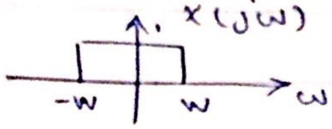
Subject :   Date :   /   /

$$= -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1} \Rightarrow X(j\omega) = 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

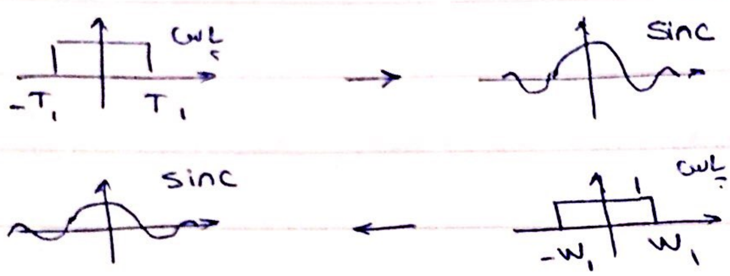
مثال)



$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{W}{\pi} t\right)$$

حوزه زمان   حوزه فرکانس



خواص تبدیل فوریه

۱- خطی بودن

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

$$y(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega)$$

$$\Rightarrow a x(t) + b y(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a X(j\omega) + b Y(j\omega)$$

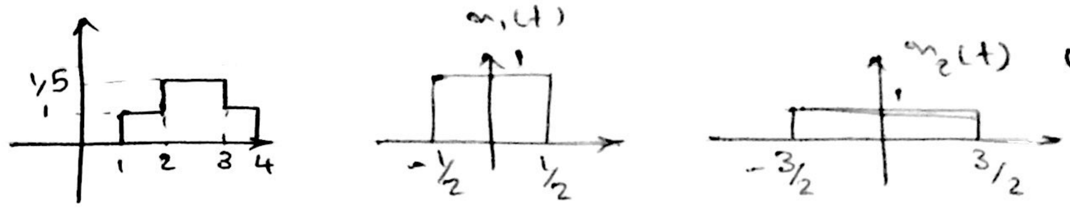
۲- جابه‌جایی زمانی

$$x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(X(j\omega) e^{-j\omega t_0}\right) \times e^{j\omega t}\, d\omega$$

مثال)



$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} x_1(t-2.5) + 1(x_2(t-2.5))$$

$$X_1(j\omega) = \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega} \quad , \quad X_2(j\omega) = \frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega}$$

$$X(j\omega) = e^{-2.5j\omega} \times \left(\frac{1}{2} \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega} + \frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega} \right)$$

طوری به پالس مستطیلی شکوندیم که مرکز ۲ پالس روی هم باشه => یک شیفت زمانی بیشتر لازم نبود که بدیم و خوب کار رو ساده‌تر کرد.

۳- $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \Rightarrow x^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-j\omega)$

اثبات:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} d_t$$

$$\Rightarrow X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j\omega t} d_t$$

$$\Rightarrow X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} d_t \quad \boxed{\checkmark}$$

حالا یه مقدار که می‌خوایم سیگنال‌های حقیقی رو بررسی کنیم، خواص ازش رو دربیاریم.

نکته: برای سیگنال حقیقی: $x(t) = x^*(t) \Rightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

Subject :　　　　　　Date : / /

$$x(j\omega) = Re\{x(j\omega)\} + j\, Im\{x(j\omega)\}$$
$$\Rightarrow x^*(j\omega) = Re\{x(j\omega)\} - j\, Im\{x(j\omega)\}$$
$$\Rightarrow x(-j\omega) = Re\{x(-j\omega)\} + j\, Im\{x(-j\omega)\}$$

قسمت حقیقی $x(j\omega)$ تابعی زوج خواهد بود و قسمت موهومی آن تابعی فرد.

سیگنال حقیقی $\Rightarrow Re\{x(j\omega)\} = Re\{x(-j\omega)\}$

$Im\{x(j\omega)\} = -Im\{x(-j\omega)\}$

← حال می‌خواهیم نتایجی مشابه برای دامنه و فاز به دست بیاوریم...

$$X(j\omega) = \underbrace{|X(j\omega)|}_{\text{دامنه}}\, e^{j\overbrace{\measuredangle X(j\omega)}^{\text{فاز}}}$$
$$x^*(j\omega) = |x(j\omega)|\, e^{-j\measuredangle x(j\omega)}$$
$$x(-j\omega) = |x(-j\omega)|\, e^{j\measuredangle x(-j\omega)}$$

$\Rightarrow |x(j\omega)| = |x(-j\omega)| \Rightarrow$ دامنه تابعی زوج است.

$\measuredangle x(j\omega) = -\measuredangle x(-j\omega) \Rightarrow$ فاز تابعی فرد است.

← برای یک سیگنال حقیقی، داشتن طیف ($X(j\omega)$) برای ωهای مثبت می‌تواند کل طیف یا همان $X(j\omega)$ را به ما بدهد. ← کافی ست تبدیل فوریه را برای فرکانس‌های مثبت محاسبه کنیم و برای فرکانس‌های منفی برای تعیین طیف از روابط بالا استفاده می‌کنیم.

۴. $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$

اثبات:
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$
$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{+j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

نکته: اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد آنگاه $X(j\omega)$ نیز حقیقی و زوج خواهد بود.

Subject :   Date :   /   /

از عبارت بالا: زوج بودن $x(t)=x(-t) \Rightarrow X(j\omega)=X(-j\omega)$ $\Rightarrow$

اشهر ۲ عبارت: حقیقی بودن $\Rightarrow$ حقیقی $\Rightarrow X^*(j\omega)=X(-j\omega)$

نکته: اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد $X(j\omega)$ نیز موهومی خالص و فرد خواهد بود.

نکته:

$$x(t)=\underbrace{x_e(t)}_{\text{بخش زوج}}+\underbrace{x_o(t)}_{\text{بخش فرد}}$$

$$\rightarrow x_e(t)=\frac{1}{2}(x(t)+x(-t))$$

$$\rightarrow x_o(t)=\frac{1}{2}(x(t)-x(-t))$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\}=\mathcal{F}\{x_e(t)\}+\mathcal{F}\{x_o(t)\}$$

$$\rightarrow X(j\omega)=\underbrace{X_e(j\omega)}_{\text{حقیقی و زوج}}+\underbrace{X_o(j\omega)}_{\text{موهومی خالص و فرد}}$$

$$\rightarrow X(j\omega)=Re\{X(j\omega)\}+j\,Im\{X(j\omega)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_e(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}} Re\{X(j\omega)\} \\ x_o(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\,Im\{X(j\omega)\} \end{array}}$$

مثال) تبدیل فوریه $x(t)=e^{-a|t|}$ را می‌خواهیم به طریق ساده‌تر به دست آوریم. ← تابع زوج

$$\rightarrow x(t)=e^{-a|t|}=e^{-at}u(t)+e^{at}u(-t)$$

$$=2\,Ev\{e^{-at}u(t)\}$$

$$Ev\{e^{-at}u(t)\}\xleftrightarrow{\mathcal{F}} Re\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\}=\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

$$2Ev\{e^{-at}u(t)\}\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Subject :   Date :   /   /

۵- مشتق گیری و انتگرال گیری

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\,\delta(\omega)$$

که تو نقطه $\omega=0$ داریم عوضش می‌کنه

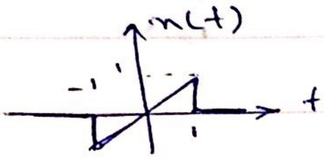
$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$$

* اثباتش با خاصیت کانولوشن *)

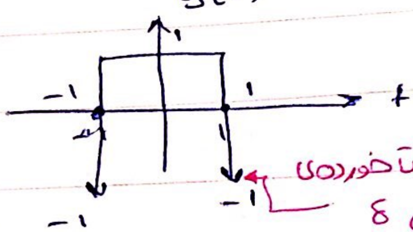
$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

همه فرکانس‌ها با مشارکت یکسان و ضریب ۱ می‌سازنش

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی تبدیل فوریه سیگنال زیر



$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$



شیفت خورده‌ی منفی δ

$$G(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega} - e^{-j\omega} - e^{j\omega}$$

$$= \frac{2\sin\omega}{\omega} - 2\cos\omega$$

$\cancel{G(j\omega) = j\omega X(j\omega)}$

با یه رابطه x برحسب g رو بنویسیم بعد بریم سراغ انتگرال

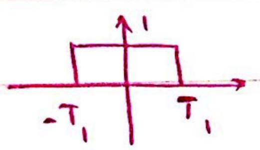
$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} G(j\omega) + \pi G(0)\,\delta(\omega)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}\left(\frac{2\sin\omega}{\omega} - 2\cos\omega\right) + \pi \times 0 \times \delta(\omega)$$

$$= \frac{1}{j\omega}\left(\frac{2\sin\omega}{\omega} - 2\cos\omega\right)$$

مساحت زیر نمودار x(t)

یادآوری:



$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

Subject :   Date :   /   /

مثال: تبدیل فوریه $u(t)$ را از روی $\delta(t)$ به دست بیاورید.

$U(j\omega)$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau \quad \xrightarrow{} \Delta(j\omega)$$

$$\Rightarrow U(j\omega)=\frac{1}{j\omega}\Delta(j\omega)+\pi\Delta(0)\delta(\omega)=\boxed{\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)}$$

۶-

$$x(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}X(j\omega)\Rightarrow x(at)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

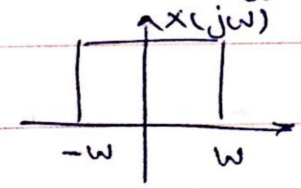
اگر $a>1$ باشد در حوزه زمان سیگنال را جمع می‌شه و در حوزه فرکانس باز می‌شه.

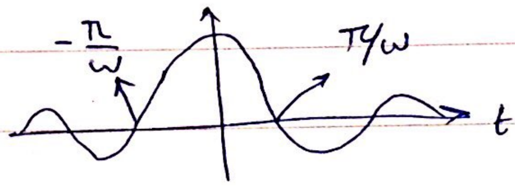
۶- تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی

$z=at$

$$a>0:\int_{-\infty}^{+\infty}x(z)e^{-j\omega(z/a)}\,dz/a$$

$$a<0:\int_{-\infty}^{+\infty}x(z)e^{-j\omega(z/a)}\,dz/a$$

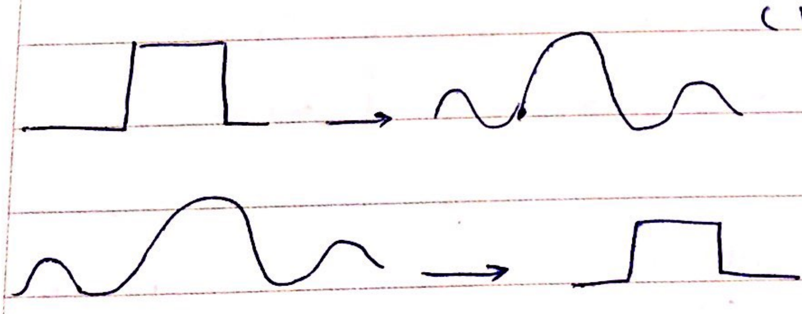




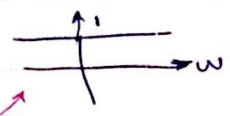
۷- دوگانی (Duality)

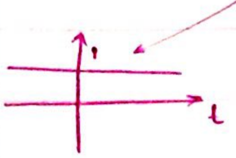
$$f(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}g(\omega)$$

$$g(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi f(-\omega)$$



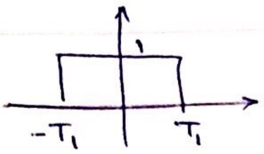
مثال)

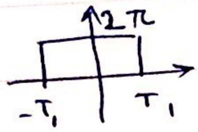
$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}}$  (تابع ثابت با مقدار یک)

 $\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\delta(-\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$

این قدر راحت نیست البته...

مثال)

 $\xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{2\sin\omega T_1}{\omega}$

$\dfrac{2\sin t T_1}{t} \xrightarrow{\mathcal{F}}$  $\dfrac{2\sin t T_1}{2\pi t} = \dfrac{\sin t T_1}{\pi t}$

مثال) تبدیل فوریه

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

$$e^{-a|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2a}{a^2+\omega^2} \Rightarrow e^{-|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\frac{2}{1+t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi e^{-|\omega|}$$

چند خاصیت دیگر که به کمک دوگانی اثبات می‌شود.

a) $-jt\,x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{dX(j\omega)}{d\omega}$

b) $e^{j\omega_0 t}x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j(\omega-\omega_0))$

c) $-\dfrac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta)\,d\eta$

۸_ کانولوشن

$$x(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)\, H(j\omega)$$

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$x(t) = e^{j\omega t}$ $\qquad$ $y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$

(اثبات دقیق در کتاب)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(j\omega)H(j\omega)}_{Y(j\omega)} e^{j\omega t}\, d\omega$$

حوزه زمان $\qquad x(t) \longrightarrow \underset{h(t)}{\boxed{LTI}} \longrightarrow y(t)$ $\qquad$ * در سیستم LTI (توصیف سیستم)

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

حوزه فرکانس $\qquad X(j\omega) \longrightarrow \underset{H(j\omega)}{\boxed{LTI}} \longrightarrow Y(j\omega)$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) * H(j\omega)$$

نکته: توصیف حوزه زمانی همواره وجود دارد و مفهوم دارد در حالی که توصیف حوزه فرکانسی به این بستگی دارد که این انتگرال ها تعریف شده هستند یا خیر

۹_ رابطه پارسوال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega$$

اثبات: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t}\, d\omega\right] dt$$

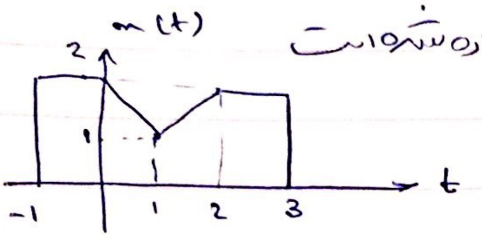
Subject : Date : / /

عوض کردن ترتیب انتگرال ها

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt}_{X(j\omega)}\right]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega$$

مثال) $x(t)$ به صورت شکل زیر داده شده است



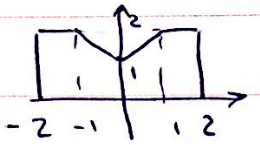
الف) $\measuredangle X(j\omega)$ ب) $X(j0)$ ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\,d\omega$

د) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{2j\omega}\,d\omega$ هـ) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega$

و) عکس تبدیل فوریه $Re\{X(j\omega)\}$ را رسم کنید.

← تابع را می توان جوری شیفت داد که متقارن شود.

$y(t) = x(t+1)$



$y(t)$ حقیقی و زوج

← $Y(j\omega)$ حقیقی و زوج

$\measuredangle Y(j\omega) = 0$ $Y(j\omega) = X(j\omega)e^{j\omega}$

صفر بود

$$\Rightarrow |Y(j\omega)|e^{j\measuredangle Y(j\omega)} = |X(j\omega)|e^{j\measuredangle X(j\omega)}e^{j\omega}$$

جواب قسمت الف

$$\Rightarrow \boxed{\measuredangle X(j\omega) = -\omega}$$

Subject :   Date :   /   /

ب)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$$

$$= 4 \times 2 - 1 = \boxed{7}$$ → جواب قسمت ب

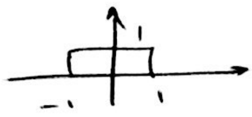
ج)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, d\omega = 2\pi x(0) = \boxed{4\pi}$$ → جواب قسمت ج

د)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{X(j\omega) \frac{2\sin\omega}{\omega}}^{Y(j\omega)} e^{j2\omega}\, d\omega = 2\pi y(2)$$

$y(t) = x(t) *$ 

جواب قسمت د

$$y(2) = 1 \times 2 + \frac{1+2}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow 2\pi \times \frac{7}{2} = \boxed{7\pi}$$

هـ)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt$$

$$= \dots = Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}\left(x(t) + x(-t)\right)$$

$Re\{X(j\omega)\} \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$