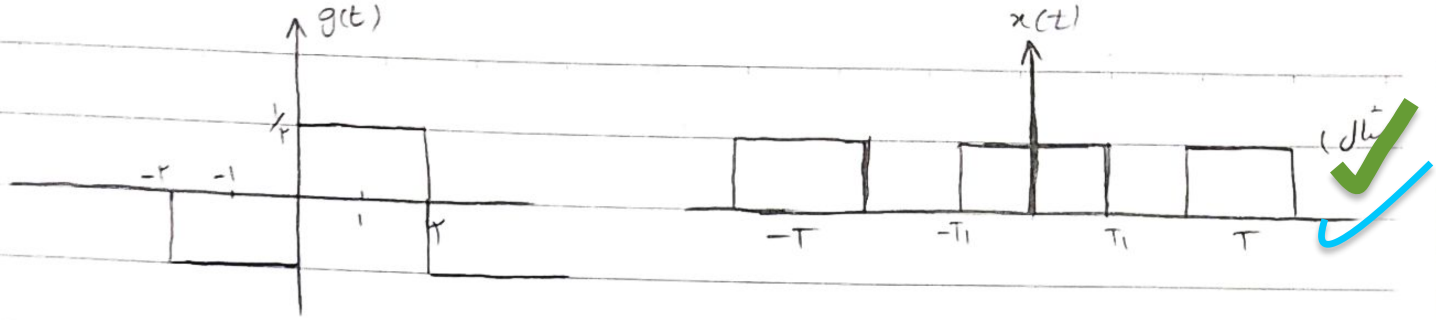
مثال)



$T = 4 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \pi/2$

$2T_1 = 2$

$g(t) = x(t-1) - 1/2$

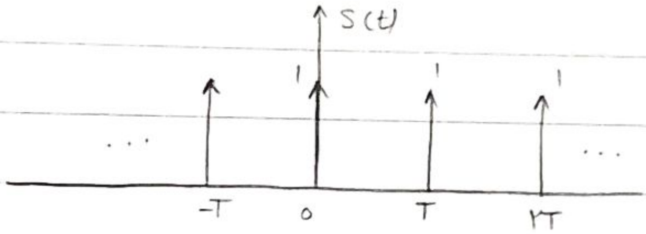
$g(t) \xleftrightarrow{fs} d_k$

$$d_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

$a_k = \frac{2T_1}{T} \operatorname{Sinc}\left(\frac{2kT_1}{T}\right)$

$a_k = \frac{2}{4} \operatorname{Sinc}\left(\frac{2k}{4}\right) = 1/2 \operatorname{Sinc}(k/2)$

مثال)

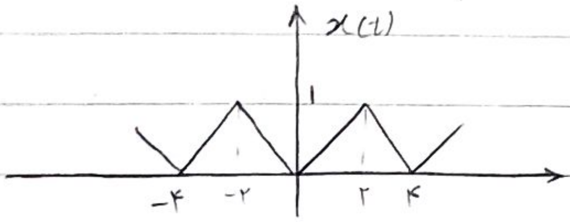


$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$

$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_T \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$

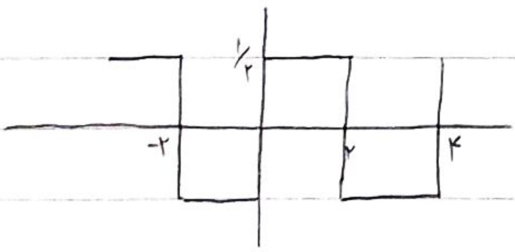
ضرایب سری فوریه قطار تابع ضربه با هم برابر هستند و برابر $\frac{1}{T}$ می باشد

مثال)



$g(t) = x'(t)$ اگر از این تابع مشتق بگیریم

$\omega_0 = \frac{\pi}{2}$



$g(t) \longleftrightarrow d_k$

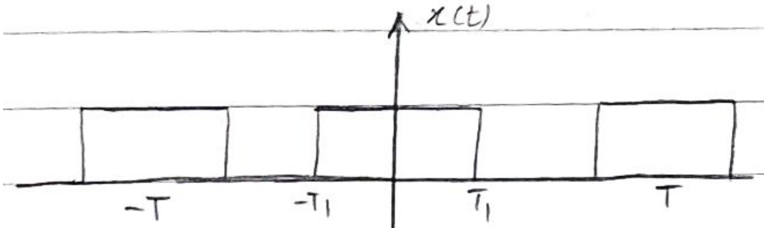
$x(t) \xleftrightarrow{fs} e_k$

$d_k = (jk\omega_0) e_k$

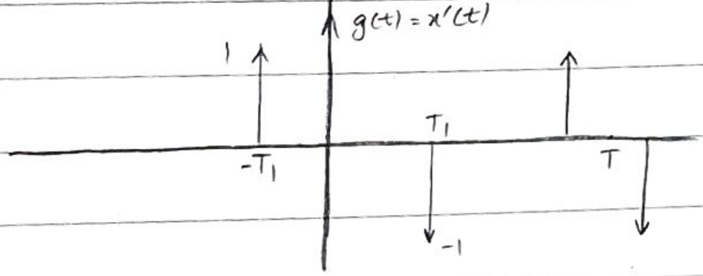
$k \neq 0 \qquad e_k = \frac{1}{jk\omega_0} d_k$

$e_0 = \frac{1}{4} \frac{1 \times 4}{2} = 1/2$

مثال) بدست آوردن ضرایب سری فوریه پالس مستطیلی از روی سری فوریه قطار ضربه



$$g(t) = s(t+T_1) - s(t-T_1)$$



$$x(t) \xleftrightarrow{fs} a_k$$

$$g(t) \xleftrightarrow{fs} b_k$$

$$s(t) \xleftrightarrow{fs} c_k = \frac{1}{T}$$

$$b_k = c_k e^{jk\omega_0 T_1} - c_k e^{-jk\omega_0 T_1} = c_k\left(2j\sin(k\omega_0 T_1)\right) = \frac{1}{T}\left(2j\sin(k\omega_0 T_1)\right)$$

$$b_k = (jk\omega_0)a_k \Rightarrow a_k = \frac{1}{j\omega_0 k} b_k \qquad k \neq 0$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{jk\omega_0 T} 2j\sin(k\omega_0 T_1) = \frac{2T_1}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{2kT_1}{T}\right)$$

مثال)

1) $x(t)$ حقیقی است

2) $x(t)$ با دوره تناوب $T=4$ متناوب و ضرایب سری فوریه آن b_k است

3) برای $|k|>1$ $a_k = 0$

4) سیگنال دارای ضرایب سری فوریه $b_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_{-k}$ فرد است

5) $\frac{1}{4}\int_4 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$ $x(t)$ را بیابید

ابتدا از خاصیت (3) می‌یابیم که فقط a_{-1} و a_0 و a_1 داریم

(1): $x(t) = a_0 + 2\operatorname{Re}\{a_1 e^{j\frac{\pi}{2}t}\}$ $\quad T = 4 \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

(4): $x(t) \xrightarrow{fs} a_k \quad x(-t) \xrightarrow{fs} a_{-k} \quad x(-(t-1)) \xrightarrow{fs} e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_{-k}$

$x(-(t-1))$ فرد و حقیقی است پس b_k فرد و موهومی خالص

پس $b_0=\phi$ و با جایگذاری در $b_k = e^{-jk\pi/2} a_{-k}$ ، $a_0=\phi$

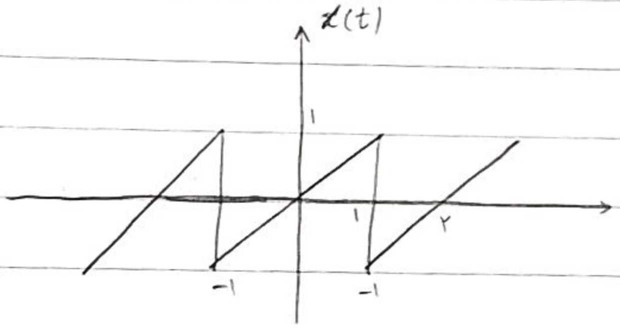
از طرفی $b_1=-b_{-1}$ پس $e^{-j\pi/2}a_{-1} = -e^{j\pi/2}a_1$ پس $a_1=a_{-1}$

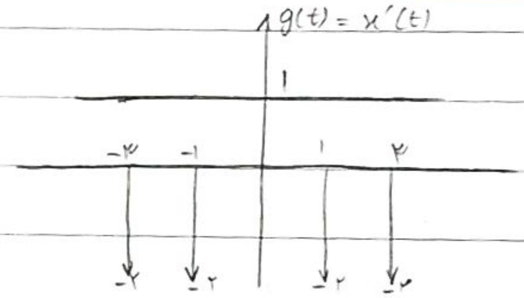
$$\frac{1}{4}\int_4 |x(t)|^2 dt = a_0^2 + a_1^2 + a_{-1}^2 \Rightarrow 2a_1^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = \pm \frac{1}{2}$$ ۵

$$x(t) = a_0 + 2Re\{a_1 e^{j\pi/2 t}\} \Rightarrow x(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t)$$

$$-\cos(\pi/2\, t)$$

درست





شکل ۱

$g(t) = 1 + \underbrace{z(t)}_{\text{قطار ضربه}}$

$z(t) = -2\,s(t-1)$

$s(t) \xleftrightarrow{fs} 1/2 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$z(t) \xleftrightarrow{fs} b_k$

$b_k = -2e^{-j\pi k} \times 1/2 = -e^{-j\pi k} = -(-1)^k$

$x(t) \xleftrightarrow{fs} d_k$

$d_k\, jk\omega_0 = b_k \qquad k \neq 0$

$\Rightarrow d_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{-(-1)^k}{jk\omega_0} \qquad k \neq 0$

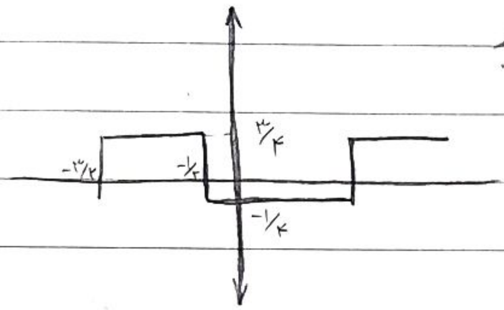
$d_0 = \phi$

مثال) $x(t)$ متناوب است با دوره تناوب $T=4$ ضرایب سری فوریه به صورت زیر است:

$$a_k = \begin{cases} 0 \\ j^k \dfrac{\sin(k\pi/4)}{k\pi} & k \neq 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}k} \quad \frac{1}{4}\,\text{sinc}\left(\frac{k}{4}\right) & T_1 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

مطلوب است بررسی $x(t)$

یک واحد به چپ شیفت می‌خورد سپس به اندازه $\frac{1}{4}$ پایین می‌آید



سری فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان

$$x[n] = x[n+N] \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

N تا هارمونیک داریم $\quad \phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \phi_k[n]$

یافتن a_k ها از روی $x[n]$

$$\left.\begin{aligned} n=0 \quad & x[0] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \\ n=1 \quad & x[1] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \\ & \vdots \\ n=N-1 \quad & x[N-1] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)(N-1)} \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

حل دستگاه N معادله N مجهول

در مسئله‌ی ۳ - ۳۲

یافتن a_k به کمک روش مشابه پیوسته در زمان:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad (*)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{jm\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \begin{cases} 1 & m = \text{مضارب } N \\ 0 & m \neq \text{مضرب } N \end{cases}$$

دو طرف رابطه‌ی (*) را در $e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n}$ ضرب می‌کنیم

$$x[n]\, e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j(k-r)(\frac{2\pi}{N})n}$$

از طرفین $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}$ می‌گیریم:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-r)(\frac{2\pi}{N})n}\right)$$

$$(k=r) \Rightarrow a_r = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n}$$

سنتز: $$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

آنالیز: $$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

مثال) ضرایب سری فوریه $x[n] = \sin \omega_0 n$

ضرایب سری فوریه فقط برای سیگنال متناوب مطرح می‌شود پس شرط تناوب $\frac{M}{N} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ = گویا باید برقرار باشد پس $\omega_0 = 2\pi \frac{M}{N}$

برای ساده کردن $x[n]$: $x[n] = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi M}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi M}{N}n}\right)$

در این سیگنال کدام ضرایب حضور دارند؟ a_{-M} و a_M

$a_M = \frac{1}{2j}$ / $a_{-M} = -\frac{1}{2j}$

$$x[n] \xleftrightarrow{fs} a_k$$

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{fs} a_k\left(1 - e^{-j(\frac{2\pi}{N})}\right)$$

$$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]}_{y[n]} \xleftrightarrow{fs} \frac{a_k}{1 - e^{-j(\frac{2\pi}{N})}}$$

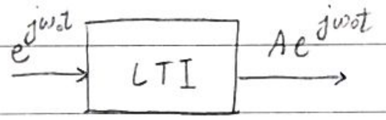
$: b_k \Leftarrow y[n] - y[n-1] = x[n]$

$\downarrow b_k \quad \downarrow b_k e^{-j(\frac{2\pi}{N})} \quad \downarrow a_k$

انبساط زمانی (خاصیتی در حالت گسسته در زمان)

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & m \text{ مضرب } = n \\ 0 & m \text{ مضرب } \neq n \end{cases} \quad \xleftrightarrow{fs} \quad \frac{1}{m} a_k$$

سری فوریه و سیستم‌های LTI



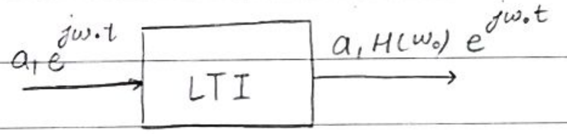
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

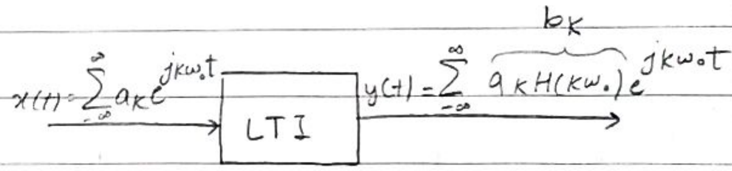
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, e^{j\omega t}\, d\tau$$

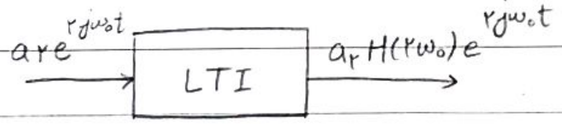
$$= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-(j\omega\tau)}\, d\tau\right)}_{A} e^{j\omega t}$$

A را به عنوان تابعی از ω معرفی می‌کنیم : $H(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \xrightarrow{\text{در حالت گسسته}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$

↳ LTI پاسخ فرکانسی سیستم (گین در فرکانس ω)







مثال) سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n] = \alpha^n u[n]$ ($-1<\alpha<1$) در نظر بگیرید فرض کنید ورودی به صورت $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ است. خروجی را تعیین کنید

باید ضرایب سری فوریه ورودی را با پاسخ سیستم به LTI بدهیم و ضرایب سری فوریه خروجی را بدست آوریم

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) \qquad \begin{cases} a_1 = 1/2 \\ a_{-1} = 1/2 \end{cases}$$

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n]\, e^{-j\omega n} = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

پس ضریب سری فوریه خروجی بدست خواهد آمد :

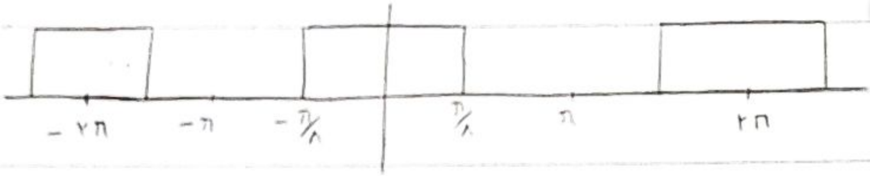
$$y[n] = \frac{1}{2} H\left(j\frac{2\pi}{N}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} H\left(\boxed{-j\frac{2\pi}{N}}\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}}\right)}_{b_1} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}}\right)}_{b_{-1}} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

مثال) پاسخ فرکانسی سیستم LTI گسسته در زمان عبارت است از

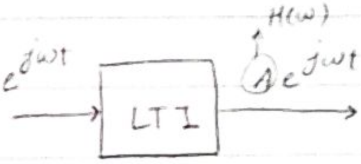
$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \frac{\pi}{8} \\ 0 & \frac{\pi}{8} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

هر 2π تکرار می شود



اگر ورودی $x[n]$ دارای دوره تناوب $N=3$ باشد خروجی چند ضریب سری فوریه غیر صفر دارد ؟

برای اینکه غیر صفر باشد باید $a_k H\left(k\frac{2\pi}{N}\right)$ غیر صفر باشد پس $-\frac{\pi}{8} < \frac{2\pi}{N} < \frac{\pi}{8}$ که فقط $k=0$ موجود است یعنی فقط یک ضریب وجود دارد



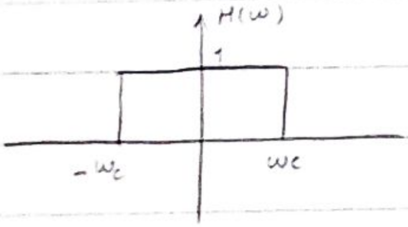
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t) = \sum \underbrace{a_k H(k\omega_0)}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}$$

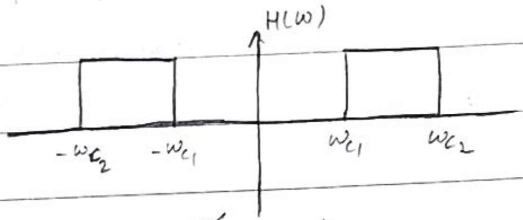
$$H(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

فیلترینگ :

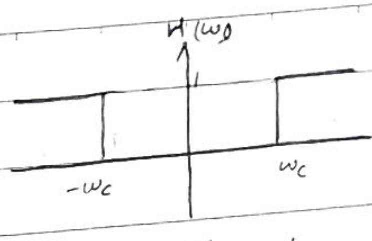
فیلتر های ایده آل



فیلتر پایین گذر یعنی سیگنال های با فرکانس پایین را عبور می دهد

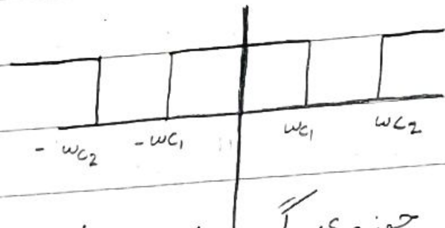


فیلتر میان گذر



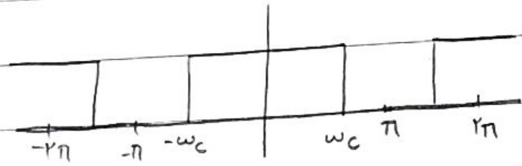
فیلتر بالاگذر

فیلتر میان نگذر



حوزه‌ی گسسته در زمان :

$$H(\omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

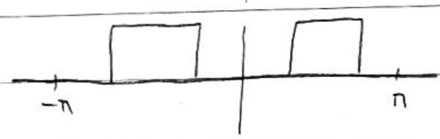


فرکانس‌های صفر و 2π فرکانس‌های پایین هستند

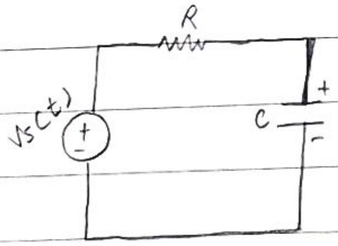
پس فیلتر پایین گذر است

بالاگذر

میان گذر



مثال)



$$RC\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_s(t)$$

می‌خواهیم $H(\omega)$ را بدست بیاوریم

به ورودی $e^{j\omega t}$ می‌دهیم

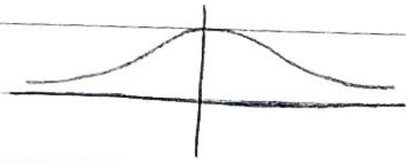
$$RC\, j\omega H(\omega) e^{j\omega t} + H(\omega) e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{RCj\omega + 1}$$

حالا می‌خواهیم ببینیم $H(\omega)$ چه فیلتری است

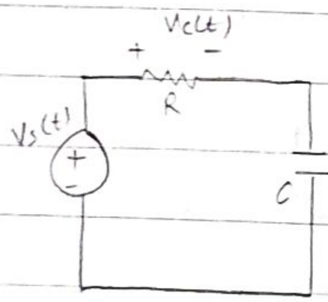
باید اندازه $H(\omega)$ را بدست بیاوریم تا دامنه را داشته باشیم

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RCj\omega)^2}}$$



فیلتر پایین گذر غیرایده‌آل چون بخشی از سیگنال‌های بالا را هم عبور می‌دهد

فیلتر بالاگذر غیر ایده آل:



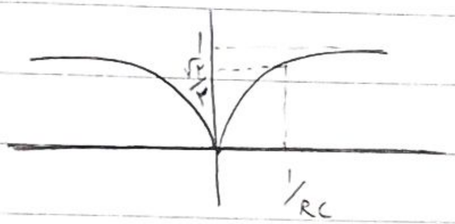
$e^{j\omega t} \longrightarrow V_s(t)$

$G(\omega)\, e^{j\omega t} \longrightarrow V_r(t)$

$$G(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \xrightarrow{\text{اندازه}} |G(\omega)| = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RCj\omega)^2}}$$

کافیست مقدار در فرکانس صفر و π را بررسی کنیم و مقدار $|G(\omega)|$ را بدست بیاوریم تا نوع فیلتر را بیابیم

برای حوزه ی پیوسته در زمان باید فرکانس صفر و بی نهایت را بررسی کنیم



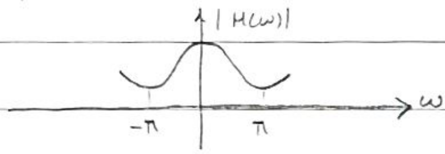
مثال) $y[n] - a\,y[n-1] = x[n]$: $\quad 0 < a < 1$

پاسخ فرکانسی این سیستم چه نوع فیلتری است؟

باید $e^{j\omega t}$ بدهیم تا در پاسخ سیستم $H(\omega)$ داشته باشیم

$$H(\omega)\, e^{j\omega n} - a H(\omega)\, e^{j\omega(n-1)} = e^{j\omega n}$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \xrightarrow{\text{صفر و } \pi \text{ را امتحان کنیم}} \text{فیلتر پایین گذر}$$

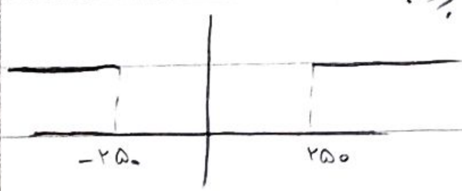


مثال) یک سیستم زمان پیوسته ی LTI با پاسخ فرکانسی زیر را در نظر بگیرید

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| > 250 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

اگر ورودی $x(t)$ با دوره تناوب $T = \frac{\pi}{7}$ و ضرایب سری فوریه ی a_k به این سیستم اعمال می کنیم. $y(t)$ دقیقاً همان $x(t)$ خواهد بود. برای چه مقادیری از K، $a_k = 0$ خواهد بود؟

$H(\omega)$ فیلتر بالاگذر است



$x(t) = \sum a_k e^{jk\omega t}$ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{\pi/7} = 14$

$\Rightarrow x(t) = \sum a_k e^{j14kt}$

پس $-250 < 14K < 250$ پس $-17 \le K \le 17$

مثال) اطلاعات زیر در مورد $x[n]$ داده شده است:

1) $x[n]$ متناوب با دوره تناوب $N=6$ است

2) $\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2$

3) $\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x[n] = 1$

4) $x[n]$ کمترین توان متوسط در طول یک دوره تناوب را دارد

$x[n]$ را بیابید

$\omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \pi/3$

② $a_0 = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} x[n] = 1/6 \times 2 = 1/3$

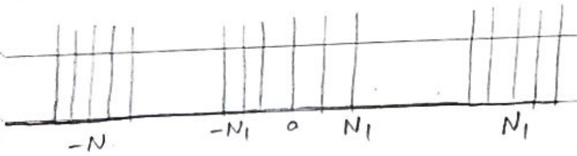
③ $\sum_{\langle N \rangle} \underset{e^{-j\pi n}}{(-1)^n} x[n] \Rightarrow a_3 = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} e^{-j\pi n} x[n] = 1/6$

④ چون کمترین توان متوسط را دارد پس $a_1, a_2, a_4, a_5 = 0$ بقیه ی ضرایب

پس $x[n] = a_0 + a_3 e^{j\pi n}$

$= 1/3 + 1/6 e^{j\pi n} = 1/3 + 1/6(-1)^n$

مثال) ضرایب سری فوریه ی سیگنال متناوب زیر را بدست آورید



$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{n=N_1} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$

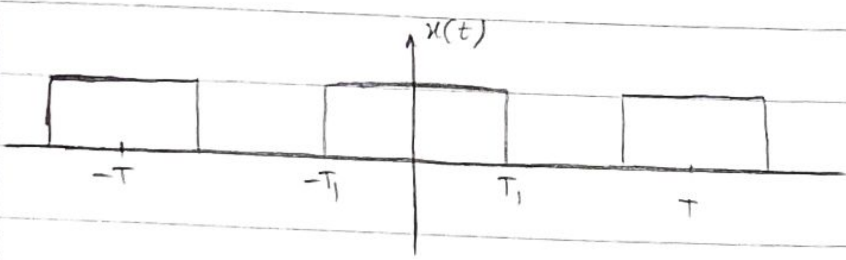
تغییر متغیر $n = m - N_1$ را اعمال می کنیم

$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(\frac{2\pi}{N})(m-N_1)}$

$= \frac{1}{N} e^{jk(\frac{2\pi}{N})N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(\frac{2\pi}{N})m}$

$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} x[n] = \frac{2N_1+1}{N}$

فصل چهارم (تبدیل فوریه) سیگنال های غیر متناوب



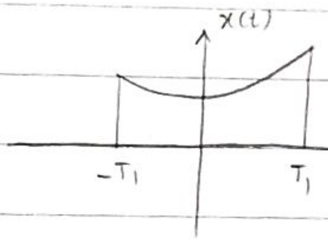
$$a_k = \frac{2T_1}{T}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{2kT_1}{T}\right)$$

$$Ta_k = 2T_1\,\frac{\sin\left(\pi k\,2T_1/T\right)}{k\pi\,2T_1/T} = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0}$$

$$\Rightarrow Ta_k = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\Bigg|_{\omega = k\omega_0}$$

اگر $T\to\infty$ آنگاه شکل چهارگوش متناوب به پالس مستطیلی غیر متناوب تبدیل می شود

Ta_k هم وقتی $T\to\infty$ به شکل sinc پیوسته نزدیک می شوند

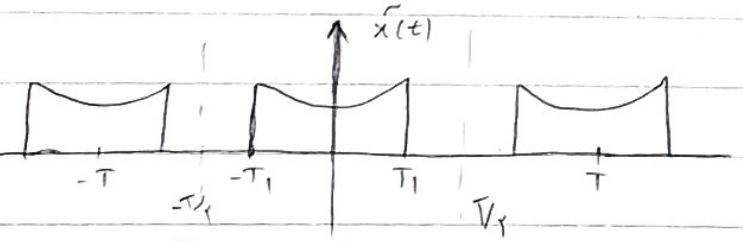


یک سیگنال نامتناوب $x(t)$ را درنظر بگیرید:

این سیگنال را متناوب می کنیم سپس T را به بی نهایت میل می دهیم

تا شکل نامتناوب مورد نظر تنها به دست بیاید و سپس برای آن سری فوریه بدست بیاوریم

$\tilde{x}(t)$ را رسم می کنیم:



$$\lim_{T\to\infty} \tilde{x}(t) = x(t)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

در بازه ی انتگرال با هم برابرند

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

در بقیه نقاط صفر است پس با $T/2$ تا $-T/2$ برابر است

$$Ta_k \triangleq X(jk\omega_0) \quad (1)$$

$$X(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$F\{x(t)\}$

$$X(j\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}_{\text{تبدیل فوریه}}$$

اگر $\omega = k\omega_0$ آنگاه

عکس تبدیل فوریه :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

$T \to \infty \Rightarrow \omega_0 \to 0$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

عکس تبدیل فوریه

نکات :

۱) در تبدیل فوریه از همه ی فرکانس ها در ساختن سیگنال مشارکت کرده است

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$ (عکس تبدیل فوریه)

در تبدیل فوریه هر فرکانسی را می توانیم داشته باشیم

$$x(t) \text{ متناوب} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

اما در سری فوریه فرکانس ها حتماً ضرایب فرکانس پایه اند

۲) $X(j\omega)$ را طیف سیگنال $x(t)$ نیز نامیم

همگرایی :

آیا $\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$ همان $x(t)$ است؟

همگرایی با معیار $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2\, dt$ شرط کافی : $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty$

همگرایی با معیار $\hat{x}(t) = \frac{x(t^+) - x(t^-)}{2}$ شرط کافی : شرایط دیریکله

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

شرایط دیریکله ← تعداد نقاط ناپیوستگی در یک فاصله متناهی متناهی باشد و اندازه ناپیوستگی هم متناهی باشد

تعداد max و min های نسبی در یک فاصله‌ی متناهی، متناهی باشد

مثال) تبدیل فوریه $x(t) = e^{-at} u(t)$ $\quad a>0$

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t}\, dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} \quad a>0$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \qquad \measuredangle X(j\omega) = \underset{\text{از صورت}}{0} - tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

مثال) تبدیل فوریه $x(t) = e^{-at} u(t)$ $\quad a<0$

هنگام محاسبه‌ی انتگرال $e^{+\infty}$ خواهیم داشت پس همگرا نخواهد بود و نمی‌توانیم تبدیل فوریه داشته باشیم

مثال) $x(t) = e^{-a|t|}$ $\quad a>0$

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t}\, dt + \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

به خاطر قرینه کردن بازه‌ی انتگرال

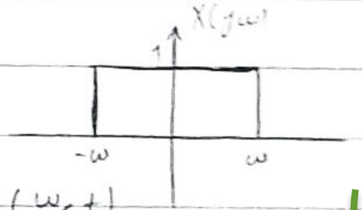
مثال) تبدیل فوریه‌ی پالس مستطیلی

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |x| < T_1 \\ 0 & |x| > T_1 \end{cases} \qquad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = 2T_1 \,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\omega T_1}{\pi} k\pi\right)}{k\pi}$$

مثال)



$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{\sin \omega t}{\pi t} = \frac{\omega}{\pi} \mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} t\right)$$

خواص تبدیل فوریه :

۱) خطی بودن

$$x(t) \xleftrightarrow{f} X(j\omega)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{f} Y(j\omega)$$

$$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{f} aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

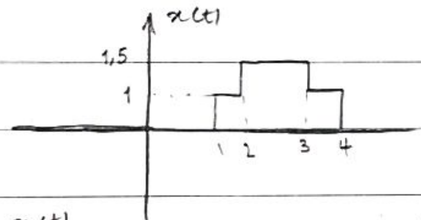
۲) جابجایی زمانی :

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{f} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

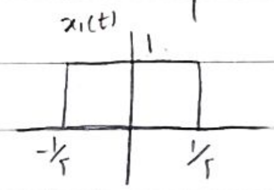
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

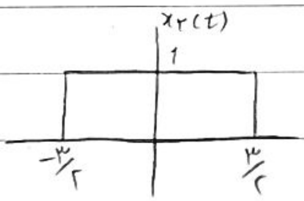
$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(X(j\omega) e^{-j\omega t_0}\right) e^{j\omega t}\, d\omega$$

مثال) تبدیل فوریه $x(t)$ را بیابید



بر دو پالس مستطیلی می شکنند





$$x(t) = \frac{1}{2} x_1\left(t - \frac{5}{2}\right) + x_2\left(t - \frac{5}{2}\right)$$

$$X_1(j\omega) = \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$$

$$X_2(j\omega) = \frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega} \Rightarrow X(j\omega) = e^{-\frac{5}{2}j\omega}\left[\frac{1}{2}\,\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega} + \frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega}\right]$$

۳)

$$x(t) \xleftrightarrow{f} X(j\omega)$$

$$x^*(t) \xleftrightarrow{f} X^*(-j\omega)$$

$\xrightarrow{\text{اثبات}}$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t}\, dt$$

ω را قرینه می کنیم

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

برای سیگنال های حقیقی:

$x(t) = x^*(t) \Rightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega) \Rightarrow X(-j\omega) = X^*(j\omega)$

برای سیگنال های حقیقی قسمت حقیقی (Re) تابع تبدیل فوریه زوج است

" " " " موهومی (Im) " " فرد است

$X^*(j\omega) = Re\{X(j\omega)\} - j\,Im\{X(j\omega)\}$

$X(-j\omega) = Re\{X(-j\omega)\} + j\,Im\{X(-j\omega)\}$

$\Rightarrow Re\{X(j\omega)\} = Re\{X(-j\omega)\}$

$Im\{X(-j\omega)\} = -Im\{X(j\omega)\}$

برای سیگنال حقیقی، دامنه تابع تبدیل فوریه زوج است $|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$

" ، فاز تابع تبدیل فوریه فرد است " $\measuredangle X(-j\omega) = -\measuredangle X(j\omega)$

$X(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j\measuredangle X(j\omega)}$

$X^*(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{-j\measuredangle X(j\omega)}$

$X(-j\omega) = |X(-j\omega)|\, e^{j\measuredangle X(-j\omega)}$ $\qquad X^*(j\omega) = X(-j\omega)$

نکته: برای سیگنال حقیقی کافی است تبدیل فوریه را برای فرکانس های مثبت می‌یابیم برای فرکانس های منفی از روابط گفته شده استفاده می‌کنیم

④ $x(t) \xleftrightarrow{f} X(j\omega)$

$x(-t) \xleftrightarrow{f} X(-j\omega)$

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\omega t}\, dt$

$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

نکته: اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد آنگاه $X(j\omega)$ نیز حقیقی و زوج خواهد بود

$x(t) = x(-t) \Rightarrow X(j\omega) = X(-j\omega)$

حقیقی $x(t) \Rightarrow X^*(j\omega) = X(-j\omega)$

$\Rightarrow X(j\omega) = X^*(j\omega)$

نکته: اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد $\Leftarrow$ $X(j\omega)$ نیز موهومی خالص و فرد است

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$
$$x_e(t) = \tfrac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big)$$
$$x_o(t) = \tfrac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big)$$

$$\Rightarrow \quad x_e(t) \xleftrightarrow{f} Re\{X(j\omega)\}$$
$$x_o(t) \xleftrightarrow{f} j\,Im\{X(j\omega)\}$$

تبدیل های فوریه

$$X(j\omega) = \boxed{X_e(j\omega)} + \boxed{X_o(j\omega)}$$
$$X(j\omega) = \boxed{Re\{X(j\omega)\}} + j\,\boxed{Im\{X(j\omega)\}}$$

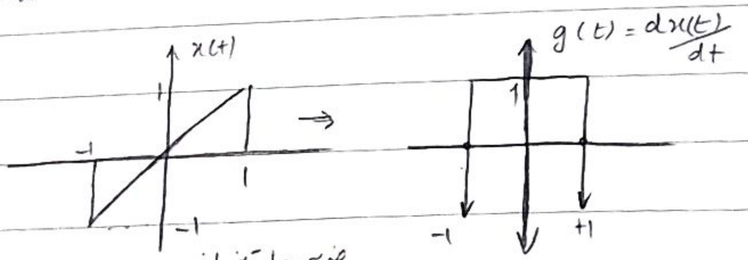
مثال: تبدیل فوریه $x(t)=e^{-a|t|}$ را می‌خواهیم به طریق ساده‌تر بدست آوریم

$$e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = 2\,Even\{e^{-at}u(t)\}$$
$$2\,Ev\{e^{-at}u(t)\} \xleftrightarrow{f} 2\,Re\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

۵) مشتق و انتگرال:

$$x(t) \xleftrightarrow{f} X(j\omega)$$
$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{f} j\omega X(j\omega)$$
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{f} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

مثال) تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید



تبدیل فوریه تابع $\delta(t)$ یک می‌شود

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt = e^{0} = 1$$

$$G(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega} \underbrace{- e^{-j\omega}}_{\text{راستی}} \underbrace{- e^{j\omega}}_{\text{چپی}} = \frac{2\sin\omega}{\omega} - 2\cos\omega$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}G(j\omega) + \pi G(0)\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega}\left(\frac{2\sin\omega}{\omega} - 2\cos\omega\right) + \pi \times 0 \times \delta(\omega)$$

مثال) تبدیل فوریه $u(t)$ را از روی $\delta(t)$ محاسبه کنید

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau$$

$$U(j\omega)=\frac{1}{j\omega}\underset{1}{\Delta(j\omega)}+\pi\overset{1}{\Delta(0)}\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

(6)

$$x(t)\xleftrightarrow{f}X(j\omega)$$

$$x(at)\xleftrightarrow{f}\frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

$$F\{x(at)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(at)e^{-j\omega t}dt$$

$z=at$, $a>0$: $$=\int_{-\infty}^{\infty}x(z)e^{-j\omega(z/a)}\,dz/a$$

$a<0$: $$=\int_{-\infty}^{\infty}x(z)e^{-j\omega(z/a)}\,dz/a$$

اگر $a>1$ سیگنال در حوزه‌ی زمان جمع می‌شود و در حوزه‌ی فرکانس باز می‌شود

$a<1$ " باز " جمع "

(7) دوگانی (duality)

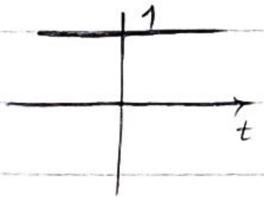
$$f(t)\xrightarrow{F}g(\omega)$$

$$g(t)\xrightarrow{F}2\pi f(-\omega)$$

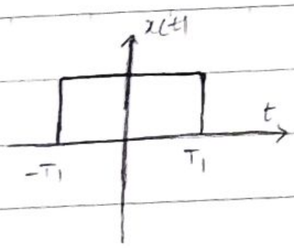
$g(\omega)$ جای ω در t می‌گذاریم

مثال)

$\delta(t)\xrightarrow{F}$ 

 $\xrightarrow{F}$ $2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega)$

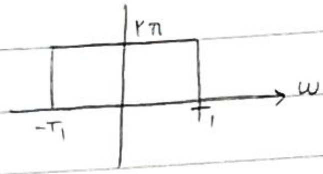
مثال)



$\xrightarrow{F} \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$

$\frac{2\sin tT_1}{2\pi t} = \frac{\sin(tT_1)}{T_1 t}$

$\frac{2\sin(tT_1)}{t} \xrightarrow{F}$



مثال) تبدیل فوریه $g(t) = \frac{2}{1+t^2}$

$e^{-a|t|} \xrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

$e^{-|t|} \xrightarrow{F} \frac{2}{1+\omega^2}$

$\frac{2}{1+t^2} \xrightarrow{F} 2\pi e^{-|\omega|}$

چند خاصیت دیگر که با دوگانگی اثبات می‌شوند :

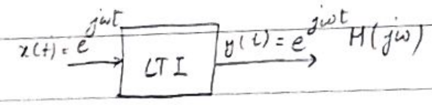
a) $-jt\,x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

b) $e^{j\omega_0 t}x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j(\omega-\omega_0))$

c) $\frac{-1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta)\,d\eta$

۸) کانولوشن :

$x(t) * h(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega)H(j\omega)$



$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(j\omega)H(j\omega)}_{Y(j\omega)} e^{j\omega t}\,d\omega$

توصیف سیستم :

حوزه زمان $\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$ $\qquad y(t) = x(t) * h(t)$

حوزه فرکانس $\xrightarrow{X(j\omega)} \boxed{H(j\omega)} \xrightarrow{} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

توصیف سیستم در حوزه ی زمان همیشه وجود دارد اما در حوزه ی فرکانس ، تبدیل فوریه ها حتماً باید وجود داشته باشند

9 رابطه ی پارسوال :

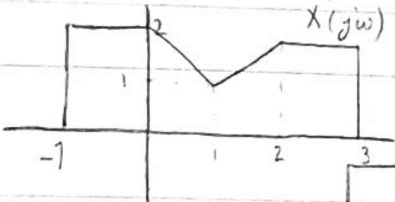
تبدیل انرژی در دو حوزه ی زمان و فرکانس !

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

اثبات :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^* x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega\right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt\right]}_{X(j\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$



مثال) $x(t)$ به صورت زیر داده شده است

الف) $\measuredangle X(j\omega)$

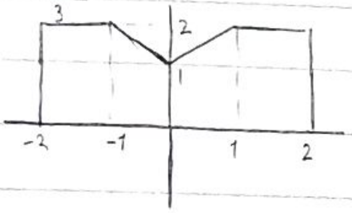
ب) $X(j0)$

ج) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, d\omega$

د) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$

هـ) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

و) عکس تبدیل فوریه $Re\{X(j\omega)\}$ را رسم کنید



$y(t) = x(t+1)$

$y(t)$ حقیقی و زوج $\Longrightarrow$ $Y(j\omega)$ حقیقی و زوج

$\measuredangle Y(j\omega) = 0$

$Y(j\omega) = X(j\omega)e^{j\omega}$

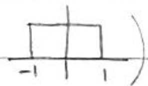
$\measuredangle X(j\omega) = -\omega \Longleftarrow \measuredangle Y(j\omega) = \measuredangle X(j\omega) + \omega$

ب) $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = ۴\times۲-۱ = ۷$

ج) $x(t)=\frac{1}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,e^{+j\omega t}\,d\omega \xrightarrow[\text{در بیاوریم}]{\text{باید این شکل}} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,d\omega = ۲\pi\, x(0) = ۴\pi$

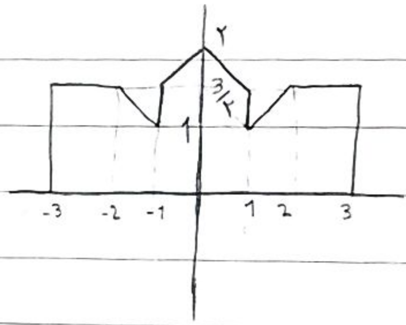
د) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j)\underbrace{\frac{۲\sin\omega}{\omega}}_{Y(j\omega)} e^{j۲\omega}\,d\omega = ۲\pi\, y(۲) = ۲\pi \times ۷/۲$

ضرب در حوزه‌ی فرکانس همان کانولوشن است در حوزه‌ی زمان

$y(t)=\Big(x(t) *$  $\Big)_{t=۲}$

$y(۲) = ۱\times۲ + \frac{(۱+۲)}{۲} = ۷/۲$

ه) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^۲\,d\omega = ۲\pi\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^۲\,dt$



و) $Re\{X(j\omega)\} \overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} Ev\{x(t)\} = ۱/۲\,(x(t)+x(-t))$

۱۵) ضرب یا مدلاسیون

$x(t)*y(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)\,Y(j\omega)$

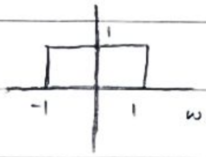
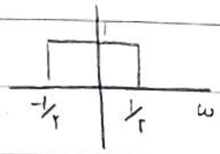
$x(t) \xrightarrow[F]{F} X(j\omega)$

$y(t) \longrightarrow Y(j\omega)$

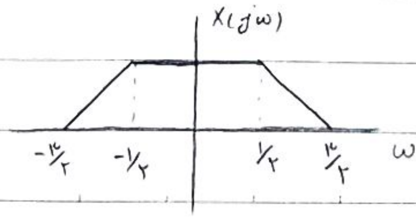
$x(t)\,y(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{۲\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$

مثال) تبدیل فوریه زیر را بیابید:

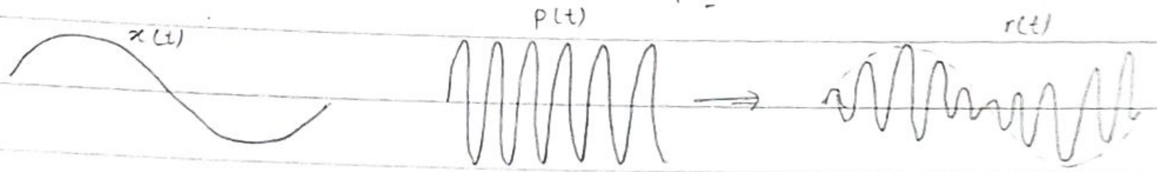
$x(t)=\frac{\sin(t)\sin(t/۲)}{\pi t^۲} = \left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)\pi\left(\frac{\sin(t/۲)}{\pi t}\right)$

$\frac{1}{۲\pi}\Big($  $*$  $\Big)$

$X(j\omega) =$



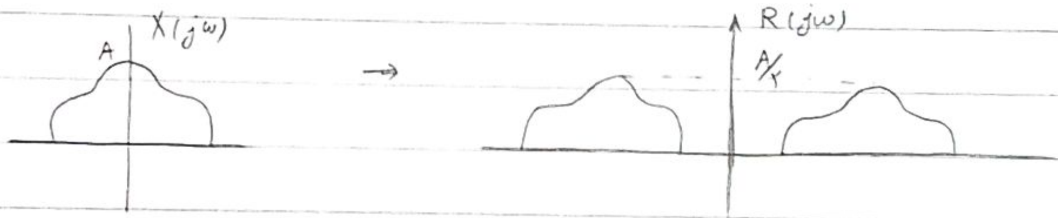
مثال) $p(t)=\cos\omega_0 t$ می‌خواهیم ببینیم برای $r(t)=x(t)p(t)$ چه اتفاقی می‌افتد



تبدیل فوریه $p(t)=\cos\omega_0 t$

$$F\{\cos\omega_0 t\} = \tfrac{1}{2}\left(2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)\right) = \pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

$$F(r(t)) = R(j\omega) = X(j\omega) * P(j\omega)\,\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \left(\pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi\,\delta(\omega+\omega_0)\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega+\omega_0))\right)$$



مثال) مطلوب است محاسبه کانولوشن دو سیگنال زیر:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-bt}u(t) & b>0 \\ h(t) = e^{-at}u(t) & a>0 \end{cases}$$

حالت اول $a\neq b$

$$x(t) * h(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{b+j\omega}\,\frac{1}{a+j\omega} \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{A}{b+j\omega} + \frac{B}{a+j\omega}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{a-b} \qquad B = \frac{1}{b-a} \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b+j\omega}\right) + \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{a-b}e^{-bt}u(t) + \frac{1}{b-a}e^{-at}u(t)$$

حالت دوم $a=b$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2} = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)$$

$$t\,x(t) \xrightarrow{F} j\frac{d}{d\omega}X(j\omega) \qquad \Rightarrow y(t) = te^{-at}u(t)$$

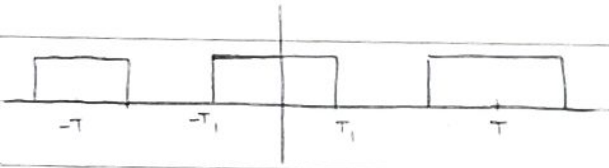
تبدیل فوریه سیگنال های متناوب :

فرض کنید $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\omega - k\omega_0)$$

مثال) تبدیل فوریه سیگنال زیر ؟



حواسمان باشد که سیگنال متناوب است و تبدیل فوریه برابر $\cancel{\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}}$ نمی‌شود

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k}$$

$$X(j\omega) = 2\pi \sum \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k}\,\delta(\omega - k\omega_0)$$

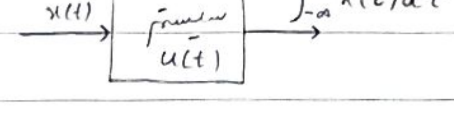
مثال) برای $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ تبدیل فوریه را حساب کنید

$$= \frac{1}{2j}\Big(\underset{a_{k=1}}{\overset{k=1}{e^{j\omega_0 t}}} - \underset{a_{k=-1}}{\overset{k=-1}{e^{-j\omega_0 t}}}\Big)$$

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j}\big(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\big)$$

اثبات خاصیت پنجم :

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xrightarrow{F} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\,\delta(\omega)$$



$$y(t) = x(t) * u(t)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\,U(j\omega)$$

$$U(j\omega) \rightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

سیستم های توصیف شونده با معادلات دیفرانسیلی :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

در فصل سوم هدف اصلی بدست آوردن پاسخ فرکانسی بود

راه حل : $x(t) = e^{j\omega t} \longrightarrow y(t) = H(t) e^{j\omega t}$

در این فصل پاسخ را با استفاده از تبدیل فوریه می یابیم F

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

مثال) $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$ مطلوب است محاسبه ی پاسخ ضربه

$$F: \quad j\omega Y(j\omega) + aY(j\omega) = X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{a+j\omega} \begin{cases} \nearrow h(t) = e^{-at} u(t) & a<0 \\ \searrow h(t) = -e^{-at} u(-t) & a>0 \end{cases}$$

مثال) پاسخ ضربه ی سیستم LTI توصیف شونده با معادله دیفرانسیل زیر :

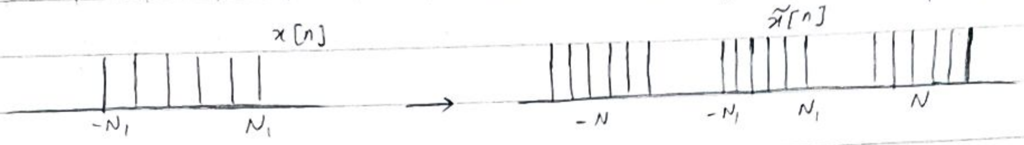
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

$$F: \quad (j\omega)^2 Y(j\omega) + 4(j\omega)Y(j\omega) + 3Y(j\omega) = j\omega X(j\omega) + 2X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)} = \frac{1/2}{j\omega+1} + \frac{1/2}{j\omega+3}$$

$$\Rightarrow h(t) = 1/2\, e^{-t} u(t) + 1/2\, e^{-3t} u(t)$$

فصل پنجم : تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان



سری را درست می‌آوریم سپس تبدیل فوریه را محاسبه می‌کنیم

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \qquad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$X(j\omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$ آنالیز تبدیل فوریه سیگنال گسسته

$$a_k = \frac{1}{N} X(jk\omega_0) \Rightarrow \tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 n} = \frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 n}\,\omega_0$$

$$N \to \infty \Rightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(j\omega) e^{j\omega n} d\omega$$ سنتز تبدیل فوریه معکوس

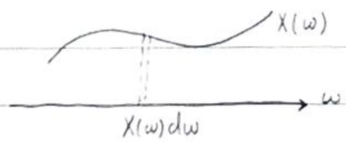
نکات :

۱) دوگانی نداریم $\quad x[n] \xrightarrow{F} g(\omega) \quad \cancel{X}$

دامنه‌ها متفاوت اند و یکی گسسته و یکی پیوسته است

۲) برای سیگنال متناوب $\quad a_k = \frac{1}{N} X(jk\omega_0)$

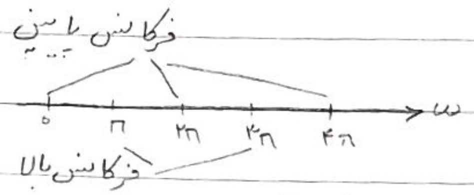
۳) مفهوم چگالی طیف



۴) تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان متناوب است

$$X(\omega + 2\pi) = X(\omega)$$

نکته :



نماد رایج برای تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان : $X(e^{j\omega})$

مثال) $x[n] = \delta[n]$

$$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1$$

مثال) $x[n] = a^n u[n]$ $\quad |a|<1$

$$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

مثال)

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| \geq N_1 \end{cases} \qquad X(j\omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin \omega (N_1 + 1/2)}{\sin \omega/2}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(j\omega) + \pi X(j0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$$

$$y[n] - y[n-1] = x[n]$$

$$Y(j\omega) - e^{-j\omega} Y(j\omega) = X(j\omega) \Rightarrow \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \quad \boxed{\omega \neq 0}$$

برای w صفر باید راه دیگری برویم

تبدیل فوریه سیگنال های متناوب :

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

$$X(j\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

طیف سیگنال متناوب باید قطار ضربه باشد

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

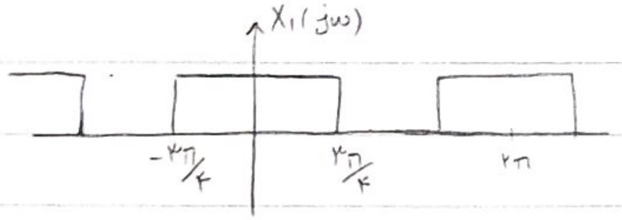
$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

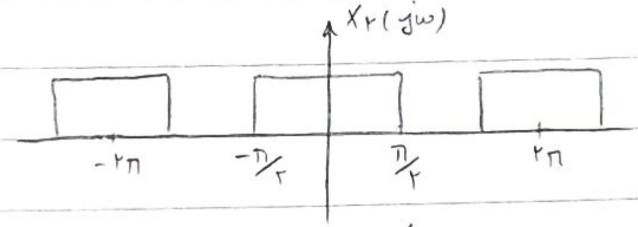
مثال) محاسبه‌ی تبدیل فوریه $x_1[n]x_2[n]$

$$x_1[n] = \frac{\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)}{\pi n}$$

ضرایب n ، در کلات آن نام دارند

$$x_2[n] = \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\pi n}$$



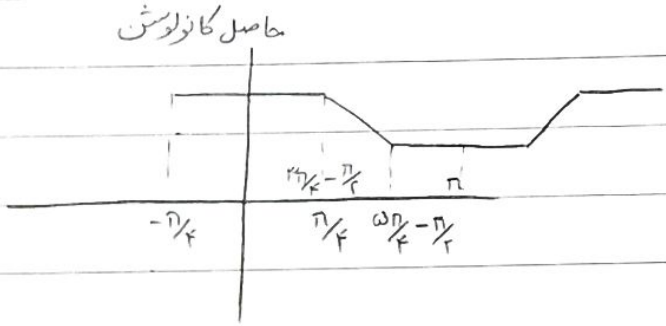


محاسبه‌ی کانولوشن پریودیک :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(j\theta)\, X_2(j(\omega-\theta))\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(j\theta)\, \hat{X}_2(j(\omega-\theta))\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\theta)\, \hat{X}_2(j(\omega-\theta))\, d\theta$$



سیستم های توصیف شونده با معادلات دیفرانس :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

روش حل اول :

$$e^{j\omega n} \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow H(\omega)e^{j\omega n}$$

روش دوم حل :

$$Y(\omega) = X(j\omega)\, H(\omega)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}\, Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}\, X(j\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی پاسخ ضربه سیستم زیر: ۱۵۱۲ ۱ $y[n] - ay[n-1] = x[n]$

$$Y(\omega) - ae^{-j\omega}Y(\omega) = X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \Rightarrow h[n] = a^n u[n]$$

مثال) مطلوب است پاسخ ضربه سیستم LTI توصیف شونده با معادله زیر:

$$y[n] - \tfrac{3}{4}y[n-1] + \tfrac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

باید ریشه‌های کسر را بدست بیاوریم

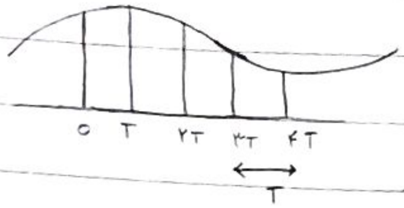
$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}} \xrightarrow{e^{-j\omega}=u} \frac{2}{1-\frac{3}{4}u+\frac{1}{8}u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}u)(1-\frac{1}{4}u)} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}u} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}u} \qquad A = 4 \quad B = -2$$

برای بدست آوردن A ، ریشه مخرج کسر A را در عبارت اصلی $\frac{2}{(1-\frac{1}{2}u)(1-\frac{1}{4}u)}$ می‌گذاریم

$$\Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}u} + \frac{-2}{1-\frac{1}{4}u} \Rightarrow h[n] = 4(\tfrac{1}{2})^n u[n] - 2(\tfrac{1}{4})^n u[n]$$

فصل هفتم : نمونه برداری



T را تا حد امکان باید کوچک باشد و نمونه ها به هم نزدیک باشند
یعنی فرکانس نمونه برداری باید زیاد باشد و اگر از یک حدی کمتر باشد
نمی توانیم سیگنال را به صورت پیوسته بدست بیاوریم

سیگنال اگر پیوسته باشد $\longrightarrow x(t)$

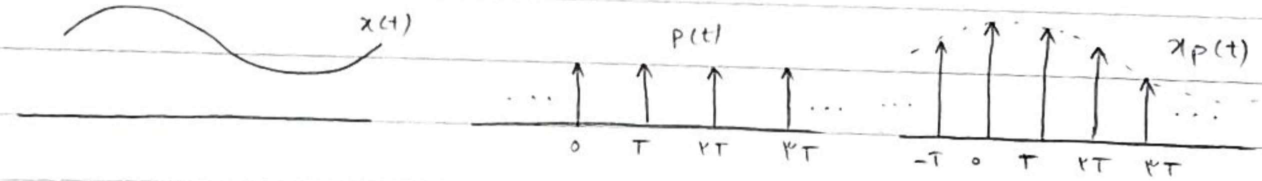
" گسسته باشد $\longrightarrow x[n] = nT$

$f_s = \frac{1}{T}$ فرکانس نمونه برداری

$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$ برحسب رادیان

سوال : آیا سیگنال پیوسته را می توان از روی نمونه های گسسته بازیابی کرد؟
تحت شرایطی تنها یک سیگنال پیوسته می توان از یک سری نمونه عبور داد
فرکانس نمونه برداری $\geq$ ۲ پهنای باند سیگنال (فرکانس سیگنال)

سیگنال $x(t)$ در اختیار است با تابع $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ می خواهیم نمونه برداری کنیم



$$x_p(t) = x(t)p(t) \Rightarrow x_p(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

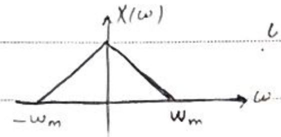
تبدیل فوریه $p(t)$ چون یک تابع متناوب است بصورت قطار ضربه است

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$$

$\frac{1}{T_0} = p(t)$ ضریب سری فوریه

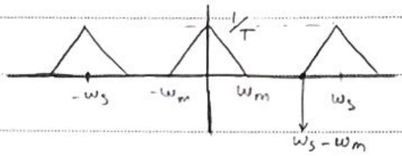
$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X(\omega) * P(\omega)\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

فرض می‌کنیم $X(\omega)$ برابر است با



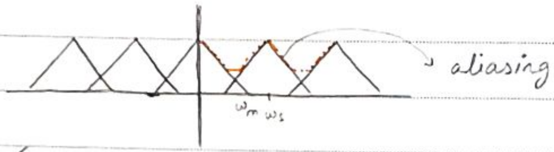
حالت اول

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

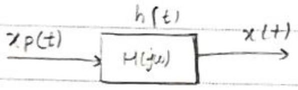


$\omega_s - \omega_m > \omega_m$

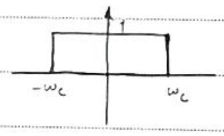
حالت دوم $\omega_s < 2\omega_m$



قضیه نمونه‌برداری نایکوئیست: اگر $\omega_s > 2\omega_m$ آنگاه نمونه‌های سیگنال، سیگنال را به طور یکتا مشخص می‌کند



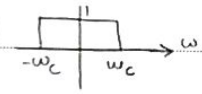
— $\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m$



$H(j\omega)$

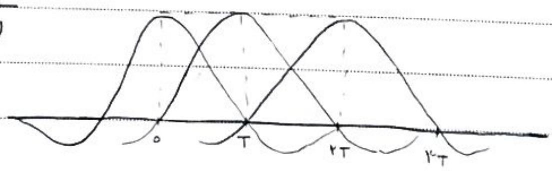
پس سیستم بازسازی شده داریم:

$$x_r(t) = h(t) * x_p(t)$$

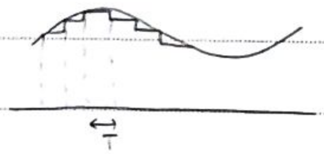
$h(t):\quad F^{-1}\{$  $\} = \dfrac{T\sin\omega_c t}{\pi t} = \dfrac{\omega_c T\sin\omega_c t}{\pi\omega_c t}$

$$x(t) = h(t) * x_p(t) = h(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,h(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\frac{\omega_c T}{\pi}\,\frac{\sin\omega_c(t-nT)}{\omega_c(t-nT)}$$

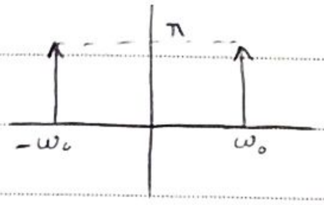


Year. Month. Data. Subject



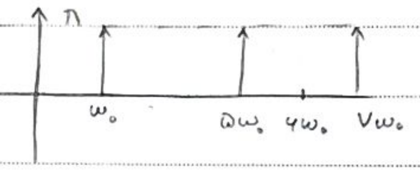
نمونه برداری zero order hold

با کلید نمونه برداری می‌کنیم



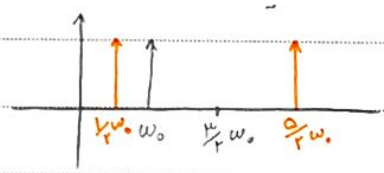
مثال) $x(t) = \cos\omega_0 t$

اگر ω_s را $4\omega_0$ بگیریم:



مشکلی نخواهیم داشت

اگر ω_s را $\frac{3}{2}\omega_0$ بگیریم:



aliasing رخ می‌دهد