< جلسه هجدهم ۱۱/۹/۹۴ >

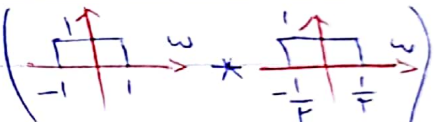
۱۵) ضرب یا مدولاسیون:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{f} X(j\omega) \\ y(t) \xrightarrow{f} Y(j\omega) \end{array}\right\} \Longrightarrow x(t)y(t) \xrightarrow{f} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$$

مثال) مطلوب است محاسبه تبدیل فوریه سیگنال زیر

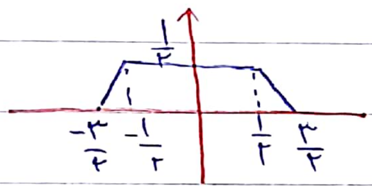
$$x(t) = \frac{\sin(t)\sin(\frac{t}{2})}{\pi t^2}$$

حل: $x(t) = \pi\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)\left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\pi t}\right) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{\pi}{2\pi}\Big($



$\Big)$

$\Rightarrow X(j\omega)$:

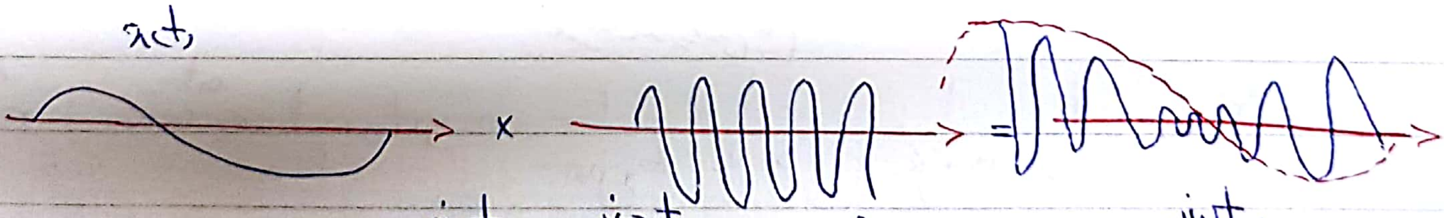


مثال) $p(t) = \cos(\omega_0 t) \longleftarrow r(t) = x(t)p(t)$

یا

سیگنال $p(t)$ را روی $x(t)$ سوار می‌کنیم، حاصل آن $r(t)$ می‌شود و می‌گوییم $r(t)$ را مدوله کرده‌ام.

?



$$p(t) = \cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}, \quad 1 \xrightarrow{f} 2\pi\delta(\omega) \Rightarrow e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{f} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

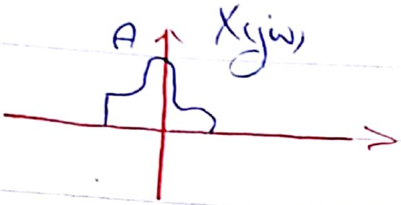
شیفت فرکانسی

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{p(t)\} = \frac{1}{2}\left(2\pi\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right) = \pi\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right)$$

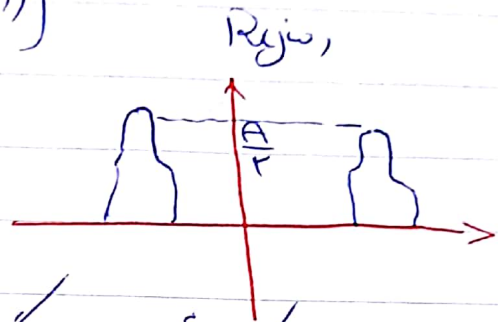
DATE / / SUBJECT:

$$\Rightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \left(\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega+\omega_0))\right]$$



$\Rightarrow$



مثال ۸ – مطلوب است محاسبه کانولوشن دو سیگنال زیر

$$\begin{cases} h(t) = e^{-at}u(t) & a>0 \\ x(t) = e^{-bt}u(t) & b>0 \end{cases}$$

حل: $x(t), y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega), Y(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}, \quad X(j\omega) = \frac{1}{b+j\omega} \Rightarrow H(j\omega)X(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)(b+j\omega)} = Y(j\omega)$$

حالت اول: $a \neq b$: $Y(j\omega) = \frac{A}{a+j\omega} + \frac{B}{b+j\omega} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{b-a} \\ B = \frac{1}{a-b} \end{cases}$

ضریب‌ها را در مخرج (ریشه کسر) به دست می‌آوریم و در سایر قسمت‌های کسری داریم
(مثل سایر ریاضی ۲)

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{b-a}\frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-b}\frac{1}{b+j\omega} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{b-a}e^{-at}u(t) + \frac{1}{a-b}e^{-bt}u(t)$$

حالت دوم: $a = b$: $Y(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2} = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)$

$$t\,x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\frac{d}{d\omega}(X(j\omega)) \rightarrow \left(\text{خاصیت: } (-jt)\,x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d}{d\omega}(X(j\omega))\right)$$

جزو خواص

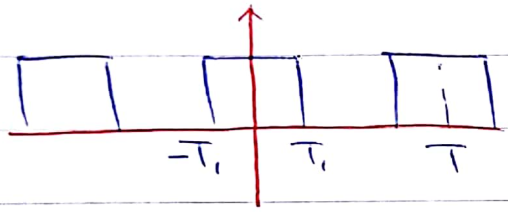
$\Rightarrow y(t) = te^{-at}u(t)$

* تبدیل فوریه سیگنال های متناوب:

$x(t)$: متناوب با دوره تناوب 2π , $1 \xrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$

* $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$ *

* مثال:



$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k}$

$\cancel{\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}} \Rightarrow X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$

* مثال: $x(t) = \sin(\omega_0 t)$

حل: $x(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right)$

← اثبات خاصیت انتگرال:

$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xrightarrow{F} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(j0)\delta(\omega)$

$x(t) \rightarrow \boxed{h(t) = u(t)} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$

$\Rightarrow y(t) = x(t) * u(t) \Rightarrow$

$Y(j\omega) = X(j\omega)\underbrace{U(j\omega)}_{\text{قبلاً حساب کردیم}} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \Rightarrow$ ✓

* سیستم‌های توصیف شونده با معادلات دیفرانسیلی :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

← هدف: محاسبه پاسخ فرکانسی

* راه حل فصل سوم : $x(t) = e^{j\omega t} \longrightarrow y(t) = H(\omega) e^{j\omega t}$

* روش این فصل : استفاده از تبدیل فوریه :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \qquad X(j\omega) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow * \quad H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k} \quad *$$

مثال) پاسخ ضربه معادله زیر : $\frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = x(t)$

حل : $j\omega Y(j\omega) + a Y(j\omega) = X(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{a + j\omega}$

$$\Rightarrow \begin{cases} h(t) = e^{-at} u(t) & a > 0 \\ h(t) = -e^{-at} u(-t) & a < 0 \end{cases}$$

*مثال) پاسخ ضربه سیستم LTI روبرو:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

حل: $(j\omega)^2Y(j\omega)+4(j\omega)Y(j\omega)+3Y(j\omega)=(j\omega)X(j\omega)+2X(j\omega)$

$$\Rightarrow H(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+4j\omega+3}=\frac{j\omega+2}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$$

$$\Rightarrow H(j\omega)=\frac{A}{1+j\omega}+\frac{B}{3+j\omega}\Rightarrow A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2}\Rightarrow H(j\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{j\omega+1}+\frac{1}{j\omega+3}\right]$$

هوی‌ساید

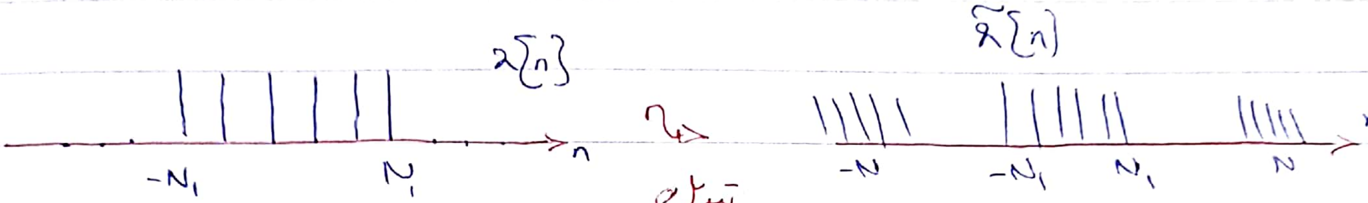
$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t)=\frac{1}{2}\left[e^{-t}u(t)+e^{-3t}u(t)\right]$$

محاسبه‌ی A یافتن: $H(j\omega)=\dfrac{j\omega+2}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$

$$\Rightarrow 1+j\omega=0\Rightarrow \omega=j\Rightarrow A=\frac{j(j)+2}{(3+j\times j)}=\frac{1}{2}$$

جلسه نوزدهم ۹۴/۹/۱۳

* فصل پنج (تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان)



(مثل قبل سری را به دست می‌آوریم. سپس فوریه)

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{N} \qquad a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\tilde{x}[n]e^{-jk\omega_0 n}=$$

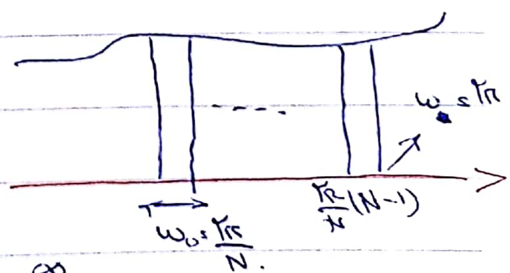
$$=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

تعریف: $X(j\omega)\triangleq\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n} \Longrightarrow a_k=\frac{1}{N}X(jk\omega_0)$

$$\Longrightarrow \tilde{x}[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}\frac{1}{N}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 n}=\frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 n}$$

$$\Longrightarrow \tilde{x}[n]=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 n}\,\omega_0$$

$$\Longrightarrow N\longrightarrow\infty \xrightarrow{\text{طبق (1)}} x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(j\omega)e^{j\omega n}d\omega$$



سنتز

آنالیز

$$* \; x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(j\omega)e^{j\omega n}d\omega \qquad * \; X(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

زوج‌های تبدیل فوریه

// روی تفاوت های گسسته و پیوسته تاکید داریم.

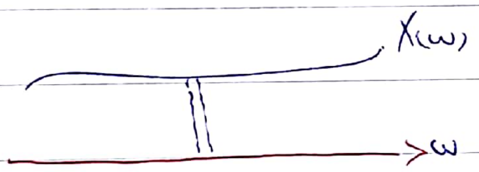
نکات :

۱- دوگانی نداریم : $x[n] \xrightarrow{f} g(\omega)$

دامنه ها متفاوتند یکی گسسته و یکی پیوسته است

۲- برای یک سیگنال متناوب : $a_k = \frac{1}{N} X(jk\omega_0)$

۳- مفهوم چگالی طیف

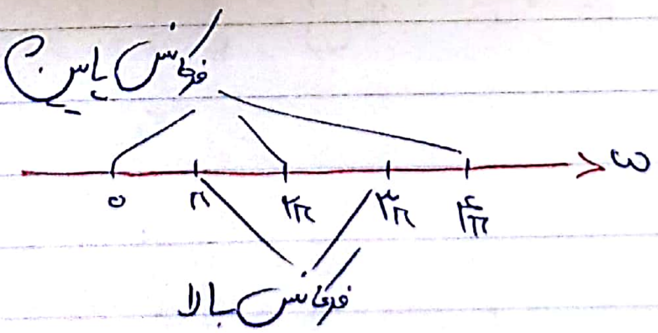


$X(\omega)\,d\omega$

۴- تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان متناوب است.

$$X(\omega+2\pi) = X(\omega)$$

مثلا :



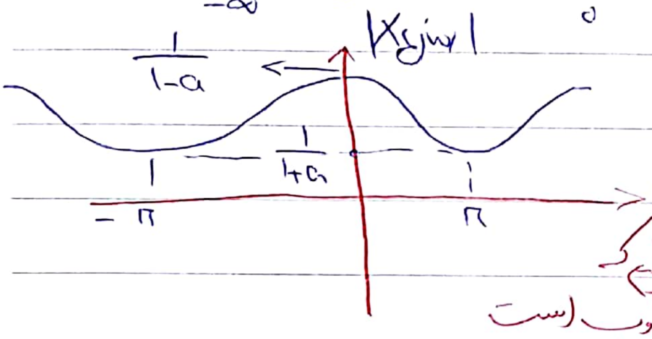
* نماد رایج برای تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان : $X(e^{j\omega})$

* مثال: $x[n]=\delta[n]$

حل: $X(\omega)=\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta[n]e^{-j\omega n}=1$

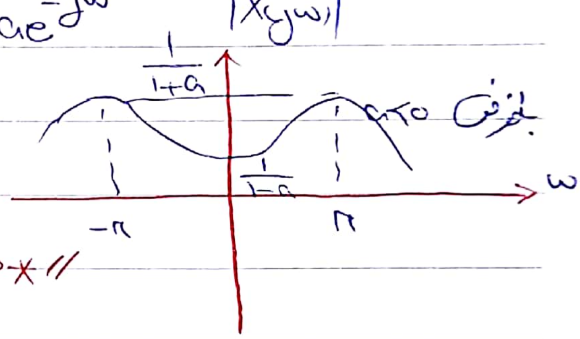
* مثال: $x[n]=a^n u[n] \quad , |a|<1$

حل: $X(\omega)=\sum_{-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$



با فرض: $a>0$

// * در امتحان بهتره بیان کنیم که متناوب است



با فرض $a<0$

* مثال: $x[n]=a^{|n|} \quad |a|<1$

حل: $X(j\omega)=\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega n}a^{|n|}=\sum_{-\infty}^{-1} a^{-n}e^{-j\omega n}+\sum_{0}^{\infty} a^{n}e^{-j\omega n}$

$n=-m$

$=\sum_{m=1}^{\infty} a^m e^{j\omega m}+\sum_{0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}=ae^{j\omega}\sum_{m=0}^{\infty}(ae^{j\omega})^m+\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}$

$=\frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}+\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \Rightarrow X(j\omega)=\frac{1-a^2}{a^2-2a\cos\omega+1}$ *

* همگرایی تبدیل فوریه گسسته در زمان

$X(j\omega)=\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

شرط های همگرایی

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2<\infty \Leftarrow \int_{2\pi}|X(\omega)-\hat{X}(\omega)|^2 \to 0$ * همگرایی به مفهوم

DATE / / SUBJECT:

همگرایی به معنی $\hat{X}(\omega) = \frac{X(\omega^+) - X(\omega^-)}{2}$

شرط کافی همگرایی : $\sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$

Scanned by CamScanner

جدول ۵-۱ خواص تبدیل فوریهٔ گسسته در زمان

بخش	خاصیت	سیگنال نامتناوب	تبدیل فوریه
		$x[n]$ $y[n]$	$\left.\begin{matrix} X(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega}) \end{matrix}\right\}$ متناوب با تناوب ۲π
۵-۳-۲	خطی بودن	$a\,x[n]+b\,y[n]$	$a\,X(e^{j\omega})+b\,X(e^{j\omega})$
۵-۳-۳	جابجایی زمانی	$x[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
۵-۳-۳	جابجایی فرکانسی	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
۵-۳-۴	مزدوج‌گیری	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
۵-۳-۶	وارونی زمانی	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
۵-۳-۷	انبساط زمانی	$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x[n/k], & n=\text{مضرب } k \\ 0, & n\neq\text{مضرب } k \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
۵-۴	کانولوشن	$x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})\,Y(e^{j\omega})$ متناوب (۲π)
۵-۵	ضرب	$x[n]\,y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\theta})\,Y(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$
۵-۳-۵	تفاضلگیری زمانی	$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{-j\omega})\,X(e^{j\omega})$
۵-۳-۵	جمع انباره‌ای	$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$	$\frac{1}{(1-e^{-j\omega})}X(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$
۵-۳-۸	مشتقگیری فرکانسی	$n\,x[n]$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
۵-۳-۴	تقارن سیگنالهای حقیقی	$x[n]$ حقیقی	$\left\{\begin{matrix} X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega}) \\ \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}=\mathcal{R}e\{X(e^{-j\omega})\} \\ \mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}=-\mathcal{I}m\{X(e^{-j\omega})\} \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert=\lvert X(e^{-j\omega})\rvert \\ \sphericalangle X(e^{j\omega})=-\sphericalangle X(e^{-j\omega}) \end{matrix}\right.$
۵-۳-۴	تقارن سیگنالهای حقیقی و زوج	$x[n]$ حقیقی و زوج	$X(e^{j\omega})$ حقیقی و زوج
۵-۳-۴	تقارن سیگنالهای حقیقی و فرد	$x[n]$ حقیقی و فرد	$X(e^{j\omega})$ موهومی و فرد
۵-۳-۴	تجزیه زوج و فرد سیگنالهای حقیقی	$x_e[n]=\mathcal{E}v\{x[n]\}$، $x[n]$ حقیقی	$\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$
		$x_o[n]=\mathcal{O}d\{x[n]\}$، $x[n]$ حقیقی	$j\,\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$

۵-۳-۹ رابطهٔ پارسوال برای سیگنالهای نامتناوب

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2\,d\omega$$