تبدیل Z : (فصل 10)   سیگنال گسسته در زمان

پدر علم فازی

* Ragazzini & Zadeh   Prof A. Zadeh

$$z^n \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow Az^n$$

$$z = re^{j\omega}$$

تعریف. تبدیل Z سیگنال $x[n]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

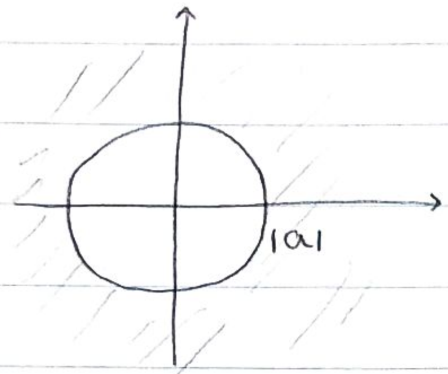
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}$$

مثال ۱: تبدیل Z سیگنال $x[n] = a^n u[n]$ با فرض $0 < a < 1$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \boxed{\frac{1}{1-az^{-1}}}$$

شرط همگرایی: $|az^{-1}| < 1$

$$a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$



$|z| > |a|$

تبدیل Z

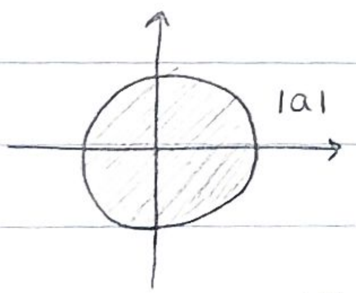
مثال Z : $x[n] = -a^{n}u[-n-1]$: $-n-1 > 0 \Rightarrow -n > 1 \Rightarrow n < -1$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^{n}$$

$$\xrightarrow{n=-m} \sum_{m=1}^{\infty} (a^{-1}z)^{m} = -\frac{az^{-1}}{1-a^{-1}z} = \boxed{\frac{1}{1-az^{-1}}}$$

$|a^{-1}z| < 1$

$\longrightarrow |z| < |a|$



* تبدیل Z روی دایره‌ی واحد: تبدیل فوریه

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} \qquad z = re^{j\omega}$$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]\, r^{-n} e^{-j\omega n} = F\{x[n]r^{-n}\}$$

شرط همگرایی تبدیل Z :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x[n]\, r^{-n} \right| < \infty$$

مثال 3 :

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right) u[n]$$

رابطه اویلر

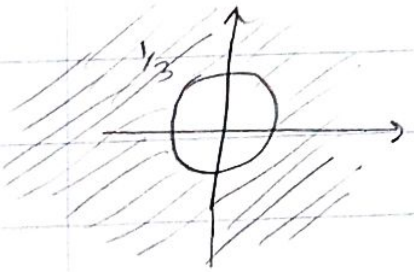
$$= \frac{1}{2j} \underbrace{\left(\frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{4}}\right)}_{a}{}^{n} u[n] - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^n u[n]$$

تبدیل Z ، $a^n u[n]$ را می دانیم.

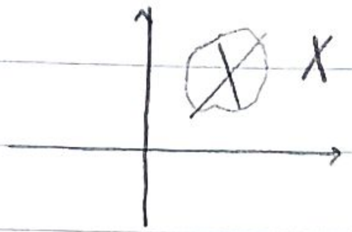
$$X(z) = \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{4}} z^{-1}} - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\frac{\pi}{4}} z^{-1}} \right)$$

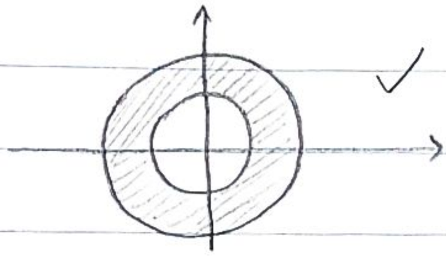
$$|z| > 1/3 \qquad\qquad 1/3 < |z|$$

$$X(z) = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}\, z}{\left(z - \frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z - \frac{1}{3} e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$



خواص ناحیه همگرایی (ROC) :





① ROC شامل حلقه‌هایی به مرکز مبدا است.

$$\sum |x[n] r^{-n}| < \infty$$

چون فاز نقشی در همگرایی ندارد.

② ROC شامل هیچ قطبی نیست.

③ اگر $x[n]$ دوره‌ی محدود داشته باشد، آنگاه ROC کل صفحه خواهد بود

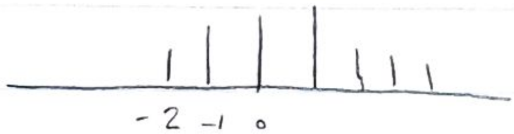
به جز احتمالا در $Z=0$ یا $Z=\infty$

$x[n]=0 \quad \forall n<0 \qquad Z=\infty \in ROC$

$x[n]=0 \quad \forall n>0 \qquad Z=0 \in ROC$

④ $x[n]$ دست راستی $\Leftarrow$ ROC دست راستی (بیرون دایره) به جز احتمالا

$z \to \infty$



مثال: در زمان‌های منفی مقدار داشته باشند

$z \to \infty$ حذف می‌شود.

$x[-2]\, z^{2}$

بنابراین $z = \infty \Rightarrow z^{2} = \infty$

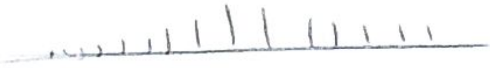
$z \to \infty$ توش نیست

سیگنال علی: $x[n] = 0 \quad \forall n < 0$

ROC دست راستی و $z = \infty$ $\Leftarrow$ سیگنال علی است چون توی زمان‌های منفی مقدار نداشته.

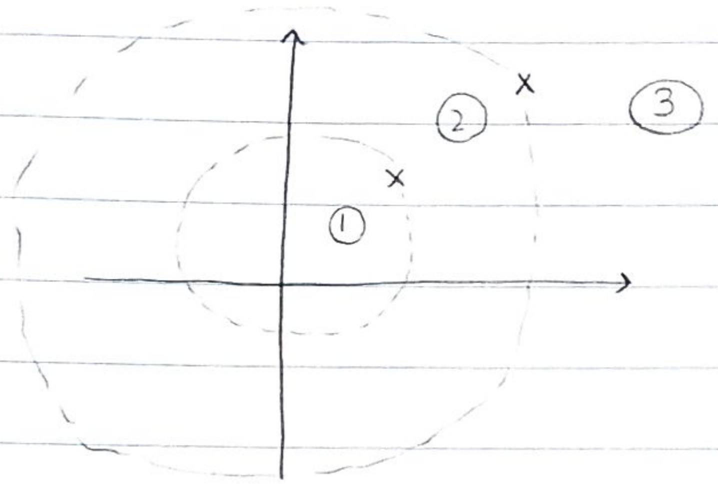
⑤ $x[n]$ دست چپی $\Leftarrow$ ROC دست چپی است به جز احتمالا $z = 0$

⑥ سیگنال دو طرفه: دوباره به جمع 2 سیگنال دست راستی و دست چپی می‌شکنیم.



ROC یا تهی یا حلقه (از اشتراک این 2 تا ROC به دست می‌آید.)

⑦ اگر $X(Z)$ گویا باشد مرز ROC توسط قطب ها تعیین می شود یا ROC



تا ∞ می رود.

مثال: تبدیل z زیر را در نظر بگیرید می خواهیم تمام سیگنال هایی که تبدیل z زیر را دارند تعیین کنیم

$$X(Z) = \frac{3 - \frac{5}{6} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)}$$

$u \triangleq z^{-1}$

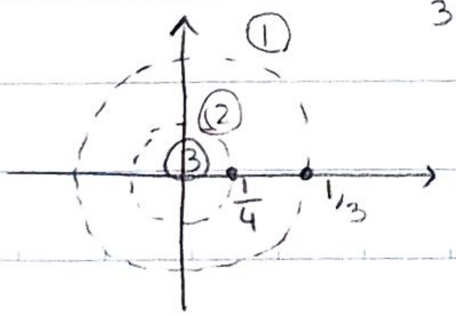
* با z^{-1} جبر نزنیم!

$$\frac{3 - \frac{5}{6} u}{\left(1 - \frac{1}{4} u\right)\left(1 - \frac{1}{3} u\right)} = \frac{A}{\left(1 - \frac{1}{4} u\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{3} u\right)}$$

$A = 1 \quad , \quad B = 2$

$$X(Z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4} u\right)} + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3} u\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$$

حال ریشه ها را به دست می آوریم: $\frac{1}{3} \; , \; \frac{1}{4}$



بیرون دایره: دست راستی

توی دایره: دست چپی

① : $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

② : $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$

① : $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$

روش‌ها برای محاسبه عکس تبدیل Z :

تبدیل لاپلاس + ROC $\Longrightarrow$

① بسط به کسرهای جزئی $\Longleftarrow$ عکس تبدیل Z

② سری تیلور یا مک‌لورن ⟵ بسط سری توانی ⟵ معادل هستند

پیوسته در زمان ندارد.

مثال) $X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad |z| > |a| \Rightarrow |az^{-1}| < 1$

$= \underbrace{1}_{x[0]} + \underbrace{az^{-1}}_{x[1]} + \underbrace{a^2 z^{-2}}_{x[2]} + \dots$ ضرایب توان‌ها نمونه‌ها مشخص می‌شوند.

$x[n] = a^n u[n]$

مثال) $X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad |z| < |a|$

$= \dfrac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} \qquad |a^{-1}z| < 1$

$X(z) = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 \dots \Longrightarrow x[n] = -a^n u[-n-1]$

مثال) $X(z) = \ln(1+az^{-1}) \qquad |z| > |a|$

$* \ln(1+w) \quad (|w|<1)$

$= w - \dfrac{w^2}{2} + \dfrac{w^3}{3} - \dots$

$\Longrightarrow \ln(1+az^{-1}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n} \Longrightarrow \begin{cases} x[n] = \dfrac{(-1)^{n+1} a^n}{n} & n \geq 1 \\ x[n] = 0 & n \leq 0 \end{cases}$

خواص تبدیل z :

(a)

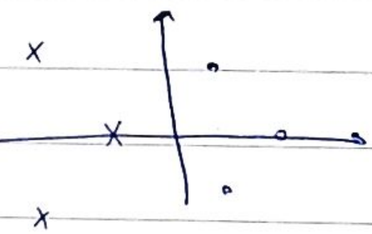
$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

$$z_0^{n} x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

(b)

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(z^*)$$

اگر سیگنال حقیقی است ⇐



صفرها و قطب ها به صورت دو به دو مزدوج هم هستند.

(c)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{Z} \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

$R_u : |z|>1$

$$R \cap R_u \subseteq ROC$$

چون ممکن است صفر و قطب همدیگر را خنثی کنند.

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n] = u[n]} \rightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * u[n]$$

$$Y(z) = X(z)\,U(z)$$

نکته :

$$* \quad u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$|z|>1$$

(d) برای سیگنال علی : $n<0$ $x[n]=0$ (علی)

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \underbrace{\cdots + x[-1]z}_{n<0} + x[0] + \cancel{x[1]z^{-1} + \cdots} = x[0]$$

$x[n]$ سمت راست
Exists $\lim_{n\to\infty} x[n]$ $\Bigg\} \Rightarrow x[+\infty] = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})X(z)$ (e)

$n\,x[n] \xleftrightarrow{z} -z\dfrac{dX(z)}{dz}$ ROC = R (f)

مثال)

$X(z) = \ln(1+az^{-1}) \qquad |z|>|a|$

$-z\dfrac{dX(z)}{dz} = \dfrac{az^{-1}}{1+az^{-1}}$ → شیفت زمانی ایجاد می‌کند.

$\dfrac{1}{1+az^{-1}} \xleftrightarrow{z^{-1}} (-a)^n u[n]$

$\dfrac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \xleftrightarrow{z^{-1}} a(-a)^{n-1} u[n-1] = n\,x[n]$

$x[n] = \dfrac{a(-a)^{n-1} u[n-1]}{n} = \dfrac{(-1)^{n+1} a^n u[n-1]}{n}$

تحلیل سیستم های LTI :

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$

توصیف حوزه زمان : $x[n] * h[n]$

توصیف حوزه فرکانس : $X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

system function

z ״ : $X(z)\,H(z)$

علیت :

$h[n]$ علّی $\Longrightarrow$ ROC دست راستی

$h[n] = 0 \quad \forall n<0$ $\Longleftarrow$?

اگر دو شرط: شرط ① ROC دست راستی
شرط ② $z=\infty \in ROC$

عکس برقرار می‌شود.

$$X(z) = \dots + x[-1]\,z + x[0] + x[1]\,z^{-1} + \dots$$

$x[z]$ کازال :

شرط ① ROC دست راستی : دست راست دست راست‌ترین قطب

شرط ② $z=\infty \in ROC$: درجه مخرج $\geq$ درجه صورت

مثال)
$$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$$

آیا سیستم LTI متناظر علی است؟ شرط ② را ندارد چون درجه‌ی صورت از مخرج بزرگتر است. و در بی‌نهایت به بی‌نهایت میرود پس عضو ROC نخواهد بود.

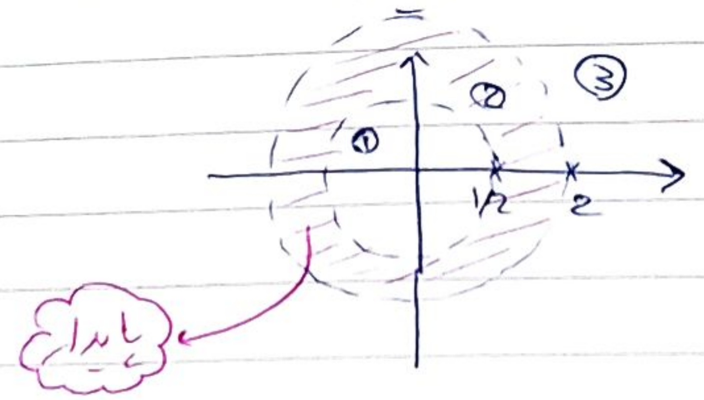
مثال)
$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}} \qquad |z|>2$$

آیا علی است؟ $z=2$ و $z=\frac{1}{2}$ چون $|z|>2$ دست راست دست راست‌ترین قطب $\Longrightarrow$ شرط ① ✓✓

درجه صورت نهایتاً با درجه مخرج برابر $\Longrightarrow$ شرط ② ✓✓

$$\frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{(z-\frac{1}{2})(z-2)} \qquad \deg(\text{صورت}) = \deg(\text{مخرج})$$

پایداری: دایره واحد جزء ناحیه‌ی همگرایی باشد.

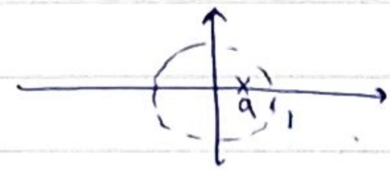


در مثال آخر

مثال) سیستم علی است شرط پایداری چه خواهد بود؟

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

قطب = $(z = a)$



a باید داخل دایره واحد باشد.

$|a|<1$

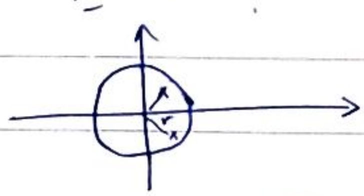
مثال)

$$H(z) = \frac{1}{1-(2r\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

فرض کنیم که سیستم علی است شرط پایداری را به دست آورید؟

$$H(z) = \frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})}$$

* قطب‌ها باید داخل دایره واحد قرار گیرند $\Leftarrow$ $r<1$ قطب‌ها داخل دایره واحد قرار می‌گیرند. θ هم اهمیتی نخواهد داشت.



سیستم‌های توصیف شونده با معادلات تفاضلی

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

* شرط سکون ابتدایی برای سیستم‌های LTI معادل با علی بودن بود.

* تبدیل فوریه هم سیستمی را به ما می‌دهد که پایدار است.

مثال) $y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3} x[n-1]$

$$Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) = X(z) + \frac{1}{3} X(z) z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$|z| > \frac{1}{2} \Longrightarrow h[n] = \frac{1}{2^n} u[n] + \frac{1}{3} \frac{1}{2^{n-1}} u[n-1]$$

$$|z| < \frac{1}{2} \Longrightarrow h[n] = -\left(\frac{1}{2^n}\right) u[-n-1] - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n]$$