Cours :

Logique - incomplet :

Définition : Formule propositionnelle

Une formule propositionnelle est une formule liant des propositions élémentaires représentées par des lettres (ou variables propositionnelles), à l'aide d'un certain nombre de symboles représentant des opérations logiques.

Définition : Formules équivalentes

Deux formules A et B sont dites équivalentes si elles prennent la même valeur de vérité l'une et l'autre, quelle que soit la distribution de vérités données sur l'ensemble des variables propositionnelles intervenant dans ces formules. Autrement dit, elles sont vraies et fausses sous les mêmes conditions sur les variables propositionnelles.

Définition : Tautologie

Ce sont des formules toujours vraies (pour toute distribution de vérité).

Proposition : Associativité du $\vee$

A, B et C désignent des variables propositionnelles

$$(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$$

Proposition : Associativité du ∧

A, B et C désignent des variables propositionnelles

$$(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C)$$

Proposition : Distributivité du ∨

A, B et C désignent des variables propositionnelles

$$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Proposition : Distributé du ∧

A, B et C désignent des variables propositionnelles

$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Proposition : Equivalence de l'impliquation

A et B désignent des variables propositionnelles

$$(A \implies B) \iff (B \vee \neq A)$$

Proposition : Contraposée

A et B désignent des variables propositionnelles

$$(A \implies B) \iff (\neq B \implies \neq A)$$

Relations :

Définition : Relation binaire

Une relation binaire entre deux ensembles E et F est un sous-ensemble G de $E \times F$.

Définition : Relation fonctionnelle

Une relation $\mathcal{R}$ entre E et F est fonctionnelle si pout tout x de E il existe au plus un y de F tel que $x\mathcal{R}y$.

Définition : Relation applicationnelle

Une relation $\mathcal{R}$ entre E et F est applicationnelle si pout tout x de E il existe un et un seul y de F tel que $x\mathcal{R}y$.

Définition : Reflexivité

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E.
On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$.

Définition : Irréflexivité

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E.
On dit que $\mathcal{R}$ est irréflexive si pour tout $x \in E$, on a $\neq (x\mathcal{R}x)$.

Définition : Symétrie

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique si pour tout $(x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y) \implies (y\mathcal{R}x)$.

Définition : Antisymétrie

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est antisymétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$,

$(x\mathcal{R}y) \land (y\mathcal{R}x) \implies x = y$.

Définition : Asymétrie

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est asymétrique si pour tout $(x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y) \implies \neq (y\mathcal{R}x)$.

Définition : Transitivité

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si pour tout $(x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y) \land (y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

Définition : Relation d'équivalence

Une relation d'équivalence sur E est une relation réflexive, symétrique et transitive.

Définition : Classe d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, et $x \in E$.

La classe d'équivalence de x sous la relation $\mathcal{R}$ est le sous ensemble C_x de E constitué des éléments en relation avec x : $C_x = \{x \in E | x\mathcal{R}y\}$.

Lemme : Classe d'équivalence

Si y et x sont dans une même classe d'équivalence, alors $y\mathcal{R}x$.

Théorème : Partition formée par les classes d'équivalence

Soit E un ensemble, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E

L'ensemble des classes d'équivalence sous $\mathcal{R}$ forme une partition de E.

Définition : Ensemble quotient

L'ensemble des classes sous la relation $\mathcal{R}$ s'appelle l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, et est noté $E/\mathcal{R}$. C'est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$.

Définition : Projection canonique

On appelle projection canonique de E sur $E/\mathcal{R}$ l'application $\pi\mathcal{R}$ qui à x associe sa classe $\overline{x}$. Par définition, $\pi\mathcal{R}$ est surjective, et vérifie : $\forall(x, y) \in E^2$,

$$x\mathcal{R}y \iff \pi\mathcal{R}(x) = \pi\mathcal{R}(y).$$

Théorème : Factorisation d'une application constante sur les classes d'équivalence

Soit $f : E \to F$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \implies f(x) = f(y)$

(ii) Il existe $g : E/\mathcal{R} \to F$ tel que $f = g \circ \pi\mathcal{R}$

Définition : Congruence

Soit E un ensemble, muni d'un certain nombre d'opération $\times_1, \times_2, \dots, \times_n$.

On dit qu'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est une congruence sur $(E, \times_1, \dots, \times_n)$ si $\forall (x, y, x', y') \in E^4, \forall i \in [\![1, n]\!], (x\mathcal{R}x') \wedge (y\mathcal{R}y') \implies (x \times_i y)\mathcal{R}(x' \times_i y')$.

Proposition : Congruence des entiers

La relation de congruence des entiers $\equiv [n]$ est une congruence sur $(\mathbb{Z}, +, \times)$

Proposition : Passage au quotient des opérations

Soit $(E, \times_1, \dots, \times_n)$ un ensemble muni de n lois d'opérations, et $\mathcal{R}$ une congruence sur $(E, \times_1, \dots, \times_n)$.

Alors on peut définir sur $E/\mathcal{R}$ des lois $\times_1, \dots, \times_n$ telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $(x, y) \in E^2$

$$\overline{x} \times_i \overline{y} = \overline{x \times_i y}$$

Corollaire : Addition et multiplication de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On peut munir $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'une addition $+$ et d'une multiplication $\times$ telles que :
$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, (\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y})$ et $(\overline{x} \times \overline{y} = \overline{x \times y})$.

Définition : relation d'ordre large

Une relation d'ordre sur E est une relation réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition : relation d'ordre stricte

Une relation d'ordre sur E est une relation antiréflexive et transitive.

Proposition : Antisimétrie d'une relation d'ordre stricte

Une relation d'ordre stricte est antisymétrique

Proposition : D'une relation d'ordre large à une relation d'ordre stricte

Toute relation d'ordre large $\leqslant$ définit une relation d'ordre stricte par $x < y$ si et seulement si $x \leqslant y$ et $x \neq y$

Proposition : D'une relation d'ordre stricte à une relation d'ordre large

Toute relation d'ordre stricte $<$ définit une relation d'ordre large $\leqslant$ par $x \leqslant y$ si et seulement si $x < y$ ou $x = y$

Définition : Ordre total/partiel

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E.
On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total si pour tout $(x, y) \in E^2$, soit $x \leqslant y$ soit $y \leqslant x$.
Dans le cas contraire, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel.

Définition : Restriction d'une relation d'ordre

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$, et A un sous-ensemble de E.
Alors $\mathcal{R}$ définition sur A, une relation d'ordre $\mathcal{R}^{'}$ par :
$\forall (x, y) \in A^2, x\mathcal{R}^{'}y \iff x\mathcal{R}y.$
Il s'agit de la restriction à A de la relation $\mathcal{R}$, ou de la relation induite par $\mathcal{R}$ sur A.

Définition : Minimum, maximum

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre.
1) Un élément m de E est appelé plus petit élément de E si : $\forall m^{'} \in E, m \leqslant m^{'}$.
2) Un élément M de E est appelé plus grand élément de E si : $\forall m^{'} \in E, M \geqslant m^{'}$.
3) Etant donné un sous-ensemble A de E, un élément minimum (resp maximum) de A est un élément minimum (resp maximum) pour la relation d'ordre $\mathcal{R}^{'}$ induite par $\mathcal{R}$ sur A.

Proposition : Unicité du minimum

S'il existe, le plus petit élément de E (resp de $A \subset E$) est unique. De même pour le plus grand élémént.

Définition : Elément minimal

Soit $(E, \leqslant)$ *un ensemble muni d'une relation d'ordre.*
Un élément m de E est appelé élément minimal de E s'il n'existe pas d'élément x de E tel que $x < m$.

Définition : Elément maximal

Soit $(E, \leqslant)$ *un ensemble muni d'une relation d'ordre.*
Un élément M de E est appelé élément maximal de E s'il n'existe pas d'élément x de E tel que $x > M$.

Proposition : Existence d'un élément minimal dans un ensemble fini

Soit E *un ensemble ordonné et non vide.*
Alors E admet un élément minimal.

Définition : Minorant

Soit $(E, \leqslant)$ *un ensemble muni d'une relation d'ordre. Soit* $A \subset E$.
Un minorant m de A est un élément $m \in E$ tel que : $\forall a \in A, a \geqslant m$.

Définition : Majorant

Soit $(E, \leqslant)$ *un ensemble muni d'une relation d'ordre. Soit* $A \subset E$.

Un majorant M de A est un élément $M \in E$ tel que : $\forall a \in A$, $a \leqslant M$.

Définition : Borne supérieure

Soit $(E, \leqslant)$, *et soit* $A \subset E$

La borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A, s'il existe.

Définition : Borne inférieure

Soit $(E, \leqslant)$, *et soit* $A \subset E$

La borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A, s'il existe.

Proposition : Maximum d'un sous-ensemble

Soit $(E, \leqslant)$, *et* $A \subset E$.

A admet un maximum M si et seulement si A admet une borne supérieure b et si $b \in A$. Dans ce cas $M = b$.

Proposition : Minimum d'un sous-ensemble

Soit $(E, \leqslant)$, *et* $A \subset E$.

A admet un minimum m si et seulement si A admet une borne inférieure b et si $b \in A$. Dans ce cas $m = b$.

Définition : Application croissante

Soit E et F deux ensembles, munis chacun d'une relation d'ordre $\leqslant_E$ et $\leqslant_F$ respectivement.

Une application $f : E \to F$ est dite :

croissante si

$$\forall (x, y) \in E^2, x \leqslant_E y \implies f(x) \leqslant_F f(y),$$

décroissante si

$$\forall (x, y) \in E^2, x \leqslant_E y \implies f(x) \geqslant_F f(y).$$

Définition : Ensemble inductif

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné.

On dit que E est un ensemble inductif si pour tout sous-ensemble $F \subset E$ totalement ordonné, F admet un majorant dans E.

Théorème : lemme de Zorn

Tout ensemble inductif admet un élément maximal.

Nombres réels :

Proposition : Axiome de récurrence

Soit P définie sur $n \in \mathbb{N}$

$$(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1))) \implies (\forall n \in \mathbb{N}, P(n))$$

Théorème : propriété fondamentale de $\mathbb{N}$

Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément

Corollaire : Corollaire de la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$

Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Théorème : équivalence de la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$

La propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ est équivalente à l'axiome de récurrence.

Proposition : Propriétés de l'addition et du produit d'entiers

Soient a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$

- $a + 0 = 0 + a = a$ (0 est élément neutre pour $+$)
- $a \times 0 = 0 \times a = 0$ (0 est absorbant pour $\times$)
- $a + 1 = 1 + a$
- $a \times 1 = 1 \times a = a$ (1 est neutre pour $\times$)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ ($\times$ est associative)
- $a + b = b + a$ ($+$ est commutative)
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ($\times$ est distributive sur $+$)
- $a \times b = b \times a$ ($\times$ est commutative)
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ($\times$ est associative)
- $ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$ (intégrité de $(\mathbb{N}, \times)$)
- $a + b = 0 \implies a = 0 \wedge b = 0$
- $a + b = a + c \implies b = c$ (régularité pour $+$)
- Si $a \neq 0$, $ab = ac \implies b = c$ (régularité pour $\times$)

Proposition : Relation d'ordre, somme et produit

Soit a, b, c et d des entiers naturels.

- Si $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$ alors $a + b \leqslant c + d$ avec égalité si et seulement si $a = c$ et $b = d$
- si $0 < a \leqslant c$ et $0 < b \leqslant d$ alors $ab \leqslant cd$ avec égalité si et seulement si $a = c$ et $b = d$

Proposition : $\mathbb{Z}$ peut être vu comme un prolongement de $\mathbb{N}$

L'application :

$$i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$n \to \overline{(n, 0)}$$

est une injection compatible avec les lois $+$ et $\times$.

Proposition : Compatibilité de la relation d'ordre avec le produit

1. Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$,
$a < b \iff ac < bc$ et $a \leqslant b \iff ac \leqslant bc$

2. Soit $c \in \mathbb{Z}^*$,
$a < b \iff ac > bc$ et $a \leqslant b \iff ac \geqslant bc$

Définition : Notation usuelle pour un rationnel

La classe $\overline{(a, b)}$ du couple (a, b) est notée $\frac{a}{b}$.

Théorème : Définition de l'addition et du produit de rationnels

Les lois définies sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$ et $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$ passent au quotient, définissant sur $\mathbb{Q}$ les lois pouvant être décrites avec les notations usuelles par :
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Théorème : Propriétés des lois de $\mathbb{Q}$

- Les lois $+$ et $\times$ sont associatives
- Les lois $+$ et $\times$ sont commutatives
- La loi $\times$ est distributive sur $+$
- L'élément $0 = \frac{0}{1}$ est neutre pour $+$, et tout élément $\frac{a}{b}$ admet un opposé $\frac{-a}{b}$
- Le rationnel $\frac{a}{b}$ est égal = 0 si et seulement si $a = 0$
- L'élément $1 = \frac{1}{1}$ est neutre pour $\times$, et tout élément $\frac{a}{b}$ non nul est inversible, d'inverse $\frac{b}{a}$

Ainsi que $\mathbb{Q}$ est un corps.

Remarque : inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$

Les entiers $a \in \mathbb{Z}$ peuvent être identifiés aux rationnels $\frac{a}{1}$ (dans le sens où $a \to \frac{a}{1}$ définit une injection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$). Via cette identification, on peut considérer que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Définition : Inégalité dans $\mathbb{Q}$

Soit $q = \frac{a}{b}$ et $r = \frac{c}{d}$ deux rationnels (avec b et d dans $\mathbb{N}$).*
Alors le signe de l'entier relatif $ad - bc$ est indépendant de la représentation choisie (avec un dénominateur positif de q et $q^{'}$. On définit alors la relation d'ordre sur q par :

$$q \leqslant r \iff ad - bc \leqslant 0$$

Théorème : Relation $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$

La relation $\leqslant$ ainsi difinie sur $\mathbb{Q}$ est une relation d'ordre total.

Définition : Nombres incommensurables

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$
On dit que x et y sont incommensurables si $\frac{x}{y}$ est irrationnel.

Proposition : Existence de nombres irrationnels

Si n n'est pas un carré parfait (donc si n ne s'écrit pas sous la forme $n = m^2$ pour un certain entier m), alors $\sqrt{(N)}$ est irrationnel.

Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$

Soit E un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$.
Alors E admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Théorème : Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, exprimée avec la borne inférieure

Soit E un sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$.

Alors E admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Propriété : Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ vérifie les 4 propriétés élémentaires suivants :

1. C'est une relation d'ordre totale
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$
3. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, x + y \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = y = 0$
4. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, xy \geqslant 0$

Corollaire : Règle des signes pour le produit

Soit x et y deux réels.

1. Si $x \leqslant 0$ alors $-x \geqslant 0$
2. Si $x \geqslant 0$, alors $-x \leqslant 0$
3. Si $x \geqslant 0 \wedge y \leqslant 0$ ou si $x \leqslant 0 \wedge y \geqslant 0$, alors $xy \leqslant 0$
4. Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$, alors $xy \geqslant 0$

Proposition : Manipulation élémentaires d'inégalités

Soient a, b et c des réels.

1. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$
2. Si $a \leqslant b$ alors $-b \leqslant -a$
3. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a - d \leqslant b - c$
4. Si $0 < a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d$, alors $0 < ac \leqslant bd$, avec égalité si et seulement si $a = b$ et $c = d$
5. Si $a \geqslant 0$ et $c \leqslant d$, alors $ac \leqslant ad$
6. Si $a \leqslant 0$ et $c \leqslant d$, alors $ac \geqslant ad$
7. Pour toutes les autres situations de produit d'inégalité, raisonner d'abord sur la valeur absolue, puis ajouter le signe

Méthode : Majorer, minorer

Pour obtenir des inégalités, on peut :

- Tout passer du même côté (si l'inégalité est donnée) et essayer de factoriser pour déterminer le signe.
- Procéder par étude de fonction, si l'inégalité est donnée : on passe tout du même côté, et on étudie le signe de la fonction obtenue, grâce à une étude de variations.
- Utiliser une propriété de convexité ou de concavité : une fonction dérivable f est convexe si f' est croissante (donc la pente est de plus en plus forte). Intuitivement, la convexité se traduit par le fait que les tangentes sont sous la courbe, et les cordes sont au-dessus de la courbe.
- Utiliser des inégalités classiques (en premiere lieu l'inéaglité triangulaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité arithmético-géométrique...). L'inégalité triangulaire est à utiliser dès lors qu'on cherche à majorer la valeur absolue (ou le module) d'une somme dont on sait majorer la valeur absolue de chaque terme : il faut d'abord sortir ces termes de la valeur absolue globale et ce grâce à l'inégalité triangulaire.

Définition : Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est la réel obtenu de x en changeant si besoin son signe de sorte à obtenir une quantité positive :

$$\begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

Remarque : Utilisation de la valeur absolue

La valeur absolue est souvent utilisée lorsqu'on veut montrer qu'une quantité reste bornée, c'est-à-dire peut être à la fois majorée et minorée. En effet, majorer $|A|$ revient à majorer et minorer A, puisque $|A| \leqslant B$ équivaut à $-B \leqslant A \leqslant$

Définition : Partie positive d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$

On appelle **partie positive** de x, et on note x^+ le réel défini par :

$$x^+ = \max(0, x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Définition : Partie négative d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$

On appelle **partie négative** de x, et on note x^- le réel défini par :

$$x^- = -\min(0, x) = \max(0, -x) = \begin{cases} x \text{ si } -x < 0 \\ 0 \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Propriété : Propriétés des parties positives et négatives

Soit x un réel

Alors :

1. $x^+ \geqslant 0$ et $x^- \geqslant 0$
2. $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$
3. $x = x^+ - x^-$
4. $\forall (y, z) \in \mathbb{R}_+$, si $x = y - z$ alors $y \geqslant x^+$ et $z \geqslant x^-$
5. $|x| = x^+ + x^- = max(0, x) - min(0, -x)$
6. $(-x)^+ = x^-$ et $(-x)^- = x^+$

Corollaire : Inégalité triangulaires

Soit x et y deux réels

Alors :

1. $(x + y)^+ \leqslant x^+ + y^+$
2. $(x + y)^- \leqslant x^- + y^-$
3. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

Chacune de ces inégalités est une égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

Corollaire : Inégalité triangulaire pour les sommes

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie de réels.

Alors

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|$$

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz numérique

Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels.
On a alors :

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i|^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$$

Théorème : Inégalité arithmético-géométrique

Pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,
$\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) \geqslant \sqrt[n]{x_1 \times \ldots \times x_n}$

Proposition : Propriété d'Archimède

Soit x et y deux réels strictement positifs.
Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$

Corollaire : Propriété d'Archimède appliquée au rationnels

Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, il existe un rationnel r tel que $0 < rx < y$.

Théorème : Division euclidienne

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$
Il existe un unique entier n et un unique réel $r \in [0, y[$ tels que $x = ny + r$

Définition : Densité dans $\mathbb{R}$

Un sous ensemble E de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que que $x < y$, il existe $z \in E$ tel que $x < z < y$

Théorème : Densité des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Définition : Nombres algébriques, transcendants sur $\mathbb{Q}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

- On dit que x est **algébrique** sur $\mathbb{Q}$ s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(x) = 0$
- On dit que x est transcendant sur $\mathbb{Q}$ s'il n'est pas algébrique

Définition : Partie entière

La partie entière d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$ est le quotient de la division euclidienne par 1. Il s'agit donc de l'unique entier n tel qu'il existe $r \in [0, 1[$ tel que $x = n + r$

Définition : Partie décimale

Le réel r de la définition de la partie entière (reste de la division euclidienne d'un réel x par 1) est parfois notée $\{x\}$, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible avec la notation ensembliste désignant le singleton dont l'unique élément est x.

Proposition : Caractérisation de la partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$

1. $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leqslant x\}$
2. $\lfloor x \rfloor = \min\{n \in \mathbb{Z} | n > x\} - 1$
3. $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor - 1$
4. $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

Définition : partie entière par excès

On définit parfois aussi la partie entière par excès, notée $\lceil x \rceil$, comme étant le plus petit entier supérieur ou égal à x :

$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} | n \geqslant x\}$

Proposition : Relation entre partie entière et partie entière par excès

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a alors :

1. $\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor \qquad \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$
2. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

Propriété : Propriétés de la partie entière

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \geq \lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \lfloor xy \rfloor \geq \lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

Remarque : Notation des nombres décimaux

- Nous notons $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, c'est à dire des réels x tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n x$ est entier
- Etant donné $n \in \mathbb{N}$, nous notons $\mathbb{D}_n$ l'ensemble des nombres décimaux tels que $10^n x \in \mathbb{Z}$. Par exemble $\mathbb{D}_0 = \mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}_1$ sont les décimaux s'écrivant avec au plus un chiffre après la virgule.

Proposition : Approximation des décimales d'un réel x

Soit x un réel et $n \in \mathbb{N}^*$

Il existe un unique élément y de $\mathbb{D}_n$ tel que $y_n \leq x < y_n + 10^{-n}$.

- Le décimal y_n est appelé valeur approchée décimal à la précision 10^{-n} par défaut
- Le décimal $y_n + 10^{-n}$ est appelé valeur approchée décimale à la précision 10^{-n} par excès.

Lemme : Aproximation des décimales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in [\![0, 9]\!]$ tel que $y_n - y_{n-1} = \frac{a_n}{10^n}$

Théorème : Existence du développement décimal de x

Soit $x \in \mathbb{R}$

Il existe un entier relatif y_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des entiers $a_n \in [\![0, 9]\!]$ tels que

$$x = y_0 + \sum_{n+1}^{+\infty} a_n 10^{-n} = y_0 + \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n}$$

.

Théorème : Unicité du développement décimal de x

Soit $x \in \mathbb{R}$

1. Si x n'est pas décimal, x admet un unique développement décimal
2. Si x est décimal, x admet exactement deux développements décimaux, l'un terminant uniquement par des 9, l'autre terminant uniquement par des 0

Définition : Développement propre

On appelle développement décimal propre de x l'unique développement de x si x n'est pas décimal, ou l'unique développement de x terminant par des 0 si x est décimal. Ainsi, tout réel admet un unique développement décimal propre.

Définition : Ensemble convexe

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.

Définition : Intervalle

Un intervalle I est un sous-ensemble convexe I de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tel que :

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b \implies x \in I$$

Théorème : Inventaire des intervalles réels

Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est d'une des formes suivantes, pour certaines valeurs réelles a et b :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b\}$, $a \leqslant b$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$, $a < b$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x < b\}$, $a < b$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leqslant b\}$, $a < b$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geqslant a\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leqslant b\}$
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$
- $]-\infty, +\infty = \mathbb{R}$
- $\varnothing$

Définition : Intervalles ouverts, fermés, semi-ouverts

- On dit qu'un intervalle est ouvert s'il est de la forme $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$
- On dit qu'un intervalle est fermé s'il est de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ ou $\varnothing$
- On dit qu'un intervalle est semi-ouvert s'il est de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$

Définition : Boule dans $\mathbb{R}^n$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1. La boule ouverte de centre x et de rayon r est :

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(y, x) < r\}$$

2. La boule fermée de centre x et de rayon r est :

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(y, x) \leqslant r\}$$

Remarque : Lien entre majoration de valeur absolue et appartenance à une boule

Il est important de retenir qu'une majoration de certaines valeurs absolues se traduit par l'appartenance à une boule :

- une majoration du type $|x - a| \leqslant r$ traduit l'appartenance de x à la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ de centre a et de rayon r, donc à l'intervalle $[a - r, a + r]$
- une majoration du type $|x - a| < r$ traduit l'appartenance de x à la boule ouverte $B(a, r)$ de centre a et de rayon r, donc à l'intervalle $]a - r, a + r[$

Définition : Voisinage

Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Un **voisinage** V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V : $\exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset V$, i.e.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall y \in E, d(y, x) < \varepsilon \implies y \in V$$

Définition : Sous-ensemble ouvert

- Un **ouvert** de U de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ qui est voisinage de tous ses points
- De manière équivalente, $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvesrt si et seulement si :

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset U$$

Définition : Sous-ensemble fermé

Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est **fermé** si son complémentaire $C_E F$ est **ouvert**

Proposition : Union/intersections d'ouverts et de fermés

1. Toute union quelconque d'ouverts est un ouvert
2. Toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert
3. Toute intersection quelconque de fermés est un fermé
4. Toute union d'un nombre fini de fermés est un fermé

Définition : Droite achevée réelle

La droite achevée réelle, notée $\overline{\mathbb{R}}$, est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition : Relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$

On peut prolonger l'ordre de $\mathbb{R}$ en un ordre de $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, -\infty \leqslant x \leqslant +\infty.$$

Définition : Règles calculatoires dans $\overline{\mathbb{R}}$

On peut prolonger partiellement les opérations de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$, en posant :

- $-(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}, x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}, x + (-\infty) = -\infty$
- $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}_+^*, x \times (+\infty) = +\infty, x \times (-\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}_-^*, x \times (+\infty) = -\infty, x \times (-\infty) = +\infty$

Définition : Formes indéterminées dans $\overline{\mathbb{R}}$

Les opérations suivantes ne sont pas définies, et définissent les formes indéterminées de la somme et du produit dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- $-\infty + (+\infty)$
- $0 \times (+\infty)$
- $0 \times (-\infty)$

Proposition : Bornes supérieures dans $\overline{\mathbb{R}}$

Tous sous-ensemble E de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

Proposition : Bornes inférieures dans $\overline{\mathbb{R}}$

Tous sous-ensemble E de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

Complexes :

Définition : Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des opérations suivantes :

- $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$
- $(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$

Remarque : Injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

L'application $\lambda \to (\lambda, 0)$ étant injective, on identifie un réel λ au complexe $(\lambda, 0)$. Via cette définition, on peut considérer que $\mathbb{R} \in \mathbb{C}$, et on vérifie facilement que la somme et le produit défini sur $\mathbb{C}$ prolongent les lois de $\mathbb{R}$.

Définition : definition de la forme algébrique

- On note $1 = (1, 0)$ et $i = (0, 1)$
- On a alors, pour tout $z = (a, b) \in \mathbb{C}$,

$$z = a \times 1 + b \times i = a + ib$$

C'est la forme algébrique du nombre complexe z.

Définition : Parties réelle/imaginaire

- Soit $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

* Le réel a est appelé **partie réelle de** z, et est noté $\Re(z)$

* Le réel b est appelé **partie imaginaire de** z, et est noté $\Im(z)$

- Un nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) = 0$ est appelé **nombre imaginaire pur**
- Un nombre $z \in \mathbb{C}$ vérifie $\Im(z) = 0$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$

Proposition : Propriétés liées au produit (nb complexes)

1. $i^2 = -1$
2. Le produit $(a + ib)(a' + ib')$ est simplement obtenu par utilisation des règles de distributivité et par la relation $i^2 = -1$
3. Si $z \neq 0$, alors z est inversible, et, si $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a l'expression de l'inverse :

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Théorème : Structure de $\mathbb{C}$

L'ensemble $\mathbb{C}$ muni des opérations ci-dessus est un corps.

Définition : Affixe d'un point du plan

Soit $A = (a, b)$ un point de $\mathbb{R}^2$.
L'affixe du point A est le nombre complexe $z_A = a + ib$.

Théorème : Théorème d'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Définition : Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) un nombre complexe.
Le conjugué de z est le nombre complexe
$\overline{z}\, a - ib$

Propriété : Propriétés de la conjugaison dans $\mathbb{C}$

Soit z et z' deux nombres complexes.

1. $\overline{\overline{z}} = z$ (autrement dit, la conjugaison est une involution)

2. $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

3. $z = -\overline{z} \iff z$ imaginaire pur

4. $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$

5. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$, $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Définition : Module d'un nombre complexe

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $z = a + ib$.

Le module de z est le réel positif défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Propriété : Propriétés du module

Soit z et z' deux nombres complexes.

1. $z = 0 \iff |z| = 0$

2. $|\Re(z)| \leqslant |z|$ et $|\Im(z)| \leqslant |z|$

3. $|z|^2 = z\overline{z}$

4. $|zz'| = |z| \times |z'|$ et si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

5. $|z| = |\overline{z}|$

6. $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

Méthode : Expression algébrique du quotient

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes donnés sous forme algébrique avec $z_2 \neq 0$.
Pour trouver la forme algébrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$, multipliez le dénominateur par $\overline{z_2}$.
De la sorte, le dénominateur est maintenant un réel.

Définition : Exponentielle complexe

Soit z un nombre complexe.
On définit alors $e^z = e^{\Re(z)} \times e^{i\Im(z)}$

Proposition : $Re(e^z)$

$$\Re(e^z) = e^{\Re(z)} \cos(\Im(z))$$

Proposition : $\Im(z)$

$$\Im(e^z) = e^{\Re(z)} \sin(\Im(z))$$

Proposition : $|e^z|$

$$|e^z| = e^{\Re(z)}$$

Proposition : $\arg(e^z)$

$$\arg(e^z) = \Im(z)\,[2\pi]$$

Théorème : Propriété d'addition (exponentielle complexe)

$Soit\,(z, z^{'}) \in \mathbb{C}$

$e^{z+z^{'}} = e^{z}e^{z^{'}}$

Proposition : Cas d'égalité (exponentielle complexe)

$Soit\,(z, z^{'}) \in \mathbb{C}^2$

On a $e^{z} = e^{z^{'}}$ si et seulement si $\Re(z) = \Re(z^{'})$ et $\Im(z) = \Im(z^{'}) \mod [2\pi]$, autrement dit, si $z - z^{'} \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Proposition : Recherche de l'image réciproque

$Soit\,a \in \mathbb{C}^2$

- si $a = 0$, l'équation $e^{z} = a$ n'a pas de solutions
- si $a \neq 0$, l'équation $e^{z} = a$ a une inftyité de solutions, décrites par : $\Re(z) = \ln(|a|)$ et $\Im(z) \equiv \arg(a)\,[2\pi]$

Définition : Racines n-ièmes, groupe $\mathbb{U}_n$

- Soit $n \in \mathbb{N}^{*}$ et $z \in \mathbb{Z}$. Une racine n-ième de z est une racine (complexe) du polynôme $X^n - z$, donc un nombre complexe ω tel que $\omega^n = z$
- Une racine n-ième de l'unité est une racine n-ième de 1
- L'ensemble des racines n-ième de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Proposition : Explicitation des racines de l'unité

Le groupe $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est constitué de n éléments deux à deux distincts et donnés par :

$$\mathbb{U}_n = \{\omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

Proposition : Racines n-ième de z

Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe

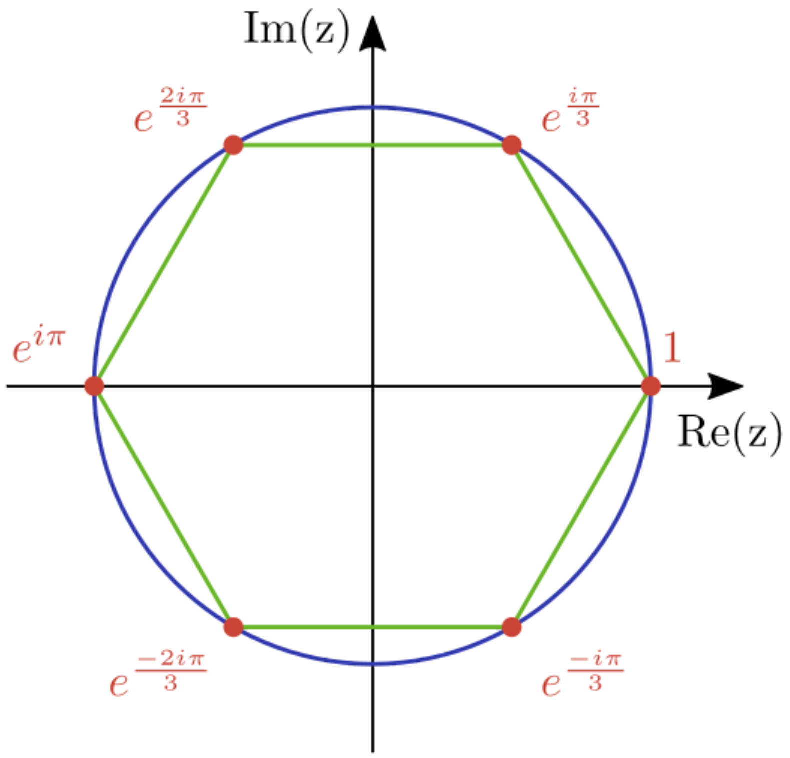
1. Une racine n-ième particulière de z est $z_0 = \sqrt[n]{r} \times e^{i\frac{\theta}{n}}$
2. z possède exactement n racines n-ièmes, données par :

$$\xi_k = z_0\omega, \omega \in \mathbb{U}_n,$$

où $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ sont les racines n-ièmes de l'unité

3. Ainsi, pour $z = re^{i\theta}$, on obtient la description explicite des racines n-ièmes :

$$\xi_k = \sqrt[n]{r} \times e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]$$



Proposition :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega^i$$

Soit $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega^i = 0$$

Corollaire : Somme des racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$$

Corollaire : Somme des racines n-ième de z

Soit $n \geqslant 2$, *et* $\{\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}\}$ *l'ensemble des racines n-ièmes de* z

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0$$

Définition : Le complexe j

On note j la racine cubique de l'unité $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition : Propriétés de j

1. $j^3 = 1$, donc $j^n = j^r$, où r est le reste de la division de n par 3
2. $\overline{j} = j^2$
3. $j^2 + j + 1 = 0$

Proposition : Racines 6-ièmes de 1

Les racines 6-ièmes de 1 sont, par ordre croissant d'arguments positifs :
$1, -j^2, j, -1, j^2, -j$

Méthode : Recherche de racines carrées sous forme algébrique

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique $(a, b \in \mathbb{R})$.
Pour trouver les racines carrées sous forme algébrique :
1. Considérer une racine $z' = c + id$
2. Identifier les parties imaginaires et réelles dans l'égalité $(z')^2 = z$: en retenir essentiellement la valeur de $c^2 - d^2$ et le signe de cd
3. Donner l'égalité des modules de $(z')^4$ et de z^2. Cela donne la valeur de $c^2 + d^2$
4. Résoudre le système en c^2 et d^2 donné par les équations ci-dessus.
5. Des quatres solutions pour le couple (c, d) garder les deux seules qui donnent le bon signe de cd

Définition : Affixes

1. L'affixe d'un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est le complexe $z_A = a + ib$
2. L'affixe d'un vecteur $\vec{u} = \binom{a}{b}$ de $\mathbb{R}^2$ est le complexe $z_{\vec{u}} = a + ib$

Proposition : Affixe d'un vecteur défini par un bipoint

Soient A et B deux points d'affixe z_A et z_B.

$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$$

Proposition : Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ d'affixe $z_{\vec{u}}$

$$||\vec{u}|| = |z_{\vec{u}}|$$

Proposition : Interprétation géométrique de $\frac{b-a}{c-a}$

Soient a, b et c trois complexes, et A, B et C les points de $\mathbb{R}^2$ d'affixe a, b et c.

$$\arg \frac{b-a}{c-a} = (\vec{AC}, \vec{AB})$$

Proposition : Caractérisation de l'alignement et de l'orthogonalité

Soient A, B et C trois points distincts, d'affixes a, b et c.

1. A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$
2. $(AB) et (AC)$ sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{b-a}{c-a} \in i\mathbb{R}$

Proposition : Interprétation complexe des transformations du plan

Soientt $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe z_u, A un point du pla, d'affixe z_A, θ et λ des réels, et D une droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$

1. La translation de vecteur $\vec{u}$ correspond dans $\mathbb{C}$ à la fonction $z \to z + z_u$
2. La rotation de centre A et d'angle θ (dans le sens trigonométrique, ou direct) correspond dans $\mathbb{C}$ à la fonction $z \to z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$
3. L'homothétie de centre A et de rapport λ correspond dans $\mathbb{C}$ à la fonction $z \to z_A + \lambda(z - z_A)$
4. La symétrie orthogonale d'axe D (ou reflexion d'axe D) est donnée par la fonction $z \to z_{\vec{u}}^2(\overline{z} - \overline{z_A}) + z_A$

rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (Cas particulier)

La rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ se traduit par une multiplication par i (s'en souvenir dans des contextes d'orthogonalité !)

rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

La rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ se traduit par la multiplication par j.

rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$

La rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ se traduit par la multiplication par $-\overline{j} = -j^2$.

Théorème : Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$

Soit $\varphi : z \to ax + b, a \neq 0$

- Si $a = 1$, φ représente une translation
- Si $a = \lambda e^{i\theta} \neq 1$, il existe un point C tel que φ représente la composée d'une rotation d'angle θ de centre C et d'une homothétie de rapport λ de même centre C.

Définition : Isométries et similitudes

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow R^2$ *une application.*

1. On dit que F est une isométrie affine si F conserve les longueurs, donc si pour tout $(A, B) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $||F(A)F(B)|| = ||AB||$. Cela se traduit par une application $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| = |z_2 - z_1|$, pour tous z_1 et z_2
2. On dit que F est une isométrie vectorielle si F est une isométrie affine telle que $F(O) = O$, où $O = (0, 0)$
3. On dit que F est une similitude affine s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(A, B) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $||f(A)f(B)|| = \lambda||AB||$, ce qui se traduit par $|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| = \lambda|z_2 - z_1|$
4. On dit que F est une similitude vectorielle si F est une similitude affine telle que $F(O) = O$

Théorème : Les $z \to az + b$ ou $z \to a\overline{z} + b$

Les applications $z \to az + b$ ou $z \to a\overline{z} + b$ correspondent à des similitudes, qui sont des isométries si de plus $|a| = 1$

Proposition : Caractérisation des droites

La droite passant par A d'affixe a et B d'affixe b est l'ensemble constitué des points M d'affixe z tels que l'une des propriétés équivalentes suivantes soit vérifié :

1. il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = (1 - t)a + tb$
2. $z = a$, ou $z \neq a$ et $\arg(z - a) \equiv \arg(b - a) [\pi]$
3. $\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$

Proposition : Caractérisation des cercles

Un sous ensemble C de $\mathbb{C}$ est un cercle éventuellement vide si et seulement si il existe un complexe α et un réel β tels que C soit l'ensemble des points d'affixe z vérifiant :

$$z \times \overline{z} + \alpha \times z + \overline{\alpha} \times \overline{z} + \beta = 0$$

L'ensemble C est dans ce cas non vide si et seulement si $\beta \leqslant \alpha\overline{\alpha}$ et dans ce cas, son centre est le point d'affixe $-\overline{\alpha}$ et son rayon est $r = \sqrt{\alpha\overline{\alpha} - \beta}$

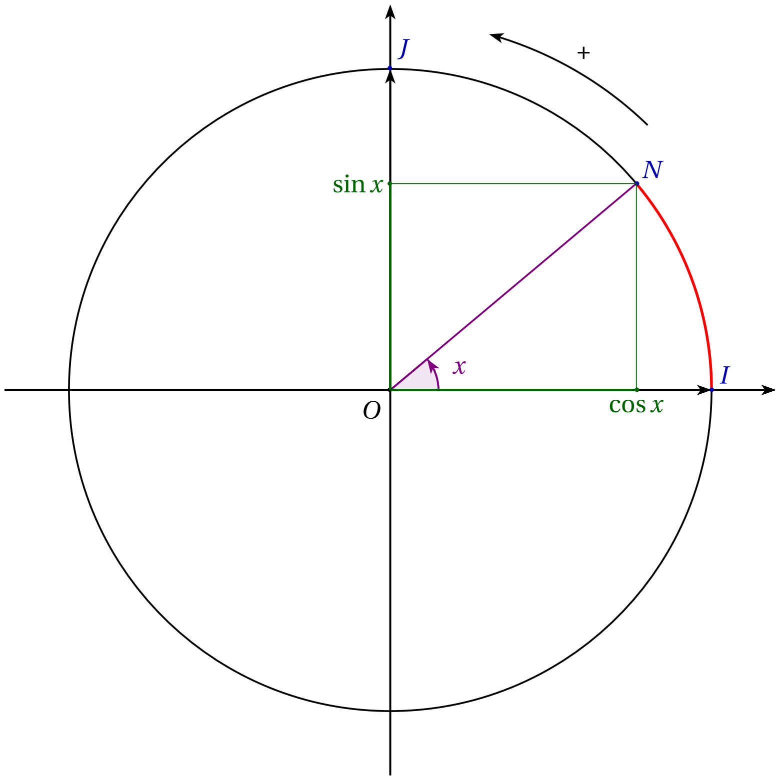
Trigonométrie :

Définition : Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique (ou cercle unité) est le sous ensemble de $\mathbb{C}$, noté $\mathbb{U}$ (comme "unité"), constitué des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

Le cercle trigonométrique correspond dans l'interprétation géométrique des complexes au cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, de $\mathbb{R}^2$.



Définition : Fonctions trigonométriques

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On considère le cercle trigonométrique dans le plan euclidien canonoique. Soit z le point du cercle trigonométrique tel que le rayon correspondant du cercle trigonométrique forme avec l'axe des réels un angle (orienté dans le sens direct) de x.

On définit alors les fonctions cosinus, sinus et tangente par :

$$\cos(x) = \Re(x), \sin(x) = \Im(z) \text{ et } \tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} \text{ si } cos(x) \neq 0$$

Fonctions trigonométrique dans un triangle rectangle

Soit α *un angle dans* $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Si ABC est un triangle rectangle en A, et d'angle en B égal à α, alors

$\sin(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$, $\cos(x) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$, $\tan(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

Définition : Cotangente

Soit $x \in \mathbb{R}$.

La contangente est définie, pour tout x tel que $\sin(x) \neq 0$, par :

$$\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Proposition : Domaines de définition des fonctions trigonométriques

1. Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$
2. La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$
3. La fonction cotan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition : Périodicité de sin et cos

sin et cos sont 2π-périodiques

Proposition : Parité de sin et cos

sin est impaire et cos est paire

Proposition : $\cos(\pi + x)$

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$

Proposition : $\sin(\pi + x)$

$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

Proposition : $\cos(\pi - x)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

Proposition : $\sin(\pi - x)$

$\sin(\pi - x) = \sin(x)$

Proposition : $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$

Proposition : $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

Proposition : $\cos(\frac{\pi}{2} + x)$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$$

Proposition : $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$$

Proposition : Périodicité de tan et cotan

tan et cotan sont π-périodiques

Proposition : Parité de tan et cotan

tan et cotan sont impaires

Proposition : $\sin(0)$

$$\sin(0) = 0$$

Proposition : $\sin(\frac{\pi}{6})$

$$\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

Proposition : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Proposition : $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Proposition : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Proposition : $\cos(0)$

$$\cos(0) = 1$$

Proposition : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Proposition : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Proposition : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Proposition : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Proposition : $\tan(0)$

$$\tan(0) = 0$$

Proposition : $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Proposition : $\tan(\frac{\pi}{4})$

$$\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$$

Proposition : $\tan(\frac{\pi}{3})$

$$\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$$

Proposition : $\cot an(\frac{\pi}{6})$

$$\mathrm{cotan}(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$$

Proposition : $\mathrm{cotan}(\frac{\pi}{4})$

$$\mathrm{cotan}(\frac{\pi}{4}) = 1$$

Proposition : $\mathrm{cotan}(\frac{\pi}{3})$

$$\mathrm{cotan}(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Proposition : $\operatorname{cotan}(\frac{\pi}{2})$

$$\operatorname{cotan}(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Proposition : Identité remarquable ou théorème de Pythagore

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Proposition : $\sin(a + b)$

Soient a et b deux réels

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Proposition : $\sin(a - b)$

Soient a et b deux réels

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

Proposition : $\cos(a + b)$

Soient a et b deux réels

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Proposition : $\cos(a - b)$

Soient a et b deux réels

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

Proposition : $\tan(a + b)$

Soient a et b deux réels tels que $\tan(a)$, $\tan(b)$ *et* $\tan(a + b)$ *soient définis*

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Proposition : $\tan(a - b)$

Soient a et b deux réels tels que $\tan(a)$, $\tan(b)$ *et* $\tan(a + b)$ *soient définis*

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

Proposition : $\mathrm{cotan}(a + b)$

Soient a et b deux réels tels que $\mathrm{cotan}(a)$, $\mathrm{cotan}(b)$ *et* $\mathrm{cotan}(a + b)$ *soient définis*

$$\mathrm{cotan}(a + b) = \frac{\mathrm{cotan}(a)\mathrm{cotan}(b) - 1}{\mathrm{cotan}(a) + \mathrm{cotan}(b)}$$

Proposition : $\sin(2a)$

Soit a un réel.

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\sin(b)$$

Proposition : $\cos(2a)$

Soit a un réel.

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 1 - 2\sin^2(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1\end{aligned}$$

Proposition : $\tan(2a)$

Soit a un réel

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Proposition : $\operatorname{cotan}(2a)$

Soit a un réel.

$$\operatorname{cotan}(2a) = \frac{\operatorname{cotan}^2(a)-1}{2\operatorname{cotan}(a)}$$

Proposition : $\cos^2(a)$

Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos^2(2a)}{2}$$

Proposition : $\sin^2(a)$

Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(a) = \frac{1-\cos^2(2a)}{2}$$

Proposition : $\sin(a)\,\sin(b)$

Soit a et b deux réel.

$$\sin(a)\,\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

Proposition : $\cos(a)\,\cos(b)$

Soit a et b deux réel.

$$\cos(a)\,\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

Proposition : $\sin(a)\,\cos(b)$

Soit a et b deux réel.

$$\sin(a)\,\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

Proposition : $\sin(p) + \sin(q)$

Soit p et q deux réels.

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Proposition : $\sin(p) - \sin(q)$

Soit p et q deux réels.

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Proposition : $\cos(p) + \cos(q)$

Soit p et q deux réels.

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Proposition : $\cos(p) - \cos(q)$

Soit p et q deux réels.

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Proposition : $\sin(x)$ (Formule de l'arc moitié)

Soit x un réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Proposition : $\cos(x)$ (Formule de l'arc moitié)

Soit x un réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Proposition : $\tan(x)$ (Formule de l'arc moitié)

Soit x un réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini.

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \text{ si } t \neq \pm 1$$

Proposition : $a\cos(x) + b\sin(x)$ (Formule de factorisation)

Soient a, b et c trois réels. $a \neq 0$.

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \frac{a}{\cos(\varphi)}\cos(x - \varphi),\text{ où } \tan(\varphi) = \frac{b}{a}$$

Définition : Exponentielle complexe

On définit l'exponentielle complexe sur les nombres imaginaires purs par :

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Proposition : Surjectivité de $e^{i\theta}$

La fonction $\theta \rightarrow e^{i\theta}$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$. Plus précisément, c'est une bijection de tout intervalle $]\alpha, \alpha + 2\pi]$ sur $\mathbb{U}$, ainsi que de tout intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ sur $\mathbb{U}$

Corollaire : Propriété de la fonction définie par $(r, 0) \rightarrow re^{i\theta}$

La fonction de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$, sur $\mathbb{C}^*$ définie par $(r, 0) \rightarrow re^{i\theta}$

Définition : Forme trigonométrique de l'exponentielle complexe

- Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$ appelé forme trigonométrique
  - r est unique, égal au module de z.
  - θ est unique modulo 2π, appelé argument de z.
- L'unique argument θ de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est appelé argument principal de z, et est noté $\arg(z)$

Proposition : Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Théorème : Formules trigonométriques d'addition

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\theta + \theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$

Corollaire : Formule de De Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$, soit : $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$

Méthode : Principe de symétrisation des arguments

Cette méthode permet d'exprimer une somme ou une différence de deux exponentielles à l'aide des fonctions trigonométriques. C'est notamment intéressant pour obtenir la partie réelle et la partie imaginaire sous forme factorisée.

Soit a et b deux réels. Alors :

- $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}) = 2\cos(\frac{a-b}{2})e^{i\frac{a+b}{2}}$
- $e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}) = 2i\sin(\frac{a-b}{2})e^{i\frac{a+b}{2}}$

Méthode : Linéarisation

Le but est d'exprimer $\cos^n(\theta)$ ou $\sin^n(\theta)$ en fonction de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$, $k \in \mathbb{N}$.
Principe du calcul :

1. Exprimer $\cos(\theta)$ ou $\sin(\theta)$ à l'aide des formules d'Euler.
2. Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton
3. Regrouper dans le développement les exponentielles conjuguées et les réexprimer à l'aide des fonctions sin et cos en utilisant la formule d'Euler dans l'autre sens.

Méthode : "délinéarisation", ou les polynômes de Tchébychev

Cela consiste à écrire $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$. Le principe du calcul :

1. On utilise la formule de De Moivre pour exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ comme une partie réelle ou imaginaire de $\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$
2. On développe cette expression à l'aide de la formule du binôme de Newton
3. On utilise l'identité remarquable $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ pour exprimer la partie réelle (ou imaginaire) sous forme d'un polynôme en $\cos(x)$ (pour $\cos(n\theta)$) ou le produit de $\cos(x)$ par un polynôme en $\sin(x)$ (pour $\sin(n\theta)$)

Méthode : Sommes de sin et cos

Le principe général est d'écrire une somme de sin (ou de cos) sous la forme de la partie imaginaire (ou réelle) d'une somme exponentielles. On peut alors souvent exploiter le caractère géométrique du terme $e^{in\theta}$, par utilisation des propriétés des sommes géométriques, ou de la formule du binôme, etc...

Exemple du noyau de Dirichlet

Soit a et b deux réels, avec $b \not\equiv 0[2\pi]$.

Soit $C = \cos(a) + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \ldots + \cos(a+nb) = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$

$$\text{Alors} : C = \cos\left(a + \frac{bn}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2} \times b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

Combinatoire :

Définition : Définition de la cardinalité selon Frege

On dit que deux ensembles E et F ont le même cardinal s'il existe une bijection de E à F. On note $Card(E) = Card(F)$

Définition : Ensemble fini

Soit E un ensemble.

On dit que E est fini si et seulement s'il existe un entier n et une surjection $f : [\![1, n]\!] \to E$, où de façon équivalente s'il existe une injection $g : E \to [\![1, n]\!]$.

Proposition : Sous-ensemble d'un ensemble fini

Soit F un sous ensemble de E.

Si E est fini, alors F aussi.

Lemme : Bijections de $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, m]\!]$

Tout sous ensemble F de $[\![1, n]\!]$ peut être mis en bijection avec un ensemble $[\![1, m]\!]$

Lemme : Egalité provenant de la bijection $[\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$

Soit n et m deux entiers.

S'il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$, alors $n = m$.

Proposition : Cardinal d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini.

Il existe un unique entier n tel qu'il existe une bijection $f : [\![1, n]\!] \to E$. L'entier n est appelé cardinal de E, et noté $|E|$, ou Card(E).

Proposition : Cardinal d'une union disjointe

Soit A, B, A_1, ..., A_n des ensembles finis.

1. Si $A \cap B = \varnothing$, alors $|A \sqcup B| = |A| + |B|$
2. Plus généralement, si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, alors $|A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n|$

Proposition : Cardinal d'un complémentaire

Si $a \subset B$, alors $|\complement_B A|$ = |B| - |A|

Corollaire : Cardinal d'un sous-ensemble

Si $A \subset B$, alors $|A| \leqslant |B|$, avec égalité si et seulement si $A = B$.

Proposition : Cardinal d'une union quelconque

Soient A et B des ensembles finis.

On a : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Théorème : Formule du crible de Poincaré

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis.

On a :

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} ((-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|)$$

$$= \sum_{I \subset [1,n], I \neq \varnothing} ((-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i \in I} (A_i)|)$$

Proposition : Cardinal d'un produit cartésien

Soient A, B, $A1, \ldots, A_n$ des ensembles finis.

1. $|A \times B| = |A| \times |B|$
2. Plus généralement, $|A_1 \times \ldots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$

Proposition : Cardinal et injectivité

Soient E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application

Si f est injective, $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$

Proposition : Cardinal et surjectivité

Soient E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application

Si f est surjective, $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$

Proposition : Cardinal et bijectivité

Soient E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application

Si f est bijective, $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$

Proposition : Caractérisation des bijections

Soient A et B deux ensembles finsi de même cardinal, et $f : A \longrightarrow B$.

Les trois propriétés sont équivalentes :

1. f est bijective
2. f est injective
3. f est surjective

Proposition : Cardinal de l'ensemble des applications

Soient E et F deux ensembles finis.

On rappelle qu'on note F^E l'ensemble des applications de E vers F.

$|F^E| = |E^F|$

Définition : p-listes

Une p-liste d'éléments de F (ou p-uplet) est un élément $(x_1, ..., x_p)$ de F^p.

Proposition : Nombre de p-liste

Le nombre de p-listes d'éléments de F est $|F|^p$

Proposition : Cardinal de l'ensemble des parties

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$$

Lemme : Lemme du berger

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application surjective.
On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $y \in F$, $|f^{-1}(y)| = k$ (tous les éléments de F ont le même nombre k d'antécédents).

$$|E| = k \times |F|$$

Théorème : Dénombrement des injections

Soit A et B deux ensembles de cardinaux respectifs p et n.

Alors si $p \leqslant n$, le nombre d'injections de A vers B est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Si $p > n$, il n'existe pas d'injection de A vers B.

Proposition : Dénombrement des p-arrangements

Soit F de cardinal n et $p \leqslant n$.

Le nombre de p-listes d'éléments distincts de F (ou p-arrangements de F) est

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Corollaire : Nombre de permutations d'un ensemble

$\mathfrak{S}E$ représente l'ensemble des permutations de E

1. Soit E un ensemble fini. Alors $|\mathfrak{S}E| = |E|!$
2. En particulier $|\mathfrak{S}_n| = n!$

Définition : Coefficient binomial

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$

Proposition : Sens général du coefficient binomial

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est plus généralement le nombre de sous-ensemble de cardinal k de n'importe quel ensemble E de cardinal n.

Proposition : Expression factorielle du coefficient binomial

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Proposition : Propriétés du coefficient binomial

Soit $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$.

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie)
2. $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ (formule du comité-président)
3. si $(n, k) \neq (-1, -1)$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Théorème : Formule du binôme

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Méthode : Principe fondamental du dénombrement

Pour montrer que deux ensembles ont le même cardinal, il suffit de construire une bijection entre eux. Ainsi, pour déterminer le cardinal d'un ensemble, on le met souvent en bijection avec un ensemble "de référence" dont on connaît le cardinal.

Méthode : Démonstration combinatoire d'une formule

1. Trouver un modèle adapté de la formule, autrement dit un ensemble d'objets dont le dénombrement fournira un des membres de l'égalité. Pour cela, il est préférable de s'aider du membre le plus simple de l'égalité
2. Dénombrer cet ensemble de deux façons différentes. Souvent, on procède d'une part à un dénombrement direct, et d'autre part à un dénombrement après avoir effectué le tri (de façon formelle, cela revient à définir une partition de l'ensemble). Le résultat d'un dénombrement par tri se traduit par une somme.
3. Evidemment, cette méhode n'est adaptée qu'à des formules portant sur des nombres entiers, si possible positifs. Il est parfois possible de se ramener à cette situation par un prétraitement de la formule à démontrer.

Proposition : Formule de Pascal (coefficients binomiaux)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Proposition :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Proposition : Formule de Vandermonde (coefficients binomiaux)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{N}{k}\binom{M}{n-k} = \binom{N+M}{n}$$

Proposition : Formule de sommation sur une colonne

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

Proposition :

$$\sum_{k=0}^{n} = \binom{k}{N}\binom{n-k}{M}$$

$$\sum_{k=0}^{n} = \binom{k}{N}\binom{n-k}{M} = \binom{n+1}{M+N+1}$$

Méthode : simplifier un $(-1)^n$ associé à un coefficient binomial

Remarquez qu'un signe $(-1)^n$ associé à un coefficient binomial correspond souvent à une comparaison de parités de cardinaux. On peut passer d'un cardinal pair à un cardinal impair, et vice-versa, en "allumant ou éteignant" un élément fixé à l'avance suivant qu'il est déjà ou non dans notre ensemble (plus précisément, il s'agit de l'opération $X \to X\Delta\{x\}$.)

Limites - incomplet :

Remarque : Adhérence

Si X est un sous(ensemble quelconque de $\mathbb{R}$, on peut considérer la limite en un point a de l'adhérence $\overline{X}$ de X, défini comme étant le plus petit fermé contenant X, ou de façon équivalente, l'ensemble des points x pouvant être approché d'aussi près qu'on veut par des points de X (i.e. tout voisinage de x rencontre X)

Définition : Limite réelle lorsque x tend vers a

Soit $a \in \overline{X} \cap \mathbb{R}$

Soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leqslant \eta \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon$$

Définition : Limite $+\infty$ lorsque x tend vers a

Soit $a \in \overline{X} \cap \mathbb{R}$

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant A$$

Définition : Limite $-\infty$ lorsque x tend vers a

Soit $a \in \overline{X} \cap \mathbb{R}$

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| \leqslant \eta \implies f(x) \leqslant A$$

Proposition : Limite en un point du domaine

Soit $a \in X$

Si $f(x)$ admet une limite en a, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Définition : Limites dans des espaces métriques

Soit (E, d) *et* $(F, d^{'})$ *deux espaces métriques, et* $X \subset E$. *Soit* $f : X \longrightarrow F$.

Soit $a \in \overline{X}$, *et* $b \in F$.

Comme dans le cas de $\mathbb{R}$, on peut considérer l'adhérence $\overline{X}$ de X dans E. On dit que f admet une limite b en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, a) < \eta \implies d^{'}(f(x), b) < \varepsilon$$