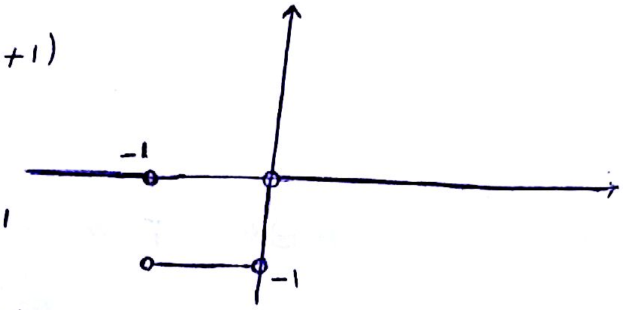
تمرین سری ۲ - سیگنال و سیستم

سوال ۱ الف)

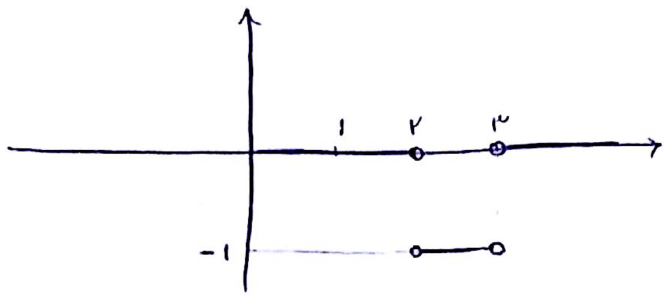
$x_1(t) = u(t) - u(t+1)$



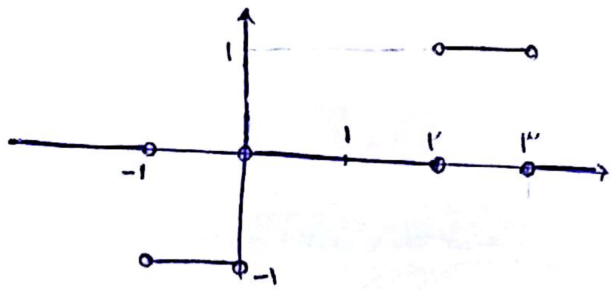
$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ -1 & -1 < t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

$x_2(t) = -u(t-2) + u(t-3)$

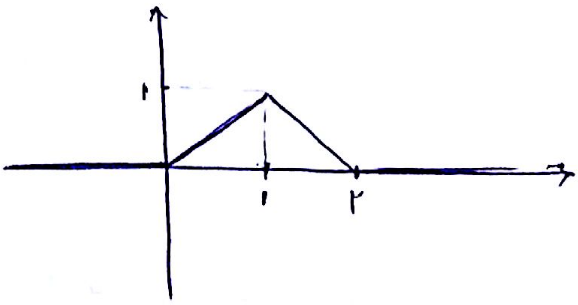
$$x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ -1 & 2 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$$



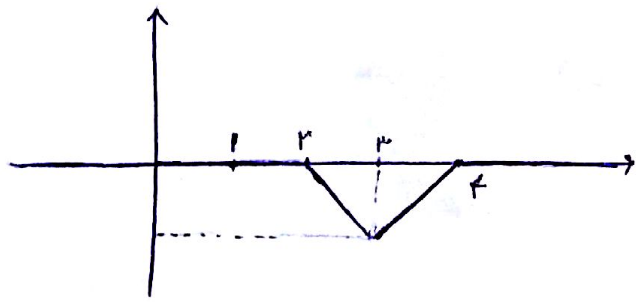
$x_3(t) = x_1(t) - x_2(t)$



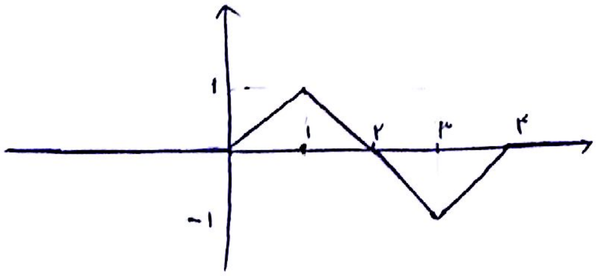
$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$



$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ 2-t & 2 \leq t \leq 3 \\ t-4 & 3 \leq t \leq 4 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases}$$



$y_3(t) = y_2(t) + y_1(t)$



ب) * بدون حافظه نیست. در یک سیستم بی حافظه در صورتی که دو ورودی در یک زمان دارای مقدار یکسان باشند خروجی هم باید در آن زمان دارای مقدار یکسان باشد. مثال نقض در این سیستم ←

$x_2(1) = x_3(1) = 0$

$y_2(1) = 0 \neq y_3(1) = 1$

* علی می‌تواند باشد چون در سه خروجی در زمان‌هایی مقدار دارد که ورودی‌ها هم در همان زمان‌ها یا قبلش مقدار داشته‌اند.

* خطی نمی‌تواند باشد چون $x_2 - x_1$ نمی‌دهد $y_2 - y_1$. اگر خطی بود باید پاسخ به ورودی $x_2 - x_1$ می‌شد $y_2 - y_1$.

* متغیر با زمان نیست چون x_2 نسبت به x_1 به اندازه‌ی ۳ واحد به سمت راست شیفت خورده. اگر متغیر با زمان بود y_2 نیز باید نسبت به y_1 ۳ واحد شیفت می‌خورد که نخورده.

سؤال ۲ الف)

$$y[n] - a y[n-1] = x[n]$$

$$x[n] = \delta[n] \;,\; \delta[n] = 0 \text{ for } n \leq -1 \Rightarrow y[n] = 0 \text{ for } n \leq -1$$

$$y[0] - a \cancel{y[-1]} = \delta[0] = 1 \Rightarrow y[0] = 1$$

$$y[1] - a y[0] = \delta[1] = 0 \Rightarrow y[1] = a y[0] = a$$

$$y[2] - a y[1] = 0 \Rightarrow y[2] = a^2 \;,\; \ldots$$

$$\Rightarrow y[n]\Big|_{n \geq 0} = a^n \Rightarrow y[n] = a^n u[n]$$

ب) سیستم با حافظه است. چون شرط روبرو برقرار نیست ←

$$h[n] = 0 \quad \forall n \neq 0$$

$$h[n] = 0 \quad \forall n < 0 \Rightarrow$$ سیستم علی است.

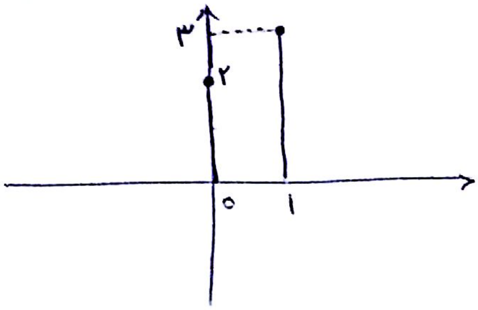
به دلیل این که $|a|<1$ است. ← سیستم پایدار است.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad \forall n$$

ج) اگر $|a|>1$ باشد پاسخ ضربه (مجموع) به سمت بی‌نهایت می‌رود و سیستم ناپایدار است.

سوال ۳ الف)

$$\overbrace{(x+w)}^{m} \longrightarrow$$



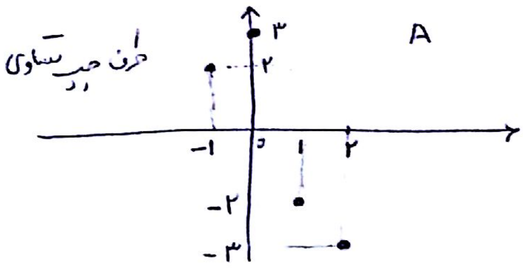
$$\underbrace{\overbrace{(x+w)}^{m} * y}_{A[n]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m[k]\, y[n-k]$$

$$A[0] = \cancel{m[0]\,\overset{0}{y}[0]} + m[1]\,y[-1] = 3 \times 1 = 3$$

$$A[-1] = m[0]\,y[-1] + \cancel{m[1]\,\overset{0}{y}[-2]} = 2 \times 1 = 2$$

$$A[1] = m[0]\,y[1] + m[1]\,y[0] = 2 \times (-1) = -2$$

$$A[2] = \cancel{m[0]\,\overset{0}{y}[2]} + m[1]\,y[1] = 3 \times (-1) = -3$$



$$(x * y) = B[n]$$

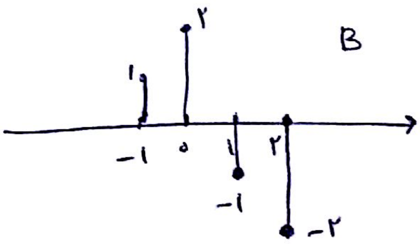
$$B[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, y[n-k]$$

$$B[-1] = x[0]\,y[-1] + \cancel{x[1]\,\overset{0}{y}[-2]} = 1 \times 1 = 1$$

$$B[0] = \cancel{x[0]\,\overset{0}{y}[0]} + x[1]\,y[-1] = 2 \times 1 = 2$$

$$B[1] = x[0]\,y[1] + \cancel{x[1]\,\overset{0}{y}[0]} = 1 \times (-1) = -1$$

$$B[2] = \cancel{x[0]\,\overset{0}{y}[2]} + x[1]\,y[1] = 2 \times (-1) = -2$$



$$(w * y) = C[n]$$

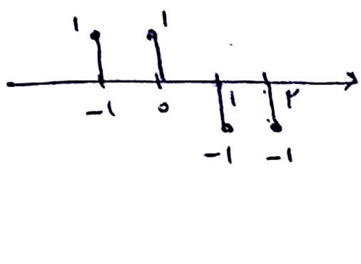
$$C[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[k]\, y[n-k]$$

$$C[-1] = w[0]\,y[-1] + \cancel{w[1]\,\overset{0}{y}[-2]} = 1 \times 1 = 1$$

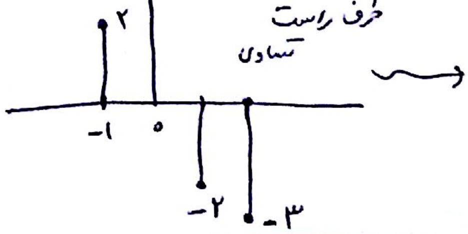
$$C[0] = \cancel{w[0]\,\overset{0}{y}[0]} + w[1]\,y[-1] = 1 \times 1 = 1$$

$$C[1] = w[0]\,y[1] + \cancel{w[1]\,\overset{0}{y}[0]} = 1 \times (-1) = -1$$

$$C[2] = \cancel{w[0]\,\overset{0}{y}[2]} + w[1]\,y[1] = 1 \times (-1) = -1$$



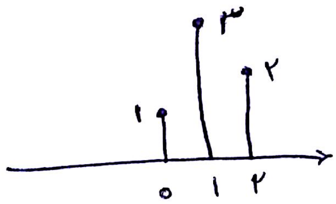
$$B + C \longrightarrow$$



$\rightsquigarrow$ این همان A است.

دو طرف رابطه یکسان شدند.

ب)



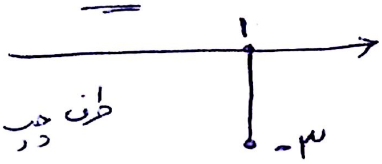
$$x * w = A[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, w[n-k]$$

$$A[0] = x[0]\,w[0] + \cancel{x[1]\,w[-1]} = 1$$

$$A[1] = x[0]\,w[1] + x[1]\,w[0] = 1\times 1 + 2\times 1 = 3$$

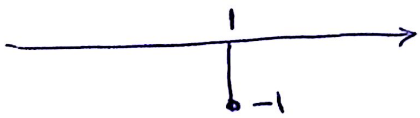
$$A[2] = x[0]\,\cancel{w[2]} + x[1]\,w[1] = 2\times 1 = 2$$

A·Y



طرف چپ مساوی

Y·W

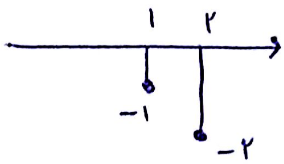


$$x * \overbrace{(Y\cdot W)}^{C} = B[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, C[n-k]$$

طرف راست مساوی

$$B[1] = x[0]\,C[1] = 1\times(-1) = -1$$

$$B[2] = x[1]\,C[1] = 2\times(-1) = -2$$



طرف راست و چپ با هم برابر نیستند.

سؤال ٤) الف) می‌دانیم شرط لازم و کافی برای علیت سیستم های خطی آن است که

پاسخ ضربه آنها قبل از اعمال ضربه صفر باشد.

$h(t) = 0 \quad \forall t < 0$

برای هر زمان t_0 و هر ورودی $x(t)$ اگر $t < t_0$ و $x(t) = 0$ باشد

خروجی متناظر $y(t)$ نیز برای $t < t_0$ صفر است.

بنابراین به ازای ورودی ضربه هم خروجی قبل از اعمال ضربه صفر است. بنابراین

سیستم علی است.

ب) $y(t) = x(t)\,x(t+1)$

ج) سیستم ثابت

$y(t) = 1$

به ازای هر $x(t)$

د) می‌دانیم طبق خاصیت سیستم های خطی ورودی صفر، خروجی صفر می‌دهد. اگر ورودی اکیدا

غیر از صفر خروجی صفر دارد بعد ورودی منجر به پاسخ یکسان شده است که با وارون پذیری در تناقض

است. بنابراین فقط و فقط $x[n] = 0$ باید $y[n] = 0$ تولید کند.

فرض کنید سیستم وارون پذیر نباشد ⟸

$\exists\ x_1[n] \neq x_2[n] \longrightarrow y_1[n] = y_2[n]$

حال اگر ورودی $x[n] = x_1[n] - x_2[n]$ باشد چون سیستم خطی است:

$y[n] = y_1[n] - y_2[n] = 0$

که در تناقض با رابطه ی اول است. پس حتما باید وارون پذیر باشد.

$$y[n] = \begin{cases} 0 & x[n] = 0 \\ \sin[x[n]] + 3 & x[n] \neq 0 \end{cases}$$

(0

سوال ۵ الف)

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$ $\qquad y_1(1) = y_2(1) = 1$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$

$x_3 = x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_3(t)$ $\qquad y_3(1) = 1 \neq y_1(1) + y_2(1) \Longrightarrow$ سیستم خطی نیست.

$$x_1(t) = e^{2t}u(t) \longrightarrow y_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + Ae^{-2t}$$

$$y_1(1) = 1 \Longrightarrow y_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + \left(1 - \frac{e}{4}\right)e^{-2(t-1)}$$

$$x_2(t) = 0 \longrightarrow y_2(t) = Be^{-2t}$$

$$y_2(1) = 1 \Longrightarrow y_2(t) = e^{-2(t-1)}$$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_1(t) \longrightarrow y_3(t) = y_1(t)$$

$y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t) \longrightarrow$ سیستم خطی نیست.

ب)

$$x_1(t) = e^{2t}u(t) \xrightarrow{y_1(1)=1} y_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + \left(1 - \frac{e}{4}\right)e^{-2(t-1)}$$

$$x_2(t) = x_1(t-T) = e^{2(t-T)}u(t-T) \longrightarrow y_2(t) = \frac{1}{4}e^{2(t-T)} + Ae^{-2t}$$

$$y_2(1) = 1 \ \& \ T<1 \Longrightarrow y_2(t) = \frac{1}{4}e^{2(t-T)} + \left(1 - \frac{1}{4}e^{2(1-T)}\right)e^{-2(t-1)}$$

$y_2(t) \neq y_1(t-T) \longrightarrow$ سیستم متغیر با زمان است.

ج) اول نشان می‌دهیم اگر $y(1) = 0$ باشد سیستم خطی است.

$$\times\alpha \quad \frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) \qquad y_1(1) = 0$$

$$\times\beta \quad \frac{dy_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t) \qquad y_2(1) = 0$$

$$+ \quad \frac{d}{dt}\left(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\right) + 2\left(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\right) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

$$y_3(1) = y_1(1) + y_2(1) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \\ y_3(1) = 0 = y_1(1) + y_2(1) \end{array}\right\} \longrightarrow$$ سیستم خطی است.

بنابراین سیستم کلی به صورت کسکید این سیستم خطی با سیستم به شرط اولیه مشخص به دست می‌آید.

د) در بخش قبل ثابت کردیم که اگر $y(1)=0$. برای اینکه نشان دهیم متغیر با زمان نیست :

$$x_1(t) = e^{2t}u(t) \longrightarrow y_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + A\,e^{-2t}$$

$$y_1(1) = 0 \Rightarrow y_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2(t-2)}$$

$$x_2(t) = x_1(t - \tfrac{1}{2}) \qquad y_2(1) \neq y_1(1-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4}(e - e^{3})$$

$$y_2(1) = 0 \qquad \Rightarrow y_2(t) \neq y_1(t-\tfrac{1}{2}) \longrightarrow$$ سیستم متغیر با زمان نیست.

سوال ۴ الف) درست.

if $h(t)$ periodic & nonzero $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \infty \Rightarrow h(t)$ is unstable.

ب) نادرست. مثلاً معکوس $h[n]=\delta[n-k]$ میشود $g[n]=\delta[n+k]$ که علی نیست.

ج) نادرست.

$$h[n] = u[n] \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty \rightarrow$$ ناپایدار

د) درست.

$h[n]$ is bounded and nonzero in the range $n_1 \le n \le n_2$

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} |h[k]| < \infty \longrightarrow$$ سیستم پایدار است.

ه) نادرست. $h(t) = e^{t}u(t)$ علی است اما ناپایدار است.

و) نادرست.

cascade of a causal system with impulse response $h_1[n] = \delta[n-1]$ and a non causal system with impulse response $h_2[n] = \delta[n+1]$ leads to a system with overall impulse response given by

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]$$

ز) نادرست.

if $h(t) = e^{-t} u(t)$, $s(t) = (1 - e^{-t}) u(t)$

$$\int_0^\infty |1 - e^{-t}| \, dt = t + e^{-t} \Big|_0^\infty = \infty$$

Although the system is stable, the step response is not absolutely integrable.

ح) درست.

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \longrightarrow s[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[n-k]$$

if $s[n] = 0$ for $n < 0$, then $h[n] = 0$ for $n < 0$ and the system is causal.

دو طرف رابطه را از هم کم می‌کنیم.

$$s[n-1] = \sum_{k=0}^{\infty} h[n-1-k] \Rightarrow s[n] - s[n-1] = h[n]$$

$$\Rightarrow h[n] = 0 \quad \forall n < 0$$

سوال ۷

$$h_1[n] * h_2[n] = u[n-1] * \delta[n-1] = u[n]$$

$$\Longrightarrow y[n] = x[n] * \left(u[n] - h_3[n] + h_4[n]\right)$$

$$= x[n] * \left(u[n] - u[n-3] + \delta[n-1] - 2\delta[n-2]\right)$$

$$= x[n] * \underbrace{\left(\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]\right)}_{h[n]}$$

سیستم ۳ tap دارد، خروجی ۷ tap دارد پس سیگنال ورودی ۵ tap دارد $(5+3-1=7)$

و در سوال نشان داده که به ازای $n=-3 \to 1$ سیگنال ورودی مقدار داشته است پس :

$$y[-3] = 1 \Longrightarrow h[0]x[-3] = 1 \Longrightarrow \boxed{x[-3] = 1}$$

$$y[-1] = 2 \Longrightarrow h[0]x[-1] + h[1]x[-2] + h[2]x[-3] = 2$$

$$\Longrightarrow x[-1] + 2x[-2] + (-1) = 2 \quad (1)$$

$$y[0] = -3 \Longrightarrow x[0] + 2x[-1] - x[-2] = -3 \quad (2)$$

$$y[2] = 1 \Longrightarrow -x[0] + 2x[1] = 1 \quad (3)$$

$$y[3] = -1 \Longrightarrow -x[1] = -1 \Longrightarrow \boxed{x[1] = 1} \xrightarrow{\text{از } 3} \boxed{x[0] = 1}$$

$$\xrightarrow{\text{از } 1 \text{ و } 2} \boxed{x[-1] = -1} \text{ و } \boxed{x[-2] = 2}$$

$$\Longrightarrow a = y[-2] = x[-2]h[0] + x[-3]h[1] = \boxed{4}$$

$$b = y[1] = x[1]h[0] + x[0]h[1] + x[-1]h[2] = \boxed{4}$$