80 DA

U.S.T.H.B
Département Informatique
1ère année Master - RSD
Année Universitaire : 2011 – 2012

Nom :
Prénom :
Matricule

Examen Final

Modélisation et Evaluation des Performances des Systèmes

Exercice 1 : (10 points)

On considère un marché des télécommunications à 3 opérateurs. A l'année n=0, les abonnés sont répartis de la façon suivante entre les opérateurs Op1, Op2 et Op3 :
- Opérateur 1 : 50%
- Opérateur 2 : 30%
- Opérateur 3 : 20%

Après chaque année, un abonné peut changer d'opérateur. On constate que 60% restent fidèles à l'opérateur 1 contre 80% pour l'opérateur 2 et 90% pour l'opérateur 3. Les autres se réorientent entre les deux opérateurs de manière équiprobable.
On note Xn la répartition des abonnés à la nième année.

1. Montrer que (Xn) est une chaine de Markov. Déterminer son type en justifiant.
2. Déterminer sa distribution initiale et la matrice de transition. Donner le diagramme de la chaîne.
3. Un contrat souscrit auprès d'un opérateur rapporte en moyenne 5000 DA par an. Le marché étant composé de 4 millions de personnes, calculer le profit moyen de chaque opérateur au bout de deux ans.
4. Existe-t-il une distribution stationnaire ? Pourquoi ?
5. Quel est, sur le long terme, la répartition des abonnés entre les différents opérateurs ? et vers quel opérateur va leur préférence ?
6. Les chercheurs en économie aimeraient avoir une réponse à la question suivante : « Quel est le nombre d'années moyen pour que les abonnés reviennent à leur choix initial ? »
   Donner la formule à appliquer pour répondre à cette question.

Exercice 2 : (6 points)

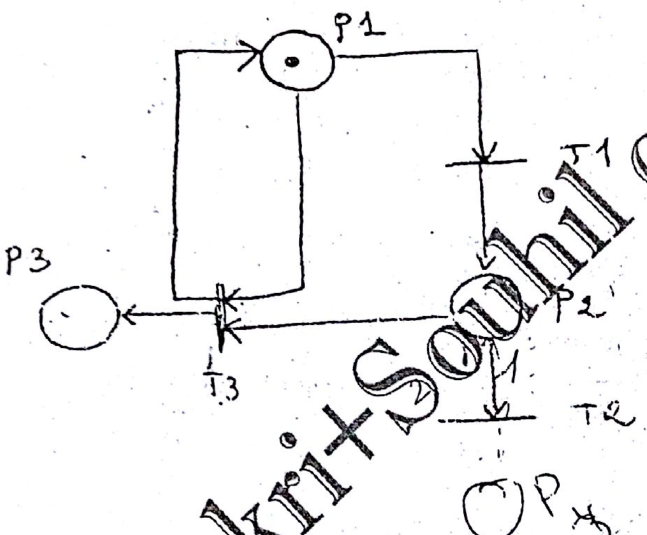
Répondre par Vrai ou Faux.

1. Une chaîne de Markov est un processus markovien à temps discret ...Faux,
2. Dans un processus de Poisson, les inter-arrivées sont distribuées selon une loi exponentielle -- ..Vrai...

3. Une séquence de franchissements est une suite de marquages → ..Faux
4. Plus le modèle est detaillé, plus l'analyse est difficile → Vrai
5. La CMTC correspondante à la file d'attente M/M/1 est à espace d'états fini → Faux
6. Tout RdP non quasi-vivant est non-vivant → ..Vrai.
7. Dans un RdPS, on associe à chaque transition un intervalle aléatoire → ..Faux
8. La modélisation se fait soit en conception ou bien en exploitation → Vrai

Exercice 3 : (4 points)

Etant donné le réseau de Petri suivant :



1. Construire le graphe des marquages accessibles.
2. Vérifier les propriétés suivantes tout en justifiant : bornitude, vivacité, état d'accueil et existence d'état de blocage

①

(1 0 0) M1

↓ T1

(0 1 0) M2

↓ T2

(0, 0 1) M3

GMA

②

- Bornitude : GMA fini ⇒ RdP borné

- T3 est non franchissable
$\nexists M_i \in A$ tq : $M_i [t_3>$
⇒ RdP non vivant.

- M_3 est un état d'accueil car $M_1 [T_1 T_2 > M_3$ et $M_2 [T_2 > M_3$.

- M3 est un état de blocage

VTET, ~~M3 [t>~~ M3 [t >

2011 – 2012

Corrigé Examen MEPS.

① • X_n est une chaîne de Markov car c'est un processus stochastique qui satisfait la propriété de perte de mémoire et l'espace d'état est ~~discret~~ dénombrable. $E = \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$ 1 pt

• Cette chaîne de Markov est une CMTD : chaîne de Markov à Temps Discret car le temps $T \subseteq \mathbb{N}$. (T est dénombrable). 0.5 pt

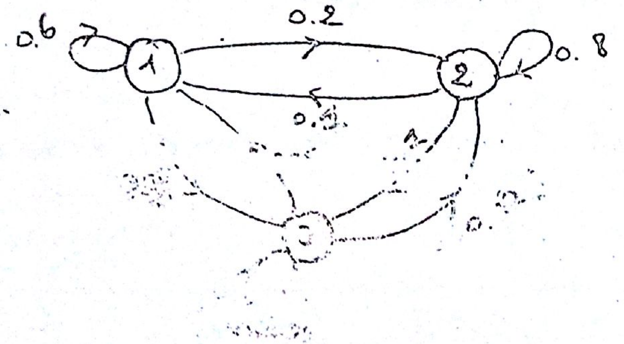
② Distribution initiale :

$$\pi^{(0)} = [\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \pi_3^{(0)}] = [0.5, 0.3, 0.2] \quad 0.25 \text{ pt}$$

• Matrice de transition :

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{bmatrix} \quad 0.25 \text{ pt}$$

Diagramme de la chaîne :



$\pi^{(0)} = [0.5 , 0.3 , 0.2]$

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} \cdot P = [0.5 , 0.3 , 0.2] \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$= [0.34 , 0.35 , 0.31]$$

$$\pi^{(2)} = \pi^{(1)} \cdot P = [0.34 , 0.35 , 0.31] \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$= [0.2545 , 0.3635 , 0.382]$$

Profit (op 1) = ~~Opérateur 1~~ : $0.2545 * 4.10^6 * 5.10^3$ 0.75 ~~pr~~ pr

$= \boxed{5.09 \cdot 10^9 \text{ DA}}$

Profit (op 2) = $0.3635 * 4.10^6 * 5.10^3$ 0.75 ~~pr~~ pr

$= \boxed{7.27 \cdot 10^9 \text{ DA}}$

Profit (op3) = $0.382 * 4.10^6 * 5.10^3 = 7.64 \cdot 10^9$ DA

0.75 pr

4) ~~Oui , il existe~~

La CMTD est finie car l'espace d'état $E = \{1, 2, 3\}$ est fini

- La CMTD est irréductible car de tout état i on peut atteindre tout après état j en un nombr fini d'étapes.

– La CMTD est apériodique car : 0.25

$D(1) = D(2) = D(3) = 1$ $\Rightarrow$ ~~PGCD~~

Donc : ~~PGCD(D(i)) = 1~~

La période de la CMTD est égale à 1.

Donc : la chaine est ergodique. 0.25

$\Rightarrow$ il existe une distribution stationnaire

(5) La répartition des abonnés entre les différents opérateurs sur le long terme revient à calculer la distribution stationnaire.

$$\begin{cases} \pi \cdot P = \pi \\ \sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.6\,\pi_1 + 0.1\,\pi_2 + 0.05\,\pi_3 = \pi_1 \ldots (1) \\ 0.2\,\pi_1 + 0.8\,\pi_2 + 0.05\,\pi_3 = \pi_2 \ldots (2) \\ 0.2\,\pi_1 + 0.1\,\pi_2 + 0.9\,\pi_3 = \pi_3 \ldots (3) \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \ldots (4) \end{cases}$$

~~On calcule la différence entre (1) et (2).~~

(1) – (2) $\Rightarrow 0.4\,\pi_1 - 0.7\,\pi_2 = \pi_1 - \pi_2$

$0.4\,\pi_1 - 0.7\,\pi_2 = \pi_1 - \pi_2$

0.4

$\Rightarrow$ ~~0.3 π₁ = 0.6~~

$0.3\,\pi_2 = 0.6\,\pi_1$

$\Rightarrow \pi_1 = \frac{0.3}{0.6}\,\pi_2 \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{1}{2}\,\pi_2}$

(2) – (3) $\Rightarrow 0.7\,\pi_2 - 0.85\,\pi_3 = \pi_2 - \pi_3$

$\Rightarrow 0.3\,\pi_2 = 0.15\,\pi_3 \Rightarrow \pi_3 = \frac{0.3}{0.15}\,\pi_2$

$\Rightarrow \boxed{\pi_3 = 2\,\pi_2}$

Scanned by CamScanner

on remplace les deux résultats dans (1)

on obtient : $\frac{1}{2}\pi_2 + \pi_2 + 2\pi_2 = 1$.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}+1+2\right)\pi_2 = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2}\pi_2 = 1 \Rightarrow \boxed{\pi_2 = \frac{2}{7}}$$ 0.5 pt

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{2}}{7} \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{1}{7}}$$ 0.5 pt

$$\Rightarrow \pi_3 = 2\pi_2 = 2\cdot\frac{2}{7} = \Rightarrow \boxed{\pi_3 = \frac{4}{7}}$$ 0.5 pt

D'où : $\pi = \left[\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right]$

0.1428 0.28

Ainsi, la préférence des abonnés à long terme va vers le 3e opérateur. ~~0.25 pt~~ ~~0.75 pt~~ 1 pt

3) La formule à appliquer est :

~~$\pi^{(0)} = \pi^{(0)}$~~

on sait $\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} \cdot P$

$$\Rightarrow \pi^{(n)} = \pi^{(0)} \cdot P^n$$

Comme les abonnés reviennent à leur choix initial ceci signifie que : $\pi^{(n)} = \pi^{(0)}$.

Donc, $\boxed{\pi^{(0)} = \pi^{(0)} \cdot P^n}$ 2 pt

et il s'agit de calculer n qui est le nbre

USTHB
FEI,DI

Master IL

Epreuve de MEPS

Execice 1: Soit $X(t)$ l'état de la chaîne de Markov de matrice des probabilités de transition (On prendra pour codage des états :0,1,2,3.

$$\begin{array}{c} 0 \\ P = 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 6/11 \end{pmatrix}$$

A l'instant $t = 1,2,3,\ldots$, $P\{X(0)=1\}=1$.

1. Trouver la probabilité pour qu'à l'instant $t = 2$ la chaîne se trouve à l'état 2.
2.Etudier la nature de cette chaîne et discuter l'existence d'une distribution stationnaire.
3.Evaluer la probabilité de premier passage de l'état 0 à l'état 1 en deux étapes, Le temps moyen de retour à l'état 0 une fois qu'on l'a quitté.
4.On forme le nouveau processus aléatoire $Y(t)=1$ si $X(t)=1$ et $Y(t)=2$ sinon. Est-ce que $Y(t)$ est une chaîne de Markov ? Si oui déterminer sa matrice de probabilités des transitions et étudier sa nature.

Exercice 2.On considère un système de files d'attente de type M/M./1 de paramètre $\lambda = 1$, $\mu = 2$; Que représentent les paramètres λ et μ ? On considère $N(t)$, le nombre de demandes présentes dans le système à l'instant t.
1.Pourquoi peut-on l'assimiler à une chaîne de Markov ?
2.Représenter le graphe d'état et en déduire les équations d'état ?
3.Décrire la nature d'une telle chaîne ? Donner sa distribution stationnaire lorsqu'elle existe ?
4.En déduire les principales mesures de performance :

-intensité du trafic.
-taille moyenne de la file d'attente $E(Q)$ (nombre moyen de clients dans la file) ;
-nombre moyen de clients dans le système $E(N)$ (en attente ou en cours de service) ;
-temps moyen d'attente $E(W)$ d'un client ;
-temps moyen de séjour $E(V)$ dans le système (attente +service) ou délai;
-probabilité qu'un client qui arrive dans le système ne soit pas accepté pour service pour cause de congestion (*probabilité de refus* , *de perte* ou *d'encombrement* P_r) ;
-taux de perte ;
-débit absolu A (nombre moyen de clients servis par unité de temps) ;
-débit relatif A' (probabilité qu'un client qui arrive dans le système soit servi) ;
-nombre moyen de serveurs actifs $E(SA)$ ou oisifs $E(SO)$;

5.Supposons que l'on connaisse le coût d'exploitation du système c_1 DA par unité de temps et le coût unitaire de séjour d'un demande c_2 DA par unité de temps. On cherche à savoir quelle est le taux optimal de service minimisant les coûts unitaires d'exploitation du système.

Indication :Les coûts moyens unitaires d'exploitation s'écrivent $C(\mu) = c_1\,\mu + c_2\,E(N)$
6.On suppose que le système est à capacité finie avec les mêmes paramètres) ? Comment dimensionner la taille de la file (ou du système) pour que la probabilité de perte (ou de refus) soit inférieure à 0.05 ?
N.B. Un exercice sur les réseaux de Petri et lien avec les files d'attente figure dans votre e-boîte

EPREUVE MEPS
(Corrigé+Barème)

EXERCICE 2.

Il s'agit d'un système M/M/1 (partie notée sur **14 points**).

Le processus X(t)=nombre de demandes dans le système à l'instant t forme une chaîne de Markov à temps continu (car les inter-arrivées et les temps de service sont exponentiellement distribués et donc dotés d'absence de mémoire). **1 point**

Le graphe d'état est 1point

Nature de la chaîne : ergodique car $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{2}<1$ (donc il éxiste une seule distribution stationnaire)**(1 point)**

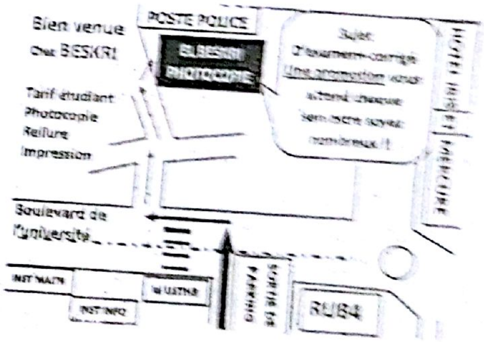
Equations d'état : $\frac{d\pi_i(t)}{dt}=\pi_{i-1}(t)+2\pi_{i+1}(t)-3\pi_i(t)$, $i=1,2,\dots$, $\frac{d\pi_0(t)}{dt}=2\pi_1(t)-\pi_0(t)$.

(1point). Distribution stationnaire : $\pi_i=(0.5)^i\times 0.5,\quad i=0,1,2\dots$ Probabilités d'état p0=0.5 p1=0.25 p2= 0.0625 p3=0.0625 p4=0.03125…**(1point)**

Mesures de performance :

- **Intensité du traffic ½ 1 point**
- **Temps moyen d'attente :** $\overline{Q}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{(0.5)^2}{0.5}=0.5$; $\overline{W}=\frac{\overline{Q}}{\lambda}=\frac{0.5}{1}=0.5$.**(1point)**.
- **Temps moyen de séjour :** $\overline{N}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{0.5}{0.5}=1$; $\overline{V}=\frac{\overline{N}}{\lambda}=\frac{1}{1}=1$.**(1point)**.
- Débit absolu : $A=\lambda=1$ (car système à capacité et source illimitées :sans contraintes) **(0.5 point)**. Débit relatif : $A'=A/\lambda=1$ (idem) **0.5 point)**.
- Charge du serveur : $1-\pi_0=0.5$ **(0.5 point)**.Charge du Système : $1-\pi_0=0.5$ **(0.5 point)**.
- Nombre moyen de serveurs occupés ½ **0.5 points**
- Nombre moyen de serveurs libres ½ **0.5 points**

Probabilité de refus=0



Q5 **2points.** $\mu^*=\lambda+\sqrt{\frac{\lambda\times c2}{c1}}=6$

Q6 Système M/M/1/K. (2points)
K=3

- Proba de refus : $=\pi_3=0.0666667$

En refaisant, on trouve que pour $K=4$ la proba de refus est $=0.0322581<0.05$.

Exercice 1. 6 Points.

4. Oui avec $\begin{pmatrix}3/7 & 4/7\\ 1/11 & 10/11\end{pmatrix}$ 2v points : le reste sur 4 points. Donner des points suppélementaires a eux qui donnent la distribution stationnaire.

Exercice I : Soit un système d'attente dans lequel les demandes arrivent selon un processus de Poisson de taux λ (i.e. le temps qui sépare deux arrivées successives suit une loi exponentielle de moyenne $1/\lambda$). Le service est assuré par un serveur et le temps de service suit une loi exponentielle de moyenne $1/\mu$. La discipline de service est FIFO, la capacité du système est illimitée et la source illimitée.

1. Montrer comment modéliser l'évolution d'un tel système par une chaîne de Markov. Etudier cette chaîne : Nature (classification des états), Equations d'état, condition d'existence d'une distribution stationnaire. Calcul de la distribution stationnaire (lorsqu'elle existe). En déduire les mesures de performance : temps moyen d'attente et de séjour, débit relatif et absolu, charge du serveur et du système.

2. On souhaite tripler (ou tout au moins augmenter) la capacité de service. Pour cela, on hésite entre plusieurs variantes :

   A. Utiliser un seul serveur de taux de service 3μ avec une file FIFO illimitée.
   B. Utiliser trois serveurs (de taux μ chacun), avec deux files (FIFO illimitées) indépendantes de taux $\lambda/3$ arrivées par unité de temps.
   C. Utiliser trois serveurs (de taux μ chacun), mais avec une seule file commune (FIFO illimitée).

Ecrire les équations d'état pour chacun des cas, et déterminer :

(i) la condition d'existence d'une distribution stationnaire.
(ii) Les équations d'état.
(iii) L'expression de la probabilité que le serveur soit libre et que le système soit vide.
(iv) L'expression de la distribution stationnaire lorsqu'elle existe.
(v) Les temps moyens d'attente et de séjour.
(vi) Les débits relatif et absolu.
(vii) Le coût d'exploitation pour chaque variante.
(viii) Comparer les différentes variantes du point de vue des mesures de performance indiquées précédemment.
(ix) Est-ce que le fait de ~~doubler~~ la capacité de service, conduit à un temps d'attente ~~deux~~ fois plus petit ? triple
trois

Pour l'application numérique, on prendra $\lambda = 1, \mu = 2$.

c_1 = coût d'une unité de temps de service

c_2 = coût d'exploitation d'un serveur par unité de temps ;

c_3 = coût lié à la présence d'une demande dans le système par unité de temps.

$c_1 = 5$, $c_2 = 5, c_3 = 10$.

Exercice II. Reprendre les mêmes questions que l'exercice I-1($\lambda = 1, \mu = 2$)., lorsque la capacité de la file est finie. A partir de quelle valeur de K peut-on considérer que les deux systèmes sont équivalents du point de vue de la probabilité de refus ? On prendra une précision à deux chiffres après la virgule.

EPREUVE MEPS
(Corrigé+Barème)
Notation sur 60; puis Note ramenée sur 20.
Dans le 1[er] affichage : colonne 1correspond à exo2 (1 M/M/1) ; colonne 2 : variante A : 2 M/M/1 ; col.3 varB un M/M/1 avec 2μ ; col.4 M/M/2 ; col.5 : Exo1 ; col6 total sur 60 ; col.7 moyenne sur 20.

EXERCICE 1. (20 points).

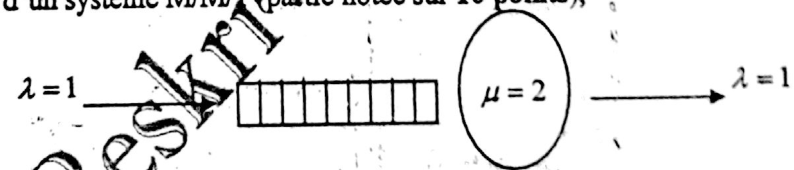
f_i = probabilité de premier retour à l'état i une fois qu'on l'a quitté. (noté aussi f_{ii}).(2 points). μ_i = temps moyen de premier retour à l'état i une fois qu'on l'a quitté. (noté aussi μ_{ii}).).(2 points). τ_i = Nombre moyen total de visites à l'état i).(**2 points**).

Etat non essentiel i : $\exists$ un état j accessible à partir de i ($i \to j$), mais i n'est pas accessible à partir de j).(**1point**).Etat essentiel : un état qui n'est pas non essentiel.).(**1point**).

Etat transitoire : un état qui est tel que $f_i < 1$ (i.e. $\exists$ une probabilité non nulle $1 - f_i > 0$ de pouvoir y retourner un jour). Pour un tel état $\tau_i < \infty$ (on le visite un nombre fini de fois, puis on le quitte pour ne plus y retourner. (**2 points**). Etat récurrent : un état qui est tel que $f_i = 1$ (la probabilité d'y retourner est certaine). (**1 point**)Etat récurrent nul : $f_i = 1$ et $\mu_i = \infty$ (on est certain d'y retourner, mais au bout d'un temps infini i.e. pratiquement jamais).Pour un tel état $\tau_i = \infty$ (si cet état est visité une fois, il est visité une infinité de fois).).(**2 points**).Etat récurrent positif : $f_i = 1$ et $\mu_i < \infty$ (on est certain d'y retourner au bout d'un temps fini i.e. pratiquement jamais).).(**2 points**). Etat ergodique = état récurrent positif.).(**1 points**). Chaîne ergodique= chaîne qui ne contient que des états ergodiques.).(**1point**). Classe ergodique= une classe de communication dont tous les états sont ergodiques.).(**1point**). Classe cyclique= sous-classe d'une classe de communication dans laquelle le retour se fait en un nombre d'étapes multiple de la période ; le passage d'une classe à la suivante se fait en une étape.).(**2 points**).

EXERCICE 2.(40 points)

1. Il s'agit d'un système M/M/1 (partie notée sur **10 points**),



Le processus X(t)=nombre de demandes dans le système à l'instant t forme une chaîne de Markov à temps continu (car les inter-arrivées et les temps de service sont exponentiellement distribués et donc dotés d'absence de mémoire). Le graphe d'état est

Nature de la chaîne : ergodique car $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{1}{2} < 1$ (donc il existe une seule distribution stationnaire)(**1 point**)

Equations d'état : $\dfrac{d\pi_i(t)}{dt} = \pi_{i-1}(t) + 2\pi_{i+1}(t) - 3\pi_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$, $\dfrac{d\pi_0(t)}{dt} = 2\pi_1(t) - \pi_0(t)$.

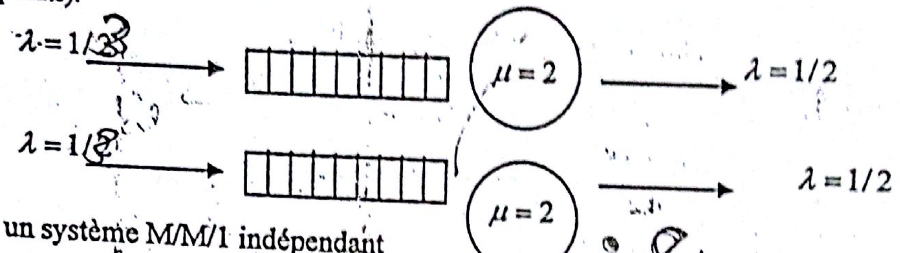
(**2points**). Distribution stationnaire : $\pi_i = (0.5)^i \times 0.5, \quad i = 0,1,2,\ldots$ (**1point**)

Mesures de performance :

- Temps moyen d'attente : $\overline{Q} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{(0.5)^2}{0.5} = 0.5$; $\overline{W} = \dfrac{\overline{Q}}{\lambda} = \dfrac{0.5}{1} = 0.5$ (**1point**).

- Temps moyen de séjour : $\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.5}{1-0.5} = 1$; $\overline{V} = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{1}{1} = 1$.(1point).
- Débit absolu : $A = \lambda = 1$ (car système à capacité et source illimitées :sans contraintes) (1 point). Débit relatif : $A' = A/\lambda = 1$ (idem) (1 point). Charge du serveur : $1-\pi_0 = 0.5$ (1 point).Charge du Système : $1-\pi_0 = 0.5$ (1 point).

Variante A (10 points).



Chaque file est un système M/M/1 indépendant

chaque file est ergodique car $\rho = \frac{\lambda/2}{\mu} = \frac{1}{4} = 0.25 < 1$ (donc il existe une seule distribution stationnaire) (1 point) ; Équations d'état : $\frac{d\pi_i(t)}{dt} = 0.5\pi_{i-1}(t) + 2\pi_{i+1}(t) - 2.5\pi_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,$

$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = 2\pi_1(t) - 0.5\pi_0(t)$. (2 points).

Probabilité que le serveur (le système soit libre) : $\pi_0 = 1-\rho = 1-0.25 = 0.75$.

Distribution stationnaire : $\pi_i = (0.25)^i \times 0.75$, $i = 0,1,2,\ldots$

$\pi_1 = 0.25 \times 0.75 = 0.1875$; $\pi_2 = (0.25)^2 \times 0.75 = 0.104$ .....

Mesures performance :

$\overline{Q} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0.25)^2}{0.75} = \frac{1}{12} = 0.083333$; $\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\lambda/2} = \frac{0.08333}{0.5} = 0.16667$.

- $\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.25}{1-0.75} = \frac{1}{3} = 0.33333$; $\overline{V} = \frac{\overline{N}}{\lambda/2} = \frac{0.33333}{0.5} = 0.666667$..
- $A = \lambda = 0.5$ $A' = A/\lambda = 1$. Charge : $1-\pi_0 = 0.5$.

Pour les deux files prises ensemble :Proba serveur (le système soit libre) : $\pi_0^1 \times \pi_0^2 = (0.75)^2 = 0.5625$. (où π_0^1 (resp. π_0^2) est la proba serveur de la file 1 (resp.2) soit libre.

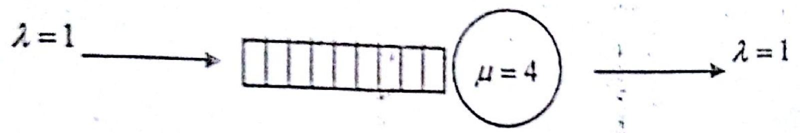
Probabilité qu'il y ait une demande dans le système :

$\pi_0^1 \times \pi_1^2 + \pi_1^1 \times \pi_0^2 = 0.75 \times 0.1875 + 0.1875 \times 0.75 = 0.28125$. (il y a une demande dans l'ensemble si le 1^er serveur est libre et une demande dans le second ou bien une demande dans le premier et le second vide)........(on applique $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$).1 point ;

Mesures de performance pour tout le système (les deux files prises ensemble):

- $\overline{W} = 0.16667$.(1point). (le temps d'attente est le même dans les deux files, alors que la taille de la file dans l'ensemble $\overline{Q}^1 + \overline{Q}^2 = 2 \times 0.083333 = 0.16666$. 1 point
- $\overline{V} = 0.666667$.(1 point). $A = 0.5 + 0.5$ (1point) ; $A' = 1$ (1 point). Charge $1 - \pi_0^1 \times \pi_0^2 = 1-(0.75)^2 = 1-0.5625 = 0.4375$. (1 point).Coût :
  $c_1\mu + c_2 m + c_3\overline{N} = 5\times 2 + 5 \times 2 + 10 \times 0.6666 = 26.666$ (1point)

Variante B (10 points) C'est un système M/M/1 avec $\lambda = 1, \mu = 2$.



ergodique car $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{4} < 1$ (1 point) ;Equations d'état :

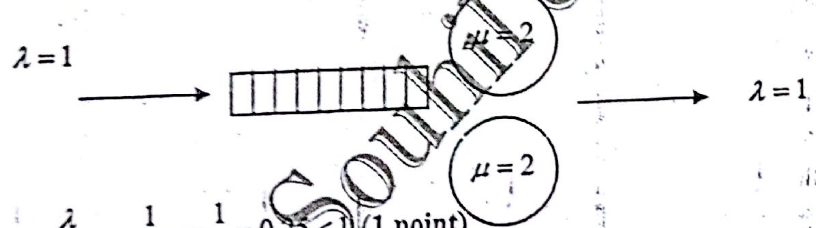
$\frac{d\pi_i(t)}{dt} = \pi_{i-1}(t) + 4\pi_{i+1}(t) - 5\pi_i(t)$, $i = 1,2,...,$ $\frac{d\pi_0(t)}{dt} = 4\pi_1(t) - \pi_0(t)$. **(2points)** ; Distribution stationnaire : $\pi_i = (0.25)^i \times 0.75$, $i = 0,1,2,...$ **(1point)** $\pi_0 = 0.75$

Mesures de performance :

- $\overline{Q} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0.25)^2}{0.75} = \frac{1}{12} = 0.083333$; $\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\lambda} = \frac{0.08333}{1} = 0.083333$.**(1point).**
- $\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3} = 0.3333$; $\overline{V} = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{0.3333}{1} = 0.33333$.**(1point).**
- $A = \lambda = 1$ **(1 point).** Débit relatif : $A' = A/\lambda = 1$ (idem) **(1 point).** $1 - \pi_0 = 0.25$ **(1 point).**

Coût d'exploitation : $c_1 2\mu + c_2 + c_3\overline{N} = 5\times4 + 5\times1 + 10\times0.3333 = 28.333$ **2 point**

Variante C. (10 points) C'est un système M/M/2 avec $\lambda = 1, \mu = 2, m = 2$.



ergodique car $\varphi = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{1}{2\times2} = \frac{1}{4} = 0.25 < 1$ **(1 point)**

Equations d'état(2points) : $\frac{d\pi_i(t)}{dt} = \pi_{i-1}(t) + 4\pi_{i+1}(t) - 5\pi_i(t)$, $i \geq 2$,

$\frac{d\pi_2(t)}{dt} = \pi_1(t) + 4\pi_3(t) - 5\pi_2(t), i = 2$, $\frac{d\pi_1(t)}{dt} = \pi_0(t) + 4\pi_2(t) - 5\pi_1(t), i = 1$

$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = 2\pi_1(t) - \pi_0(t)$. Distribution stationnaire:

$$\pi_i = \begin{cases} \pi_0 \frac{\rho^i}{i!} = \pi_0 \frac{(0.5)^i}{i!}, i = 0,1,2 \\ \pi_0 \frac{\rho^m}{m!}\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{i-m} = \frac{(\lambda/\mu)^i}{m!m^{i-m}} = \pi_0 \frac{(0.25)^i 2^2}{2!}, i \geq 2 \end{cases}$$ **(1point)**

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{i=0}^{m-1}\frac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=m}^{\infty}\frac{\rho^i}{m!}\times\frac{1}{m^{i-m}}\right]^{-1} = \left[1 + \rho + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{\rho^i}{2!}\times\frac{1}{2^{i-2}}\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \rho + \frac{\rho^m}{m!}\times\frac{1}{1-(\lambda/m\mu)}\right]^{-1} = \left[1 + 0.5 + \frac{(0.5)^2}{2!}\times\frac{1}{1-(1/2\times2)}\right]^{-1} = 3/5 = 0.6$$

Scanned by CamScanner

$$\pi_m = \pi_2 = \frac{\rho^2}{2}\pi_0 = \frac{(0.5)^2}{2}\times 0.6 = 0.075$$

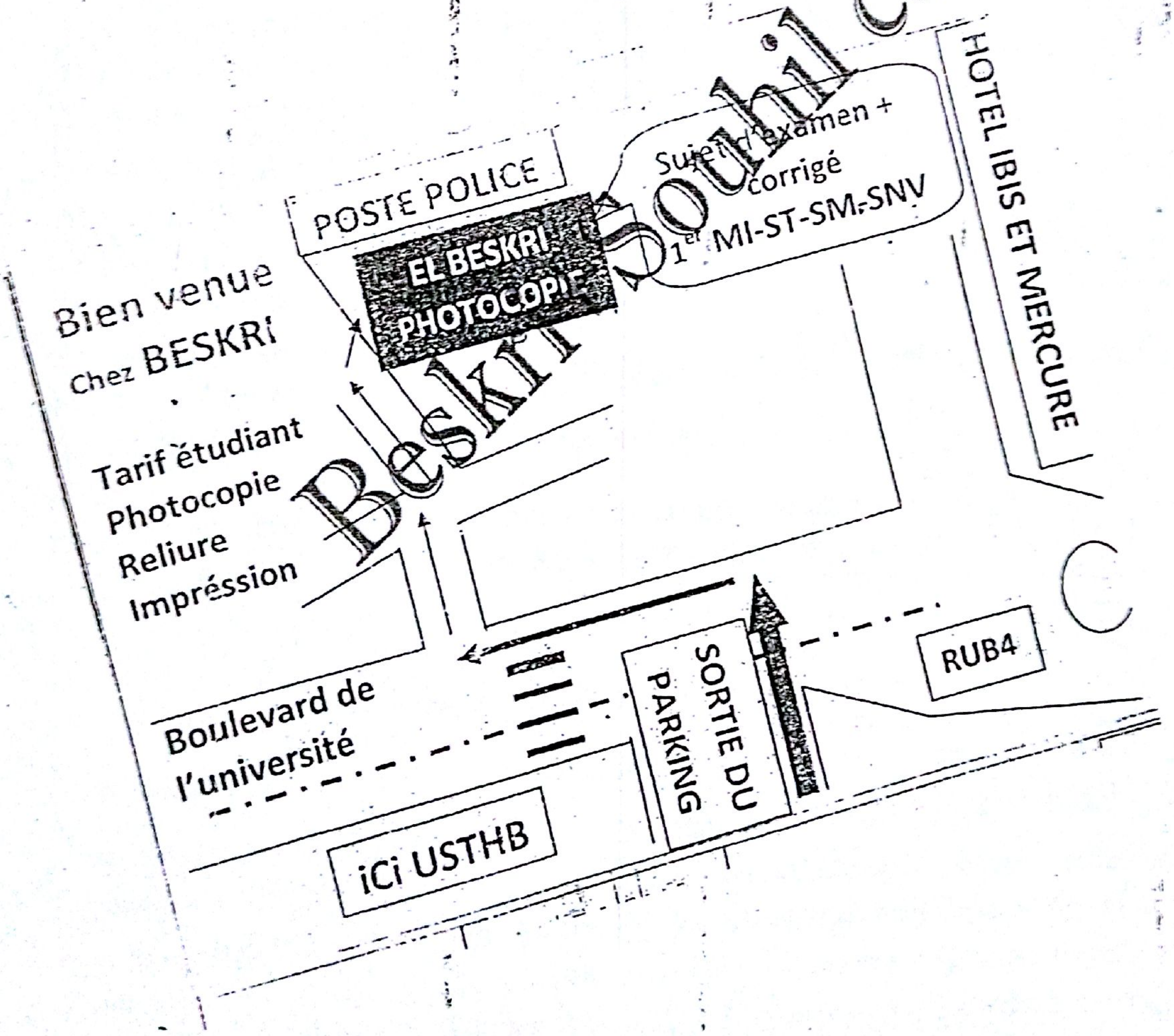
Mesures de performance :

- $\overline{Q} = \frac{\varphi\pi_m}{(1-\varphi)^2} = \frac{0.25\times 0.075}{(1-0.25)^2} = 0.0.3333$; $\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\lambda} = \frac{0.0.3333}{1} = 0.03333$.(1point).
- $\overline{N} = \overline{Q} + \rho = 0.03333 + 0.5 = 0.53333$; $\overline{V} = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{0.53333}{1} = 0.53333$.(1point).

$A = \lambda = 1$. $A' = A/\lambda = 1$ (1 point).

Coût : (mais à discuter) $2c_2 + c_3\overline{N} = 5\times 2 + 10\times 0.5333 = 35.333$ (1 point)

Comparaison : En terme de débit les 3 variantes sont équivalentes (débit=1). Par contre en terme de temps d'attente : $W_C \; \pi \; W_B \; \pi \; W_A$. **Est-ce que le fait de doubler la capacité de service réduit de deux fois le temps d'attente ?** Au sens A, cela n'a aucun effet, le temps d'attente reste le même.
Au sens B, (doubler le taux de service), réduit le temps d'attente de moitié.
Mais au sens C (ajouter un serveur avec file commune) permet de le réduire de près de 6 fois. 2 points



USTHB/FEI/DI — Epreuve MEPS — janvier 2009

Exercice 1 : Que représentent les quantités suivantes pour une chaîne de Markov donnée: f_i, μ_i, τ_i. Indiquer comment servent-elles, s'il y a lieu, dans la définition des objets suivants : État non essential ; Etat essentiel ; Etat transitoire ; Etat récurrent ; Etat récurrent nul ; Etat récurrent positif ; Etat ergodique ; Chaîne ergodique ; Classe ergodique ; Classe cyclique.

Exercice 2 : Soit un système d'attente dans lequel les demandes arrivent selon un processus de Poisson de taux λ (i.e. le temps qui sépare deux arrivées successives suit une loi exponentielle de moyenne $1/\lambda$). Le service est assuré par un serveur et le temps de service suit une loi exponentielle de moyenne $1/\mu$. La discipline de service est FIFO, la capacité du système est illimitée et la source illimitée.

1. Montrer comment modéliser l'évolution d'un tel système par une chaîne de Markov. Etudier cette chaîne : Nature (classification des états), Equations d'état, condition d'existence d'une distribution stationnaire. Calcul de la distribution stationnaire (lorsqu'elle existe). En déduire les mesures de performance : temps moyen d'attente et de séjour, débit relatif et absolu, charge du serveur et du système.

2. On souhaite doubler (ou tout au moins augmenter) la capacité de service. Pour cela, on hésite entre plusieurs variantes :

A. Utiliser un seul serveur de taux de service 2μ avec une file FIFO illimitée.
B. Utiliser deux serveurs (de taux μ chacun), avec deux files (FIFO illimitées) indépendantes de taux $\lambda/2$ arrivées par unité de temps.
C. Utiliser deux serveurs (de taux μ chacun), mais avec une seule file commune (FIFO illimitée).

Ecrire les équations d'état pour chacun des cas, et déterminer :

(i) la condition d'existence d'une distribution stationnaire.
(ii) Les équations d'état.
(iii) L'expression de la probabilité que le serveur soit libre et que le système soit vide.
(iv) L'expression de la distribution stationnaire lorsqu'elle existe.
(v) Les temps moyens d'attente et de séjour.
(vi) Les débits relatif et absolu.
(vii) Le coût d'exploitation pour chaque variante.
(viii) Comparer les différentes variantes du point de vue des mesures de performance indiquées précédemment.
(ix) Est-ce que le fait de doubler la capacité de service, conduit à un temps d'attente deux fois plus petit ?

Pour l'application numérique, on prendra $\lambda = 1, \mu = 2$.
c_1 = coût d'une unité de temps de service — 5
c_2 = coût d'exploitation d'un serveur par unité de temps ; — 5
c_3 = coût lié à la présence d'une demande dans le système par unité de temps. 10

EXERCICE 1. (20 points).

f_i = probabilité de premier retour à l'état i une fois qu'on l'a quitté: (noté aussi f_{ii}).

(2 points).

μ_i = temps moyen de premier retour à l'état i une fois qu'on l'a quitté. (noté aussi μ_{ii}).).**(2 points).**

τ_i = Nombre moyen total de visites à l'état i).**(2 points).**

Etat non essentiel i **:** $\exists$ un état j accessible à partir de i ($i \to j$), mais i n'est pas accessible à partir de j).**(1point).**

Etat essentiel : un état qui n'est pas non essentiel.).**(1point).**

Etat transitoire : un état qui est tel que $f_i < 1$ (i.e. $\exists$ une probabilité non nulle $1 - f_i > 0$ de pouvoir y retourner un jour). Pour un tel état $\tau_i < \infty$ (on le visite un nombre fini de fois, puis on le quitte pour ne plus y retourner. **(2 points)**. Etat récurrent : un état qui est tel que $f_i = 1$ (la probabilité d'y retourner est certaine). **(1 point)**

Etat récurrent nul : $f_i = 1$ et $\mu_i = \infty$ (on est certain d'y retourner, mais au bout d'un temps infini i.e. pratiquement jamais).Pour un tel état $\tau_i = \infty$ (si cet état est visité une fois, il est visité une infinité de fois).).**(2 points).**

Etat récurrent positif : $f_i = 1$ et $\mu_i < \infty$ (on est certain d'y retourner au bout d'un temps fini ~~i.e. pratiquement jamais~~).).**(2 points).**

Etat ergodique =état récurrent positif.).**(1 points).**

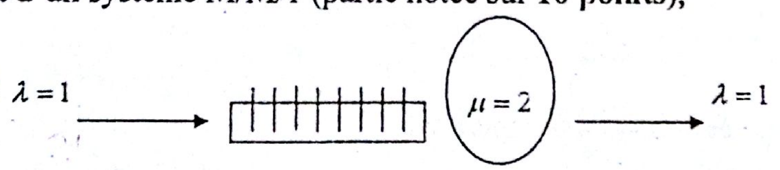
Chaîne ergodique= chaîne qui ne contient que des états ergodiques.).**(1point).**

Classe ergodique= une classe de communication dont tous les états sont ergodiques.).**(1point).**

Classe cyclique= sous-classe d'une classe de communication dans laquelle le retour se fait en un nombre d'étapes multiple de la période ; le passage d'une classe à la suivante se fait en une étape.).**(2 points).**

EXERCICE 2.(40 points)

1. Il s'agit d'un système M/M/1 (partie notée sur **10 points**),



Le processus X(t)=nombre de demandes dans le système à l'instant t forme une chaîne de Markov à temps continu (car les inter-arrivées et les temps de service sont exponentiellement distribués et donc dotés d'absence de mémoire). Le graphe d'état est .

Nature de la chaîne : ergodique car $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2} < 1$ (donc il existe une seule distribution stationnaire)**(1 point)**

Équations d'état : $\frac{d\pi_i(t)}{dt} = \pi_{i-1}(t) + 2\pi_{i+1}(t) - 3\pi_i(t)$, $i = 1,2,...,$ $\frac{d\pi_0(t)}{dt} = 2\pi_1(t) - \pi_0(t)$.

(2points).

Distribution stationnaire : $\pi_i = (0.5)^i \times 0.5, \quad i = 0,1,2,...$ **(1point)**

Mesures de performance :

Temps moyen d'attente : $\overline{Q} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0.5)^2}{0.5} = 0.5$;

$\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\lambda} = \frac{0.5}{1} = 0.5$. **(1point).**

Temps moyen de séjour : $\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.5}{1-0.5} = 1$;

$\overline{V} = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{1}{1} = 1$. **(1point).**

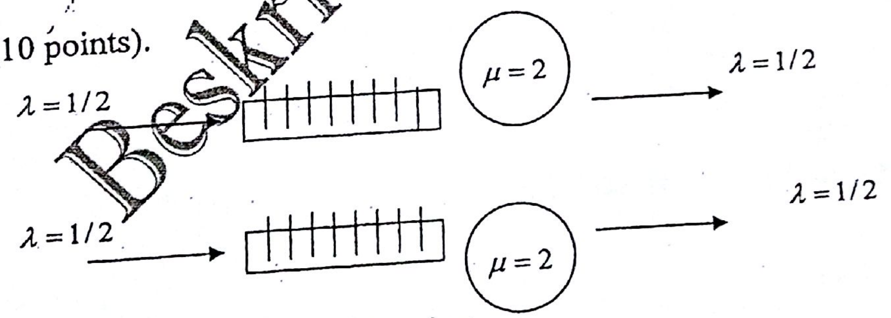
Débit absolu : $A = \lambda = 1$ (car système à capacité et source illimitées :sans contraintes) **(1 point).**

Débit relatif : $A' = A/\lambda = 1$ (idem) **(1 point).**

Charge du serveur : $1 - \pi_0 = 0.5$ **(1 point).**

Charge du Système : $1 - \pi_0 = 0.5$ **(1 point).**

Variante A.(10 points).



Chaque file est un système M/M/1 indépendant

chaque file est ergodique car $\rho = \frac{\lambda/2}{\mu} = \frac{1}{4} = 0.25 < 1$ (donc il existe une seule distribution stationnaire) **(1 point)** ;

Équations d'état : $\frac{d\pi_i(t)}{dt} = 0.5\pi_{i-1}(t) + 2\pi_{i+1}(t) - 2.5\pi_i(t)$, $i = 1,2,...,$

$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = 2\pi_1(t) - 0.5\pi_0(t)$. **(2 points).**

robabilité que le serveur (le système soit libre) : $\pi_0 = 1-\rho = 1-0.25 = 0.75$.

Distribution stationnaire : $\pi_i = (0.25)^i \times 0.75, \quad i = 0,1,2,\ldots$

$\pi_1 = 0.25 \times 0.75 = 0.1875$; $\pi_2 = (0.25)^2 \times 0.75 = 0.104$ .....

Mesures performance :

$\overline{Q} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{(0.25)^2}{0.75} = \dfrac{1}{12} = 0.083333$; $\quad \overline{W} = \dfrac{\overline{Q}}{\lambda/2} = \dfrac{0.08333}{0.5} = 0.16667$.

$\overline{N} = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{0.25}{1-0.75} = \dfrac{1}{3} = 0.33333$; $\quad \overline{V} = \dfrac{\overline{N}}{\lambda/2} = \dfrac{0.33333}{0.5} = 0.666667$..

$A = \lambda = 0.5$. $\quad A' = A/\lambda = 1$. $\quad$ Charge : $1-\pi_0 = 0.5$.

Pour les deux files prises ensemble : Proba serveur (le système soit libre) : $\pi_0^1 \times \pi_0^2 = (0.75)^2 = 0.5625$.(où π_0^1(resp.π_0^2) est la proba serveur de la file 1 (resp.2) soit libre. Probabilité qu'il y ait une demande dans le système : $\pi_0^1 \times \pi_1^2 + \pi_1^1 \times \pi_0^2 = 0.75 \times 0.1875 + 0.1875 \times 0.75 = 0.28125$.(il y a une demande dans l'ensemble si le 1[er] serveur est libre et une demande dans le second ou bien une demande dans le premier et le second vide.(on applique $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$).**1 point ;**

Mesures de performance pour tout le système (les deux files prises ensemble):

$\overline{W} = 0.16667$.**(1point)**. (le temps d'attente est le même dans les deux files, alors que la taille de la file dans l'ensemble

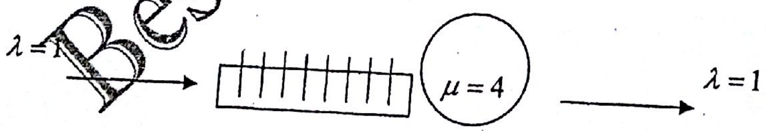
$\overline{Q}^1 + \overline{Q}^2 = 2 \times 0.083333 = 0.16666$. **1 point**

$\overline{V} = 0.666667$.**(1 point)**. $A = 0.5 + 0.5$ **(1point)** ; $A' = 1$ **(1 point)**.

Charge $1 - \pi_0^1 \times \pi_0^2 = 1-(0.75)^2 = 1-0.5625 = 0.4375$. **(1 point)**.

Coût : $c_1\mu + c_2 m + c_3\overline{N} = 5 \times 2 + 5 \times 2 + 10 \times 0.6666 = 26.666$ **(1point)**

Variante B (10 points) C'est un système M/M/1 avec $\lambda = 1, \mu = 2$.



ergodique car $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{1}{4} < 1$ **(1 point)** ;Équations d'état : $\dfrac{d\pi_i(t)}{dt} = \pi_{i-1}(t) + 4\pi_{i+1}(t) - 5\pi_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$, $\dfrac{d\pi_0(t)}{dt} = 4\pi_1(t) - \pi_0(t)$. **(2points)** ; Distribution stationnaire : $\pi_i = (0.25)^i \times 0.75$, $i = 0,1,2,\ldots$ **(1point)**

$$\pi_0 = 0.75$$

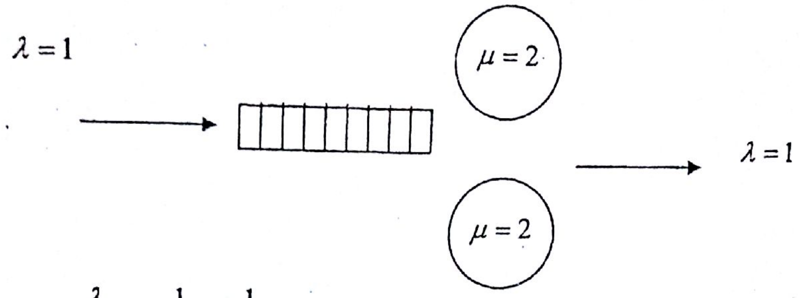
Mesures de performance :

- $\overline{Q} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{(0.25)^2}{0.75} = \dfrac{1}{12} = 0.083333$; $\overline{W} = \dfrac{\overline{Q}}{\lambda} = \dfrac{0.08333}{1} = 0.083333$.**(1point)**.
- $\overline{N} = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{0.25}{0.75} = \dfrac{1}{3} = 0.3333$; $\overline{V} = \dfrac{\overline{N}}{\lambda} = \dfrac{0.3333}{1} = 0.33333$.**(1point)**.

- $\bar{\lambda} = \lambda = 1$ **(1 point)**. Débit relatif : $A' = A/\lambda = 1$ (idem) **(1 point)**. $1-\pi_0 = 0.25$ **(1 point)**.

Coût d'exploitation : $c_1 2\mu + c_2 + c_3\overline{N} = 5\times 4 + 5\times 1 + 10\times 0.3333 = 28.333$ **2 point**

Variante C. (10 points) C'est un système M/M/2 avec $\lambda = 1, \mu = 2, m = 2$.



ergodique car $\varphi = \dfrac{\lambda}{m\mu} = \dfrac{1}{2\times 2} = \dfrac{1}{4} = 0.25 < 1$ **(1 point)**

Equations d'état(**2points**) : $\dfrac{d\pi_i(t)}{dt} = \pi_{i-1}(t) + 4\pi_{i+1}(t) - 5\pi_i(t)$, $i \geq 2$,

$\dfrac{d\pi_2(t)}{dt} = \pi_1(t) + 4\pi_3(t) - 5\pi_2(t), i = 2$, $\dfrac{d\pi_1(t)}{dt} = \pi_0(t) + 4\pi_2(t) - 5\pi_1(t), i = 1$

$\dfrac{d\pi_0(t)}{dt} = 2\pi_1(t) - \pi_0(t)$. Distribution stationnaire:

$$\pi_i = \begin{cases} \pi_0 \dfrac{\rho^i}{i!} = \pi_0 \dfrac{(0.5)^i}{i!}, i = 0,1,2 \\ \pi_0 \dfrac{\rho^m}{m!}\left(\dfrac{\lambda}{m\mu}\right)^{i-m} = \dfrac{(\lambda/\mu)^i}{m!\,m^{i-m}} = \pi_0 \dfrac{(0.25)^i 2^2}{2!}, i \geq 2 \end{cases}$$ **(1point)**

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\rho^i}{m!} \times \frac{1}{m^{i-m}}\right]^{-1} = \left[1 + \rho + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\rho^i}{2!} \times \frac{1}{2^{i-2}}\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \rho + \frac{\rho^m}{m!} \times \frac{1}{1-(\lambda/m\mu)}\right]^{-1} = \left[1 + 0.5 + \frac{(0.5)^2}{2!} \times \frac{1}{1-(1/2\times 2)}\right]^{-1} = 3/5 = 0.6$$

$$\pi_m = \pi_2 = \frac{\rho^2}{2}\pi_0 = \frac{(0.5)^2}{2} \times 0.6 = 0.075$$

Mesures de performance :

- $\overline{Q} = \dfrac{\varphi\pi_m}{(1-\varphi)^2} = \dfrac{0.25\times 0.075}{(1-0.25)^2} = 0.0.3333$; $\overline{W} = \dfrac{\overline{Q}}{\lambda} = \dfrac{0.0.3333}{1} = 0.03333$.**(1point)**.
- $\overline{N} = \overline{Q} + \rho = 0.03333 + 0.5 = 0.53333$; $\overline{V} = \dfrac{\overline{N}}{\lambda} = \dfrac{0.53333}{1} = 0.53333$.**(1point)**. $A = \lambda = 1$.

  $A' = A/\lambda = 1$ **(1 point)**.

Coût : (mais à discuter) $2c_2 + c_3\overline{N} = 5\times 2 + 10\times 0.5333 = 35.333$ **(1 point)**

Comparaison : En terme de débit les 3 variantes sont équivalentes (débit=1). Par contre