tương ứng với các ô trắng chứa hình vuông  $5 \times 5$ . Do đó chúng ta cần ít nhất  $4 + 5 = 9$  quân tượng để đặt lên bàn cờ. Với số quân này có cách xếp thỏa mãn như trên.

Tổng quát, nếu  $n = 2k + 1$  là số lẻ bất kì thì với cách chứng minh tương tự thì có tổng số  $k + (k + 1) = n$  quân tượng cần dùng, bởi vì có thể biến đổi các ô trắng thành hình chứa bảng  $(k + 1) \times (k + 1)$  (do ô trắng nằm ở góc nên sẽ nhiều hơn ô đen) và hình chứa bảng  $k \times k$  ô đen. Ta có thể chỉ ra trường hợp như vậy bằng cách đặt các quân tượng vào đường chéo chính giữa.  $\square$

**Bài toán 3.** Chứng minh rằng với  $n$  chẵn, các số sau là các số chính phương

- Số các cách sắp xếp khác nhau các quân tượng trên bàn cờ  $n \times n$  để không có quân tượng nào tấn công quân khác và số lớn nhất các quân tượng có thể được sử dụng.
- Số các cách sắp xếp khác nhau các quân tượng trên bàn cờ  $n \times n$  để mỗi ô vuông đều bị kiểm soát bởi ít nhất một quân tượng và số nhỏ nhất các quân tượng được sử dụng.

**LỜI GIẢI.** (a) Bởi vì các quân tượng chỉ kiểm soát hoặc các ô màu trắng hoặc các ô màu đen. Bài toán về việc xây dựng cách xếp lớn nhất các quân tượng để không có hai quân nào tấn công lẫn nhau có thể phân hoạch bàn cờ thành hai phần không phụ thuộc vào nhau; xây dựng cách xếp nhiều nhất các quân tượng trắng (đen) để không có hai quân nào tấn công lẫn nhau. Theo giả thiết thì  $n$  chẵn nên các ô đen trên bàn cờ có thể chuyển thành các ô trắng bởi phép quay  $90^\circ$ . Do đó số các quân tượng trắng trong cách xếp lớn nhất bằng số quân tượng đen trong cách xếp lớn nhất và chúng tương đương nhau về cách xếp.

Bởi vì tổng số quân tượng là  $2n - 2$  (theo bài 2) nên mỗi màu có  $n - 1$  quân. Chúng ta nhận được số cách xếp thỏa mãn của  $2n - 2$  quân tượng trên bảng bởi số cách xếp thỏa mãn của  $n - 1$  quân tượng đen và cách xếp thỏa mãn của  $n - 1$  quân tượng trắng. Theo quy tắc nhân suy ra tổng số cách xếp thỏa mãn là bình phương số cách xếp của  $n - 1$  quân tượng mỗi màu.

(b) Lời giải tương tự phần a.  $\square$

**Bài toán 4.** Chứng minh rằng trong cách sắp xếp các quân tượng thỏa mãn giả thiết bài 3a, tất cả các quân tượng đều nằm ở các hàng ngoài cùng và các cột ngoài cùng của bàn cờ.

**LỜI GIẢI.** Trước hết theo bài 3a ta có cách sắp xếp để  $2n - 2$  quân tượng trên bảng  $n \times n$  mà không có 2 quân nào tấn công lẫn nhau.

Trên mỗi ô vuông của bảng ta viết số các quân tượng kiểm soát nó. Một ô vuông bị kiểm soát bởi một quân tượng được đánh dấu bởi số 1 (quy ước mỗi quân tượng kiểm soát chính nó). Không có hình vuông nào được đánh dấu bởi 0, bởi vì nếu có hình vuông như thế chúng ta có



thể đặt một quân tượng mới vào nó mà không tấn công quân khác, điều này mâu thuẫn với tính lớn nhất của cách xếp đã cho.

Các ô vuông ở góc được đánh dấu bởi 1 bởi vì chỉ có một đường chéo đi qua nên chỉ có một quân tượng kiểm soát nó. Các ô không ở góc được đánh dấu bởi hoặc 1 hoặc 2, bởi vì mỗi ô chỉ có hai đường chéo đi qua và có nhiều nhất một quân tượng trên mỗi đường chéo này. Trên 4 góc của bàn cờ, ít nhất hai ô không được đặt quân tượng nào vì nếu có nhiều hơn hai ô được đặt thì sẽ có hai quân tượng cùng nằm trên một đường chéo và chúng tấn công lẫn nhau.

Do đó có ít nhất  $2n$  ô vuông được đánh dấu bởi 1 ( $2n$  ô vuông này gồm các ô được đặt tượng và các góc không được đặt tượng). Đặt  $S$  là tổng tất cả các số được viết trên bàn cờ. Bởi vì có ít nhất  $2n$  phần tử cộng thêm vào  $S$  1 đơn vị và  $n^2 - 2n$  phần tử cộng thêm vào  $S$  ít nhất 2 đơn vị nên ta có

$$S \leq 2n + 2(n^2 - 2n) = n(2n - 2) \quad (1)$$

Bây giờ giả sử rằng trong cách xếp đã cho có  $B$  quân tượng trên biên và  $I$  quân tượng ở phía bên trong của bảng (do đó  $B + I = 2n - 2$ ). Một quân tượng trên biên luôn kiểm soát chính xác  $n$  ô vuông (bao gồm cả chính nó). Ví dụ, nếu một quân tượng nằm trên một ô vuông trên hàng đầu tiên hoặc hàng cuối cùng, nó sẽ kiểm soát chính xác một ô vuông trên một cột. Mặt khác, một quân tượng trên một ô vuông nằm phía trong sẽ kiểm soát ít nhất  $n + 1$  ô vuông. Nhưng khi một quân tượng kiểm soát một ô vuông thì nó thêm một đơn vị vào số được viết trên ô vuông đó. Khi đó, chúng ta có:

$$S \geq nB + (n + 1)I = n(B + I) + I = n(2n - 2) + I$$

Kết hợp với (1) suy ra  $n(2n - 2) + I \leq n(2n - 2)$ .

Suy ra  $I \leq 0$ . Mà ta luôn có  $I \geq 0$ . Vậy  $I = 0$  chứng tỏ tất cả các quân tượng ở biên.  $\square$

**Bài toán 5.** Có bao nhiêu cách xếp 8 con xe lên bàn cờ vua sao cho không có con xe nào nằm trên đường chéo chính (đường chéo nối góc trên bên trái và góc dưới bên phải) và không có con nào ăn con nào?

**LỜI GIẢI.** <sup>2</sup> Kí hiệu  $u_n$  là số cách xếp các quân xe thỏa đề bài ứng với bàn cờ  $n \times n$ . Gọi con xe ở hàng thứ  $i$  là  $X_i$ .

Xét bàn cờ  $n \times n$ . Không giảm tổng quát, có thể giả sử  $X_1$  nằm ở ô B1 (sau cùng sẽ nhân  $n - 1$  lên).

- Nếu  $X_2$  nằm ở A2 : Ta có thể xóa đi (không quan tâm đến) hàng 1, 2 và cột A, B. Phần còn lại của bảng có số cách xếp quân xe là  $u_{n-2}$ .
- Nếu  $X_2$  nằm ở các ô còn lại (tức là khác A2, B2), ta có thể xóa đi hàng 1 và cột B, sau đó tịnh tiến cột A lại tạo thành một bàn cờ mới với yêu cầu xếp các quân xe vẫn như cũ. Vậy số cách xếp là  $u_{n-1}$ .

Rõ ràng, với cách giải quyết bài toán bằng tịnh tiến bàn cờ như vậy thì dù  $X_1$  nằm ở đâu ta cũng chỉ có hai trường hợp của các quân xe như trên, và kết quả cũng tương tự. Do đó có thể

<sup>2</sup>Của bạn Nguyễn Hưng, Trường THPT Nguyễn Thượng Hiền, TP.HCM.

giả sử như trên.

Vậy  $u_n = (n-1)u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}$  với  $u_1 = 0, u_2 = 1$ . Ta cần tính  $u_8$ .

Ta tính được  $u_3 = 2, u_4 = 3(2+1) = 9, u_5 = 4(u_4 + u_3) = 44, u_6 = 5(u_5 + u_4) = 265, u_7 = 6(u_6 + u_5) = 1854, u_8 = 7(u_7 + u_6) = 14833$ .  $\square$

Để hiểu rõ hơn, sau đây là một số bài tập các bạn tự luyện.

**Bài tập 1.** Xác định số các cách sắp xếp các quân tượng và số nhỏ nhất các quân tượng được sử dụng để bất kì ô vuông nào đều bị kiểm soát bởi ít nhất một con tượng

- (a) Trên bàn cờ  $8 \times 8$ .
- (b) Trên bàn cờ  $9 \times 9$ .
- (c) Trên bàn cờ  $10 \times 10$ .
- (d) Trên bàn cờ  $n \times n$ .

**Bài tập 2.** Tìm số lớn nhất các quân vua có thể sắp xếp để không có hai quân nào tấn công lẫn nhau

- (a) Trên bàn cờ  $8 \times 8$ .
- (b) Trên bàn cờ  $n \times n$ .

**Bài tập 3.** Tìm số nhỏ nhất các quân vua có thể sắp xếp để bất kì ô vuông nào đều bị kiểm soát bởi ít nhất một quân vua

- (a) Trên bàn cờ  $8 \times 8$ .
- (b) Trên bàn cờ  $n \times n$ .

**Bài tập 4.** Tìm số lớn nhất các quân hậu có thể sắp xếp để không có hai quân nào tấn công lẫn nhau

- (a) Trên bàn cờ  $8 \times 8$ .
- (b) Trên bàn cờ  $n \times n$ .

**Bài tập 5.**

- (a) Tìm số lớn nhất các quân mã có thể sắp xếp trên bàn cờ  $8 \times 8$  để không có hai quân nào tấn công lẫn nhau.
- (b) Xác định số các cách sắp xếp các quân mã trên bàn cờ  $8 \times 8$  để không có hai quân nào tấn công lẫn nhau và số lớn nhất các quân mã có thể được sử dụng..

## Tài liệu tham khảo

[1] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

[2] Các diễn đàn Toán học :

- Diễn đàn Art of Problem Solving (Mathlinks)  
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/index.php>
- Diễn đàn MathScope  
<http://forum.mathscope.org/index.php>
- Diễn đàn Toán học VMF  
<http://diendantoanhoc.net/forum>



# SỐ STIRLING LOẠI HAI

Hoàng Minh Quân<sup>1</sup>

## Các kí hiệu sử dụng trong chuyên đề

1.  $[x]_0 = 1, [x]_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$
2.  $[x]^0 = 1, [x]^n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$

## 1. Định nghĩa

Trước khi đến định nghĩa chúng ta bắt đầu với ví dụ sau:

**Ví dụ 1.** Hãy chỉ ra rằng có 7 cách phân hoạch tập hợp  $\{1, 2, 3, 4\}$  gồm 4 phần tử thành hai tập con khác rỗng.

LỜI GIẢI. Chúng ta sẽ chỉ ra có 7 cách phân hoạch thỏa mãn đề bài:

$\{1\} \cup \{2, 3, 4\}, \{2\} \cup \{1, 3, 4\}, \{3\} \cup \{1, 2, 4\}, \{4\} \cup \{1, 2, 3\}, \{1, 2\} \cup \{3, 4\}, \{1, 3\} \cup \{2, 4\}, \{1, 4\} \cup \{2, 3\}.$   $\square$

**Định nghĩa 1.** Số phân hoạch tập hợp  $n$  phần tử thành  $k$  khối không rỗng (partitions in  $k$  blocks) gọi là số Stirling loại II, kí hiệu  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ .

Nói cách khác, số Stirling loại 2 là số cách phân phối  $n$  quả bóng phân biệt vào  $k$  hộp giống nhau mà không có hộp nào rỗng.

Điều khó khăn đối với chúng ta là đi tìm công thức tổng quát cho số Stirling loại 2. Bài viết sau sẽ chỉ ra một số cách chứng minh và các vấn đề liên quan đến số Stirling loại 2.

**Mệnh đề 1.** Số toàn ánh từ tập  $n$  phần tử vào tập  $k$  phần tử bằng  $k! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ .

CHỨNG MINH. Lấy các tập hợp  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  và  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ .

Ta biết rằng mỗi cách phân hoạch một tập hợp tương ứng 1-1 với một quan hệ tương đương trên tập hợp đó. Có  $k!$  toàn ánh 1-1 như vậy và theo định nghĩa có  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  cách phân chia tập  $X$ . Do đó ta có số toàn ánh từ tập  $n$  phần tử vào tập  $k$  phần tử bằng  $k! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ .  $\square$

## 2. Công thức tính số Stirling

**Định lý 1.** Số Stirling loại 2 được tính theo công thức sau :

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

---

<sup>1</sup>Giáo viên trường THPT Ngọc Tảo, Hà Nội.

CHỨNG MINH. (i) *Cách 1.* Gọi  $N$  và  $K$  là hai tập hợp với  $|N| = n, |K| = k$ .  $H$  là tập con của  $K$  và  $f(H)$  là số ánh xạ từ  $N$  tới  $K \setminus H$ .

Thay  $i = k - j$  và áp dụng nguyên lí bù trừ, ta có:

$$\begin{aligned} k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} &= \#\{f : N \rightarrow K \mid f \text{ là toàn ánh}\} \\ &= \sum_{H \subseteq K} (-1)^{|H|} f(H) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} (i)^n \end{aligned}$$

(ii) *Cách 2.* Áp dụng hàm sinh lũy thừa cho số Stirling loại 2:

$$G_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} e^{ix} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n \right\} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

□

## Một số giá trị của số Stirling loại 2

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

## 3. Một số bài toán về số Stirling loại 2

Bài toán 1. Chứng minh rằng

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$$

LỜI GIẢI. Kí hiệu  $[n]$  là tập gồm  $n$  phần tử.

Với mỗi cách phân hoạch  $[n]$  thành  $k$  khối ta đều thu được từ một phân hoạch  $[n-1]$  thành  $k$  khối bằng cách bổ sung phần tử  $n$  vào một trong  $k$  khối (điều này có  $k$  cách thực hiện) hoặc thu được từ một phân hoạch  $[n-1]$  thành  $k-1$  khối bằng cách bổ sung một khối mới  $\{n\}$ . Từ đó ta có  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$ .  $\square$

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x(x-1)(x-2) \cdots (x-k+1) = x^n$$

LỜI GIẢI.

$$\begin{aligned} x^n &= \#\{f : N \rightarrow X\} \\ &= \sum_{k=0}^n \#\{N \rightarrow X : |f(N)| = k\} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} k! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x(x-1)(x-2) \cdots (x-k+1) \end{aligned}$$

Chẳng hạn với  $n=3$  ta có

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \cdot x + \left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \cdot x(x-1) + \left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} \cdot x(x-1)(x-2) &= 1 \cdot x + 3(x^2 - x) + 1(x^3 - 3x^2 + 2x) \\ &= x^3 \end{aligned}$$

$\square$

**Bài toán 3.** Chứng minh rằng với  $n \geq 2$ , ta có

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$$

LỜI GIẢI. Ý tưởng : Đây là một đẳng thức chứa biến  $n$ . Đối với những bài toán chứa một biến  $n$  chúng ta thường chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Cụ thể bài này ta làm như sau:

Với  $n=2$  ta có:  $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 1, 2^1 - 1 = 1$  vậy  $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^1 - 1$  (đúng)

Giả sử đẳng thức đúng với  $n=k \geq 2$ , tức là  $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{k-1} - 1$ , ta chứng minh đẳng thức đúng với  $n=k+1$ , thật vậy:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} k+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} &= \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \quad (\text{theo bài toán 1}) \\ &= 1 + 2(2^{k-1} - 1) \\ &= 1 + 2^k - 2 = 2^{(k+1)-1} - 1 \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.  $\square$

**Bài toán 4.** Chứng minh đẳng thức về hàm sinh lũy thừa cho số Stirling loại 2 :

$$f_k(u) = \sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \frac{u^n}{n!} = \frac{(e^u - 1)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

LỜI GIẢI. Từ tính chất  $t^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} [t]_k$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , áp dụng công thức nhị thức Newton ta xây dựng được hàm sinh

$$f(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} [t]_k \frac{u^n}{n!} = e^{tu}$$

Ta có

$$f(t, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{u^n}{n!} [t]_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(u) [t]_k \quad (1)$$

Mặt khác ta có

$$f(t, u) = [1 + (e^u - 1)]^t = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} (e^u - 1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^u - 1)^k}{k!} [t]_k \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$f_k(u) = \sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{u^n}{n!} = \frac{(e^u - 1)^k}{k!}$$

□

**Bài toán 5.** Chứng minh rằng số Stirling loại 2 với  $k = 0, 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$  được biểu diễn dưới dạng sau:

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\}$$

LỜI GIẢI. Từ công thức  $t^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} [t]_k$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (\*) và từ  $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$  ta có

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} [t+1]_{k+1} = (t+1)^{n+1}$$

Mặt khác lại có  $[t+1]_{k+1} = (t+1)[t]_k$

Do đó ta có

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} [t]_k = (t+1)^n$$

Áp dụng công thức nhị thức Newton và từ (\*) ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} [t]_k &= (t+1)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \sum_{k=0}^r \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} [t]_k \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} \right) [t]_k \end{aligned}$$

Vậy

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\}$$

□