تبدیل Z : (فصل 10)   سیگنال گسسته در زمان

پدر علم فازی

* Ragazzini & Zadeh   Prof A. Zadeh

$$z^n \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow Az^n$$

$$Z = re^{jw}$$

تعریف: تبدیل Z سیگنال $x[n]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

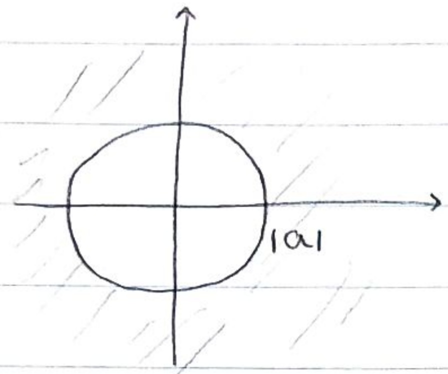
$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, Z^{-n}$$

مثال ۱: تبدیل Z سیگنال $x[n] = a^n u[n]$ با فرض $0 < a < 1$

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (aZ^{-1})^n = \boxed{\frac{1}{1-aZ^{-1}}}$$

شرط همگرایی: $|aZ^{-1}| < 1$

$$a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-aZ^{-1}} \qquad |Z| > |a|$$



$|z| > |a|$

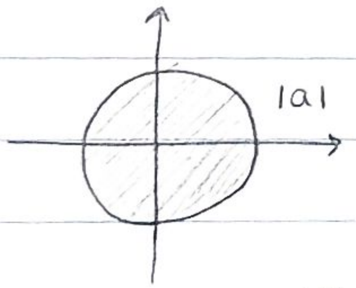
تبدیل Z

مثال Z : $x[n] = -a^n u[-n-1]$: $-n-1 \geq 0 \Rightarrow -n \geq 1 \Rightarrow n \leq -1$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n$$

$$\xrightarrow{n=-m} \sum_{m=1}^{\infty} (a^{-1}z)^m = -\frac{az^{-1}}{1-a^{-1}z} = \boxed{\frac{1}{1-az^{-1}}}$$

$|a^{-1}z| < 1 \longrightarrow |z| < |a|$



* تبدیل Z روی دایره‌ی واحد : تبدیل فوریه

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \qquad z = re^{j\omega}$$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\omega n} = F\{x[n] r^{-n}\}$$

شرط همگرایی تبدیل Z :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x[n]\, r^{-n} \right| < \infty$$

مثال 3 :

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right) u[n]$$

رابطه اویلر

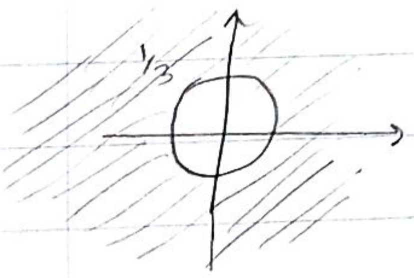
$$= \frac{1}{2j} \underbrace{\left(\frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{4}}\right)}_{a}^{n} u[n] - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^{n} u[n]$$

تبدیل Z ، $a^{n} u[n]$ را می‌دانیم.

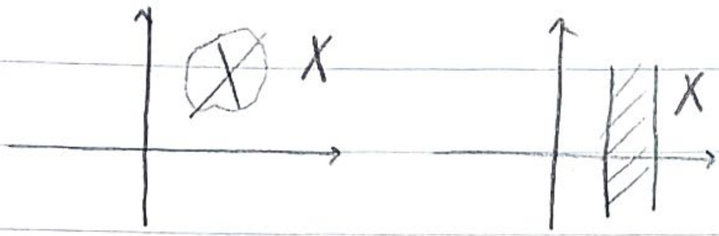
$$X(Z) = \frac{1}{2j} \frac{1}{1-\frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{4}} Z^{-1}} - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3} e^{-j\frac{\pi}{4}} Z^{-1}} \right)$$

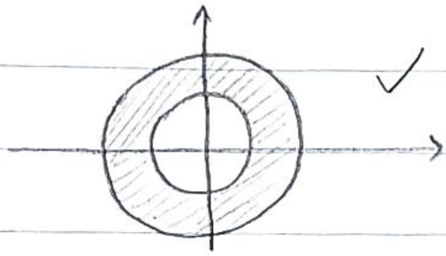
$$|Z| > 1/3 \qquad\qquad 1/3 < |Z|$$

$$X(Z) = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}\, Z}{\left(Z - \frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(Z - \frac{1}{3} e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$



خواص ناحیه همگرایی (RoC) :





① ROC شامل حلقه‌هایی به مرکز مبدا است.

$$\sum |x[n] r^{-n}| < \infty$$

چون فاز نقشی در همگرایی ندارد.

② RoC شامل هیچ قطبی نیست.

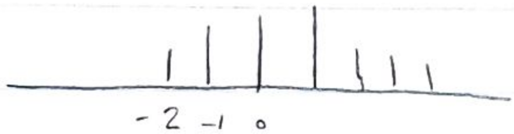
③ اگر $x[n]$ دوره‌ی محدود داشته باشد، آنگاه ROC کل صفحه خواهد بود

به جز احیانا در $Z=0$ یا $Z=\infty$

$x[n]=0 \quad \forall n<0 \quad Z=\infty \in RoC$

$x[n]=0 \quad \forall n>0 \quad Z=0 \in RoC$

④ $x[n]$ دست راستی $\Leftarrow$ ROC دست راستی (بیرون دایره) به جز احتمالا
$z \to \infty$



مثال: در زمان های منفی مقدار داشته باشند
$z \to \infty$ حذف می‌شود.

$x[-2]\, z^{2}$

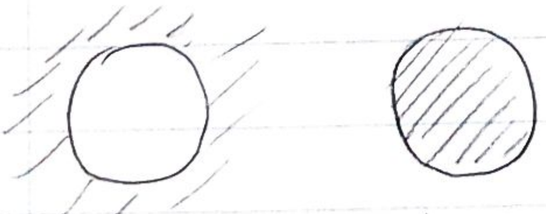
بنابراین $z = \infty \Rightarrow z^{2} = \infty$
$z \to \infty$ توش نیست

سیگنال علی: $x[n] = 0 \quad \forall n < 0$

ROC دست راستی و $z = \infty$ $\Leftarrow$ سیگنال علی است چون توی زمان های منفی
مقدار نداشته.

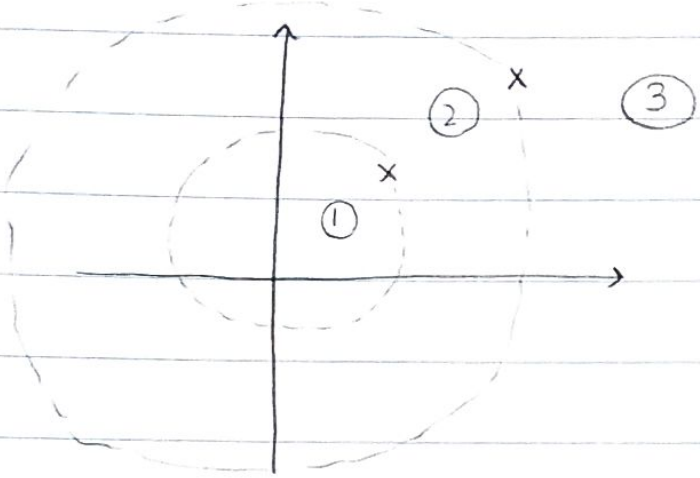
⑤ $x[n]$ دست چپی $\Leftarrow$ ROC دست چپی است به جز احتمالا $z = 0$

⑥ سیگنال دو طرفه: دوباره به جمع 2 سیگنال
دست راستی و دست چپی می‌شکنیم.



ROC یا تهی یا حلقه (از اشتراک
این 2 تا ROC به دست می‌آید.)

⑦ اگر $X(z)$ گویا باشد مرز ROC توسط قطب ها تعیین می‌شود یا ROC



تا ∞ می‌رود.

مثال: تبدیل z زیر را در نظر بگیرید می‌خواهیم تمام سیگنال‌هایی که تبدیل z زیر را دارند تعیین کنیم

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \qquad u \triangleq z^{-1}$$

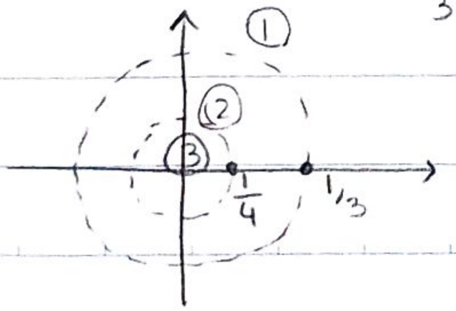
* با z^{-1} جلو نرویم!

$$\frac{3 - \frac{5}{6}u}{(1 - \frac{1}{4}u)(1 - \frac{1}{3}u)} = \frac{A}{(1 - \frac{1}{4}u)} + \frac{B}{(1 - \frac{1}{3}u)}$$

$$A = 1 \quad , \quad B = 2$$

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}u)} + \frac{2}{(1 - \frac{1}{3}u)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

حال ریشه ها را به دست می‌آوریم: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$



بیرون دایره: دست راستی

توی دایره: دست چپی

① : $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

② : $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$

① : $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$

روش‌های برای محاسبه عکس تبدیل Z :

تبدیل لاپلاس + ROC $\Longrightarrow$

① بسط به کسرهای جزئی $\Longleftarrow$ عکس تبدیل Z

② سری تیلور یا مک‌لورن $\longleftarrow$ بسط سری توانی $\longleftarrow$ معادل در سیگنال‌های زمان گسسته

پیوسته در زمان ندارد.

مثال) $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \;,\; |z| > |a| \Rightarrow |az^{-1}| < 1$

$= 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots$ ضرایب توان‌های منفی z مشخص می‌شوند.

$1 \to x[0]$, $az^{-1} \to x[1]$, $a^2z^{-2} \to x[2]$

$x[n] = a^n u[n]$

مثال) $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \;,\; |z| < |a|$

$= \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} \qquad |a^{-1}z| < 1$

$X(z) = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 \cdots \Longrightarrow x[n] = -a^n u[-n-1]$

مثال) $X(z) = \ln(1+az^{-1}) \qquad |z| > |a|$

$* \ln(1+w) \; (|w|<1)$

$= w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \cdots$

$\Longrightarrow \ln(1+az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n} \Longrightarrow \begin{cases} x[n] = \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} & n \geq 1 \\ x[n] = 0 & n < 1 \end{cases}$

خواص تبدیل Z :

(a)

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

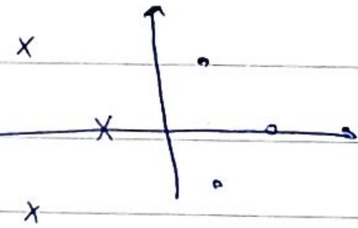
$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

(b)

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(z^*)$$

⇐ اگر سیگنال حقیقی باشد

صفرها و قطب ها مزدوجشان هم صفر و قطب است.



(c)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{Z} \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

$R_u : |z| > 1$

$R \cap R_u \subseteq ROC$

چون ممکن است صفر و قطب همدیگر را خنثی کنند!

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n] = u[n]} \rightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * u[n]$$

$$Y(z) = X(z)\,U(z)$$

نکته :

$$* \quad u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$|z| > 1$

(d) برای سیگنال علی : $n<0$ $x[n] = 0$ (علی)

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \underbrace{\cdots + x[-1]z}_{n<0} + x[0] + \cancel{x[1]z^{-1} + \cdots} = x[0]$$

$x[n]$ راست‌سو باشد
Exists $\lim\limits_{n \to \infty} x[n]$ $\Bigg\}$ $\Longrightarrow$ $x[+\infty] = \lim\limits_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z)$ e

$$n\,x[n] \xleftrightarrow{\;z\;} -z \frac{dX(z)}{dz} \qquad ROC = R$$ f

$X(z) = \ln(1 + az^{-1}) \qquad |z| > |a|$ مثال ۲)

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}$$ → شیفت زمانی ایجاد می‌کند.

$$\frac{1}{1 + az^{-1}} \xleftrightarrow{\;z^{-1}\;} (-a)^n u[n]$$

$$\frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}} \xleftrightarrow{\;z^{-1}\;} a(-a)^{n-1} u[n-1] = n\,x[n]$$

$$x[n] = \frac{a(-a)^{n-1} u[n-1]}{n} = \frac{(-1)^{n+1} a^n u[n-1]}{n}$$

تحلیل سیستم های LTI :

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

توصیف حوزه زمان : $x[n] * h[n]$

توصیف حوزه فرکانس : $X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$

z ״ : $X(z)\, \underbrace{H(z)}$ → system function

علیت:

$h[n]$ علّی $\Longrightarrow$ ROC دست راستی

$h[n] = 0$ $\Longleftarrow$?

$\forall n<0$

اگر دو شرط:

$\Longleftarrow$ شرط ① ROC دست راستی

شرط ② $z=\infty \in ROC$

عکس برقرار می‌شود.

$$X(z) = \dots + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + \dots$$

$x[z]$ گویا:

شرط ① ROC دست راستی: دست راست، دست راست‌ترین قطب

شرط ② $z=\infty \in ROC$: درجه مخرج $\geq$ درجه صورت

مثال)

$$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$$

آیا سیستم LTI متناظر علّی است؟ شرط ② برقرار نیست چون درجه‌ی صورت از مخرج بزرگتر است. و در بی‌نهایت به بی‌نهایت می‌رود پس عضو ROC نخواهد بود.

مثال) $H(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{1}{1-2z^{-1}}$ $|z|>2$

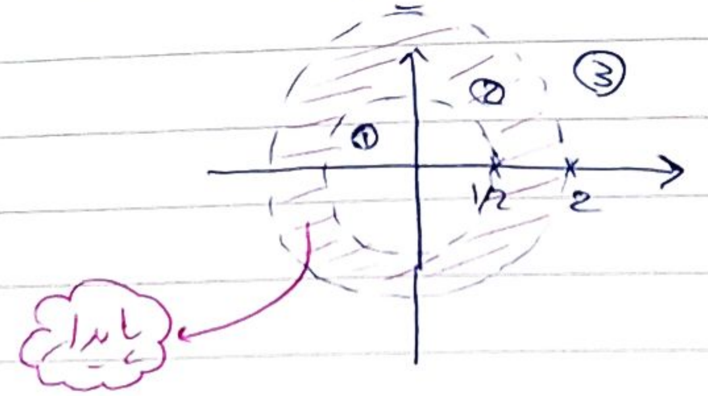
آیا علّی است؟ $z=2$ و $z=\frac{1}{2}$ چون $|z|>2$ دست راست است دست راست‌ترین قطب $\Longleftarrow$ شرط ① ✓✓

درجه صورت نهایتاً با درجه مخرج برابر $\Longleftarrow$ شرط ② ✓✓

$$\frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}$$ $\deg(\text{صورت}) = \deg(\text{مخرج})$

پایداری: دایره واحد جزء ناحیه ی همگرایی باشد.

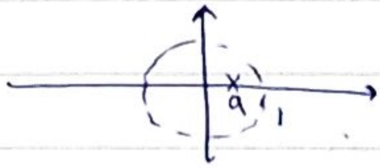
برای مثال آخر



مثال) سیستم علی است شرط پایداری چه خواهد بود؟

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

قطب = $(z = a)$



باید a داخل دایره واحد باشد.
$|a|<1$

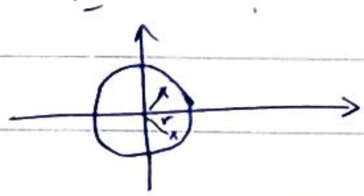
مثال)

$$H(z) = \frac{1}{1-(2r\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

فرض کنیم که سیستم علی است شرط پایداری را به دست آورید؟

$$H(z) = \frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})}$$

* قطب ها باید داخل دایره واحد قرار گیرند $\Longrightarrow$ $r<1$ قطب ها داخل دایره واحد قرار می گیرند. θ هم اهمیتی نخواهد داشت.



سیستم های توصیف شونده با معادلات تفاضلی

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

* شرط سکون ابتدایی برای سیستم‌های LTI معادل با علّی بودن بود.

* تبدیل فوریه هم سیستم را به سادگی رهدکند پایدار است.

مثال) $y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3} x[n-1]$

$$Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) = X(z) + \frac{1}{3} X(z) z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$|z| > \frac{1}{2} \Longrightarrow h[n] = \frac{1}{2^n} u[n] + \frac{1}{3} \frac{1}{2^{n-1}} u[n-1]$$

$$|z| < \frac{1}{2} \Longrightarrow h[n] = -\left(\frac{1}{2^n}\right) u[-n-1] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n]$$