« تمرین سری سوم »

سؤال ۱ :

i) فقط دارای هارمونیک فرد باشد . ⟵ باید $f(t+\frac{T}{2}) = -f(t)$ باشد

اثبات : $f(t) \xleftrightarrow{F.S.} a_k$

$$f(t+\frac{T}{2}) = -f(t) \xleftrightarrow{F.S.} a_k e^{jk\frac{T}{2}\times\frac{2\pi}{T}} = -a_k$$

$$\longrightarrow a_k e^{jk\pi} = -a_k \longrightarrow a_k(1+e^{jk\pi}) = 0 \longrightarrow a_k \underbrace{\left(1+(-1)^k\right)}_{k \text{ فرد}} = 0$$

با اعمال شرط فوق در سه شکل ملاحظه می‌شود که هر سه فقط هارمونیک فرد دارند . (ضرایب سری فوریه)

ii) فقط ضرایب حقیقی خالص

$x(t)$ حقیقی و زوج ⟵ a_k حقیقی و زوج ⟵ شکل ۱

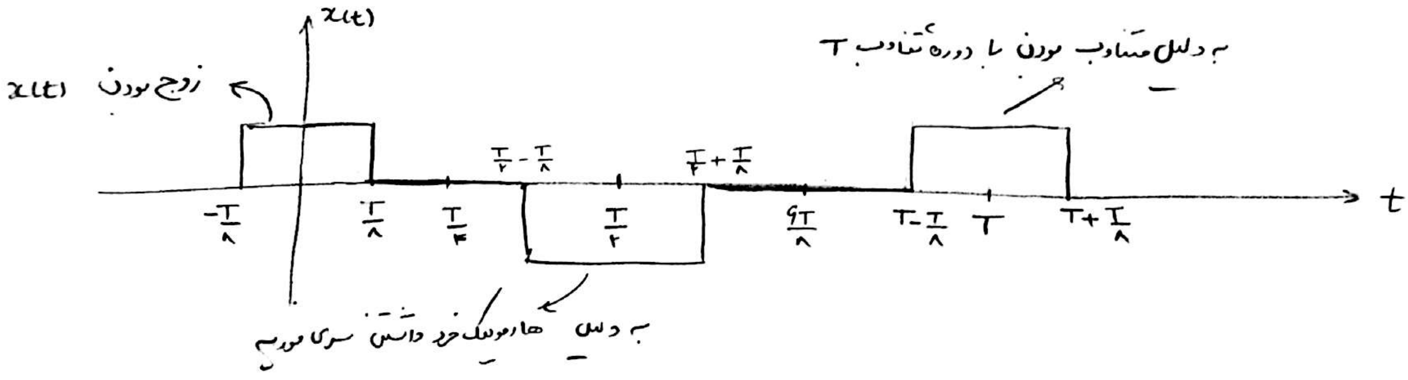
iii) ضرایب موهومی خالص

$x(t)$ حقیقی و فرد ⟵ a_k موهومی و فرد ⟵ شکل ۲

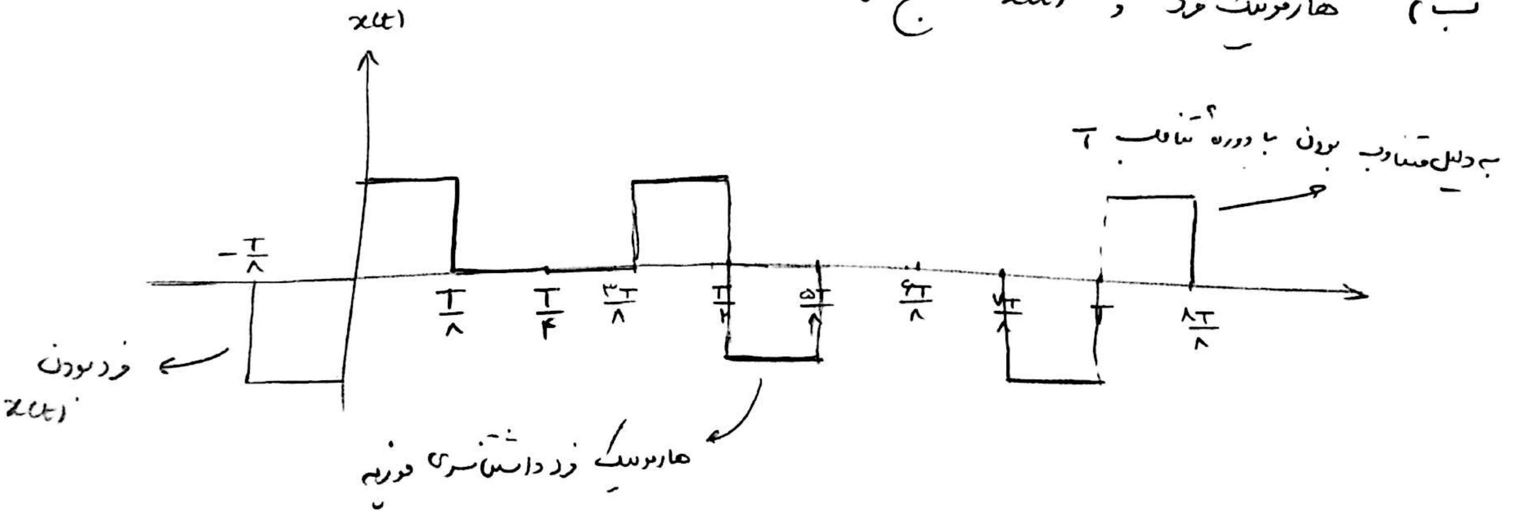
سؤال ۲ :

الف) هارمونیک فرد و x(t) تابع زوج

← مطابق سؤال ۱ ← $f(t+\frac{T}{2}) = -f(t)$ ← پس در $\frac{T}{2}$ می‌بایست قرینه شکلی که در ۰ و T هست، وجود داشته باشد.

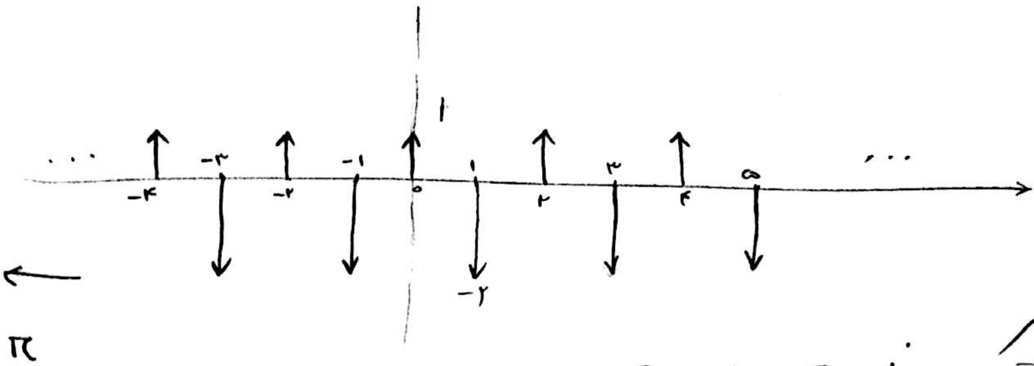


ب) هارمونیک فرد و x(t) تابع فرد



سؤال ۳ :

الف)



$T=۲$ ←

↳ $\omega=\pi$

↳ ترکیب خطی دو قطار ضربه است.

$$S(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) \xleftrightarrow{F.S.} \frac{1}{T}$$

$$\longrightarrow x(t)=S(t)-۲S(t-1)$$

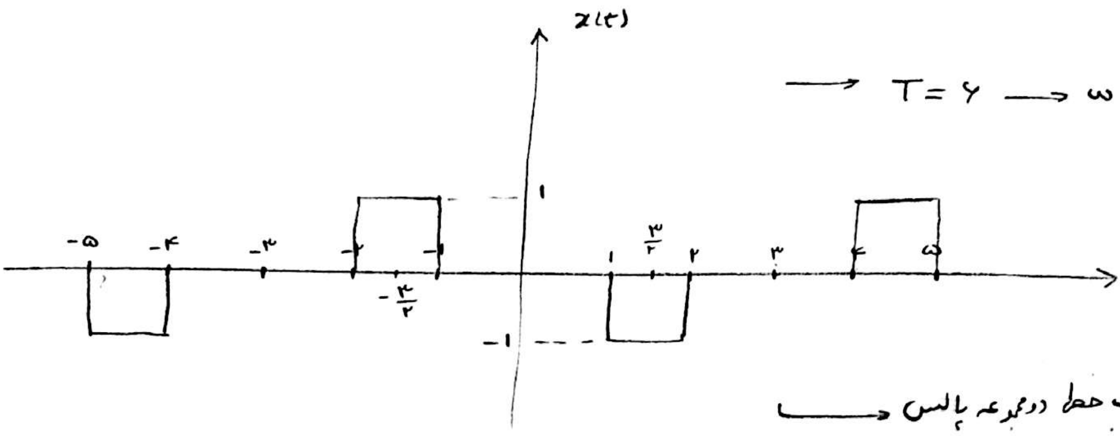
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)-۲\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT-1)$$

همچنین می‌دانیم : $x(t+t_0) \longleftrightarrow a_k e^{jk\omega_0 t_0}$

$$\longrightarrow a_{k\,\text{کل}}=\frac{1}{T}-۲\times\frac{1}{T}\times e^{-jk\omega}$$

$$\overset{T=۲}{=}\frac{1}{۲}-۲\times\frac{1}{۲}\times e^{-jk\pi} = \boxed{\frac{1}{۲}-(-1)^k}$$

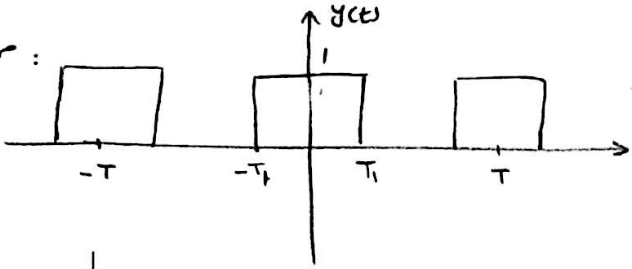
$$\longrightarrow \boxed{x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega t}}$$



$\longrightarrow T = 6 \longrightarrow \omega = \frac{\pi}{3}$

تولید خط دو مجموعه پالس ←

می دانیم :



$\xleftrightarrow{F.S.} b_k = \frac{2T_1}{T} \, \text{Sinc}\left(\frac{2kT_1}{T}\right)$

$\longrightarrow T_1 = \frac{1}{2}$

برای اینکه به x(t) برسیم

$$x(t) = y\left(t + \frac{3}{2}\right) - y\left(t - \frac{3}{2}\right) \xleftrightarrow{F.S.} a_k = b_k e^{jk\omega\frac{3}{2}} - b_k e^{-jk\omega\frac{3}{2}}$$

با توجه به خاصیت شیفت زمانی

$$\longrightarrow a_k = b_k\left[e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right] = 2j \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \times b_k$$

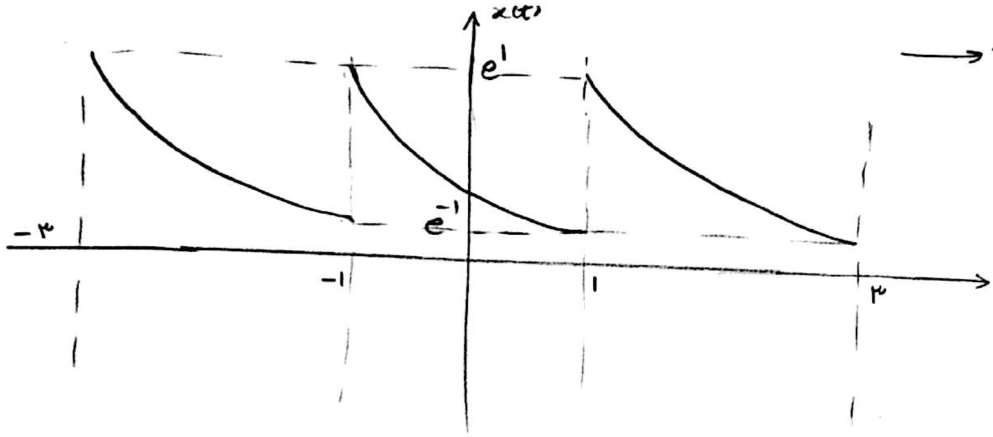
$$= 2j \, \text{Sin}\left(k\frac{\pi}{2}\right) \times \frac{1}{6} \, \text{Sinc}\left(\frac{k}{6}\right)$$

$$\boxed{= \frac{j}{3} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \text{Sinc}\left(\frac{k}{6}\right)}$$

$$\boxed{\longrightarrow x(t) = \sum a_k e^{jk\omega t}}$$

ب)

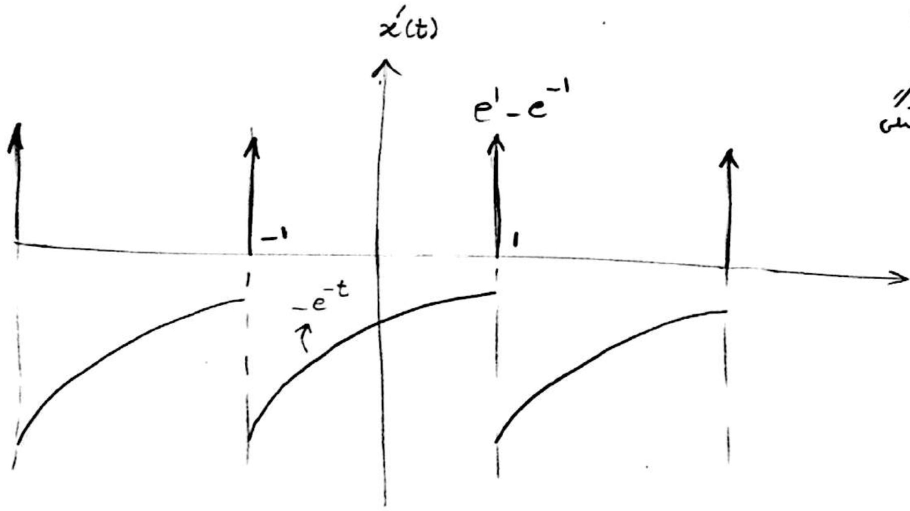
$x(t) = e^{-t} \quad \text{for} \quad -1 \leqslant t \leqslant 1$



$\longrightarrow T = ۲ \longrightarrow \omega = \pi$

از $x(t)$ مشتق می‌گیریم :

در نقاط ناپیوستگی به اندازه‌ی میزان ناپیوستگی ضربه ایجاد می‌شود .



$$\longrightarrow x'(t) = -x(t) + (e^{1} - e^{-1}) \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(t - KT - 1)$$

$$\xleftrightarrow{F.S.} (j\omega K)\, a_K = -a_K + (e^{1} - e^{-1}) \times \frac{1}{T} \times e^{-jK\omega \times \pi} \rightarrow (-1)^K$$

$$\longrightarrow a_K (1 + j\omega K) = \frac{(e^{1} - e^{-1})(-1)^K}{۲}$$

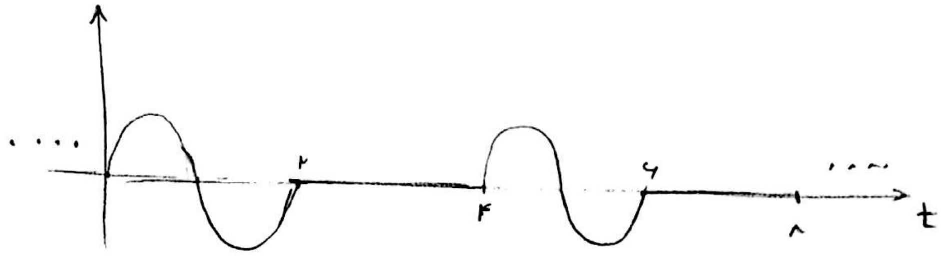
$$\longrightarrow \boxed{a_K = \frac{(e^{1} - e^{-1})(-1)^K}{۲(1 + j\omega K)}}$$

$$\longrightarrow \boxed{x(t) = \sum a_K e^{jK\omega t}}$$

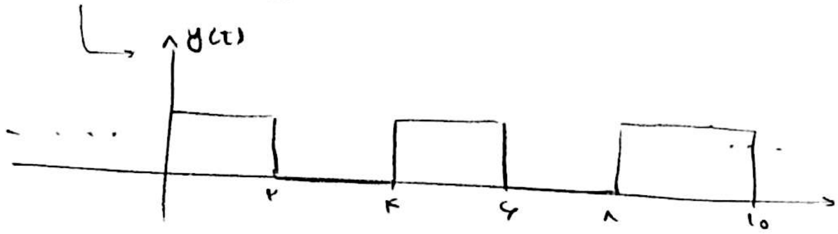
ج) سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب ۴

$\hookrightarrow \omega = \frac{\pi}{2}$

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) \quad (T=2) & 0 < t \leq 2 \\ 0 & 2 < t \leq 4 \end{cases}$$



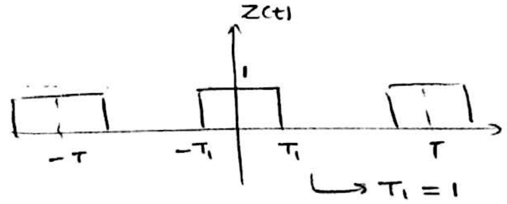
حاصل‌ضرب $\sin(\pi t)$ در یک پالس مستطیلی شیفت یافته



منجر به شیفت فرکانسی در $y(t)$ می‌شود

$$\longrightarrow x(t) = \sin(\pi t) \times y(t) = \left(\frac{1}{2j} e^{j\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j\pi t}\right) \times y(t)$$

یادآوری جدول $\longrightarrow$



$$\xleftrightarrow{F.S.} b_k = \frac{2T_1}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{2T_1}{T} k\right)$$

$T_1 = 1$

$y(t) = z(t-1)$

$$x(t) \xleftrightarrow{F.S.} a_k$$

$$\longrightarrow \left[\frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{2}(2)t} - \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{2}(-2)t}\right] \times y(t)$$

ضرایب $\hookrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) e^{-jk\frac{\pi}{2}}$

شیفت فرکانسی: $x(t) e^{jm\omega_0 t} \xleftrightarrow{F.S.} a_{k-m}$

$$\Longrightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{4j}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{k-2}{2}\right) e^{-j(k-2)\frac{\pi}{2}} - \operatorname{sinc}\left(\frac{k+2}{2}\right) e^{-j(k+2)\frac{\pi}{2}}\right]}$$

$$\longrightarrow \boxed{x(t) = \sum a_k e^{jk\omega t}}$$

سؤال ۴ :

$$x(t) = \cos(4\pi t) \qquad y(t) = \sin(4\pi t) \qquad T = \frac{1}{2}$$

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \qquad \hookrightarrow \omega = 4\pi$$

الف)

$$x(t) = \cos(4\pi t) = \frac{1}{2} e^{j4\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j4\pi t}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1} e^{j(4\pi)(1)t} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{-1}} e^{j(4\pi)(-1)t}$$

$$\longrightarrow a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{-1} = \frac{1}{2} \longrightarrow$$ بقیه ضرایب صفر

ب)

$$y(t) = \sin(4\pi t) = \frac{1}{2j} e^{j4\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j4\pi t}$$

$$\longrightarrow b_1 = \frac{1}{2j}, \quad b_{-1} = \frac{-1}{2j} \longrightarrow$$ بقیه ضرایب صفر

ج)

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} c_k = a_k * b_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m}$$

a_k و b_k فقط در $k = \pm 1$ مقدار غیرصفر دارند.

$$\longrightarrow c_2 = \sum a_m b_{2-m} = a_1 b_1 = \frac{1}{4j}$$

$$c_{-2} = a_{-1} b_{-1} = \frac{-1}{4j}$$

$$c_0 = a_1 b_{-1} + a_{-1} b_1 = 0$$

د)

$$z(t) = \cos(4\pi t) \sin(4\pi t)$$

$$= \frac{1}{2} \sin(8\pi t) = \frac{1}{4j}\left[e^{j8\pi t} - e^{-j8\pi t}\right]$$

$$= \frac{1}{4j}\left[e^{j(4\pi)(2)t} - e^{j(4\pi)(-2)t}\right]$$

$$\longrightarrow c_2 = \frac{1}{4j}, \quad c_{-2} = \frac{-1}{4j} \longrightarrow$$ همان نتایج حاصل شد

سؤال ۵ :

فرم ساده شده سری فوریه برای سیگنال های حقیقی

۱. $x(t)$ سیگنال حقیقی است. $\longleftarrow$ $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}$ ، $a_k = a_{-k}^*$

۲- $x(t)$ متناوب با دوره تناوب $T=6 \longrightarrow \omega = \frac{\pi}{3}$

۳- برای $k=0,\ k>2$، $a_k = 0$ است. $\longrightarrow$ a_2 و a_{-2} و a_1 و a_{-1} داریم

۴- $x(t) = -x(t-3)$ $\longrightarrow$ باتوجه به اینکه $T=6$ و طبق سؤال ۱، سری فوریه فقط هارمونیک فرد دارد

۵- $\frac{1}{6}\int_{-3}^{3} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$

۶- a_1 حقیقی و مثبت

$$\longrightarrow x(t) = 2Re\{a_1 e^{j\frac{\pi}{3}t}\} \overset{\text{حقیقی } a_1}{=} 2a_1 \cos(\frac{\pi}{3}t)$$

از طرفی طبق (۵) $\longrightarrow \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{4a_1^2}{6} \underbrace{\int_{-3}^{3} \cos^2\frac{\pi}{3}t \, dt}_{3} = \frac{1}{2}$

$$\longrightarrow a_1^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{حقیقی}, a_1 > 0} \boxed{a_1 = \frac{1}{2}}$$

$$\longrightarrow \boxed{x(t) = \cos\frac{\pi}{3}t}$$

سؤال ۶ :

$$\omega = \frac{\pi}{2} \longleftarrow T = 4$$

الف) $a_k = \frac{(-1)^k \sin(\frac{k\pi}{8})}{2k\pi}$ ، $(-1)^k \longrightarrow e^{jk\pi}$ ، $\frac{\sin(\frac{k\pi}{8})}{2k\pi} \longrightarrow b_k$

$$b_k = \frac{\sin(\frac{k\pi}{8})}{2k\pi} = \frac{\sin(\frac{k\pi}{8})}{16 \times \frac{k\pi}{8}} = \frac{1}{16}\operatorname{sinc}(\frac{k}{8}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8}\operatorname{sinc}(\frac{k}{8})$$

$\frac{1}{2} \longleftarrow$ اندازه پالس

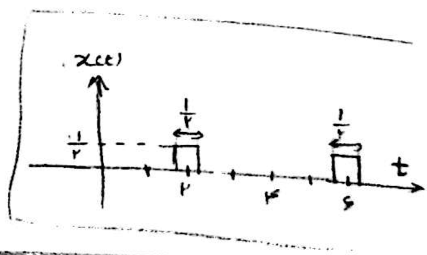
مقایسه با رابطه $\frac{2T_1}{T}\operatorname{sinc}(\frac{2T_1}{T}k) \xrightarrow{T=4} \boxed{T_1 = \frac{1}{4}}$ ، اندازه پالس $\frac{1}{2}$

$$y(t) \longleftrightarrow b_k$$

$$\longrightarrow y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |t| < \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} < |t| < 2 \end{cases}$$

$$a_k = e^{jk\pi} b_k \longrightarrow a_k = e^{jk(\frac{\pi}{2})(2)} b_k$$

$$\longrightarrow x(t) = y(t+2) \longrightarrow$$



ب)

$$T=4 \longrightarrow \omega=\frac{\pi}{2} \qquad a_K = \begin{cases} jK & |K|<3 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$\longleftarrow$ a_K فقط به ازای $K=\pm 1$ ، $K=\pm 2$ غیرصفر است.

$$a_1 = j \qquad a_{-1} = -j \qquad a_2 = 2j \qquad a_{-2} = -2j$$

$$x(t) = \sum a_K e^{jK\frac{\pi}{2}t} = j\left(e^{j\frac{\pi}{2}t} - e^{-j\frac{\pi}{2}t}\right) + 2j\left(e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}\right)$$

$$\boxed{= -2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 4\sin(\pi t)}$$

ج)

$$T=4 \longrightarrow \omega=\frac{\pi}{2} \qquad a_K = \begin{cases} 1 & K \text{ زوج} \\ 2 & K \text{ فرد} \end{cases}$$

می‌توان a_K را به فرم روبرو نوشت

$$a_K = \frac{1+(-1)^{K-1}}{2} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^K$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{jK\pi}$$

از خاصیت خطی بودن استفاده می‌کنیم. (پس باید دوره تناوب هر دو سیگنال یکسان باشد.)

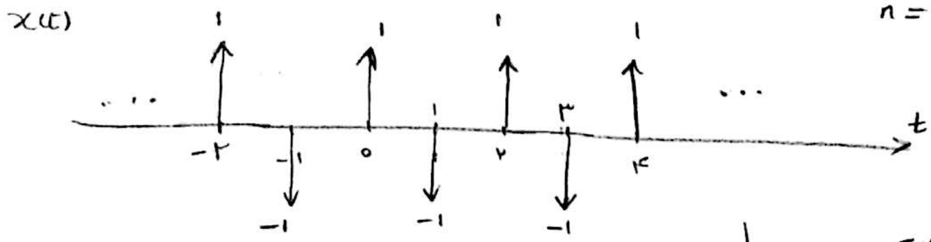
$$\sum \delta(t-KT) \xleftrightarrow{F.S.} \frac{1}{T}$$

$$\longrightarrow a_K = \frac{3}{2} \times 4 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{4} e^{jK\frac{\pi}{2}(2)}$$

$$\longrightarrow \boxed{x(t) = 6\sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(t-4K) - 2\sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(t-4K+2)}$$

سؤال ۷ :

الف) $$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n)$$



$$T = 2 \longrightarrow \omega_0 = \pi$$

ترکیب خطی دو قطار ضربه ⟵

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k-1)$$

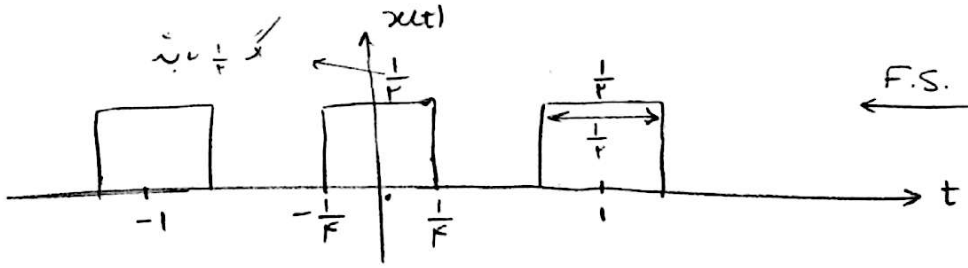
$$\longrightarrow a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-jk\pi} \boxed{= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k}$$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t|} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{4+j\omega} + \frac{1}{4-j\omega} = \frac{8}{16+\omega^2}$$

$$b_k = a_k H(jk\omega_0) \longrightarrow \boxed{b_k = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k\right] \times \frac{8}{16+k^2\omega_0^2}}$$

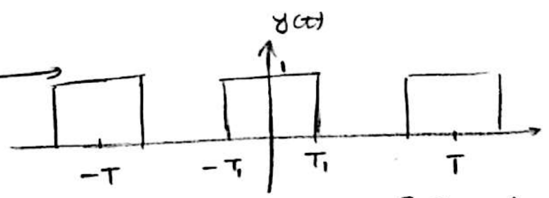
$\omega_0 = \pi$

ب)



$$\xleftrightarrow{F.S.} a_k$$

یادآوری مجدد !



$$\xleftrightarrow{F.S} b'_k = \frac{2T_1}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{2T_1}{T}k\right)$$

$$y(t) = 2x(t) \xleftrightarrow{F.S.} b'_k = 2a_k$$

با توجه به صورت سؤال ⟶ $T_1 = \frac{1}{4}$, $T = 1$ $\longrightarrow a_k = \frac{1}{4} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$

$$b_k = a_k H(jk\omega_0) \longrightarrow \boxed{b_k = \frac{1}{4} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \times \frac{8}{16+k^2\omega_0^2}}$$

$\omega_0 = \pi$