سؤال ۱ :

الف)

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}} = \frac{\cancel{1-2z^{-1}}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})\cancel{(1-2z^{-1})}}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \longrightarrow \boxed{x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}$$

$x[n]$ مطلقاً جمع پذیر $\equiv$ دایره واحد داخل ROC باشد $(ROC: |z|>\frac{1}{2})$

ب)

$$X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$x[n]$ راست سو

$$\begin{array}{l|l}
1-\frac{1}{2}z^{-1} & 1+\frac{1}{2}z^{-1} \\
\hline
-\ (1+\frac{1}{2}z^{-1}) & 1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{1}{4}z^{-3}+\cdots \\
\quad -z^{-1} & \\
-\ (-z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}) & \\
\quad +\frac{1}{2}z^{-2} & \\
-\ (+\frac{1}{2}z^{-2}+\frac{1}{4}z^{-3}) & \\
\quad -\frac{1}{4}z^{-3} & \\
\quad \vdots &
\end{array}$$

$$\longrightarrow x[n] = \delta[n]-\delta[n-1]+\frac{1}{2}\delta[n-2]-\frac{1}{4}\delta[n-3]+\cdots$$

$$= \boxed{\delta[n] - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^{i-1}\delta[n-i]}$$

$$= \boxed{\delta[n] - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]}$$

ج)

$$X(z) = \frac{3}{z+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}$$

$$= \frac{3z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{3z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

$x[n]$ مطلقاً جمع پذیر

$\equiv$

دایره واحد داخل ROC

$$= \frac{A \to -4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B \to 4}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$|z|>\frac{1}{2} \qquad\qquad |z|>\frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow ROC_{\text{کل}} = (|z|>\frac{1}{2}) \cap (|z|>\frac{1}{4}) = |z|>\frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \boxed{x[n] = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]}$$

سؤال ۲ :

۱. $x[n]$ حقیقی و راست‌سو

۲. $X(z)$ دقیقاً دارای دو قطب

۳. $X(z)$ دارای دو صفر در مبدأ

۴. $X(z)$ دارای قطب در $z=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$

۵. $X(1)=\frac{8}{3}$

خاصیت ① حقیقی $x[n]$ $\Longrightarrow$ قطب‌ها مزدوج
صفرها مزدوج

خاصیت ④ $\longrightarrow$ $z_1=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$ و $z_2=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}$

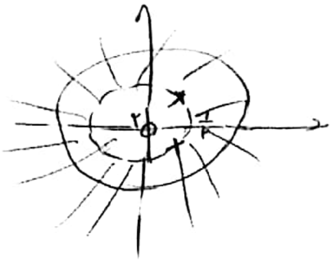
گفته شده $X(z)$ دقیقاً دو قطب دارد. پس نتیجه می‌گیریم که تعداد صفرهای آن ۲ یا کمتر از آن است چرا که اگر بیش از دو صفر داشته باشد معادل این است که در بی‌نهایت یک قطب داریم، که نمی‌شود. با توجه به خاصیت ③ هم گفته شده که دو صفر در مبدأ وجود دارد پس دقیقاً دو صفر در مبدأ داریم.

$$\longrightarrow X(z)=\frac{Az^2}{(z-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})(z-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})}$$

خاصیت ⑤ $X(1)=\frac{8}{3}$ $\longrightarrow$ $\frac{A}{(1-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})(1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})}=\frac{8}{3}$

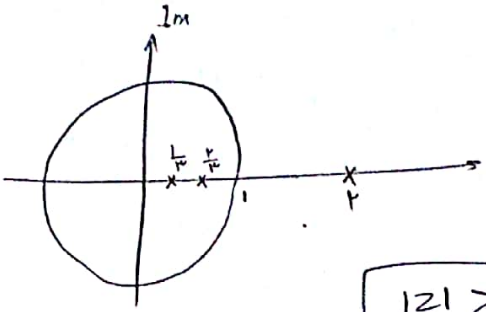
$$\longrightarrow A=2$$

$$\Longrightarrow \boxed{X(z)=\frac{2z^2}{(z-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})(z-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})}}$$



خاصیت ① $\longrightarrow$ راست‌سو $x[n]$ $\Longrightarrow$ ROC: $\boxed{|z|>\frac{1}{2}}$

سؤال ۳ :



الف) $x[n]$ راست‌سو است. ⟵ $\boxed{|z| > 2}$

ROC تا بی‌نهایت است

ب) تبدیل فوریه $x[n]$ همگرا است ⟵ دایره واحد داخل ROC

$$\boxed{\frac{2}{3} < |z| < 2}$$

ج) تبدیل فوریه $x[n]$ همگرا نمی‌شود.

دایره واحد نباید داخل ROC آن باشد.

$|z| < \frac{1}{3}$

یا $|z| > 2$

یا $\frac{1}{3} < |z| < \frac{2}{3}$

د) $x[n]$ چپ‌سو است ⟵ ROC تا $|z| = 0$ ⟵ $\boxed{|z| < \frac{1}{3}}$

سؤال ۴ :

الف) $X(z) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ ، $|z| > \frac{1}{2}$

$$\longrightarrow x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

ب) $X(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$ $\qquad |z| > \frac{1}{2}$

$$X(z) = \frac{\cancel{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}{\cancel{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}(1+\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\longrightarrow x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

ج) $X(z) = \dfrac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}$ $\qquad |z| > \left|\frac{1}{a}\right|$: شرط

$$\longrightarrow X(z) = \frac{z^{-1}-\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}} - \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}} \longrightarrow x[n] = \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}u[n-1] - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\right)^n u[n]$$

سؤال ها :

الف)

$$X(2e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$2^{-n}x[n] = F^{-1}\{X(2e^{j\Omega})\} = F^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{x[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]}$$

ب) $x[n]$ علی است .

$$X(z) = \frac{3+2z^{-1}}{2+3z^{-1}+z^{-2}} = \frac{3+2z^{-1}}{(2+z^{-1})(1+z^{-1})}$$

$$= \frac{\cancel{A}\,1}{2+z^{-1}} + \frac{\cancel{B}\,1}{1+z^{-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{x[n]\ \text{علی}} \quad \boxed{x[n] = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (-1)^n u[n]}$$

سؤال ۶

الف)

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \{u[n] - u[n-10]\}$$

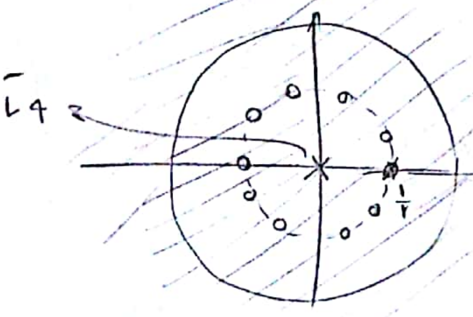
$$x[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-10} u[n-10]$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10}\frac{z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-(2z)^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \boxed{\frac{z^{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{z^{9}\left(z-\frac{1}{2}\right)}}$$

یک قطب در $\frac{1}{2}$ و ۹ قطب در صفر

۱۰ صفر به اندازه $\frac{1}{2}$ با فازهای مختلف

قطب و صفر در $\frac{1}{2}$ با هم حذف می‌شوند، و ۹ صفر باقی می‌مانند و ۹ قطب هم در صفر داریم.



ROC ⟸ کل فضا به جز $z=0$ ⟸ دایره واحد را شامل می‌شود ← فوریه وجود دارد.

ب) $x[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n|}$

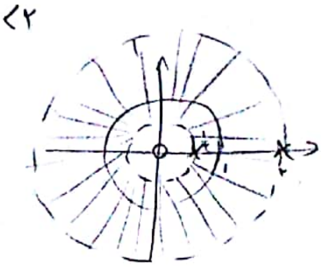
$$x[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + (2)^n u[-n-1]$$

$$\longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}-2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} = \boxed{\frac{-\frac{3}{2}z}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}}$$

$|z| > \frac{1}{2}$ ، $|z| < 2$

$$\longrightarrow \boxed{ROC:\ \tfrac{1}{2} < |z| < 2}$$



ROC شامل دایره واحد ← تبدیل فوریه وجود دارد

ج) $x[n] = 7\left(\tfrac{1}{3}\right)^n \cos\left[\frac{2\pi n}{6} + \frac{\pi}{4}\right] u[n]$

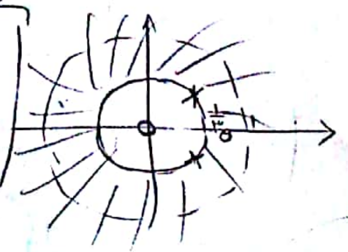
$\left(e^{j\frac{2\pi}{6}}\right)^n$

$$x[n] = \frac{7}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)^n e^{j\frac{2\pi n}{6}} \times e^{j\frac{\pi}{4}} u[n] + \frac{7}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)^n e^{-j\frac{2\pi n}{6}} \times e^{-j\frac{\pi}{4}} u[n]$$

$$= \frac{\frac{7}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}{1-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{\frac{7}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} = \frac{7\cos\frac{\pi}{4} - \frac{7}{6}e^{-j(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}z^{-1} - \frac{7}{6}e^{+j(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1})}$$

$$= \frac{\frac{7}{2}\sqrt{2} - \frac{7}{3}\cos(\frac{\pi}{12})z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1})} = \frac{\frac{7}{\sqrt{2}}z^2 - \frac{7}{3}\cos(\frac{\pi}{12})z}{(z-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{3}})(z-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}})}$$

در صفر دو قطب دارد



ROC: $|z| > \frac{1}{3}$ ← فوریه دارد.

(د

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & 0 \leq n \leq 9 \\ 0 & n > 9 \end{cases}$$

راه اول : $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \cdots + \delta[n-9]$

$$\longrightarrow X(z) = 1 + z^{-1} + \cdots + z^{-9}$$

$$= \frac{(1 - z^{-10})}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{10} - 1}{z^{9}(z-1)}$$

۱۰ صفر در ۱ داریم با فازهای مختلف

۹ قطب در ۰ و یک قطب در ۱

که قطب و یک صفر در یک با هم ساده می‌شوند.

ROC $\Leftarrow$ کل فضا به جز $z = 0$

$\Downarrow$

تبدیل فوریه دارد.