

به نام خدا



دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر



سیگنال و سیستم

تمرین سری ۲

استاد: دکتر صدف صالح کلیبر

مهرماه ۱۳۹۶

سؤال ۱

سیگنال‌های پیوسته در زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= u(t) - u(t+1) \\x_2(t) &= -u(t-2) + u(t-3) \\x_3(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\y_1(t) &= \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases} \\y_2(t) &= \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ 2-t & 2 \leq t \leq 3 \\ t-4 & 3 \leq t \leq 4 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases} \\y_3(t) &= y_2(t) + y_1(t)\end{aligned}$$

الف) هر کدام از سیگنال‌ها را رسم کنید.

ب) سیستمی در نظر بگیرید که پاسخ آن به ورودی‌های $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ و $x_3(t)$ به ترتیب $y_1(t)$ ، $y_2(t)$ و $y_3(t)$ می‌باشد. با توجه به همین اطلاعات داده شده، با ارائه دلیل مشخص کنید که این سیستم کدام یک از مشخصه‌های زیر را می‌تواند داشته باشد.

الف) بدون حافظه

ب) علی

ج) خطی

د) متغیر با زمان

سؤال ۲

فرض کنید رابطه $y[n] - ay[n-1] = x[n]$ ($0 < a < 1$) بیانگر یک سیستم گسسته در زمان با شرط سکون ابتدایی است.

الف) ثابت کنید که پاسخ ضربه این سیستم برابر است با $h[n] = a^n u[n]$.

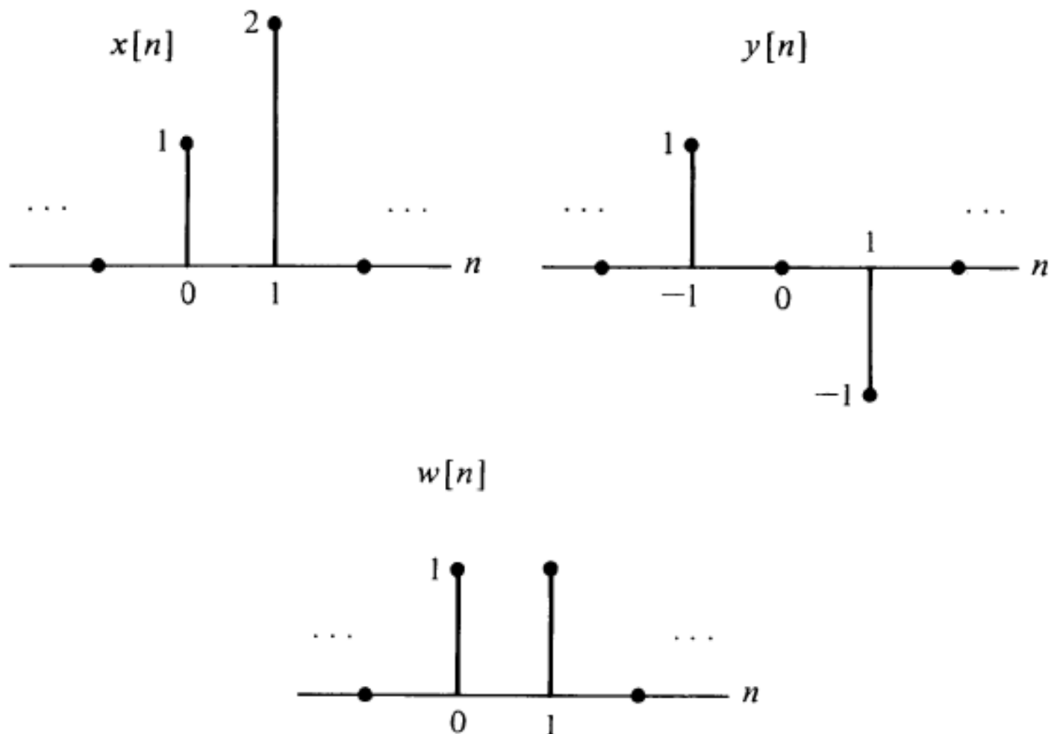
ب) با ارائه دلیل مشخص کنید که سیستم کدام یک از ویژگی‌های زیر را دارد:

بدون حافظه، علی، پایدار

ج) اگر $|a| > 1$ سیستم پایدار است یا نه؟

سؤال ۳

سیگنال‌های گسسته در زمان شکل زیر را در نظر بگیرید:



الف) خاصیت پخش‌کنندگی را ثابت کنید:

$$(x + w) * y = (x * y) + (w * y)$$

ب) با اینکه عملگر ضرب و کانولوشن شباهت هایی دارند اما معادل هم نمی باشند. ثابت کنید:

$$(x * w).y \neq x * (y.w)$$

سؤال ۴

الف) نشان دهید که عبارت زیر معادل با علیت یک سیستم برای یک سیستم خطی پیوسته زمان است:

برای هر زمان t_0 و هر ورودی $x(t)$ که برای $t < t_0$ و $x(t) = 0$ باشد، خروجی متناظر $y(t)$ نیز برای $t < t_0$ صفر است.

ب) یک سیستم غیر خطی چنان بیابید که در شرط فوق صدق کرده اما علی نباشد.

ج) یک سیستم غیر خطی چنان بیابید که علی باشد اما در شرط فوق صدق نکند.

د) نشان دهید که عبارت زیر معادل با معکوس پذیری برای یک سیستم خطی گسسته زمان است:

فقط و فقط ورودی $\forall n x[n] = 0$ خروجی $\forall n y[n] = 0$ تولید می کند.

ه) یک سیستم غیر خطی چنان بیابید که در شرط قسمت (د) صدق کرده اما معکوس پذیر نباشد.

سؤال ۵

فرض کنید سکون اولیه معادل با شرط کمکی با مقدار صفر است که در زمانی که بر طبق سیگنال ورودی تعیین میگردد، تحمیل می شود. در این مسأله نشان می دهیم که اگر شرط کمکی مورد استفاده غیر صفر باشد و یا اگر همیشه در زمان ثابتی (صرف نظر از سیگنال ورودی) اعمال شود، سیستم متناظر نمی تواند LTI باشد. سیستمی را در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن در معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر صدق می کنند:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

الف) با فرض شرط کمکی $y(1) = 1$ ، از یک مثال مثال نقض استفاده کرده و نشان دهید که سیستم خطی

نیست.

ب) با فرض شرط کمکی $y(1) = 1$ ، از یک مثال نقض استفاده کرده و نشان دهید که سیستم تغییرناپذیر با زمان نیست.

ج) با فرض شرط کمکی $y(1) = 1$ ، نشان دهید که سیستم خطی نموی است.

د) با فرض شرط کمکی $y(1) = 0$ ، نشان دهید که سیستم خطی بوده اما تغییر ناپذیر با زمان نیست.

سؤال ۶

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را در رابطه با سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان تعیین کنید. هر مورد را توجیه کنید.

الف) اگر $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI باشد که $h(t)$ متناوب و غیر صفر است، سیستم ناپایدار است.

ب) معکوس یک سیستم LTI علی، همواره علی است.

ج) اگر برای هر n داشته باشیم $|h[n]| \leq K$ که در آن K یک عدد مشخص است، در این صورت سیستم با پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ پایدار است.

د) اگر یک سیستم LTI گسسته در زمان، پاسخ ضربه $h[n]$ با طول محدود داشته باشد، سیستم پایدار است.

ه) اگر یک سیستم LTI علی باشد، پایدار نیز هست.

و) حاصل به هم پیوستن سری یک سیستم LTI غیر علی با یک سیستم LTI علی، لزوماً غیر علی است.

ز) یک سیستم LTI زمان-پیوسته پایدار است اگر و تنها اگر پاسخ پله آن $s(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد، یعنی اگر و تنها اگر:

$$\int_{-\infty}^x |s(t)| dt < \infty$$

ح) یک سیستم LTI زمان-گسسته علی است اگر و تنها اگر پاسخ پله آن $s[n]$ برای $n < 0$ صفر باشد.

سؤال ۷

فرض کنید یک سیستم LTI به ورودی $x[n]$ پاسخ $y[n]$ مطابق شکل زیر می‌دهد. مقادیر a, b مربوط به سیگنال $y[n]$ را بیابید.

$$h_1[n] = u[n - 1]$$

$$h_2[n] = \delta[n + 1]$$

$$h_3[n] = u[n - 3]$$

$$h_4[n] = \delta[n - 1] - 2\delta[n - 2]$$

