# 가감법으로
# 연립방정식을 풀기 위한 행렬
# Matrices for solving systems
# By elimination

조수영

# 행 사다리꼴 행렬을 이용하여 3차연립방정식과 4개의 변수 풀기

# Solving a system of 3 equations and 4 variables using matrix row-echelon form

새로 등장하는 용어

1. 계수행렬
2. 첨가행렬
3. 행사다리꼴
4. 기약행사다리꼴

# 계수행렬Coefficient Matrix

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

# 첨가행렬Augmented matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad (A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

방정식의 계수행렬 A

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 2. \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

# 행사다리꼴행렬Row Echelon Form matrix, REF

(사다리꼴행렬(Echelon from matrix)라고도 한다)

$$\begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 2 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_6 \end{bmatrix}$$

1. 0행이 아닌 행의 처음으로 0이 아닌 숫자가 1이어야 한다. (이를 선행Leading 1이라고 한다.)
2. 0행이 존재하는 경우, 이들 0은 행렬의 바닥에 모여있다.
3. 0행이 아닌 위 아래로 서로 연속된 행에서, 아래행의 leading 1은 윗 행의 leading 1보다 오른쪽에 위치한다.

# 기약행사다리꼴Reduced row echelon form

leading

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & \boxed{1} & a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & b_3 \end{bmatrix}$$

1. 0행이 아닌 행의 처음으로 0이 아닌 숫자가 1이어야 한다. (이를 선행Leading 1이라고 한다.)
2. 0행이 존재하는 경우, 이들 0은 행렬의 바닥에 모여있다.
3. 0행이 아닌 위 아래로 서로 연속된 행에서, 아래행의 leading 1은 윗 행의 leading 1보다 오른쪽에 위치한다.
4. <u>leading 1이 속한 열의 나머지 성분은 모두 0이다.</u>

다음과 같은 방정식이 주어졌을 때,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

계수행렬을 이용해 첨가행렬을 만든다

가감법을 이용해 방정식의 형태를 계산하기 쉽게 변화시킨다 – 기약행사다리꼴을 만든다.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \text{Row2 - Row1} \\ \text{Row3 - 2Row1} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -10 \end{array}\right)$$

Row2 - Row1
1-1, 2-2, 1-2, 1-(-1) | 7-(-5) = 0,0, -1, 2 | 12

Row3 - 2Row1
2-2*1, 4-2*2, 0-2*1, 6-2*1 | 4-2*7 = 0, 0, -2, 4, | -10

이 방법으로 기약행사다리꼴이 나올때까지 반복한다.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \text{Row1 - Row2} \\ \\ \text{Row3 - 2Row1} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

기약행사다리꼴을 다시 방정식으로 옮긴다

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$$

방정식을 해 x1, x2, x3, x4에 대해 예쁘게 정리해보면,

$$\begin{cases} x_1 \boxed{+ 2x_2 + 3x_4} = 2 \\ x_3 \boxed{- 2x_4} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \boxed{- 2x_2 - 3x_4} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 5 \boxed{+ 2x_4} \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 5 + \underline{0x_2} + 2x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

x2는 계수가 0인 항이라고 생각하자.

정리된 방정식을 다시 해집합을 나타내는 벡터로 바꿔보자

두 벡터는 평면을 만든다

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 5 + 0x_2 + 2x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \boxed{x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

세 벡터의 선형결합이 된다.

즉, 해집합은 공간 $\mathbb{R}^4$ 상에서 (2, 0, 5, 0)을 포함하는 평면을 만든다.

# 행렬을 이용하여 선형계 풀기
# Solving linear system with matrices

이 방정식을 어떻게 행렬을 이용해서 풀까?

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+3z=0 \\ x+3y+4z=-2 \end{cases}$$

1. 계수행렬-첨가행렬을 만든다
2. 기약행사다리꼴을 만든다
3. 만들어진 기약행사다리꼴에서 해를 구한다.

1. 계수행렬-첨가행렬을 만든다

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = -2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

## 2. 기약행사다리꼴을 만든다

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \text{Row2 - Row1} \\ \text{Row1 - Row3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \text{Row1 - Row2} \\ \\ \text{2Row2 + Row3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

# 2. 기약행사다리꼴을 만든다 Cnt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \text{Row1 + Row3} \\ \text{Row2 - 2Row3} \\ \phantom{0} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

만들어진 기약행사다리꼴에서 해를 구한다!!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

행 사다리꼴을 이용하여 선형계는 해가 없다는 것을 알아보기
Using matrix row-echelon form in order to show a linear system has no solutions

일반적으로 미지수가 방정식보다 많으면,

방정식의 해는 존재하지 않거나 무한한 해를 가진다.

다음과 같은 방정식이 주어졌을 때,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

계수행렬을 이용해 첨가행렬을 만든다

# 기약사다리꼴행렬로 만든다

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \\ \text{Row2 - Row1} \\ \text{Row3 - 2Row1} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{4} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{4} & \boxed{-12} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -12 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \text{Row1 - Row2} \\ \\ \text{2Row2 + Row3} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-4} \end{array}\right)$$

불가능한 방정식!

그렇다면 이렇게 생각할 수 있다.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_4 = 4 \end{cases}$$

**방정식의 관점**

이 연립방정식은 해를 갖지 않는다.

**벡터의 관점**

이 세 평면은 $\mathbb{R}^4$ 공간에서 서로 만나지 않는다.

# 정리

- $0 = c(c \in \mathbb{R})$ 일 때: 해가 존재하지 않는다.

$$\begin{cases} 3x + 6y + 9z = 5 \\ 3x + 6y + 9z = 3 \end{cases}$$

에서 위에서 아래의 식을 가감법으로 정리하면 0 = 3이 나온다

- 기약사다리꼴행렬의 leading이 방정식의 개수만큼 존재하면: 유일한 해가 존재한다.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

에서 a=1, b=1, c=1, d=1이다.

- 기약사다리꼴행렬에 자유변수가 있는 경우: 무수한 해가 존재한다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

은 무수한 해를 가진다.