مثال)

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| \geq N_1 \end{cases} \qquad X(j\omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin \omega(N_1 + 1/2)}{\sin \omega/2}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(j\omega) + \pi X(j0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$$

$$y[n] - y[n-1] = x[n]$$

$$Y(j\omega) - e^{-j\omega} Y(j\omega) = X(j\omega) \Rightarrow \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \quad \boxed{\omega \neq 0}$$

برای ω صفر باید راه دیگری برویم

تبدیل فوریه سیگنال های متناوب :

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

$$X(j\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

طیف سیگنال متناوب باید قطار ضربه باشد

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

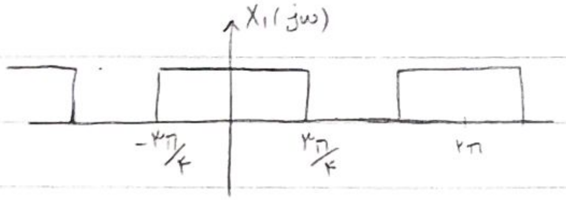
$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - 2\pi \frac{k}{N})$$

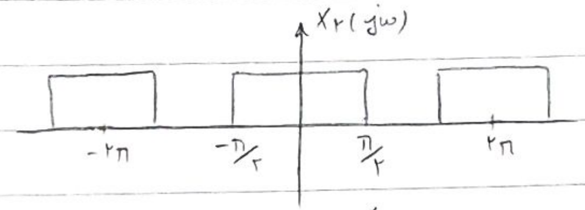
مثال) محاسبه‌ی تبدیل فوریه $x_1[n]\,x_2[n]$

$$x_1[n] = \frac{\sin(\frac{3\pi}{4} n)}{n\pi}$$

ضرایب n ، در کلات آن
تا ۲ دارند

$$x_2[n] = \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n\pi}$$





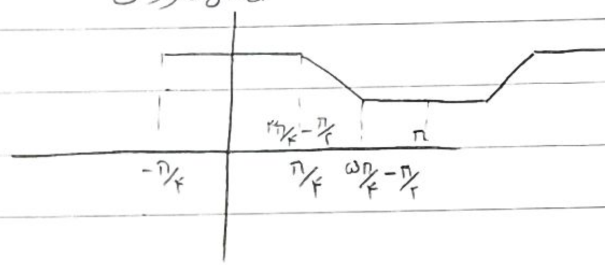
محاسبه‌ی کانولوشن پریودیک :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(j\theta)\, X_2(j(\omega-\theta))\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(j\theta)\, \hat{X}_2(j(\omega-\theta))\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\theta)\, \hat{X}_2(j(\omega-\theta))\, d\theta$$

حاصل کانولوشن



سیستم‌های توصیف شونده با معادلات دیفرانس :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

روش فصل اول :

$$e^{j\omega n} \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow H(\omega)e^{j\omega n}$$

روش این فصل :

$$Y(\omega) = X(j\omega)\, H(\omega)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}\, Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}\, X(j\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی پاسخ ضربه سیستم زیر: $|a|<1$ $\quad y[n] - a y[n-1] = x[n]$

$$Y(\omega) - ae^{-j\omega}Y(\omega) = X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \Rightarrow h[n] = a^n u[n]$$

مثال) مطلوب است پاسخ ضربه سیستم LTI توصیف شونده با معادله زیر:

$$y[n] - \tfrac{3}{4} y[n-1] + \tfrac{1}{8} y[n-2] = 2x[n]$$

باید ریشه‌های کسر را بدست بیاوریم

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}} \underset{=}{\overset{e^{-j\omega}=u}{}} \frac{2}{1-\frac{3}{4}u+\frac{1}{8}u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}u)(1-\frac{1}{4}u)} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}u} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}u} \qquad A = 4, \quad B = -2$$

برای بدست آوردن A، ریشه مخرج کسر A را در عبارت اصلی $\frac{2}{(1-\frac{1}{2}u)(1-\frac{1}{4}u)}$ می‌گذاریم

$$\Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}u} + \frac{-2}{1-\frac{1}{4}u} \Rightarrow h[n] = 4(\tfrac{1}{2})^n u[n] - 2(\tfrac{1}{4})^n u[n]$$