

システム工学 レポート課題 (12/26 出題分 解答例)

長江 剛志

東北大学大学院工学研究科
技術社会システム専攻

(nagae@tohoku.ac.jp)

23 Jan, 2017 (ver1.1)

レポート課題1 (1)

1. 次の線形計画問題の **等式標準形** を書き下せ. ただし, それぞれの制約に対する **スラック変数** を r_1, r_2 とすること.

$$\begin{array}{ll}\max_{x_1, x_2, x_3} & x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ & -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 36 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0\end{array}$$

2. 1. で得られた **等式標準形** に対して, $x_B = (r_1, r_2)$ を **基底変数** (被説明変数), $x_N = (x_1, x_2, x_3)$ を **非基底変数** (説明変数) とする **辞書** の **行列表現** を書き下せ.

レポート課題1 (2)

3. 2. で得られた辞書に対して, 以下の順に **基底変数** と **非基底変数** を入れ替えた時, それぞれのステップで得られる **辞書** を書き下せ.
 - 3.1 **基底変数** r_1 と **非基底変数** x_1 を入れ替える.
 - 3.2 **基底変数** r_2 と **非基底変数** x_2 を入れ替える.
4. 2. で得られた辞書に対して, 以下の順に **基底変数** と **非基底変数** を入れ替えた時, それぞれのステップで得られる **辞書** を書き下せ.
 - 4.1 **基底変数** r_1 と **非基底変数** x_1 を入れ替える.
 - 4.2 **基底変数** r_2 と **非基底変数** x_3 を入れ替える.
 - 4.3 **基底変数** x_3 と **非基底変数** x_2 を入れ替える.
5. 3. の最後に得られた **辞書** と 4. の最後に得られた **辞書** との間にはどのような関係があるか説明せよ.

レポート課題1 (解答例) (1)

1. 次の線形計画問題の **等式標準形** を書き下せ. ただし, それぞれの制約に対する **スラック変数** を r_1, r_2 とすること.

$$\begin{array}{ll}\max_{x_1, x_2, x_3} & x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ & -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 36 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0\end{array}$$

等式標準形は,

$$\begin{array}{llllll}\min_{x_1, x_2, x_3, r_1, r_2} & -x_1 & -4x_2 & -3x_3 & & = -z \\ \text{s.t.} & x_1 & + x_2 & + x_3 & + r_1 & = 12 \\ & -2x_1 & + 4x_2 & + 4x_3 & & + r_2 = 36 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & r_1, & r_2 \geq 0\end{array}$$

レポート課題1 (解答例) (2)

2. 1. で得られた **等式標準形** に対して, $x_B = (r_1, r_2)$ を **基底変数** (被説明変数), $x_N = (x_1, x_2, x_3)$ を **非基底変数** (説明変数) とする **辞書** の **行列表現** を書き下せ.

	x_1	x_2	x_3	-1
$-r_1$	1	1	1	12
$-r_2$	-2	4	4	36
$-z$	-1	-4	-3	0

3. 2. で得られた辞書に対して, 以下の順に **基底変数** と **非基底変数** を入れ替えた時, それぞれのステップで得られる **辞書** を書き下せ.

3.1 **基底変数** r_1 と **非基底変数** x_1 を入れ替える.

	x_1	x_2	x_3	-1		r_1	x_2	x_3	-1
$-r_1$	1*	1	1	12	\Rightarrow	$-x_1$	1	1	12
$-r_2$	-2	4	4	36		$-r_2$	2	6	60
$-z$	-1	-4	-3	0		$-z$	1	-3	12

レポート課題1 (解答例) (3)

3.2 基底変数 r_2 と 非基底変数 x_2 を入れ替える.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & r_1 & x_2 & x_3 & -1 \\ \hline -x_1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ -r_2 & 2 & 6* & 6 & 60 \\ \hline -z & 1 & -3 & -2 & 12 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & r_1 & r_2 & x_3 & -1 \\ \hline -x_1 & 2/3 & -1/6 & 0 & 2 \\ -x_2 & 1/3 & 1/6 & 1 & 10 \\ \hline -z & 2 & 1/2 & 1 & 42 \end{array}$$

4. 2. で得られた辞書に対して, 以下の順に 基底変数 と 非基底変数 を入れ替えた時, それぞれのステップで得られる 辞書 を書き下せ.

4.1 基底変数 r_1 と 非基底変数 x_1 を入れ替える.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & -1 \\ \hline -r_1 & 1* & 1 & 1 & 12 \\ -r_2 & -2 & 4 & 4 & 36 \\ \hline -z & -1 & -4 & -3 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & r_1 & x_2 & x_3 & -1 \\ \hline -x_1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ -r_2 & 2 & 6 & 6 & 60 \\ \hline -z & 1 & -3 & -2 & 12 \end{array}$$

レポート課題1 (解答例) (4)

4.2 基底変数 r_2 と 非基底変数 x_3 を入れ替える.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & r_1 & x_2 & x_3 & -1 \\ \hline -x_1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ -r_2 & 2 & 6 & 6* & 60 \\ \hline -z & 1 & -3 & -2 & 12 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & r_1 & x_2 & r_2 & -1 \\ \hline -x_1 & 2/3 & 0 & -1/6 & 2 \\ -x_3 & 1/3 & 1 & 1/6 & 10 \\ \hline -z & 5/3 & -1 & 1/3 & 32 \end{array}$$

4.3 基底変数 x_3 と 非基底変数 x_2 を入れ替える.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & r_1 & x_2 & r_2 & -1 \\ \hline -x_1 & 2/3 & 0 & -1/6 & 2 \\ -x_3 & 1/3 & 1* & 1/6 & 10 \\ \hline -z & 5/3 & -1 & 1/3 & 32 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & r_1 & x_3 & r_2 & -1 \\ \hline -x_1 & 2/3 & 0 & -1/6 & 2 \\ -x_2 & 1/3 & 1 & 1/6 & 10 \\ \hline -z & 2 & 1 & 1/2 & 42 \end{array}$$

レポート課題1 (解答例) (5)

5. 3. の最後に得られた 辞書 と 4. の最後に得られた 辞書 との間にはどのような関係があるか説明せよ.

いずれの方法で得られた辞書も, 基底変数を (x_1, x_2) , 非基底変数を (r_1, r_2, x_3) とするもので, その内容は全く同じである (一方の第2列と第3列を入れ替えれば他方と完全に一致する).

レポート課題 2

以下の問題を **単体法** で解け.

$$\begin{array}{ll}\max_{x_1, x_2, x_3} & x_1 + x_2 + 2x_3 = z \\ \text{s.t.} & x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ & -x_1 + 3x_3 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

レポート課題2 (解答例) (1)

以下の問題を **単体法** で解け.

$$\begin{array}{ll}\max_{x_1, x_2, x_3} & x_1 + x_2 + 2x_3 = z \\ \text{s.t.} & x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ & -x_1 + 3x_3 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

この問題の等式標準形は,

$$\begin{array}{llll}\min_{x_1, x_2, x_3} & -x_1 - x_2 - 2x_3 & & = -z \\ \text{s.t.} & x_2 + 2x_3 + r_1 & & = 3 \\ & -x_1 + 3x_3 + r_2 & & = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + r_3 & & = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, r_1, r_2, r_3 & \geq & 0\end{array}$$

と表される.

レポート課題2 (解答例) (2)

この等式標準形に対して, 基底変数を $x_B = (r_1, r_2, r_3)$, 非基底変数を $x_N = (x_1, x_2, x_3)$ とする **辞書** は

	x_1	x_2	x_3	-1
$-r_1$	0	1	2	3
$-r_2$	-1	0	3	2
$-r_3$	2	1	1	1
$-z$	-1	-1	-2	0

と行列表現できる. これを初期辞書とした単体法の適用例を示す.

レポート課題2 (解答例) (3)

まず, 目的関数の係数が負であるような非基底変数 (ここでは, x_1, x_2, x_3) のうち, 第1列の x_1 を候補に選んだとしよう. この時, 第1列で正の要素を持つのは r_3 に対応する第3行のみ.

非基底変数 x_1 と基底変数 r_3 を入れ替えるピボット演算を行なえば, 基底変数を (r_1, r_2, x_1) , 非基底変数を (r_3, x_2, x_3) とする新たな辞書を得る:

	x_1	x_2	x_3	-1			r_3	x_2	x_3	-1
$-r_1$	0	1	2	3	\Rightarrow	$-r_1$	0	1	2	3
$-r_2$	-1	0	3	2		$-r_2$	1/2	1/2	7/2	5/2
$-r_3$	2*	1	1	1		$-x_1$	1/2	1/2	1/2	1/2
$-z$	-1	-1	-2	0		$-z$	1/2	-1/2	-3/2	1/2

レポート課題2 (解答例) (4)

次に, この新しい辞書において, 目的関数の係数が負であるような非基底変数 (ここでは x_2, x_3) のうち, x_2 を候補に選んだとしよう. このとき, 候補 x_2 に対応する第2列については, どの行も正の要素 $(1, 1/2, 1/2)$ を持つ. そこで, そのそれぞれと一番右の列の定数 $(3, 5/2, 1/2)$ との比 $(3/1, 5/1, 1)$ が最小となる第3行に対応する基底変数 x_1 を候補とする.

非基底変数 x_2 と基底変数 x_1 を入れ替えるピボット演算を行なえば, これにより, 基底変数を (r_1, r_2, x_2) , 非基底変数を (r_3, x_1, x_3) とする新たな辞書を得る:

	r_3	x_2	x_3	-1			r_3	x_1	x_3	-1
$-r_1$	0	1	2	3		$-r_1$	-1	-2	1	2
$-r_2$	1/2	1/2	7/2	5/2	\Rightarrow	$-r_2$	0	-1	3	2
$-x_1$	1/2	1/2*	1/2	1/2		$-x_2$	1	2	1	1
$-z$	1/2	-1/2	-3/2	1/2		$-z$	1	1	-1	1

レポート課題2 (解答例) (5)

新しい辞書において, 目的関数の係数が負であるような非基底変数は x_3 のみであるから, これを候補とする. 候補に対応する第3列については, どの行も正の要素 $(1, 3, 1)$ を持つ. そこで, そのそれぞれと一番右の列の定数 $(2, 2, 1)$ との比 $(2/1, 2/3, 1/1)$ が最小となる第2行に対応する基底変数 r_2 を候補とする.

非基底変数 x_3 と基底変数 r_2 を入れ替えるピボット演算を行えば, これにより, 基底変数を (r_1, x_3, x_2) , 非基底変数を (r_3, x_1, r_2) とする新たな辞書を得る:

	r_3	x_1	x_3	-1			r_3	x_1	r_2	-1
$-r_1$	-1	-2	1	2		$-r_1$	-1	$-5/3$	$-1/3$	$4/3$
$-r_2$	0	-1	3^*	2	\Rightarrow	$-x_3$	0	$-1/3$	$1/3$	$2/3$
$-x_2$	1	2	1	1		$-x_2$	1	$7/3$	$-1/3$	$1/3$
$-z$	1	1	-1	1		$-z$	1	$2/3$	$1/3$	$5/3$

レポート課題2 (解答例) (6)

この辞書は, 目的関数の係数と右辺の定数がいずれも非負であるため, それに対応する最適化問題が, 非基底変数 (r_3, x_1, r_2) の値を 0 とする 自明な解 を持つ. この時の基底変数および元の目的関数の値は, $(r_1^*, x_3^*, x_2^*, z^*) = (4/3, 2/3, 1/3, 5/3)$ と得られる.

従って, **最適解** は $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 1/3, 2/3)$, **最適値** は $z^* = 5/3$ である.