سوال ① :

$x(t)$	(a)	(b)	(c)	(d)
$x(t)e^{-t}$	$-2<\mathrm{Re}\{s\}<2$	$\mathrm{Re}\{s\}\in\mathbb{R}$	$\mathrm{Re}\{s\}\geq 2$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$x(t)=0$ $t>10$	$\mathrm{Re}\{s\}<-2$	$\mathrm{Re}\{s\}\in\mathbb{R}$	$\mathrm{Re}\{s\}<-2$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$x(t)=0$ $t<0$	$\mathrm{Re}\{s\}>2$	$\mathrm{Re}\{s\}\in\mathbb{R}$	$\mathrm{Re}\{s\}\geq -2$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$

سوال ② : الف)

$$x(t)=x(-t) \Longrightarrow \mathcal{L}\{x(t)\}=\mathcal{L}\{x(-t)\} \Rightarrow X(s)=X(-s)$$

ب)

$$x(t)=-x(-t) \Longrightarrow \mathcal{L}\{x(t)\}=\mathcal{L}\{-x(-t)\}=-\mathcal{L}\{x(-t)\} \Rightarrow X(s)=-X(-s)$$

ج) چون $x(t)$ زوج است بنابراین یا دوطرفه نامحدود است یا محدود حول صفر است. بنابراین یا ROC باید کل صفحه s باشد یا اگر قطب دارد به صورت یک نوار باشد.

$$(a) \longrightarrow X(s)=\frac{As}{(s+1)(s-1)}$$

$$X(-s)=\frac{-As}{(s-1)(s+1)}=-X(s) \Longrightarrow X(s)=-X(-s)$$

$x(t)$ زوج نیست.

(b) ⟶ ROC نمی‌تواند به صورت نوار باشد.

(c) ⟶ ROC نمی‌تواند به صورت نوار باشد.

$$(d) \longrightarrow X(s)=\frac{A(s^2+1)}{(s-1)(s+1)}$$

$$X(-s)=\frac{A(s^2+1)}{(s-1)(s+1)} \Rightarrow X(s)=X(-s)$$

با انتخاب $ROC: -1<\mathrm{Re}\{s\}<1$ ، $x(t)$ زوج است.

د) (b) و (c) نمی‌توانند فرد باشند چون ROC نمی‌تواند به صورت نوار باشد. (d) هم طبق قسمت ج)
زوج است. (a) طبق قسمت قبل فرد است به ازای
$ROC: -1<\mathrm{Re}\{s\}<1$

سؤال ③ :

الف) $f(t) = (t-۲)(t^۲-۲) = t^۳ - ۲t - ۲t^۲ + ۴ = t^۳ - ۲t^۲ - ۲t + ۴$

$$\boxed{t^n x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n X^{(n)}(s)}$$

$$۴u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{۴}{s}$$

$$-۲t\,u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -۲ \times (-1)^1 \times \left(\frac{1}{s}\right)' = -۲ \times (-1) \times (-s^{-۲}) = -\frac{۲}{s^۲}$$

$$-۲t^۲u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -۲ \times (-1)^۲ \times \left(\frac{1}{s}\right)'' = -۲ \times (1) \times \frac{۲}{s^۳} = -\frac{۴}{s^۳}$$

$$\boxed{ROC: Re\{s\} > ۰}$$

$$t^۳u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^۳ \times \left(\frac{1}{s}\right)''' = (-1) \times \frac{(-۶)}{s^۴} = \frac{۶}{s^۴}$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{۶}{s^۴} - \frac{۴}{s^۳} - \frac{۲}{s^۲} + \frac{۴}{s}$$

ب) $f(t) = ۳\cos^۲(t) = \frac{۳}{۲}\cos ۲x + \frac{۳}{۲}$

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{\omega_0^۲ + s^۲}$$

$Re\{s\} > ۰$

$$\cos^۲ x = \frac{1}{۲}(\cos ۲x + 1)$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{۳}{۲} \times \frac{s}{۴+s^۲} + \frac{۳}{۲s}$$

ج) $f(t) = e^{۷t} \times e^{\frac{1}{۲}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-۷} \times e^{\frac{1}{۲}}$ $\quad Re\{s\} > ۷$

د) $f(t) = \cos\left(۲t + \frac{\pi}{۴}\right) = \cos ۲t \cos\frac{\pi}{۴} - \sin ۲t \sin\frac{\pi}{۴}$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos ۲t - \frac{1}{۲}\sin ۲t$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{s}{۴+s^۲} - \frac{1}{۲}\,\frac{۲}{۴+s^۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\,\frac{s}{s^۲+۴} - \frac{1}{s^۲+۴}$$

ه) $f(t) = t^۳e^{\pi t} + t^۲e^{-\pi t}$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{۶}{(s-\pi)^۴} + \frac{۲}{(s+\pi)^۳}$$

$$e^{\pi t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-\pi}$$

$$t^۳e^{\pi t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^۳ \times \left(\frac{1}{s-\pi}\right)''' = \frac{۶}{(s-\pi)^۴}$$

$$e^{-\pi t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+\pi}$$

$$t^۲e^{-\pi t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^۲ \times \left(\frac{1}{s+\pi}\right)'' = \frac{۲}{(s+\pi)^۳}$$

د) $f(t) = e^{t}\cos(۳t+۴) = e^{t}\cos\left(۳\left(t+\frac{۴}{۳}\right)\right)$

$$\cos(۳t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{۹+s^{۲}} \qquad\qquad x(t-t_{۰}) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_{۰}}X(s)$$

$$\cos\left(۳\left(t+\frac{۴}{۳}\right)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{\frac{۴}{۳}s}\,\frac{s}{۹+s^{۲}} \qquad\qquad e^{s_{۰}t}x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s-s_{۰})$$

$$e^{t}\cos(۳t+۴) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{\frac{۴}{۳}(s-۱)}\,\frac{(s-۱)}{۹+(s-۱)^{۲}}$$

سوال ④ :

الف) $F(s) = \dfrac{s-۲}{s^{۲}-۲۵}$

$$\frac{a}{s-۵} + \frac{b}{s+۵} = \frac{s-۲}{s^{۲}-۲۵} \Longrightarrow \begin{cases} a+b=۱ \Longrightarrow ۵a+۵b=۵ \\ ۵a-۵b=-۲ \end{cases}$$

$$۱۰a = ۳ \Longrightarrow a = \frac{۳}{۱۰}$$

$$b = \frac{۷}{۱۰}$$

$$F(s) = \frac{\frac{۳}{۱۰}}{s-۵} + \frac{\frac{۷}{۱۰}}{s+۵} \xrightarrow{Re\{s\}<-۵} -e^{-۵t}u(-t)$$

$$\frac{\frac{۳}{۱۰}}{s-۵}: \quad Re\{s\}>۵ \;\; e^{۵t}u(t) \qquad Re\{s\}<۵ \;\; -e^{۵t}u(-t)$$

$$\frac{\frac{۷}{۱۰}}{s+۵}: \quad Re\{s\}>-۵ \;\; e^{-۵t}u(t)$$

$$Re\{s\}>۵ \longrightarrow \frac{۳}{۱۰}e^{۵t}u(t) + \frac{۷}{۱۰}e^{-۵t}u(t)$$

$$-۵<Re\{s\}<۵ \longrightarrow -\frac{۳}{۱۰}e^{۵t}u(-t) + \frac{۷}{۱۰}e^{-۵t}u(t)$$

$$Re\{s\}<-۵ \longrightarrow -\frac{۳}{۱۰}e^{۵t}u(-t) - \frac{۷}{۱۰}e^{-۵t}u(-t)$$

ب) $F(s) = \dfrac{۱}{s+۱۰} - \dfrac{۵}{s^{۴}}$

$$\frac{۵}{s^{۴}}: \quad Re\{s\}>۰ : \frac{۵}{۶}t^{۳}u(t) \qquad Re\{s\}<۰ : -\frac{۵}{۶}t^{۳}u(-t)$$

$$\frac{۱}{s+۱۰}: \quad Re\{s\}>-۱۰ \;\; e^{-۱۰t}u(t) \qquad Re\{s\}<-۱۰ \;\; -e^{-۱۰t}u(-t)$$

$$Re\{s\}>۰ \longrightarrow e^{-۱۰t}u(t) - \frac{۵}{۶}t^{۳}u(t)$$

$$۱۰<Re\{s\}<۰ \longrightarrow e^{-۱۰t}u(t) + \frac{۵}{۶}t^{۳}u(-t)$$

$$Re\{s\}<-۱۰ \longrightarrow -e^{-۱۰t}u(-t) + \frac{۵}{۶}t^{۳}u(-t)$$

ج) $F(s) = \frac{s+۲}{s^{۳}+۲s} = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^{۲}+۲} = \frac{(a+b)s^{۲}+cs+۲a}{s(s^{۲}+۲)}$

$۲a = ۲ \rightarrow a = ۱$

$c = ۱$

$a+b = ۰ \Rightarrow b = -۱$

$\rightarrow F(s) = \frac{1}{s} + \frac{-s+1}{s^{۲}+۲} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^{۲}+۲} + \frac{1}{s^{۲}+۲}$

$\frac{1}{s}$ → $Re\{s\} > ۰ \ : \ u(t)$

$\frac{1}{s}$ → $Re\{s\} < ۰ \ : \ -u(-t)$

$\frac{s}{s^{۲}+۲}$ → $Re\{s\} > ۰ \ : \ \cos(\sqrt{۲}t)\,u(t)$

$\frac{s}{s^{۲}+۲}$ → $Re\{s\} < ۰ \ : \ -\cos(\sqrt{۲}t)\,u(-t)$

$\frac{1}{s^{۲}+۲}$ → $Re\{s\} > ۰ \ : \ \frac{1}{\sqrt{۲}} \sin(\sqrt{۲}t)\,u(t)$

$\frac{1}{s^{۲}+۲}$ → $Re\{s\} < ۰ \ : \ -\frac{1}{\sqrt{۲}} \sin(\sqrt{۲}t)\,u(-t)$

$Re\{s\} > ۰ \longrightarrow f(t) = u(t) - \cos(\sqrt{۲}t)u(t) + \frac{1}{\sqrt{۲}}\sin(\sqrt{۲}t)u(t)$

$Re\{s\} < ۰ \longrightarrow f(t) = -u(-t) + \cos(\sqrt{۲}t)u(-t) - \frac{1}{\sqrt{۲}}\sin(\sqrt{۲}t)u(-t)$

د) $F(s) = \frac{۲s+1}{s^{۲}+۴s-۵} = \frac{۲s+1}{(s+۵)(s-1)} = \frac{a}{s+۵} + \frac{b}{s-1} = \frac{(a+b)s+۵b-a}{(s+۵)(s-1)}$

$\begin{cases} a+b = ۲ \\ -a+۵b = ۱ \end{cases} \rightarrow ۶b = ۳ \rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{۲} \\ a = \frac{۳}{۲} \end{cases}$

$F(s) = \frac{\frac{۳}{۲}}{s+۵} + \frac{\frac{1}{۲}}{s-1}$

$\frac{\frac{1}{۲}}{s-1}$ → $Re\{s\} > 1$: $e^{t}u(t)$

$\frac{\frac{1}{۲}}{s-1}$ → $Re\{s\} < 1$: $-e^{t}u(-t)$

$\frac{\frac{۳}{۲}}{s+۵}$ → $Re\{s\} > -۵$: $e^{-۵t}u(t)$

$\frac{\frac{۳}{۲}}{s+۵}$ → $Re\{s\} < -۵$: $-e^{-۵t}u(-t)$

$Re\{s\} > 1 \longrightarrow f(t) = \frac{۳}{۲}e^{-۵t}u(t) + \frac{1}{۲}e^{t}u(t)$

$-۵ < Re\{s\} < 1 \longrightarrow f(t) = \frac{۳}{۲}e^{-۵t}u(t) - e^{t}u(-t)$

$Re\{s\} < -۵ \longrightarrow f(t) = -\frac{۳}{۲}e^{-۵t}u(-t) - \frac{1}{۲}e^{t}u(-t)$

سؤال ⑤ :

$$X(s) = \frac{A}{(s+a)(s+b)} = \frac{A}{(s+1-j)(s+1+j)}$$

$a = -1+j$

$b = -1-j$

$$(s+1-j)(s+1+j) = (s+1)^۲ - j^۲ = s^۲ + ۲s + ۲$$

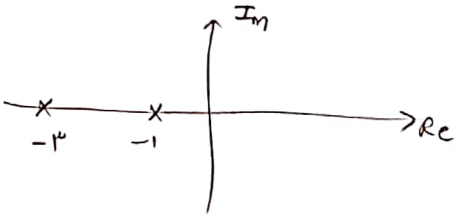
$$\left.\begin{array}{l} X(s) = \frac{A}{s^۲+۲s+۲} \\ X(0) = ۸ \end{array}\right\} \rightarrow A = ۱۶ \Rightarrow X(s) = \frac{۱۶}{s^۲+۲s+۲}$$

محدوده‌ی ROC یا $Re\{s\} > -1$ است یا $Re\{s\} < -1$.

$$y(t) = e^{۲t}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = X(s-۲)$$

برای $Y(s)$، ROC همان ROC، $X(s)$ است که ۲ واحد به راست شیفت خورده. چون $y(t)$ استیبل نیز هست بنابراین ROC، $Y(s)$ باید شامل محور $j\omega$ باشد. بنابراین ROC، $X(s)$ باید شامل خط $Re\{s\} = -۲$ باشد. بنابراین $\longleftarrow$ ROC of $X(s)$: $Re\{s\} > -1$

سؤال ⑥ : الف)

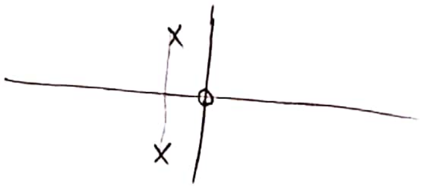


$$\text{اندازه‌ی تبدیل فوریه} = \frac{1}{(\text{length of vector from } \omega \text{ to } -1)(\text{length of vector from } \omega \text{ to } -۳)}$$

برای $\omega = ۰$ ماکسیمم می‌شود و هرچه ω مثبت‌تر یا منفی‌تر شود اندازه کمتر می‌شود. بنابراین $|H(j\omega)|$ پایین‌گذر است.

ب)

$$S = \frac{-1 \pm \sqrt{1-۴}}{۲} = -\frac{1}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲} j$$

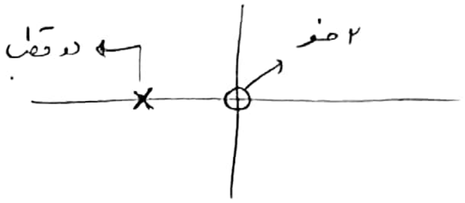


$$\text{اندازه تبدیل فوریه} = \frac{\text{length of vector } \omega \text{ to } 0}{(\text{length of vector from } \omega \text{ to } (\frac{-1}{۲} + j\frac{\sqrt{۳}}{۲}))(\text{length of vector from } \omega \text{ to } (-\frac{1}{۲} - j\frac{\sqrt{۳}}{۲}))}$$

دست راست عبارت بالا برای $\omega = ۰$ برابر با صفر می‌شود. اگر ω افزایش یابد اندازه نیز تا $|\omega| = \frac{1}{۲}$ افزایش می‌یابد. سپس با افزایش ω اندازه کاهش می‌یابد. بنابراین $|H(j\omega)|$ میان‌گذر است.

[redacted]

ج)



$$\text{اندازه‌ی تبدیل فوریه} = \frac{\omega^{۲}}{|j\omega+۱|^{۲}}$$

$|H(j\omega)|$ بالاگذر است.

سؤال ⑦ :

$$x(t) = e^{۲t} \longrightarrow y(t) = \frac{۱}{۶} e^{۲t}$$

$$\Longrightarrow H(۲) = \frac{۱}{۶}$$

$$H(s) = \frac{s+b\,(s+۴)}{s(s+۴)(s+۲)}$$ ⟵ با تبدیل لاپلاس گرفتن از معادله دیفرانسیل

$$H(۲) = \frac{۱}{۶} \rightarrow b=۱$$

$$H(s) = \frac{۲(s+۲)}{s(s+۴)(s+۲)} = \frac{۲}{s(s+۴)}$$

سؤال ⑧ :

-۱

$$e^{-۳t}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s+۳)$$

ROC ، شکل جدید $\overset{(R_1)}{ROC}$ ، ROC $X(s)$ است که ۳ واحد به سمت چپ شیفت خورده است. اگر $x(t)e^{-۳t}$ انتگرال‌پذیر است ⟸ R_1 شامل محور $j\omega$ است. ⟸ R_x شامل خط $Re\{s\} = ۳$ باشد.

$(a) \longrightarrow Re\{s\} > ۲$

$(b) \longrightarrow Re\{s\} > -۲$

$(c) \longrightarrow Re\{s\} > ۲$

$(d) \longrightarrow$ کل صفحه

-۲

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{۱}{s+۱} \qquad Re\{s\} > -۱$$

$$x(t)\left(e^{-t}u(t)\right) \xleftarrow{\mathcal{L}} \frac{X(s)}{s+۱} \qquad R_۲ = R \cap (Re\{s\} > -۱)$$

$R_۲$ باید شامل محور $j\omega$ باشد.

$(a) \longrightarrow -۲ < Re\{s\} < ۲$

$(b) \longrightarrow Re\{s\} > -۲$

$(c) \longrightarrow Re\{s\} < ۲$

$(d) \longrightarrow$ کل صفحه

۳ - سیگنال دست چپی است.

(a) → $\mathrm{Re}\{s\} < -۲$

(b) → $\mathrm{Re}\{s\} < -۲$

(c) → $\mathrm{Re}\{s\} < ۲$

(d) → کل صفحه

۴ - سیگنال دست راستی است.

(a) → $\mathrm{Re}\{s\} > ۲$

(b) → $\mathrm{Re}\{s\} > -۲$

(c) → $\mathrm{Re}\{s\} > ۲$

(d) → کل صفحه