« تمرین سری اول »

سؤال ۱ :

$$x(t) = 1 - \delta(t-1) - \delta(t-2) - \delta(t-3) - \cdots$$

$$y(t) = \int_0^t \left(1 - \delta(\tau-1) - \delta(\tau-2) - \delta(\tau-3) - \cdots\right) d\tau$$

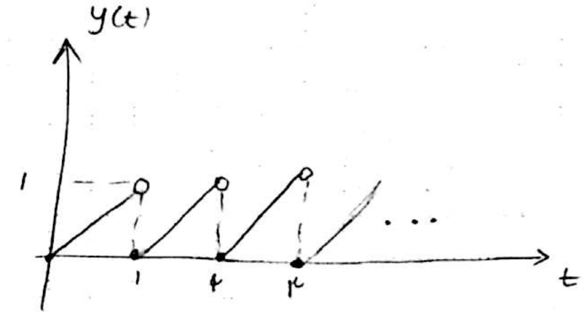
$0 \leq t < 1$: $y(t) = t$

$1 \leq t < 2$: $y(t) = t - 1$

$2 \leq t < 3$: $y(t) = t - 2$

$3 \leq t < 4$: $y(t) = t - 3$

$\longrightarrow$



$\hookrightarrow$ اگر تا بی‌نهایت به همین شکل ادامه یابد.

دندان اره‌ای $\leftarrow$

سؤال ۲ :

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t+1)\,\delta(t+1)\,dt \overset{t=-1}{=} \boxed{f(0)}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega T}\,\delta(t)\,dt = e^{-\omega T}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt}_{1} = e^{-\omega T} = e^{-\frac{2\pi}{T}T} = \boxed{e^{-2\pi}}$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\delta(t-1) + \delta(t+1)\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-1)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t+1)\,dt$

$$= \boxed{f(1) + f(-1)}$$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left(\delta(t-\tau) + \delta(t-2)\right) d\tau = \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau}^{f(t)} + \overbrace{\delta(t-2)}^{\begin{cases} 0 & t \neq 2 \\ \infty & t = 2 \end{cases}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,d\tau$

$$\Longrightarrow \; = \boxed{\begin{cases} f(t) & t \neq 2 \\ f(2) + \delta(0) \times \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,d\tau & t = 2 \end{cases}}$$

سؤال ۳ :

a) $\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t) \quad , \quad a>0$

از تعریف آقای دیراک استفاده می‌کنیم .

$t \neq 0 \longrightarrow$ دو طرف صفر هست

$$t=0 \longrightarrow \int_{0^-}^{0^+} \delta(at)\, dt \overset{u=at}{=} \int_{0^-}^{0^+} \delta(u)\, \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(u)\, du}_{1}$$

$$= \boxed{\frac{1}{a}}$$

b) $f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)$

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\,\delta(t)\right] = \underbrace{f'(t)\,\delta(t)}_{\hookrightarrow f'(0)\delta(t).} + f(t)\,\delta'(t)$$

خاصیت غربالگری ضربه

از طرفی : $\frac{d}{dt}\left[\underbrace{f(t)\,\delta(t)}_{\text{غربالگری}}\right] = \frac{d}{dt}\left[f(0)\,\delta(t)\right] = f(0)\frac{d}{dt}\delta(t) = f(0)\,\delta'(t)$

$\xrightarrow{\text{برابری دو تساوی}} \quad f(0)\,\delta'(t) = f'(0)\,\delta(t) + f(t)\,\delta'(t)$

$$\longrightarrow \boxed{f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)}$$

سوال ۴:

$$z=\frac{1}{۲}e^{j\pi/۴}$$

a) $Re(z)$.

$$z=\frac{1}{۲}e^{j\frac{\pi}{۴}}=\frac{1}{۲}\overbrace{\cos\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}+j\frac{1}{۲}\sin\frac{\pi}{۴}\longrightarrow Re(z)=\boxed{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}$$

b) $Im(z)=\boxed{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}$ $\longrightarrow$ مطابق a

c) $$|z|=\left|\frac{1}{۲}e^{j\frac{\pi}{۴}}\right|=\frac{1}{۲}\underbrace{\left|e^{j\frac{\pi}{۴}}\right|}_{1}=\boxed{\frac{1}{۲}}$$

d) $$\measuredangle z=\boxed{\frac{\pi}{۴}}$$

e) $$z^*=\boxed{\frac{1}{۲}e^{-j\frac{\pi}{۴}}}$$

f) $$z+z^*=\frac{1}{۲}\left[e^{j\frac{\pi}{۴}}+e^{-j\frac{\pi}{۴}}\right]=\cos\frac{\pi}{۴}=\boxed{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

سوال ۵ : الف) $Z = re^{j\theta}$

a) $Z^* = re^{-j\theta} \longrightarrow |Z^*| = r$

$\longrightarrow \measuredangle Z^* = -\theta$

b) $Z^2 = r^2 e^{j2\theta} \longrightarrow |Z^2| = r^2$

$\longrightarrow \measuredangle Z^2 = 2\theta$

c) $jZ = \longrightarrow |jZ| = |Z| = r$

$\longrightarrow \measuredangle jZ = \frac{\pi}{2} + \theta$

$j \to e^{j\frac{\pi}{2}}$

d) $ZZ^* = re^{j\theta} \times re^{-j\theta} = r^2 \longrightarrow |ZZ^*| = r^2$

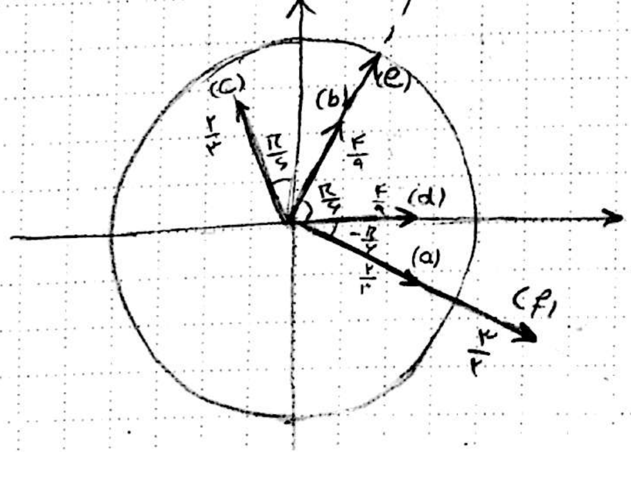
$\longrightarrow \measuredangle ZZ^* = 0$

e) $\frac{Z}{Z^*} = \frac{\cancel{r}e^{j\theta}}{\cancel{r}e^{-j\theta}} = e^{j2\theta} \longrightarrow \left|\frac{Z}{Z^*}\right| = 1$

$\longrightarrow \measuredangle \frac{Z}{Z^*} = 2\theta$

f) $\frac{1}{Z} = \frac{1}{re^{j\theta}} = \frac{1}{r} e^{-j\theta} \longrightarrow \left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{r}$

$\longrightarrow \measuredangle \frac{1}{Z} = -\theta$



ب) $\theta = \frac{\pi}{6}$

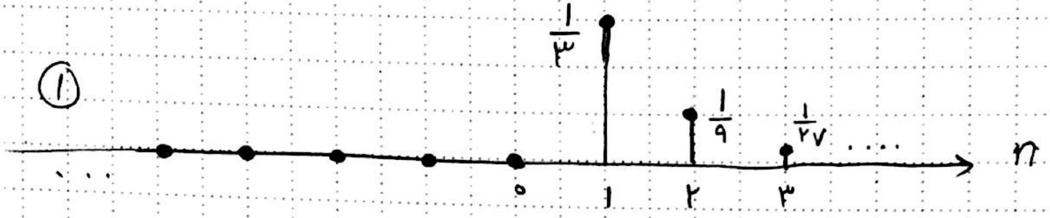
$r = \frac{2}{3}$

سؤال ۶ :

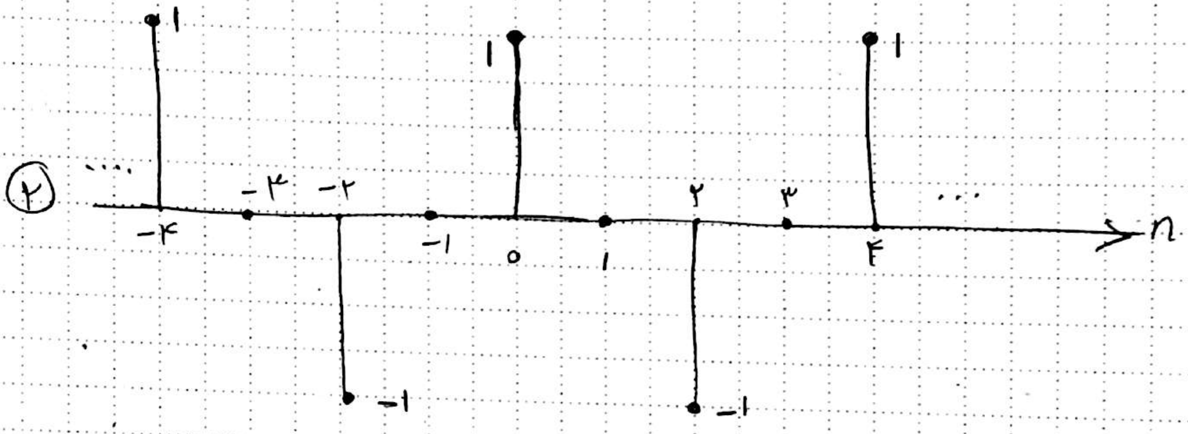
(۱) $x[n] = \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ ۳^{-n} & n > 0 \end{cases}$ و (۲) $x[n] = \cos(n\frac{\pi}{۲})$

الف)

(۱)



(۲)



ب)

(۱) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^۲ = \sum_{n=۱}^{\infty} ۳^{-۲n} = \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{۱}{۹}\right)^n \overset{\text{تصاعد هندسی}}{=} \frac{\frac{۱}{۹}}{۱-\frac{۱}{۹}} = \frac{۱/۹}{۸/۹} = \boxed{\frac{۱}{۸}}$$

(۲) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\cos(n\frac{\pi}{۲})\right|^۲ = \boxed{\infty} \longrightarrow$$ با توجه به شکل

همچنین می‌توان گفت چون سیگنال متناوب است پس سیگنال توان است

پس انرژی آن نامحدود است.

ج)

(۱) $\longrightarrow$ با توجه به قسمت قبل سیگنال انرژی است $\longrightarrow$ $\boxed{P = 0}$

(۲) $$\lim_{N\to\infty} \frac{۱}{۲N+۱} \sum_{n=-N}^{N} \left|\cos(\frac{n\pi}{۲})\right|^۲ = \lim_{N\to\infty} \frac{N+۱}{۲N+۱} = \boxed{\frac{۱}{۲}}$$

① $|x[n]| \leq L \longrightarrow 3^{-n} \leq L$

$n>0$

$\quad \hookrightarrow \max\{3^{-n}\} = \frac{1}{3}$

$\longrightarrow \boxed{L_{min} = \frac{1}{3}}$

(ب)

۲) $\left|\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| \leq L \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} \boxed{L_{min} = 1}$

سؤال ۷ :

a) $x[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \longrightarrow$ متناوب

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \qquad \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \qquad \longrightarrow \boxed{N = [4, 6] = 12}$

$\longrightarrow \boxed{f = \frac{1}{12}\ Hz} \qquad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{12}\ \frac{rad}{sec}}$

b) $x[n] = n \longrightarrow$ غیر متناوب

c) $x[n] = 1 \longrightarrow$ متناوب $\longrightarrow \boxed{N = 1}$

$\hookrightarrow \cos(2\pi n)$

$\boxed{f = 1\ Hz} \longrightarrow \boxed{\omega = 2\pi\ \frac{rad}{sec}}$

d) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8} n^2\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} n^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8} (n-n_0)^2\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{8}\left(n^2 + \underbrace{n_0^2 - 2nn_0}\right)\right)$$

برای متناوب بودن می‌بایست ⟶ $\frac{\pi}{8}\left(n_0^2 - 2nn_0\right) = 2k\pi$

$$\frac{\pi}{8} n_0\left(n_0 - 2n\right) = 2k\pi$$

فرد n_0 ⟶ $\frac{\pi}{8}$ × فرد × فرد ⟶ نمی‌تواند مضرب 2π باشد.

زوج n_0 ⟶ $\frac{\pi}{8}$ × زوج × زوج ⟶ می‌تواند

حالت‌های مختلف زوج بودن را بررسی می‌کنیم:

1) $n_0 = 2$ ⟶ $\frac{\pi}{8} \times 2 \times \underbrace{(2-2n)}_{\text{مضرب ۲}}$ ⟶ لزوماً $2k\pi$ نمی‌شود.

2) $n_0 = 4$ ⟶ $\frac{\pi}{8} \times 4 \times$ (مضرب ۲) = ⟶ عبارت پرانتز باید مضرب ۴ باشد که با توجه به مقدار n لزوماً اینگونه نیست.

⟹ $\boxed{n_0 = 8}$ ⟶ $\left(\frac{\pi}{8} \times 8 \times \right.$ (مضرب ۲)$\left.\right) = 2k\pi$ ✓

$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
1	$\cos\frac{\pi}{8}$	0	$-\cos\frac{\pi}{8}$	1	$-\cos\frac{\pi}{8}$	0

$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$, \ldots$
$\cos\frac{\pi}{8}$	1	$\cos\frac{\pi}{8}$	0	

e) $x(t) = \sin(2t) \longrightarrow$ متناوب

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi \longrightarrow \boxed{f = \frac{1}{\pi}\ Hz} \longrightarrow \boxed{\omega = 2\ \frac{rad}{sec}}$

f) $x(t) = e^{j\pi t} \longrightarrow$ متناوب

$\boxed{\omega = \pi\ \frac{rad}{sec}} \longrightarrow \frac{2\pi}{T} = \pi \longrightarrow \boxed{T = 2} \longrightarrow \boxed{f = \frac{1}{2}\ Hz}$

g) $x(t) = e^{(3+j\pi)t} \longrightarrow$ غیرمتناوب