

システム工学 レポート課題 (12/12 分 解答例)

長江 剛志

東北大学大学院工学研究科
技術社会システム専攻

(nagae@tohoku.ac.jp)

18 Dec, 2016 (ver1.1)

レポート課題 1 (1)

1. 次の線形計画問題の **標準最大化問題** を書き下せ.

$$\max_{x_1, x_2, x_3} -2x_1 + x_2 - 4x_3 \quad (1a)$$

$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \quad (1b)$$

$$3 + x_1 \geq 2x_2 \quad (1c)$$

$$x_1 \leq 4 \quad (1d)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (1e)$$

2. 1. で求めた標準最大化問題の **双対問題** を書き下せ. ただし, 式 (1b)(1c) および (1d) に対応する **双対変数** を y_1, y_2 および y_3 とすること.

レポート課題 1 (2)

3. 1. で標準最大化問題および 2. で求めた **双対問題** を以下の
行列・ベクトル形式:

$$\max_x \{c^\top x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \Leftrightarrow \min_y \{b^\top y \mid A^\top y \geq c, y \geq 0\}$$

で表す時, 対応する x, c, A, b, y を書き下せ.

レポート課題1 (解答例) (1)

1. 次の線形計画問題の **標準最大化問題** を書き下せ.

$$\max_{x_1, x_2, x_3} -2x_1 + x_2 - 4x_3 \quad (2a)$$

$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \quad (2b)$$

$$3 + x_1 \geq 2x_2 \quad (2c)$$

$$x_1 \leq 4 \quad (2d)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (2e)$$

$$\max_{x_1, x_2, x_3} -2x_1 + x_2 - 4x_3 \quad (3a)$$

$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \quad (3b)$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 3 \quad (3c)$$

$$x_1 \leq 4 \quad (3d)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (3e)$$

レポート課題1 (解答例) (2)

2. 1. で求めた標準最大化問題の **双対問題** を書き下せ. ただし, 式 (1b)(1c) および (1d) に対応する **双対変数** を y_1, y_2 および y_3 とすること.

$$\min_{y_1, y_2, y_3} 5y_1 + 3y_2 + 4y_3 \quad (4a)$$

$$\text{s.t. } y_1 - y_2 + y_3 \geq -2 \quad (4b)$$

$$2y_1 + 2y_2 \geq 1 \quad (4c)$$

$$3y_1 \geq -4 \quad (4d)$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad (4e)$$

レポート課題1 (解答例) (3)

3. 1. で標準最大化問題および 2. で求めた **双対問題** を以下の
行列・ベクトル形式:

$$\max_x \{c^\top x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \Leftrightarrow \min_y \{b^\top y \mid A^\top y \geq c, y \geq 0\}$$

で表す時, 対応する x, c, A, b, y を書き下せ.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

レポート課題 2 (1)

1. 次の線形計画問題の **標準最大化問題** を書き下せ.

$$\max_{x_1, x_2, x_3} -2x_1 + x_2 - 4x_3 \quad (5a)$$

$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \quad (5b)$$

$$3 + x_1 = 2x_2 \quad (5c)$$

$$x_1 \leq 4 \quad (5d)$$

$$x_1 \text{ is free.} \quad (5e)$$

$$x_2, x_3 \geq 0 \quad (5f)$$

2. 1. で求めた標準最大化問題の **双対問題** を書き下せ.
その際, 下記のルールに従って問題を簡単化せよ.

- ▶ 「非負制約を持たない **主変数**」に対応する **双対制約** は **等式条件** となる
- ▶ 「等式条件である **主制約**」に対応する **双対変数** は非負制約を持たない

レポート課題2 (解答例) (1)

1. 次の線形計画問題の **標準最大化問題** を書き下せ.

$$\max_{x_1, x_2, x_3} -2x_1 + x_2 - 4x_3 \quad (6a)$$

$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \quad (6b)$$

$$3 + x_1 = 2x_2 \quad (6c)$$

$$x_1 \leq 4 \quad (6d)$$

$$x_1 \text{ is free.} \quad (6e)$$

$$x_2, x_3 \geq 0 \quad (6f)$$

等式制約 (6c) を, 等価な 2 つの不等式制約:

$$-x_1 + 2x_2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \leq -3 \end{cases}$$

レポート課題2 (解答例) (2)

に置き換え, 自由変数 x_1 を2つの非負変数 x_1^+, x_1^- の差 $x_1 = x_1^+ - x_1^-$ で表せば, 以下の標準最大化問題を得る.

$$\max_{x_1^+, x_1^-, x_2, x_3} \quad -2(x_1^+ - x_1^-) + x_2 - 4x_3 \quad (7a)$$

$$(x_1^+ - x_1^-) + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \quad (7b)$$

$$-(x_1^+ - x_1^-) + 2x_2 \leq 3 \quad (7c)$$

$$(x_1^+ - x_1^-) - 2x_2 \leq -3 \quad (7d)$$

$$(x_1^+ - x_1^-) \leq 4 \quad (7e)$$

$$x_1^+, x_1^-, x_2, x_3 \geq 0 \quad (7f)$$

レポート課題2 (解答例) (3)

2. 1. で求めた標準最大化問題の **双対問題** を書き下せ.
その際, 下記のルールに従って問題を簡単化せよ.
- ▶ 「非負制約を持たない **主変数**」に対応する **双対制約** は **等式条件** となる
 - ▶ 「等式条件である **主制約**」に対応する **双対変数** は非負制約を持たない

主制約 (7b)(7c)(7d)(7e) に対する双対変数を
 $y = (y_1, y_2^+, y_2^-, y_3)$ とする. 主問題および双対問題を **標準最大化問題** / **標準最小化問題** としてベクトル・行列表現

$$\max_x \{c^T x \mid Ax \geq b, x \geq 0\} \Leftrightarrow \min_y \{y^T b \mid A^T y \leq c, y \geq 0\}$$

レポート課題2 (解答例) (4)

すると,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1^+ \\ x_1^- \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2^+ \\ y_2^- \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

レポート課題2 (解答例) (5)

これより双対問題を機械的に書き下せば,

$$\min_{y_1, y_2^+, y_2^-, y_3} \quad 5y_1 + 3(y_2^+ - y_2^-) + 4y_3 \quad (8a)$$

$$\text{s.t. } y_1 - (y_2^+ - y_2^-) + y_3 \geq -2 \quad (8b)$$

$$-y_1 + (y_2^+ - y_2^-) - y_3 \geq 2 \quad (8c)$$

$$2y_1 + 2(y_2^+ - y_2^-) \geq 1 \quad (8d)$$

$$3y_1 \geq -4 \quad (8e)$$

$$y_1, y_2^+, y_2^-, y_3 \geq 0 \quad (8f)$$

符号が反転しているだけの不等式制約 (8b)(8c) を 1 つの等式制約:

$$\begin{cases} y_1 - (y_2^+ - y_2^-) + y_3 \geq -2 \\ -y_1 + (y_2^+ - y_2^-) - y_3 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 - (y_2^+ - y_2^-) + y_3 = -2$$

レポート課題2 (解答例) (6)

に置き換え, 2つの非負変数 y_2^+, y_2^- の差を1つの自由変数 $y_2 = y_2^+ - y_2^-$ として表せば, 簡単化された以下の双対問題を
得る:

$$\min_{y_1, y_2, y_3} 5y_1 + 3y_2 + 4y_3 \quad (9a)$$

$$\text{s.t. } y_1 - y_2 + y_3 = -2 \quad (9b)$$

$$2y_1 + 2(y_2^+ - y_2^-) \geq 1 \quad (9c)$$

$$3y_1 \geq -4 \quad (9d)$$

$$y_2 \text{ is free} \quad (9e)$$

$$y_1, y_3 \geq 0 \quad (9f)$$