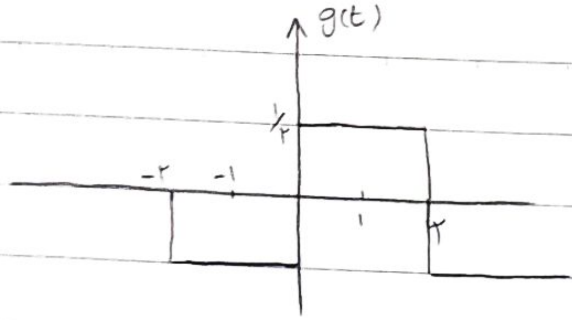
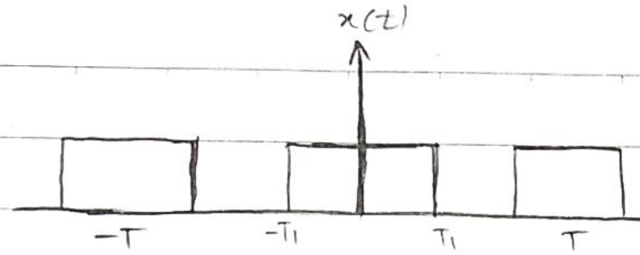
مثال)





$T = 4 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$2T_1 = 2$

$g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2}$

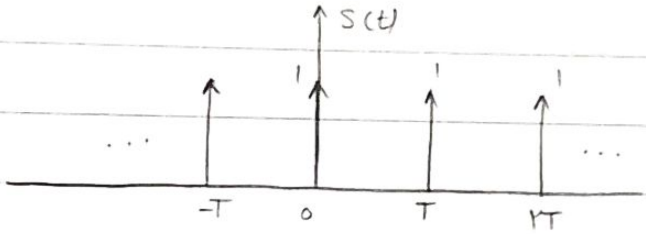
$g(t) \overset{fs}{\longleftrightarrow} d_k$

$a_k = \frac{2T_1}{T} \operatorname{Sinc}\left(\frac{2kT_1}{T}\right)$

$a_k = \frac{2}{4} \operatorname{Sinc}\left(\frac{2k}{4}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$

$$d_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

مثال)

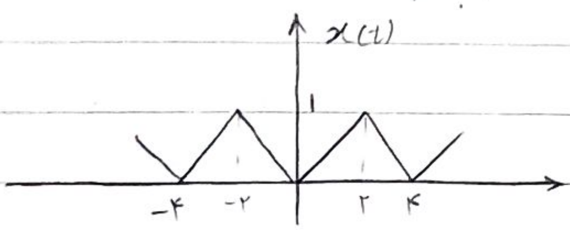


$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_T \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

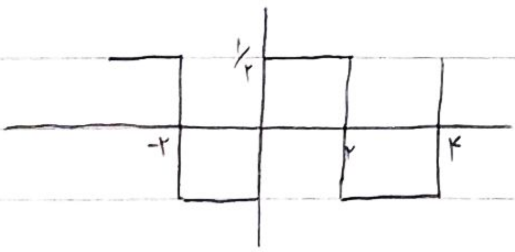
ضرایب سری فوریه قطار تابع ضربه باهم برابر هستند و برابر $\frac{1}{T}$ می باشد

مثال)



$g(t) = x'(t)$ اگر از این تابع مشتق بگیریم

$\omega_0 = \frac{\pi}{2}$



$g(t) \longleftrightarrow d_k$

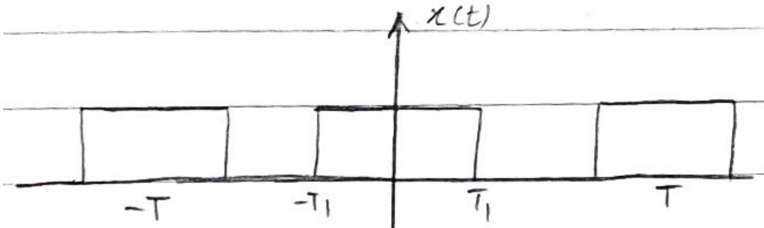
$x(t) \overset{fs}{\longleftrightarrow} e_k$

$d_k = (jk\omega_0) e_k$

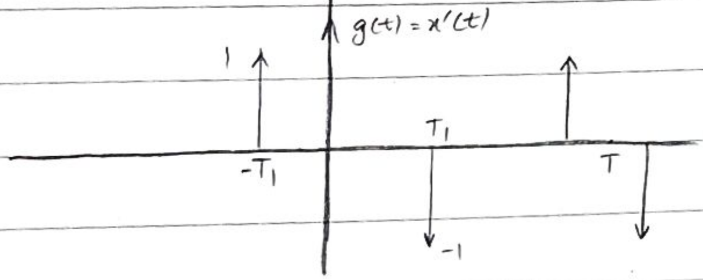
$k \neq 0 \qquad e_k = \frac{1}{jk\omega_0} d_k$

$e_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \times 4}{2} = \frac{1}{2}$

مثال) بدست آوردن ضرایب سری فوریه پالس مستطیلی از روی سری فوریه قطار ضربه



$$g(t) = s(t+T_1) - s(t-T_1)$$



$$x(t) \xleftrightarrow{fs} a_k$$
$$g(t) \xleftrightarrow{fs} b_k$$
$$s(t) \xleftrightarrow{fs} c_k = \frac{1}{T}$$

$$b_k = c_k e^{jk\omega_0 T_1} - c_k e^{-jk\omega_0 T_1} = c_k\left(2j\sin(k\omega_0 T_1)\right) = \frac{1}{T}\left(2j\sin(k\omega_0 T_1)\right)$$

$$b_k = (jk\omega_0)a_k \Rightarrow a_k = \frac{1}{j\omega_0 k} b_k \quad k \neq 0$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{jk\omega_0 T} 2j\sin(k\omega_0 T_1) = \frac{2T_1}{T}\operatorname{sinc}\left(\frac{2kT_1}{T}\right)$$

مثال)

۱) $x(t)$ حقیقی است

۲) $x(t)$ با دوره تناوب $T=4$ متناوب و ضرایب سری فوریه آن b_k است

۳) برای $|k|>1$ ، $a_k = 0$

۴) سیگنال دارای ضرایب سری فوریه $b_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_{-k}$ فرد است

۵) $\frac{1}{4}\int_4 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$ ، $x(t)$ را بیابید

ابتدا از خاصیت ۳ می‌یابیم که فقط a_1 , a_0 و a_{-1} داریم

① : $x(t) = a_0 + 2\operatorname{Re}\{a_1 e^{j\frac{\pi}{2}t}\}$ $\quad T=4 \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

④ $x(t) \xrightarrow{fs} a_k \quad x(-t) \xrightarrow{fs} a_{-k} \quad x(-(t-1)) \xrightarrow{fs} e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_{-k}$

$x(-(t-1))$ فرد و حقیقی است پس b_k فرد و موهومی خالص

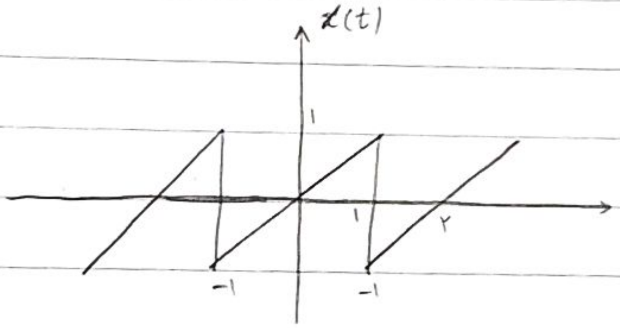
پس $b_0 = 0$ و با جایگذاری در $b_k = e^{-jk\pi/2} a_{-k}$ ، $a_0 = 0$

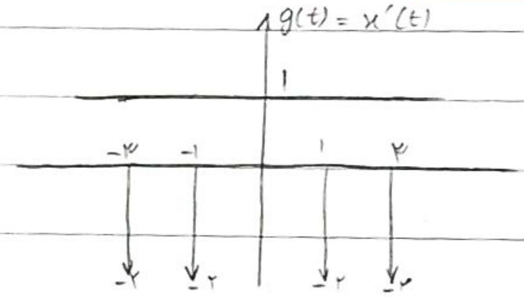
از طرفی $b_1 = -b_{-1}$ پس $e^{-j\pi/2} a_{-1} = -e^{j\pi/2} a_1$ پس $a_1 = a_{-1}$

۵) $\frac{1}{4}\int_4 |x(t)|^2 dt = a_0^2 + a_1^2 + a_{-1}^2 \Rightarrow 2a_1^2 = 1/2 \Rightarrow a_1 = \pm 1/2$

$x(t) = a_0 + 2Re\{a_1 e^{j\pi/2 t}\} \Rightarrow x(t) = \cos(\frac{\pi}{2} t)$ درست

$-\cos(\pi/2\, t)$





مثال ۱

$g(t) = 1 + \underbrace{z(t)}_{\text{قطار ضربه}}$

$z(t) = -2\, s(t-1)$

$s(t) \xleftrightarrow{fs} 1/2 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$z(t) \xleftrightarrow{fs} b_k$

$b_k = -2 e^{-j\pi k} \times 1/2 = -e^{-j\pi k} = -(-1)^k$

$x(t) \xleftrightarrow{fs} d_k$

$d_k\, jk\omega_0 = b_k \qquad k \neq 0$

$\Rightarrow d_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{-(-1)^k}{jk\omega_0} \qquad k \neq 0$

$d_0 = 0$

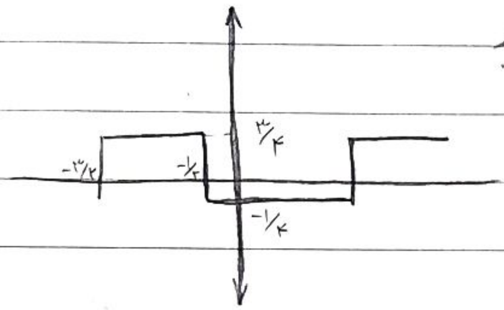
مثال) $x(t)$ متناوب است با دوره تناوب $T=4$ ضرایب سری فوریه به صورت زیر است:

$$a_k = \begin{cases} 0 \\ j^k \dfrac{\sin(k\pi/4)}{k\pi} & k \neq 0 \end{cases} \qquad \omega_0 = \pi/2$$

$e^{j\frac{\pi}{2}k}$ $\qquad \frac{1}{4}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{4}\right) \qquad T_1 = 1/2$

مطلوب است یافتن سیگنال $x(t)$

یک واحد به چپ شیفت می‌خورد سپس به اندازه $1/4$ پایین می‌آید



سری فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان

$x[n] = x[n+N] \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

N تا هارمونیک داریم $\qquad \phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \phi_k[n]$

یافتن a_kها از روی $x[n]$

$$\left.\begin{aligned} n=0 &\qquad x[0] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \\ n=1 &\qquad x[1] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})} \\ &\ \vdots \\ n=N-1 &\qquad x[N-1] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})(N-1)} \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

حل دستگاه N معادله N مجهول

در مسئله ی ۳ـ۳۲

یافتن a_k به کمک روش مشابه پیوسته در زمان:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad (*)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{jm(\frac{2\pi}{N})n} = \begin{cases} 1 & m = N \text{ مضارب} \\ 0 & m \neq N \text{ مضرب} \end{cases}$$

دو طرف رابطه‌ی $(*)$ را در $e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n}$ ضرب می‌کنیم

$$x[n]\, e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j(k-r)(\frac{2\pi}{N})n}$$

از طرفین $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}$ می‌گیریم:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-r)(\frac{2\pi}{N})n}\right)$$

$$(k=r) \Rightarrow a_r = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n}$$

سنتز $\quad x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$

آنالیز $\quad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$

مثال) ضرایب سری فوریه $x[n] = \sin\omega_0 n$

ضرایب سری فوریه فقط برای سیگنال متناوب مطرح می‌شود پس شرط تناوب $\frac{M}{N} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ـ گویا باید برقرار باشد پس $\omega_0 = 2\pi\frac{M}{N}$

برای ساده کردن $x[n]$: $x[n] = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi M}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi M}{N}n}\right)$

در این سیگنال کدام ضرایب حضور دارند؟ a_{-M} ، a_M

$a_M = \frac{1}{2j} \;/\; a_{-M} = -\frac{1}{2j}$

$$x[n] \xleftrightarrow{fs} a_k$$

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{fs} a_k\left(1 - e^{-j(\frac{2\pi}{N})}\right)$$

$$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]}_{y[n]} \xleftrightarrow{fs} \frac{a_k}{1-e^{-j(\frac{2\pi}{N})}} : b_k \Leftarrow y[n] - y[n-1] = x[n]$$

$$\underset{b_k}{\downarrow} \qquad \underset{b_k e^{-j(\frac{2\pi}{N})}}{\downarrow} \qquad \underset{a_k}{\downarrow}$$

انبساط زمانی (خاصیتی در حالت گسسته در زمان)

$$x_{(m)}[n]=\begin{cases} x[n/m] & m \text{ مضرب } = n \\ 0 & m \text{ مضرب } \neq n \end{cases} \quad \xleftrightarrow{FS} \quad \frac{1}{m}a_k$$

سری فوریه و سیستم‌های LTI

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow Ae^{j\omega t}$$

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,e^{j\omega t}\,d\tau$$

$$=\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,e^{-(j\omega\tau)}\,d\tau\right)}_{A} e^{j\omega t}$$

A را به عنوان تابعی از ω معرفی می‌کنیم :

$$H(\omega)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau \xrightarrow{\text{در حالت گسسته}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

↳ پاسخ فرکانسی سیستم LTI (گین در فرکانس ω)

$$a_1e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow a_1H(\omega_0)\,e^{j\omega_0 t}$$

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\overbrace{a_kH(k\omega_0)}^{b_k}e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_2e^{2j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow a_2H(2\omega_0)\,e^{2j\omega_0 t}$$

مثال) سیستم LTI با پاسخ ضربه ($h[n]=\alpha^n u[n]$ ، $-1<\alpha<1$) درنظر بگیرید. فرض کنید ورودی به‌صورت $x[n]=\cos(\frac{2\pi n}{N})$ است. خروجی را تعیین کنید.

باید ضرایب سری فوریه ورودی را به سیستم LTI بدهیم و ضرایب سری فوریه خروجی را به دست آوریم

$$x[n]=\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n}+e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) \qquad \begin{cases} a_1=\frac{1}{2} \\ a_{-1}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^n u[n]\,e^{-j\omega n}=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha^n e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

پس ضریب سری فوریه خروجی بدست خواهد آمد :

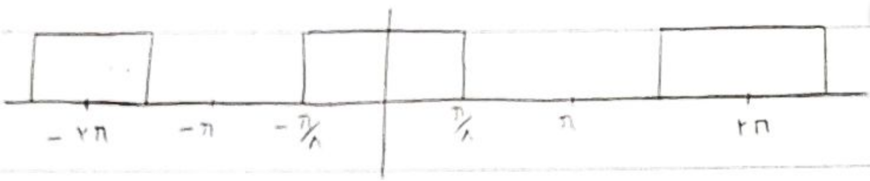
$$y[n] = \frac{1}{2} H\left(j\frac{2\pi}{N}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} H\left(\boxed{-j\frac{2\pi}{N}}\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}}\right)}_{b_1} e^{j(\frac{2\pi}{N})n} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}}\right)}_{b_{-1}} e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$$

مثال) پاسخ فرکانسی سیستم LTI گسسته در زمان عبارت است از

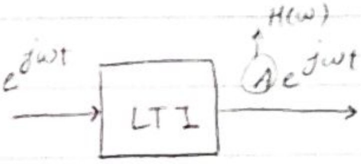
$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{\pi}{8} \\ 0 & \frac{\pi}{8} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

هر 2π تکرار می شود



اگر ورودی $x[n]$ دارای دوره تناوب $N=3$ باشد خروجی چند ضریب سری فوریه غیرصفر دارد ؟

برای اینکه غیرصفر باشند باید $a_k H(k\frac{2\pi}{N})$ غیرصفر باشد پس $-\frac{\pi}{8} < \frac{2\pi k}{N} < \frac{\pi}{8}$ که فقط $k=0$ موجود است یعنی فقط یک ضریب وجود دارد



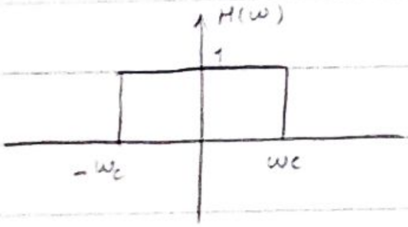
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t) = \sum a_k \underbrace{H(k\omega_0)}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}$$

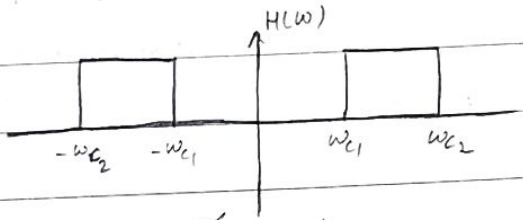
$$H(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

فیلترینگ :

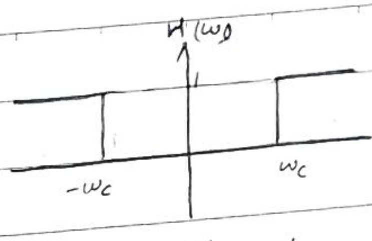
فیلترهای ایده‌آل



فیلتر پایین گذر یعنی سیگنال های با فرکانس پایین را عبور می دهد

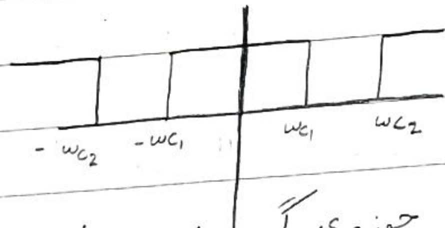


فیلتر میان گذر



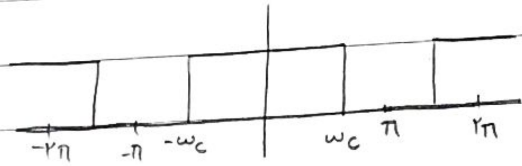
فیلتر بالاگذر

فیلتر میان نگذر



حوزه ی گسسته در زمان :

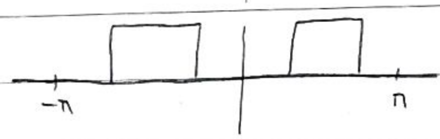
$$H(\omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$



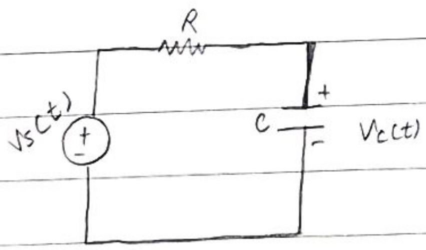
فرکانس های صفر و ۲π فرکانس های پایین هستند
پس فیلتر پایین گذر است

بالاگذر

میان گذر



مثال)



$$RC\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_s(t)$$

می خواهیم $H(\omega)$ را بدست بیاوریم

به ورودی $e^{j\omega t}$ می دهیم

$$RC\, j\omega H(\omega) e^{j\omega t} + H(\omega) e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

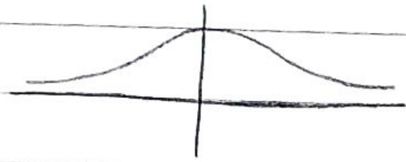
$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{RCj\omega + 1}$$

حالا می خواهیم ببینیم $H(\omega)$ چه فیلتری است

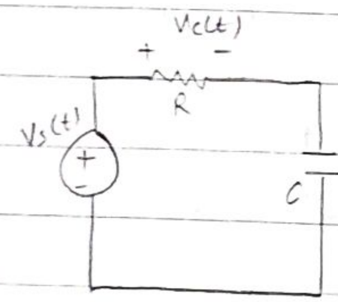
باید اندازه $H(\omega)$ را بدست بیاوریم تا دامنه را داشته باشیم

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RCj\omega)^2}}$$

فیلتر پایین گذر غیرایده آل چون بخشی از سیگنال های بالا را هم عبور می دهد



فیلتر بالاگذر غیر ایده آل :



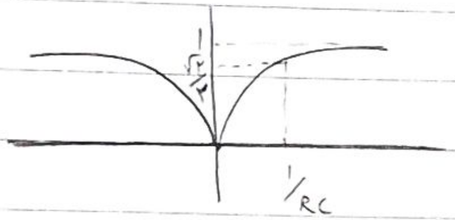
$e^{j\omega t} \longrightarrow V_s(t)$

$G(\omega)e^{j\omega t} \longrightarrow V_r(t)$

$$G(\omega)=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} \xrightarrow{\text{اندازه}} |G(\omega)| = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RCj\omega)^2}}$$

کافیست مقدار در فرکانس صفر و π را بررسی کنیم و مقدار $|G(\omega)|$ را بدست بیاوریم تا نوع فیلتر را بیابیم

برای حوزه ی پیوسته در زمان باید فرکانس صفر و بی نهایت را بررسی کنیم



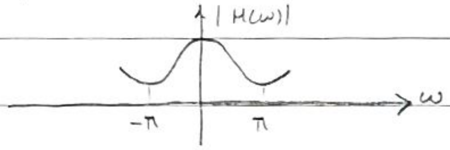
مثال) $y[n]-ay[n-1]=x[n]$ ، $0<a<1$

پاسخ فرکانسی این سیستم چه نوع فیلتری است ؟

باید $e^{j\omega t}$ بدهیم تا در پاسخ سیستم $H(\omega)$ داشته باشیم

$$H(\omega)e^{j\omega n} - aH(\omega)e^{j\omega(n-1)} = e^{j\omega n}$$

$$\Rightarrow H(\omega)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \xrightarrow{\text{صفر و } \pi \text{ را امتحان کنیم}}$$ فیلتر پایین گذر

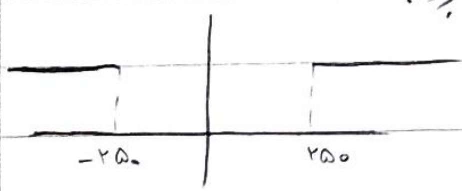


مثال) یک سیستم زمان پیوسته ی LTI با پاسخ فرکانسی زیر را در نظر بگیرید

$$H(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|>250\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

اگر ورودی $x(t)$ با دوره تناوب $T=\frac{\pi}{7}$ و ضرایب سری فوریه ی a_k به این سیستم اعمال می کنیم . $y(t)$ دقیقاً همان $x(t)$ خواهد بود. برای چه مقداری از k ، $a_k=0$ خواهد بود ؟

$H(\omega)$ فیلتر بالاگذر است



$x(t)=\sum a_k e^{jk\omega t}$ $\qquad$ $\omega_0=\frac{2\pi}{\pi/7}=14$

$\Rightarrow x(t)=\sum a_k e^{j14kt}$

پس $-250<14k<250$ پس $-17\le k\le 17$

مثال) اطلاعات زیر در مورد $x[n]$ داده شده است :

۱) $x[n]$ متناوب با دوره تناوب $N=6$ است

۲) $\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2$

۳) $\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x[n] = 1$

۴) $x[n]$ کمترین توان متوسط درطول یک دوره تناوب را دارد

$x[n]$ را بیابید

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \pi/3$$

۲

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} x[n] = 1/6 \times 2 = 1/3$$

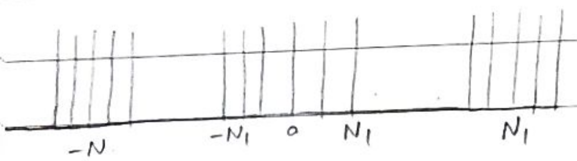
۳

$$\sum_{\langle N \rangle} \underset{e^{-j\pi n}}{(-1)^n} x[n] \Rightarrow a_3 = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} e^{-j\pi n} x[n] = 1/6$$

۴) چون کمترین توان متوسط را دارد پس $\overset{\text{بقیه ضرایب}}{a_1, a_2, a_4, a_5 = 0}$ پس

$$x[n] = a_0 + a_3 e^{j\pi n}$$
$$= 1/3 + 1/6 e^{j\pi n} = 1/3 + 1/6 (-1)^n$$

مثال) ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب زیر را بدست آورید



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{\substack{\langle N \rangle \\ n=-N_1}}^{n=N_1} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

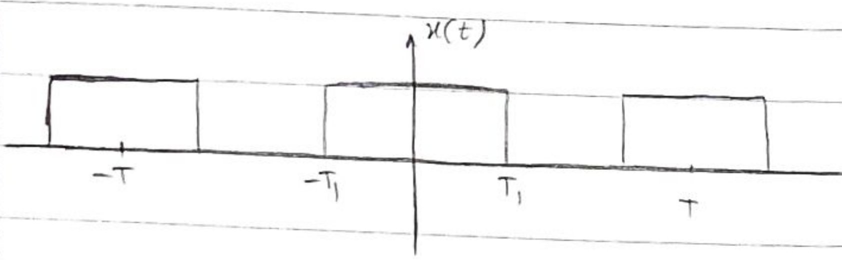
تغییر متغیر $n = m - N_1$ را اعمال می‌کنیم

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(\frac{2\pi}{N})(m-N_1)}$$

$$= \frac{1}{N} e^{jk(\frac{2\pi}{N})N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(\frac{2\pi}{N})m}$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} x[n] = \frac{2N_1+1}{N}$$

فصل چهارم (تبدیل فوریه) سیگنال های غیر متناوب



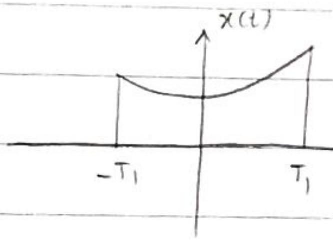
$$a_k = \frac{2T_1}{T} \operatorname{Sinc}\left(\frac{2kT_1}{T}\right)$$

$$Ta_k = 2T_1 \frac{\sin(\pi k\, 2T_1/T)}{k\pi\, 2T_1/T} = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0}$$

$$\Rightarrow Ta_k = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\Bigg|_{\omega = k\omega_0}$$

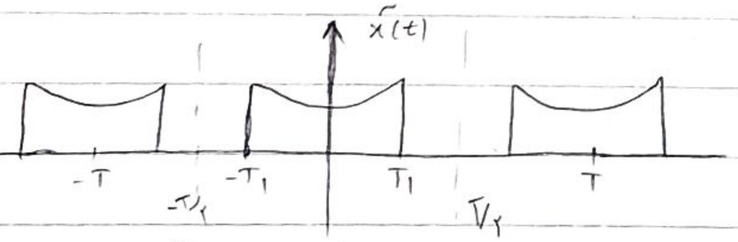
اگر $T\to\infty$ آنگاه شکل چهارگوش متناوب به پالس مستطیلی غیرمتناوب تبدیل می شود

Ta_k هم وقتی $T\to\infty$ به شکل sinc پیوسته نزدیک می شوند



یک سیگنال نامتناوب $x(t)$ را درنظر بگیرید:

این سیگنال را متناوب می کنیم سپس T را به بی نهایت میل می دهیم
تا تکه ی نامتناوب مورد نظر تنها به دست بیاید و سپس برای آن سری فوریه بدست بیاوریم



$\tilde{x}(t)$ را رسم می کنیم:

$$\lim_{T\to\infty} \tilde{x}(t) = x(t)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

در بازه ی انتگرال با هم برابرند

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

در بقیه نقاط صفر است پس با $T/2$ تا $-T/2$ برابر است

$$Ta_k \triangleq X(jk\omega_0) \quad (1)$$

$$X(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$F\{x(t)\}$

$$X(j\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}_{\text{تبدیل فوریه}}$$

اگر $\omega = k\omega_0$ آنگاه

عکس تبدیل فوریه :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

$T \to \infty \Rightarrow \omega_0 \to 0$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$ عکس تبدیل فوریه

نکات :

۱) در تبدیل فوریه از همه‌ی فرکانس‌ها در ساختن سیگنال مشارکت کرده است

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$ (عکس تبدیل فوریه)

در تبدیل فوریه هر فرکانسی را می‌توانیم داشته باشیم

$x(t)$ متناوب $= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

اما در سری فوریه فرکانس‌ها حتماً ضرایب فرکانس پایه‌اند

۲) $X(j\omega)$ را طیف سیگنال $x(t)$ نیز نامیم

همگرایی :

آیا $\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$ همان $x(t)$ است؟

همگرایی با معیار $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2\, dt$ شرط کافی : $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty$

همگرایی با معیار $\hat{x}(t) = \frac{x(t^+) - x(t^-)}{2}$ شرط کافی : شرایط دیریکله

شرایط دیریکله:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

تعداد نقاط ناپیوستگی در یک فاصله متناهی متناهی باشد و اندازه ناپیوستگی هم متناهی باشد

تعداد max و min های نسبی در یک فاصله‌ی متناهی ، متناهی باشد

مثال) تبدیل فوریه $x(t) = e^{-at}u(t)$ $\quad a>0$

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} \quad a>0$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \qquad \measuredangle X(j\omega) = \underset{\text{از صورت}}{0} - tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

مثال) تبدیل فوریه $x(t) = e^{-at}u(t)$ $\quad a<0$

هنگام محاسبه‌ی انتگرال $e^{+\infty}$ خواهیم داشت پس همگرا نخواهد بود و نمی‌توانیم تبدیل فوریه داشته باشیم

مثال) $x(t) = e^{-a|t|}$ $\quad a>0$

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2-\omega^2}$$

به خاطر قرینه کردن بازه‌ی انتگرال

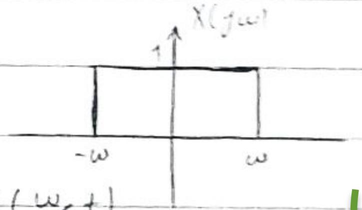
مثال) تبدیل فوریه‌ی پالس مستطیلی

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |x| < T_1 \\ \phi & |x| > T_1 \end{cases} \qquad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt$$

$$= -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = 2T_1\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\omega T_1}{\pi} k\pi\right)}{k\pi}$$

مثال)



$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin \omega t}{\pi t} = \frac{\omega}{\pi}\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} t\right)$$

خواص تبدیل فوریه :

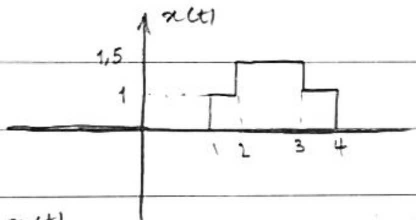
① خطی بودن

$$x(t) \xleftrightarrow{f} X(j\omega)$$
$$y(t) \xleftrightarrow{f} Y(j\omega)$$
$$a x(t) + b y(t) \xleftrightarrow{f} aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

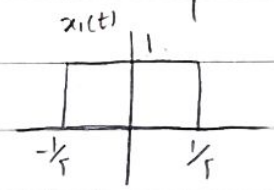
② جابجایی زمانی :

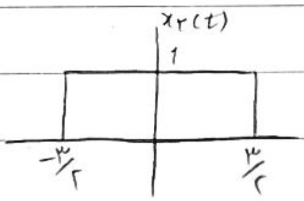
$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{f} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$
$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega(t-t_0)}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(X(j\omega) e^{-j\omega t_0}\right) e^{j\omega t}\, d\omega$$

مثال) تبدیل فوریه $x(t)$ را بیابید



هر دو پالس مستطیلی می‌شکند





$$x(t) = \tfrac{1}{2} x_1\left(t - \tfrac{5}{2}\right) + x_2\left(t - \tfrac{5}{2}\right)$$

$$X_1(j\omega) = \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$$
$$X_2(j\omega) = \frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega} \Rightarrow X(j\omega) = e^{-\frac{5}{2}j\omega}\left[\frac{1}{2}\,\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega} + \frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega}\right]$$

③

$$x(t) \xleftrightarrow{f} X(j\omega) \qquad \xrightarrow{\text{اثبات}} \qquad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$
$$x^*(t) \xleftrightarrow{f} X^*(-j\omega)$$

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, e^{j\omega t}\, dt$$

ω را قرینه می‌کنیم

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

برای سیگنال های حقیقی :

$$x(t) = x^*(t) \Rightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega) \Rightarrow X(-j\omega) = X^*(j\omega)$$

برای سیگنال های حقیقی قسمت حقیقی (Re) تابع تبدیل فوریه زوج است

" " " " موهومی (Im) " " فرد است

$$X^*(j\omega) = Re\{X(j\omega)\} - j\,Im\{X(j\omega)\}$$
$$X(-j\omega) = Re\{X(-j\omega)\} + j\,Im\{X(-j\omega)\}$$
$$\Rightarrow Re\{X(j\omega)\} = Re\{X(-j\omega)\}$$
$$Im\{X(-j\omega)\} = -Im\{X(j\omega)\}$$

برای سیگنال حقیقی ، دامنه تابع تبدیل فوریه زوج است $|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$

" ، فاز تابع تبدیل فوریه فرد است $\measuredangle X(-j\omega) = -\measuredangle X(j\omega)$

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j\measuredangle X(j\omega)}$$
$$X^*(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{-j\measuredangle X(j\omega)}$$
$$X(-j\omega) = |X(-j\omega)|\, e^{j\measuredangle X(-j\omega)} \qquad X^*(j\omega) = X(-j\omega)$$

نکته : برای سیگنال حقیقی کافی است تبدیل فوریه را برای فرکانس های مثبت می‌بسبکنیم برای فرکانس های منفی از روابط گفته شده استفاده می‌کنیم

(۴)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad x(t) \xleftrightarrow{f} X(j\omega)$$
$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\omega t}\, dt \qquad x(-t) \xleftrightarrow{f} X(-j\omega)$$
$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

نکته : اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد آنگاه $X(j\omega)$ نیز حقیقی و زوج خواهد بود

$$x(t) = x(-t) \Rightarrow X(j\omega) = X(-j\omega)$$
$$\text{حقیقی } x(t) \Rightarrow X^*(j\omega) = X(-j\omega) \qquad \Rightarrow X(j\omega) = X^*(j\omega)$$

نکته : اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد $\Leftarrow$ $X(j\omega)$ نیز موهومی خالص و فرد است

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$x_e(t) = \tfrac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big)$$

$$x_o(t) = \tfrac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big)$$

$$\Rightarrow \quad x_e(t) \xleftrightarrow{f} \mathrm{Re}\{X(j\omega)\}$$

$$x_o(t) \xleftrightarrow{f} j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

تبدیل‌های فوریه

$$X(j\omega) = \boxed{X_e(j\omega)} + \boxed{X_o(j\omega)}$$

$$X(j\omega) = \boxed{\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}} + j\,\boxed{\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}}$$

مثال : تبدیل فوریه $x(t)=e^{-a|t|}$ را می‌خواهیم به طریق ساده‌تر بدست آوریم

$$e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = 2\,\mathrm{Even}\{e^{-at}u(t)\}$$

$$2\,\mathrm{Ev}\{e^{-at}u(t)\} \xleftrightarrow{f} 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

۵) مشتق و انتگرال :

$$x(t) \xleftrightarrow{f} X(j\omega)$$

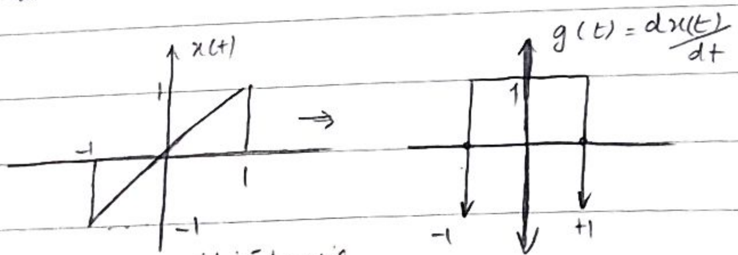
$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{f} j\omega X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{f} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

مثال) تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید

تبدیل فوریه تابع $\delta(t)$ یک می‌شود

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t}\,dt = e^{0} = 1$$



ضربه‌ها قرینه‌اند

$$G(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega} - \underset{\text{راستی}}{e^{-j\omega}} - \underset{\text{چپی}}{e^{j\omega}} = \frac{2\sin\omega}{\omega} - 2\cos\omega$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}G(j\omega) + \pi G(0)\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega}\left(\frac{2\sin\omega}{\omega} - 2\cos\omega\right) + \pi \times 0 \times \delta(\omega)$$

مثال) تبدیل فوریه $u(t)$ را از روی $\delta(t)$ محاسبه کنید

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

$$U(j\omega) = \frac{1}{j\omega}\underbrace{\Delta(j\omega)}_{1} + \pi \overbrace{\cancel{\Delta(0)}}^{1}\, \delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

(۶)

$$x(t) \overset{f}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

$$x(at) \overset{f}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$z = at$, $a > 0$: $$= \int_{-\infty}^{\infty} x(z)\, e^{-j\omega (z/a)}\, dz/a$$

$a < 0$: $$= \int_{\infty}^{-\infty} x(z)\, e^{-j\omega (z/a)}\, dz/a$$

اگر $a>1$ سیگنال در حوزه‌ی زمان جمع می‌شود و در حوزه‌ی فرکانس باز می‌شود

$a<1$ " باز " جمع "

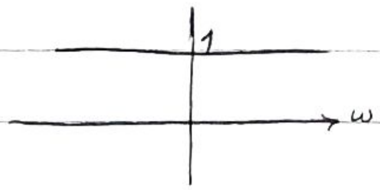
(۷) دوگانی (duality)

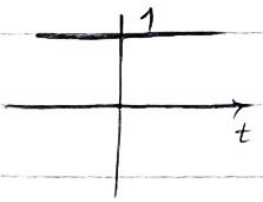
$$f(t) \xrightarrow{F} g(\omega)$$

$$g(t) \xrightarrow{F} 2\pi f(-\omega)$$

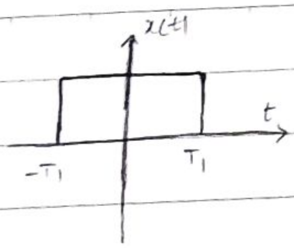
$g(\omega)$ جای ω در t می‌گذاریم

مثال)

$\delta(t) \xrightarrow{F}$ 

 $\xrightarrow{F} 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

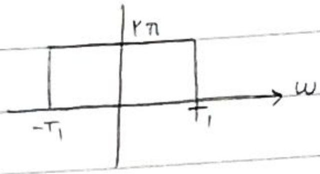
مثال)



$$\xrightarrow{F} \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

$$\frac{2\sin tT_1}{2\pi t} = \frac{\sin(tT_1)}{\pi t}$$

$$\frac{2\sin(tT_1)}{t} \xrightarrow{F}$$



مثال) تبدیل فوریه

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

$$e^{-a|t|} \xrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$e^{-|t|} \xrightarrow{F} \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\frac{2}{1+t^2} \xrightarrow{F} 2\pi e^{-|\omega|}$$

چند خاصیت دیگر که با دوگانگی اثبات می شوند :

a) $-jt\,x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

b) $e^{j\omega_0 t}x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j(\omega-\omega_0))$

c) $\frac{-1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta)\,d\eta$

۸ کانولوشن :

$$x(t) * h(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega)H(j\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(j\omega)H(j\omega)}_{Y(j\omega)} e^{j\omega t}\,d\omega$$

توصیف سیستم : $y(t) = x(t) * h(t)$

حوزه زمان: $x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$

حوزه‌ی فرکانس: $X(j\omega) \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

توصیف سیستم در حوزه‌ی زمان همیشه وجود دارد اما در حوزه‌ی فرکانس، تبدیل فوریه‌ها حتماً باید وجود داشته باشند

9) رابطه‌ی پارسوال :

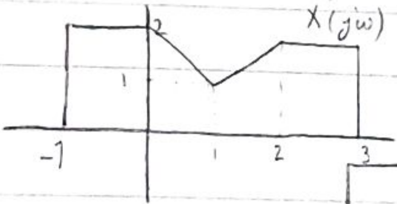
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

تبدیل انرژی در دو حوزه‌ی زمان و فرکانس!

اثبات :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^* x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega\right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt\right]}_{X(j\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$



مثال) $x(t)$ به صورت زیر داده شده است

الف) $\measuredangle X(j\omega)$

ب) $X(j0)$

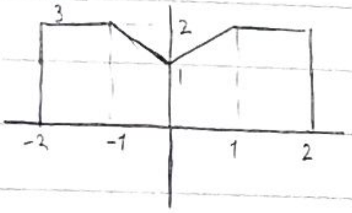
ج) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, d\omega$

د) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$

هـ) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

و) عکس تبدیل فوریه $Re\{X(j\omega)\}$ را رسم کنید

$y(t) = x(t+1)$



$y(t)$ حقیقی و زوج $\Leftarrow$ $Y(j\omega)$ حقیقی و زوج

$\measuredangle Y(j\omega) = 0$

$Y(j\omega) = X(j\omega) e^{j\omega}$

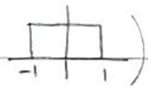
$\measuredangle X(j\omega) = -\omega \Leftarrow \measuredangle Y(j\omega) = \measuredangle X(j\omega) + \omega$

ب) $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt=4\times 2-1=7$

ج) $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,e^{+j\omega t}\,d\omega \xrightarrow[\text{در بیاوریم}]{\text{باید به این شکل}} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,d\omega = 2\pi\, x(0)=4\pi$

د) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j)\underbrace{\frac{2\sin\omega}{\omega}}_{Y(j\omega)} e^{j2\omega}\,d\omega = 2\pi\, y(2) = 2\pi\times \frac{7}{2}$

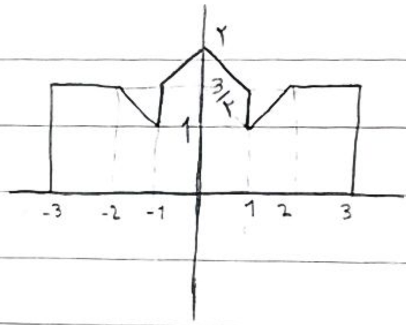
ضرب در حوزه‌ی فرکانس همان کانولوشن است در حوزه‌ی زمان

$y(t)=\Big(x(t) *$  $\Big)_{t=2}$

$y(2)=1\times 2+\frac{(1+2)}{2}=\frac{7}{2}$

ه) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt$

و) $Re\{X(j\omega)\} \overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} Ev\{x(t)\}=\frac{1}{2}\left(x(t)+x(-t)\right)$



۱۵) ضرب یا مدلاسیون

$x(t)*y(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)\,Y(j\omega)$

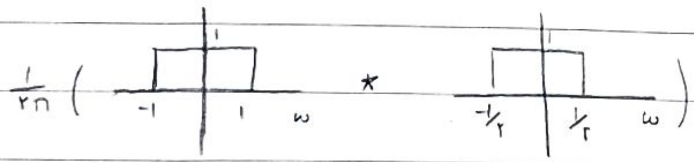
$x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$

$y(t) \rightarrow Y(j\omega)$

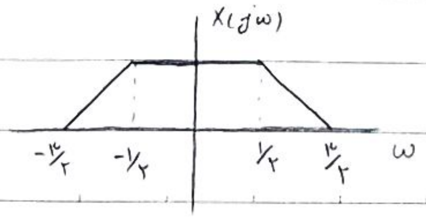
$x(t)\,y(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$

مثال) تبدیل فوریه زیر را بیابید:

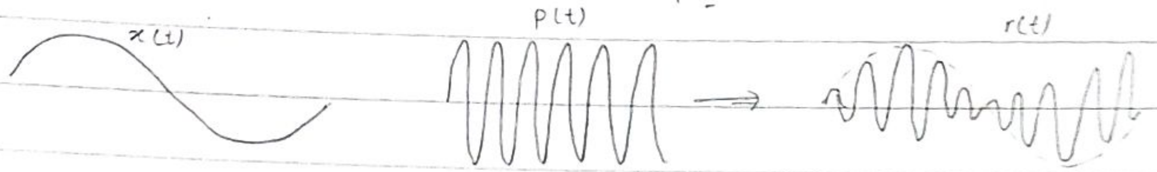
$x(t)=\frac{\sin(t)\sin(t/2)}{\pi t^2}=\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)\pi\left(\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\right)$



$X(j\omega)=$



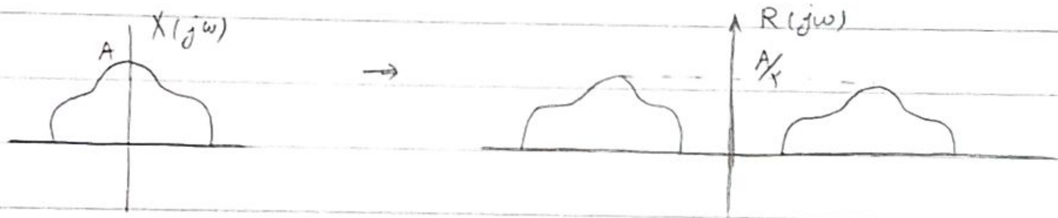
مثال) $p(t) = \cos w_0 t$ می‌خواهیم ببینیم برای $r(t) = x(t)p(t)$ چه اتفاقی می‌افتد



تبدیل فوریه $p(t) = \cos w_0 t$

$$F\{\cos w_0 t\} = \frac{1}{2}\left(2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)\right) = \pi\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right)$$

$$F(r(t)) = R(j\omega) = X(j\omega) * P(j\omega)\,\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\,X(j\omega) * \left(\pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi\,\delta(\omega+\omega_0)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega+\omega_0))\right)$$



مثال) مطلوب است محاسبه کانولوشن دو سیگنال زیر:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-bt}u(t) & b>0 \\ h(t) = e^{-at}u(t) & a>0 \end{cases}$$

حالت اول $a \neq b$

$$x(t) * h(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)\,H(j\omega) = \frac{1}{b+j\omega}\,\frac{1}{a+j\omega} \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{A}{b+j\omega} + \frac{B}{a+j\omega}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{a-b} \qquad B = \frac{1}{b-a} \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b+j\omega}\right) + \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{a-b}\,e^{-bt}u(t) + \frac{1}{b-a}\,e^{-at}u(t)$$

حالت دوم $a=b$

$$Y(j\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)^2}=j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)$$

$$t\,x(t)\xrightarrow{F} j\frac{d}{d\omega}X(j\omega) \qquad \Rightarrow y(t)=t e^{-at}u(t)$$

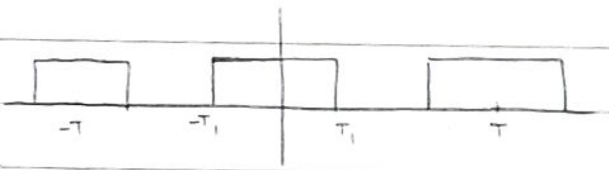
تبدیل فوریه سیگنال های متناوب :

فرض کنید $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)$$

مثال) تبدیل فوریه سیگنال زیر ؟



حواسمان باشد که سیگنال متناوب است و تبدیل فوریه برابر $\cancel{\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}}$ نمی شود

$$a_k=\frac{\sin(k\omega_0T_1)}{\pi k}$$

$$X(j\omega)=2\pi\sum\frac{\sin(k\omega_0T_1)}{\pi k}\,\delta(\omega-k\omega_0)$$

مثال) برای $x(t)=\sin(\omega_0 t)$ تبدیل فوریه را حساب کنید

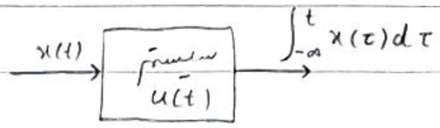
$$\overset{k=1}{}\qquad\qquad \overset{k=-1}{}$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\underbrace{e^{j\omega_0 t}}_{a_k=1}-\underbrace{e^{-j\omega_0 t}}_{a_k=-1}\right)$$

$$X(j\omega)=\frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

اثبات خاصیت پنجم :

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau\xrightarrow{F}\frac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\,\delta(\omega)$$



$$y(t)=x(t)*u(t)$$

$$Y(j\omega)=X(j\omega)\,U(j\omega)$$

$$U(j\omega)\rightarrow\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

سیستم های توصیف شونده با معادلات دیفرانسیلی :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

در فصل سوم هدف اصلی بدست آوردن پاسخ فرکانسی بود

راه حل : $x(t) = e^{j\omega t} \longrightarrow y(t) = H(t) e^{j\omega t}$

در این فصل پاسخ را با استفاده از تبدیل فوریه می یابیم

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

مثال) $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$ مطلوب است محاسبه ی پاسخ ضربه.

$$F: \quad j\omega Y(j\omega) + aY(j\omega) = X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{a+j\omega} \begin{cases} \rightarrow h(t) = e^{-at}u(t) & a<0 \\ \rightarrow h(t) = -e^{-at}u(-t) & a>0 \end{cases}$$

مثال) پاسخ ضربه ی سیستم LTI توصیف شونده با معادله دیفرانسیل زیر :

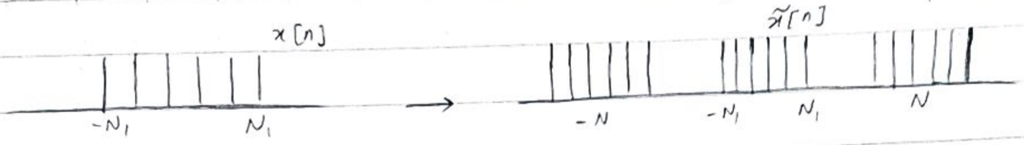
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

$$F: (j\omega)^2 Y(j\omega) + 4(j\omega)Y(j\omega) + 3Y(j\omega) = j\omega X(j\omega) + 2X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+4j\omega+3} = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)} = \frac{1/2}{j\omega+1} + \frac{1/2}{j\omega+3}$$

$$\Rightarrow h(t) = 1/2\, e^{-t}u(t) + 1/2\, e^{-3t}u(t)$$

فصل پنجم : تبدیل فوریه سیگنال های گسسته در زمان



سری را در دست می‌آوریم سپس تبدیل فوریه را محاسبه می‌کنیم

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \qquad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$X(j\omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$ آنالیز تبدیل فوریه سیگنال گسسته

$$a_k = \frac{1}{N} X(jk\omega_0) \Rightarrow \tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 n} = \frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 n}\,\omega_0$$

$$N \to \infty \Rightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(j\omega) e^{j\omega n} d\omega$$ سنتز تبدیل فوریه معکوس

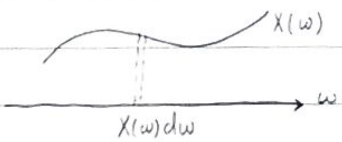
نکات :

۱) دوگانی نداریم $\quad x[n] \xrightarrow{F} g(\omega)$

دامنه ها متفاوت اند و یکی گسسته و یکی پیوسته است

۲) برای سیگنال متناوب $\quad a_k = \frac{1}{N} X(jk\omega_0)$

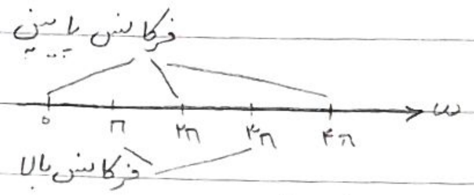
۳) مفهوم چگالی طیف



۴) تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان متناوب است

$$X(\omega + 2\pi) = X(\omega)$$

نکته :



نماد رایج برای تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان : $X(e^{j\omega})$

مثال) $x[n] = \delta[n]$

$$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1$$

مثال) $x[n] = a^n u[n]$ $\quad |a|<1$

$$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

مثال)

$$x[n]=\begin{cases}1 & |n|\leqslant N_1\\ 0 & |n|\geqslant N_1\end{cases}\qquad X(j\omega)=\sum_{n=-N_1}^{N_1}e^{-j\omega n}=\frac{\sin\omega(N_1+1/2)}{\sin\omega/2}$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\xrightarrow{F}\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(j\omega)+\pi X(j0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2k\pi)$$

$$y[n]-y[n-1]=x[n]$$

$$Y(j\omega)-e^{-j\omega}Y(j\omega)=X(j\omega)\Rightarrow\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}\qquad\boxed{\omega\neq 0}$$

برای ω صفر باید راه دیگری برویم

تبدیل فوریه سیگنال های متناوب:

$$x[n]=e^{j\omega_0 n}$$

$$X(j\omega)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi\,\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

طیف سیگنال متناوب باید قطار ضربه باشد

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

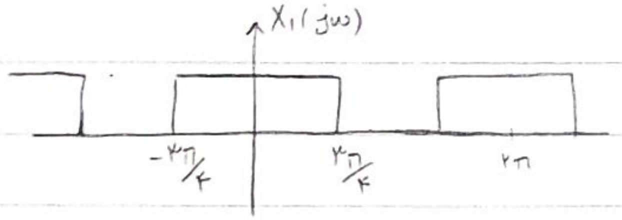
$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\,\delta\!\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

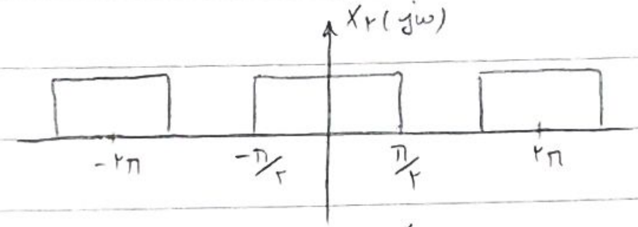
مثال) محاسبه‌ی تبدیل فوریه $x_1[n]x_2[n]$

$$x_1[n] = \frac{\sin(3\pi n/4)}{n\pi}$$

ضرایب n ، در کلات آن تأثیر دارند

$$x_2[n] = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}$$



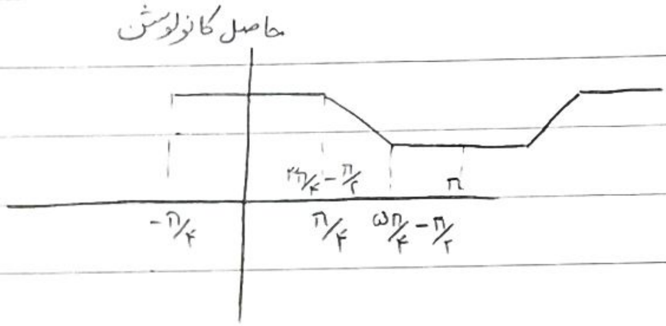


محاسبه‌ی کانولوشن پریودیک :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(j\theta)\, X_2(j(\omega-\theta))\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(j\theta)\, \hat{X}_2(j(\omega-\theta))\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\theta)\, \hat{X}_2(j(\omega-\theta))\, d\theta$$



سیستم‌های توصیف شونده با معادلات دیفرانس :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

روش حل اول : $e^{j\omega n} \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow H(\omega)e^{j\omega n}$

روش این حل :

$$Y(\omega) = X(j\omega)\, H(\omega)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}\, Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}\, X(j\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی پاسخ ضربه سیستم زیر : ۱۵۱۷ |

$$y[n] - a y[n-1] = x[n]$$

$$Y(\omega) = -ae^{-j\omega}Y(\omega) = X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \Rightarrow h[n] = a^n u[n]$$

مثال) مطلوب است پاسخ ضربه سیستم LTI توصیف شونده با معادله زیر :

$$y[n] - \tfrac{3}{4}y[n-1] + \tfrac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}} \ \underline{\underline{e^{-j\omega}=u}} \ \frac{2}{1-\frac{3}{4}u+\frac{1}{8}u^2}$$

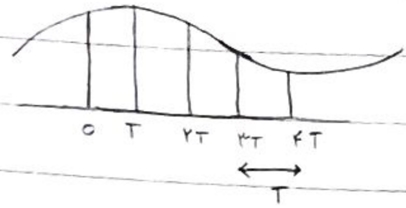
باید ریشه‌های کسر را بدست بیاوریم

$$\Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}u)(1-\frac{1}{4}u)} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}u} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}u} \qquad A = 4, \quad B = -2$$

برای بدست آوردن A ، ریشه مخرج کسر A را در عبارت اصلی $\frac{2}{(1-\frac{1}{2}u)(1-\frac{1}{4}u)}$ می‌گذاریم

$$\Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}u} + \frac{-2}{1-\frac{1}{4}u} \Rightarrow h[n] = 4(\tfrac{1}{2})^n u[n] - 2(\tfrac{1}{4})^n u[n]$$

فصل هفتم : نمونه برداری



T را تا حد امکان باید کوچک باشد و نمونه ها به هم نزدیک باشند
یعنی فرکانس نمونه برداری باید زیاد باشد و اگر از یک حدی کمتر باشد
نمی توانیم سیگنال را به صورت پیوسته بدست بیاوریم

سیگنال اگر پیوسته باشد $\longrightarrow x(t)$

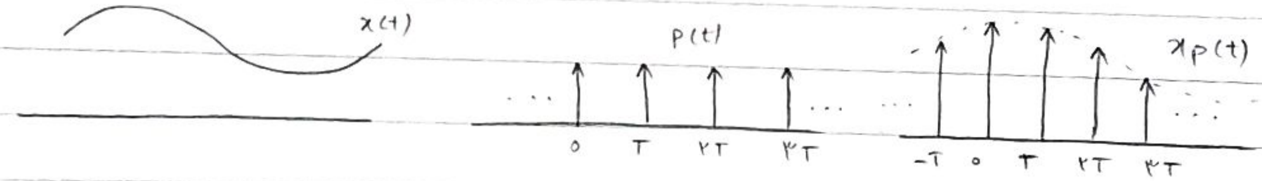
" گسسته باشد $\longrightarrow x[n] = nT$

$f_s = \frac{1}{T}$ فرکانس نمونه برداری

$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$ برحسب رادیان

سوال : آیا سیگنال پیوسته را می توان از روی نمونه های گسسته بازیابی کرد؟
تحت شرایطی تنها یک سیگنال پیوسته می توان از یک سری نمونه عبور داد
(فرکانس سیگنال) پهنای باند سیگنال ۲ $\leq$ فرکانس نمونه برداری

سیگنال $x(t)$ در اختیار است با تابع $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ می خواهیم نمونه برداری کنیم



$$x_p(t) = x(t)p(t) \Rightarrow x_p(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t - nT)$$

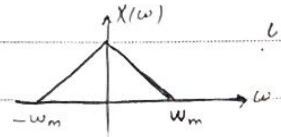
تبدیل فوریه $p(t)$ چون یک تابع متناوب است بصورت قطار ضربه است

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k\, \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$\frac{1}{T}$ = $p(t)$ ضریب سری فوریه

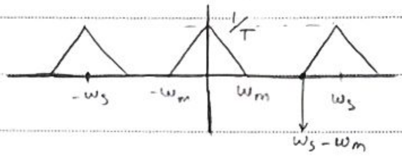
$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X(\omega) * P(\omega)\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

فرض می‌کنیم $X(\omega)$ برابر است با

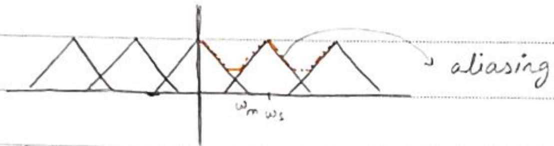


حالت اول

$$X_p(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\omega_s)$$

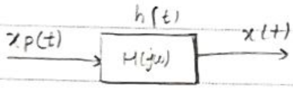


$\omega_s-\omega_m>\omega_m$

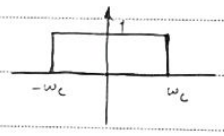


حالت دوم $\omega_s<2\omega_m$

قضیه نمونه‌برداری نایکوییست: اگر $\omega_s>2\omega_m$ آنگاه نمونه‌های سیگنال، سیگنال را به طور یکتا مشخص می‌کند



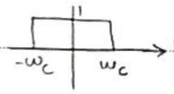
$-\omega_m<\omega_c<\omega_s-\omega_m$



$H(j\omega)$

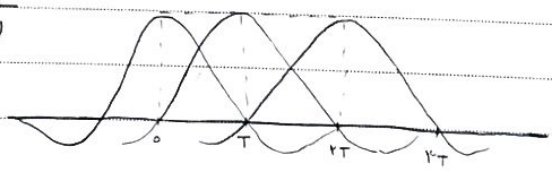
پس برای سیستم بازسازی شده داریم:

$$x_r(t)=h(t)*x_p(t)$$

$h(t):\quad F^{-1}\{$  $\}=\frac{T\sin\omega_c t}{\pi t}=\frac{\omega_c T\sin\omega_c t}{\pi\omega_c t}$

$$x(t)=h(t)*x_p(t)=h(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\,\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\,h(t-nT)$$

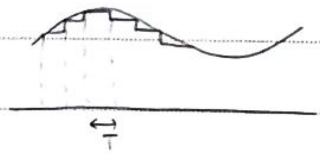
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{\omega_c T}{\pi}\frac{\sin\omega_c(t-nT)}{\omega_c(t-nT)}$$

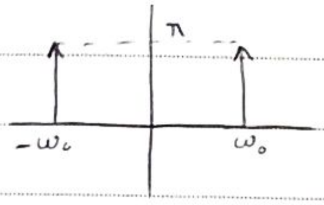


Year. Month. Data. Subject

نمونه برداری   zero order hold

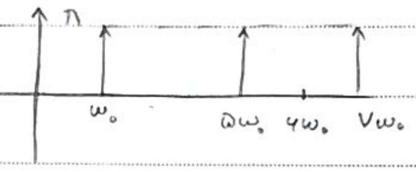
با کلید نمونه برداری می کنیم





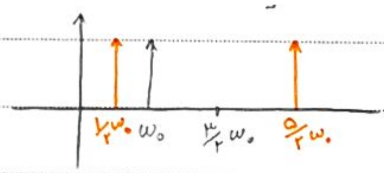
مثال) $x(t) = \cos \omega_0 t$

اگر ω_s را $6\omega_0$ بگیریم :



مشکلی نخواهیم داشت

اگر ω_s را $\frac{3}{2}\omega_0$ بگیریم :



aliasing رخ می دهد