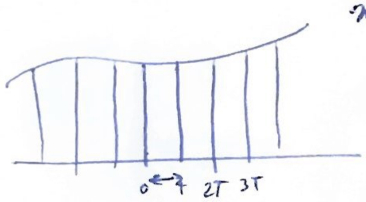
$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$$

$$u \triangleq e^{-j\omega} \longrightarrow \frac{2}{(1-\frac{1}{2}u)(1-\frac{1}{4}u)} = \frac{A}{(1-\frac{1}{2}u)} + \frac{B}{(1-\frac{1}{4}u)} = \frac{4}{(1-\frac{1}{2}u)} + \frac{-2}{(1-\frac{1}{4}u)}$$

$$\rightarrow h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

نمونه برداری (فصل ۷)

$x(t) \rightarrow$ سیگنال پیوسته

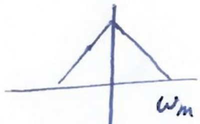


$x[n] = x(nT)$

$f_s = \frac{1}{T}$ ← فرکانس نمونه برداری

$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$

سوال: آیا سیگنال پیوسته از روی نمونه های گسسته قابل بازیابی است؟



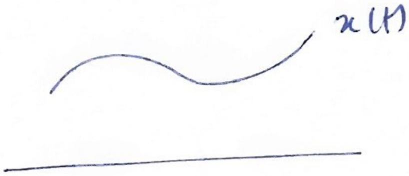
پهنای باند

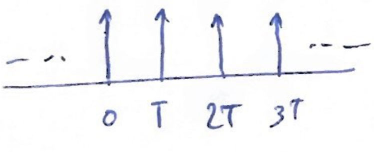
$\omega_s > 2\omega_m$

نایکوییست

پاسخ: تحت شرایطی خاص یک سیگنال پیوسته می توان از یک سری نمونه عبور داد.

پهنای باند سیگنال $2\times$ ≤ فرکانس نمونه برداری





$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$

$\rightarrow x_p(t) = x(t)\,p(t)$

$x_p(t) = x(t)\,p(t)$

$x_p(t)$ را به صورت یک سیگنال پیوسته می‌دانیم
سیگنالی که فقط در مقادیر صحیح مقدار دارد.

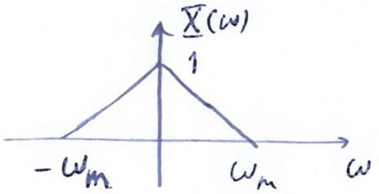
$$x_p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)$$

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s)\right)$$

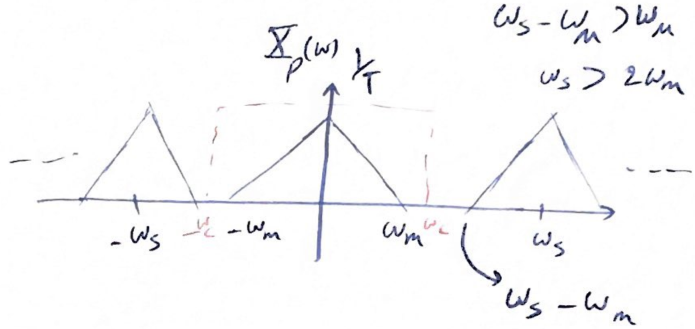
$$X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

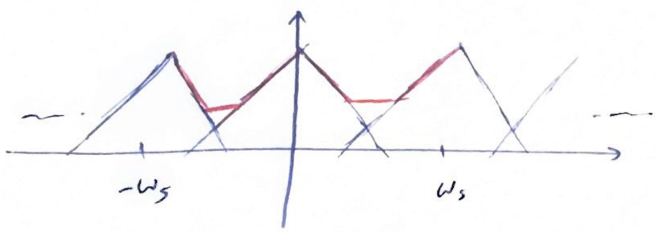


حالت اول:

$\omega_s - \omega_m > \omega_m$

$\omega_s > 2\omega_m$





حالت دوم:

$\omega_s < 2\omega_m$

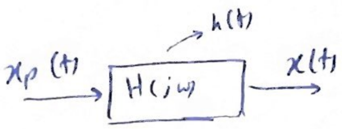
$\downarrow$

aliasing رخ داده

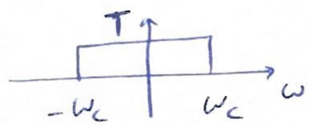
یک قسمت از سیگنال اصلی را از دست داده‌ایم.

قضیه نمونه برداری (نایکوئیست):

اگر $\omega_s > 2\omega_m$، آنگاه نمونه‌های سیگنال، سیگنال را به طور یکتا مشخص می‌کند.



سیستم بازسازی:

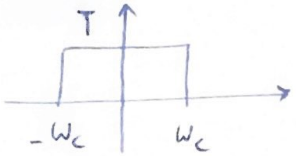


$-\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m$

بازیابی شده

$\uparrow$

$x_r(t) = h(t) * x_p(t)$



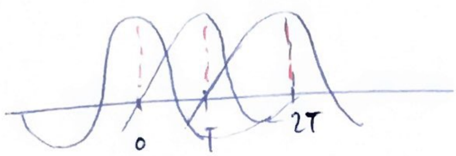
$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{T\sin\omega_c t}{\pi t}$$

$$h(t) = \frac{T\sin\omega_c t}{\pi t} = \frac{\omega_c T\sin\omega_c t}{\pi\omega_c t}$$

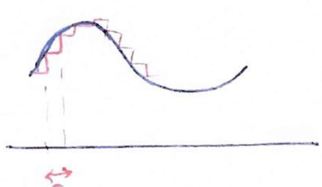
$$x_p(t) = x(t)\sum\delta(t-nT)$$

$$x_r(t) = h(t) * x_p(t)$$

$$= h(t) * \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,h(t-nT) = \sum_{n=-\infty} x(nT)\,\frac{\omega_c T}{\pi}\,\frac{\sin\omega_c(t-nT)}{\omega_c(t-nT)}$$



Zero-order hold نمونه برداری



روش عملی: با یک کلید به فواصل زمانی T نمونه سیگنال را برمی‌داریم.

مثال) $x(t) = \cos\omega_0 t$

$\omega_s > 6\omega_0 \longrightarrow > 2\omega_0$ است

$\omega_s = \frac{3}{2}\omega_0 \longrightarrow$ aliasing