역수와 행렬식 구하기
Finding inverses and determinants

MyMusicTaste
FE Developer 조수영

공부할 내용

1. 역변환을 판별하는 방법을 추론해보기
2. 역행렬을 실제로 구해보기
3. 2x2 행렬의 역행렬
4. 3x3 행렬식
5. nxn 행렬식
6. 다른 행/열을 이용하여 행렬식 구하기
7. 사루스를 법칙을 이용하여 행렬식 구하기

역변환을 판별하는 방법 추론하기
Deriving a method for determining inverses

오랜만에 행렬의 기본행 연산을 해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{Row2 + Row1} \\ \text{Row3 - Row1} \end{array}$$

이 때 행렬의 연산을 **변환** T로 나타내면 어떻게 될까?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Row2 + Row1} \\ \text{Row3 - Row1} \end{array}$$

$$T : \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1 \end{bmatrix}$$

그럼 변환 T를 **변환행렬** S로 나타내면 어떻게 될까?

$$T(\vec{r}) = S\vec{r}$$

$$T : \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

변환행렬 S를 이용해서 처음의 행렬 A의 기본행 연산을 다시 해보면,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$SA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$SA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + \cancel{0 \cdot (-1)} + \cancel{0 \cdot 1} & 1 \cdot (-1) + \cancel{0 \cdot 2} + \cancel{0 \cdot 1} & 1 \cdot (-1) + \cancel{0 \cdot 3} + \cancel{0 \cdot 4} \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + \cancel{0 \cdot 1} & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + \cancel{0 \cdot 1} & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + \cancel{0 \cdot 4} \\ -1 \cdot 1 + \cancel{0 \cdot (-1)} + 1 \cdot 1 & -1 \cdot (-1) + \cancel{0 \cdot 2} + 1 \cdot 1 & -1 \cdot (-1) + \cancel{0 \cdot 3} + 1 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

정리하면,

행렬 A를 기본행 연산을 한다

= 행렬 A에 변환함수 T를 적용한다.

= 행렬 A에 변환행렬 S를 곱한다.

rref로 확대하면,

행렬 A를 rref(A)로 바꾸는 과정

= 행렬 A를 n번 기본행 연산을 한다.

= 행렬 A에 n개의 변환함수를 적용한다.

= 행렬 A에 n개의 변환행렬 $S_1, S_2, \ldots, S_n$를 곱한다.

= rref(A) = $S_1 S_2 \ldots S_n A$

이 때 rref(A) = $S_1 S_2 ... S_n A$ = I (단위행렬)이라면,

- rref(A) = $S_1 S_2 ... S_n A$ = I 에서 $S_1 S_2 ... S_n$ 는 A^{-1}와 같다.
- 어떤 행렬의 rref가 단위행렬이라면, 그 행렬은 가역행렬이다.

$$[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$$

역행렬을 실제로 구해보자
Example of finding matrix inverse

행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 의 역행렬을 구해보자.

$$[A|I]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Row2 + Row1

Row3 - Row1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Row2 + Row1

Row3 - 2Row2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Row1 - Row3

Row2 - 2Row3

$$[I|A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

2x2 역행렬 식
Formula for 2x2 inverse

Q. 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$일 때 A^{-1}는?

$[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$ 를 이용해서 풀어봅시다.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1. c를 0으로 만든다.

2. b를 0으로 만든다.

1. c를 0으로 만든다.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{c}{a}\cdot row_1 - row_2} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{bc}{a} - d & \frac{c}{a} & -1 \end{array}\right]$$

$$\Big\downarrow -a \cdot row_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array}\right]$$

2. b를 0으로 만든다.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right]$$

$$\downarrow \quad (ad-bc)\cdot row_1 - b\cdot row_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} (ad-bc)a & \cancel{(ad-bc)b \quad b(ad-bc)} & ad \cancel{-bc+bc} & -ab \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} (ad-bc)a & 0 & ad & -ab \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right]$$

2-cont. b를 0으로 만든다.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} (ad-bc)a & 0 & ad & -ab \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right]$$

$$\Big\downarrow \quad \frac{1}{ad-bc}\cdot row_1 \quad \frac{1}{ad-bc}\cdot row_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\cancel{a}d}{(ad-bc)\cancel{a}} & \frac{-\cancel{a}b}{(ad-bc)\cancel{a}} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

$$\Big\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{(ad-bc)} & \frac{-b}{(ad-bc)} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{(ad-bc)} & \frac{-b}{(ad-bc)} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \multirow{2}{*}{$\frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$} \\ 0 & 1 & \end{array}\right]$$

$$[I|A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

정리하면,

- 2차원 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 의 역행렬은 $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 이다.
- 이 때 $ad-bc=0$ 면 분모가 0이 되어버리기 때문에 A^{-1}는 존재하지 않게된다.
- A^{-1} **존재여부를 판별**할 수 있는 $ad-bc$ 는 Determinant(**행렬식**)이라고 부른다.
- A의 Determinant는 줄여서 $det(A)$, $|A|$, $\left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 라고 쓴다.

예제1. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 일 때 B^{-1}는?

$$det(B) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

예제2. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ 일 때 C^{-1}는?

$$det(C) = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0$$

C^{-1}는 존재하지 않는다.

3x3 행렬식
3x3 determinant

행렬 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 의 행렬식 $det(A)$는,

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

예제1. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$일 때 $det(C)$는?

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$det(C) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1\cdot1-3\cdot0)-2\cdot(2\cdot1-3\cdot4)+4\cdot(2\cdot0--1\cdot4)$$

$$= 35$$

nxn 행렬식
nxn determinant

$$A_{nn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

일 때 $A_{ij} = (n-1)(n-1)$ 행렬이라면, A_{ij}는 A에서 i 번째 행과 j 번째 열을 무시한 행렬이 된다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A가 7x7행렬이라면 A_{ij} 6x6행렬

일 때 $\boxed{A_{ij} = (n-1)(n-1) \text{ 행렬}}$이라면,

A_{ij}는 A에서 i 번째 행과 j 번째 열을 무시한 행렬이 된다.

먼저 한 3x3 행렬의 예를 들면,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{에서} \quad a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{C_{11}} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{C_{12}} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{C_{13}}$$

부분 행렬

3x3에서 한 방법을 nxn으로 확장시켜 부분행렬로 접근한다.

nxn의 행렬식

$$det(A) = a_{11}\left|A_{11}\right| - a_{12}\left|A_{12}\right| + a_{13}\left|A_{13}\right| - ...a_{1n}\left|A_{1n}\right|$$

(n의 부호는 이 홀수면 +, 짝수면 −)

이 식을 $(n-1)(n-1) \rightarrow (n-2)(n-2) \rightarrow ... \rightarrow 3 \times 3 \rightarrow 2 \times 2$ 까지 유도한다면, 실제 행렬식을 얻을 수 있다. 3x3 행렬도 이 점화식의 한 부분이다.

이 점화식을 사용하여 직접 계산해보자.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{C_{11}} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{C_{12}} + 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}_{C_{13}} - 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}_{C_{14}}$$

$$1 \cdot \left(0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right) -2 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right)$$

$$+3 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) -4 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

$$1\cdot\left(\cancel{0\cdot\begin{vmatrix}2&3\\0&0\end{vmatrix}}-2\cdot\begin{vmatrix}1&3\\3&0\end{vmatrix}\cancel{+0\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}}\right)-2\cdot\left(1\cdot\begin{vmatrix}2&3\\0&0\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}0&3\\2&0\end{vmatrix}\cancel{+0\cdot\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}}\right)$$

$$+3\cdot\left(1\cdot\begin{vmatrix}1&3\\3&0\end{vmatrix}\cancel{-0\cdot\begin{vmatrix}0&3\\2&0\end{vmatrix}}\cancel{+0\cdot\begin{vmatrix}0&1\\2&3\end{vmatrix}}\right)-4\cdot\left(1\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}\cancel{-0\cdot\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}}+2\cdot\begin{vmatrix}0&1\\2&3\end{vmatrix}\right)$$

$$1\cdot(-2\cdot-9)-2\cdot(0-2\cdot(-6))+3\cdot(1\cdot(-9))-4(1\cdot(-6)+2\cdot(-2))$$

$$18-24-27+40=7$$

$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&0&2&0\\0&1&2&3\\2&3&0&0\end{bmatrix}$ 는 역행렬을 갖는다.

다른 행/열을 이용하여 행렬식 구하기
Determinants along other rows/cols

행렬식을 계산할 때 부호는 아래의 sign 법칙으로 결정할 수 있다.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

$$sign(i,j) = -1^{i+j}$$

예제1. $i = 2, j = 3 \quad sign(2,3) = -1^{2+3} = -1$

예제2. $i = 3, j = 7 \quad sign(3,7) = -1^{3+7} = 1$

Sign 법칙을 이용해, 4번째 행으로 행렬식을 구해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{C_{41}}{-2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} \underset{C_{42}}{+ 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}} \underset{C_{43}}{- 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}} \underset{C_{44}}{+ 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$= -2 \cdot \left(2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) + 3 \cdot \left(-2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -2 \cdot (2 \cdot (6 - 4)) + 3 \cdot (-2 \cdot (-4)) + 3 \cdot (-1))$$

$$= 7$$

사루스의 법칙을 이용하여
행렬식 구하기
Rules of Sarrus of determinants

Rule of Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

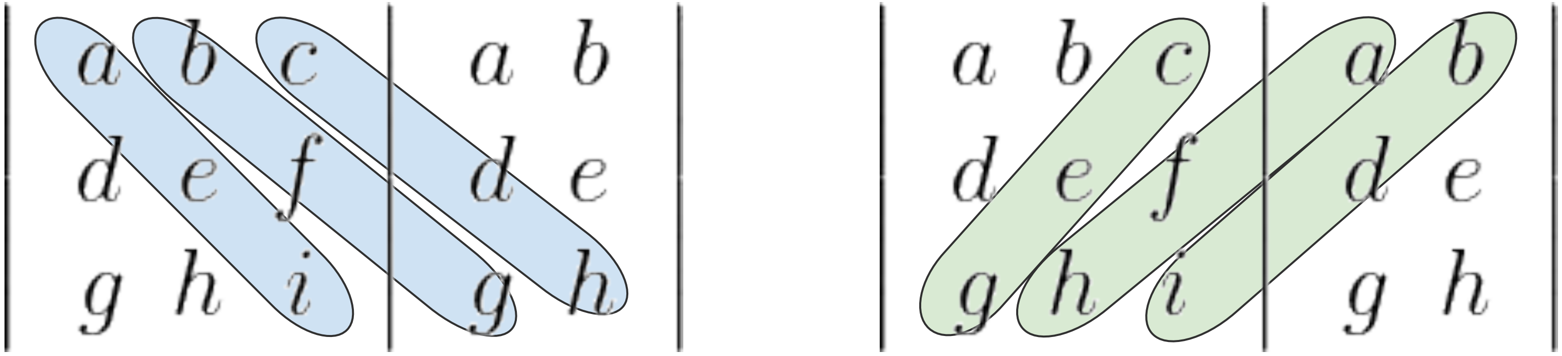
$$= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

$$\boxed{= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg}$$

더하는 항, 빼는 항끼리 정리한다.

Rule of Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$



Q. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 일 때 사루스의 법칙을 사용하여 $det(A)$를 구해보자.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right|$$

$$(1\cdot-1\cdot-1)+(2\cdot3\cdot4)+(4\cdot2\cdot0)-(4\cdot-1\cdot4)-(1\cdot3\cdot0)-(2\cdot2\cdot-1)$$

$$= 1 + 24 + 16 + 4 = 45$$