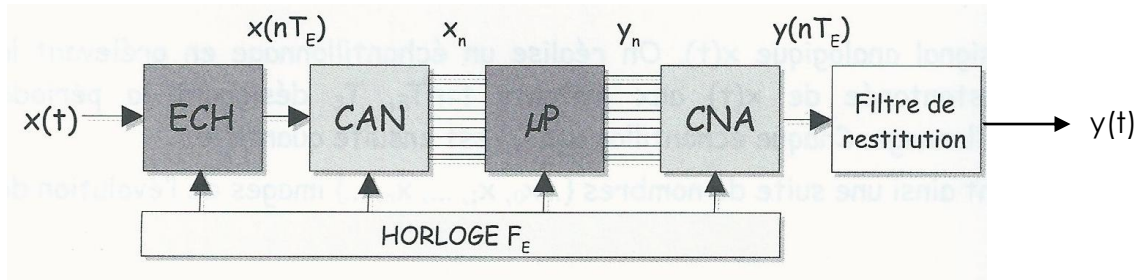


# INTRODUCTION A L'ELECTRONIQUE NUMERIQUE

## ECHANTILLONNAGE ET QUANTIFICATION

### I. ARCHITECTURE DE L'ELECTRONIQUE NUMERIQUE

Le schéma synoptique ci-dessous décrit les différentes étapes du traitement numérique et de la restitution d'un signal analogique électrique :

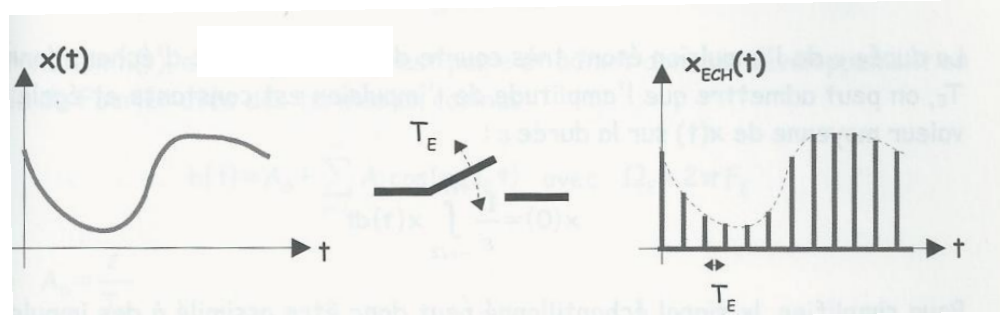


- Le premier bloc représente l'échantillonnage, c'est-à-dire le choix de dates auxquelles prélever des valeurs **discrètes** au signal analogique (qui est par définition **continu**).  $T_E$  est la période d'échantillonnage du signal.
- Le deuxième bloc représente un convertisseur analogique-numérique qui permet d'associer un nombre binaire à une valeur du signal analogique. Ce sont ces nombres qui seront traités par la machine.
- $\mu P$  représente le traitement numérique qui peut, par exemple, être un filtrage ou une analyse spectrale (ce qui correspond à notre programme de l'année).
- Les valeurs binaires  $y_n$  obtenues sont à reconvertir en valeurs discrètes associées à des temps  $nT_E$  par l'intermédiaire d'un convertisseur numérique – analogique.
- Il reste alors à réaliser l'opération inverse de l'échantillonnage, ce que réalise le filtre de restitution.

Les opérations précédentes sont cadencées par une horloge de fréquence  $F_E$ , où  $F_E$  correspond à la fréquence d'échantillonnage.

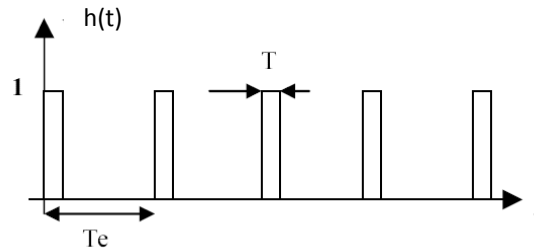
### II. ECHANTILLONNAGE

#### 1. Principe de l'échantillonnage

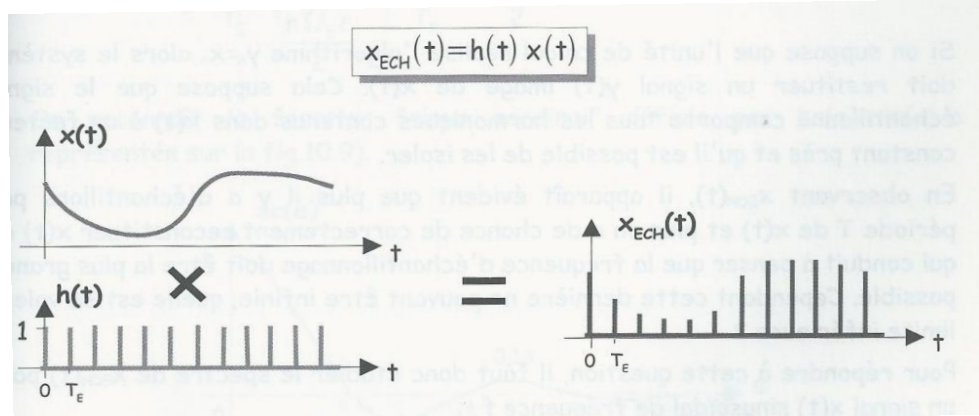


L'idée consiste à utiliser un interrupteur parfait que l'on ferme pendant un intervalle de temps très court puis que l'on ouvre pendant  $T_E$ . On prélève ainsi une valeur  $x(nT_E)$  tous les  $T_E$ .

Si l'on considère pour simplifier que l'intervalle de temps  $T$  nécessaire au prélèvement est faible devant  $T_E$ , cela revient mathématiquement à multiplier  $x(t)$  par la fonction :



Faisons le produit « graphiquement » :



Le signal échantillonné peut donc être considéré comme une suite de valeurs discrètes de  $x(t)$ . Avant d'indiquer quelles valeurs binaires on peut associer à  $x_{ECH}$  (voir Quantification), étudions le spectre de ce signal. Ce point est particulièrement important :

**L'échantillonnage ne doit pas détériorer le signal. En particulier il doit CONSERVER LE SPECTRE de  $x(t)$  et il doit permettre de restituer ce spectre en fin d'opérations.**

## 2. Spectre du signal échantillonné

### a) Signal sinusoïdal

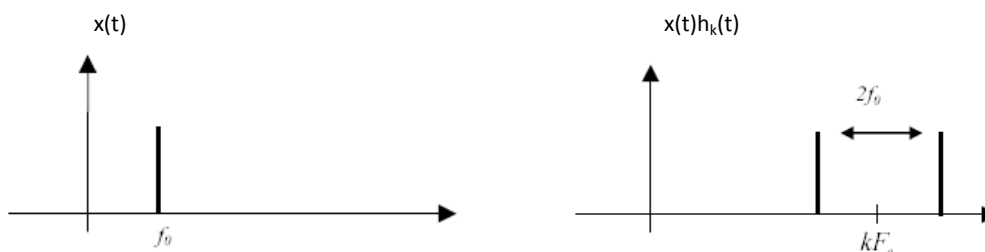
Supposons que  $x(t)$  soit sinusoïdale de fréquence  $f_0$ .

La fonction  $h(t)$  étant périodique, elle est décomposable en série de Fourier sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T_e} t\right)$$

Le produit de la fonction  $x(t)$  de fréquence  $f_0$  par l'harmonique de rang  $k$  de  $h(t)$  fait apparaître les deux fréquences  $kF_e + f_0$  et  $kF_e - f_0$  : en effet,

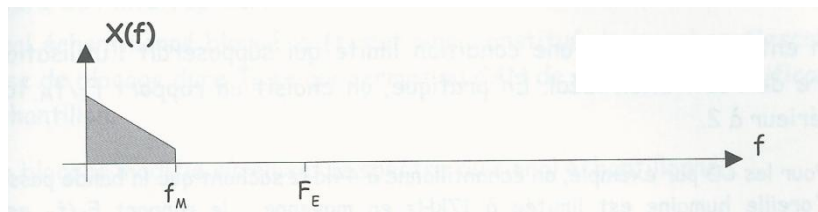
$$\cos(2\pi f_0 t) \times \cos(2\pi k F_e t) = \frac{1}{2} [\cos(2\pi (k F_e + f_0) t) + \cos(2\pi (k F_e - f_0) t)]$$



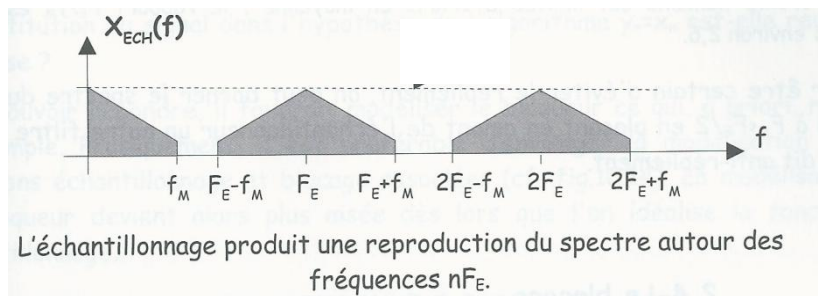
L'opération d'échantillonnage aura fait apparaître de nouvelles fréquences par rapport à  $x(t)$  : l'opération est non linéaire.

### b) Signal quelconque

Bien sûr un signal réel à traiter a un spectre fréquentiel continu entre deux valeurs extrêmes de fréquence ; sur le schéma ci-dessous les fréquences sont comprises entre 0 (continu) et  $f_M$  :



Le résultat en fréquence de l'échantillonnage est alors le suivant :

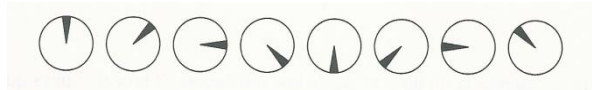


### 3. Critère de SHANNON-NYQUIST

#### a) Une expérience préliminaire

On considère un disque blanc comportant un secteur noir ; le disque tourne dans le sens horaire à la fréquence  $f$ . On stroboscope ce disque à la fréquence  $F_E$ .

(1)  $F_E = 8f$  :



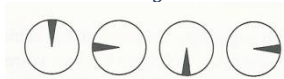
On voit 8 images : le disque tourne dans le sens horaire et on a une bonne « représentation » de sa rotation. De plus, on voit qu'il fait un tour tous les 8 éclairs du stroboscope, soit en  $8T_E$ , ce qui correspond bien à sa vitesse de rotation réelle.

(2)  $F_E = 2f$  :



On voit deux images : on ne peut pas savoir dans quel sens tourne le disque ! Par contre il fait un tour en  $2T_E$  et la conclusion est la même que précédemment.

(3)  $F_E = \frac{4}{3}f$



On voit 4 images du disque mais celui-ci semble tourner dans le sens inverse du sens réel... De plus, il semble faire un tour en  $4T_E$  donc à une fréquence de  $1/(4T_E)$  soit  $F_E/4$  et donc  $f/3$  et non  $f$  ! Nous reviendrons sur ce  $f/3$  au b.

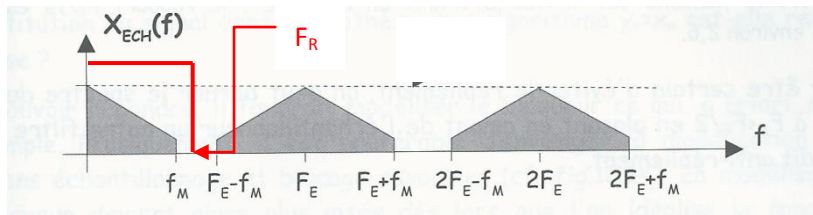
On dit qu'il y a « sous-échantillonnage » du phénomène.

C'est un phénomène que l'on observe fréquemment à la télévision ou au cinéma :

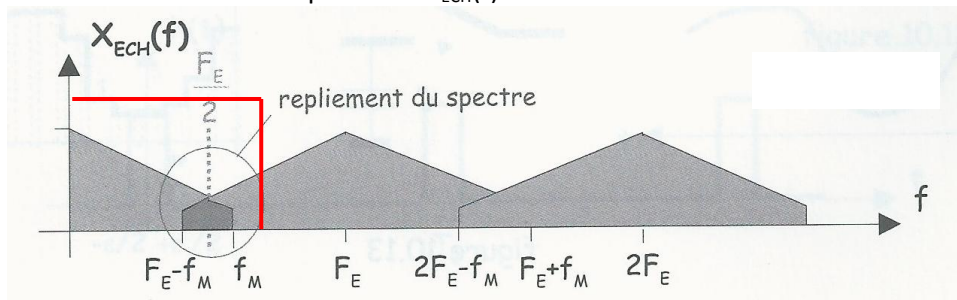
<http://www.youtube.com/watch?v=jHS9JGkEOmA>

### b) Repliement de spectre

Supposons que le microprocesseur  $\mu P$  (cf. I.) réalise simplement  $y_n = x_n$ . Il faut que le filtrage de restitution (représenté par le filtre idéal rouge de fréquence de coupure  $F_R$ ) redonne le spectre de  $x_{ECH}(t)$ , ce qui est le cas dans la configuration ci-dessous :



Cependant, si la fréquence d'échantillonnage est mal choisie, i.e. si le signal est sous-échantillonné, on observera un enrichissement du spectre de  $x_{ECH}(t)$  :



Après filtrage de restitution vont apparaître les fréquences inférieures à  $F_R$  qui appartiennent à l'intervalle  $[F_E - f_m; F_R]$ . Le phénomène porte le nom de REPLIEMENT.

Le graphe ci-dessus montre que si la fréquence d'échantillonnage n'est pas au moins égale à deux fois la fréquence maximale de  $x(t)$ , il y aura présence de ces fréquences.

En effet pour que seules apparaissent les fréquences comprises entre 0 et  $f_m$ , il faut que  $F_E - f_m > f_m$ .

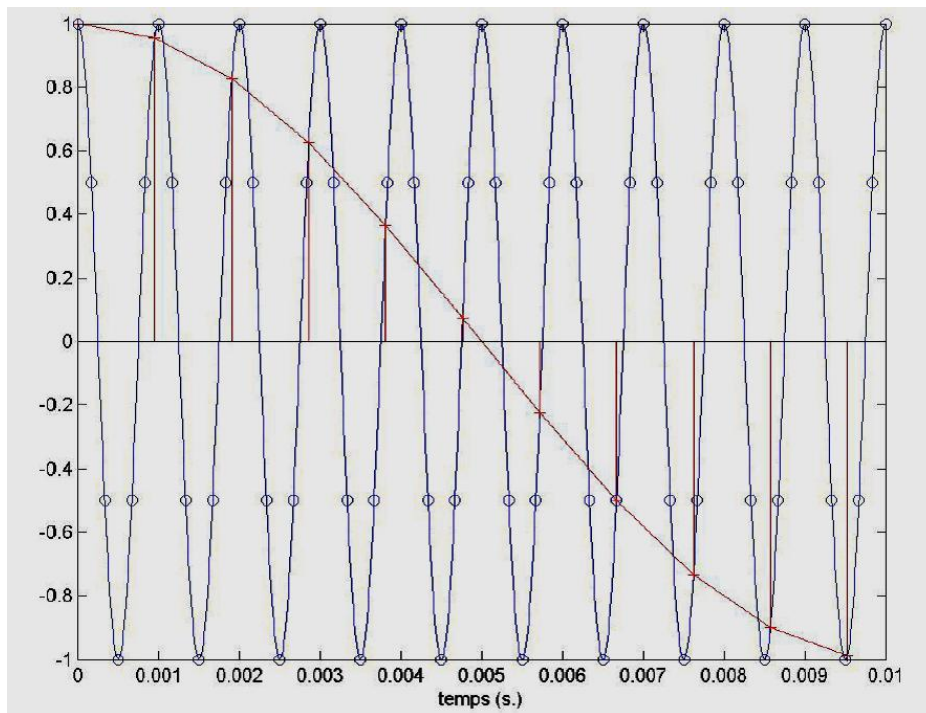
**La fréquence d'échantillonnage doit être au moins égale au double de la plus grande fréquence contenue dans le signal à traiter.**

**Si le critère de Shannon-Nyquist n'est pas respecté il y a repliement du spectre et sous-échantillonnage.**

- Dans le cas de la stroboscopie du disque, la limite correspond à une fréquence du stroboscope double de la fréquence de rotation du disque : c'est la limite à partir de laquelle nous ne pouvons plus voir dans quel sens tourne le disque. Dans le cas où  $F_E = \frac{4}{3}f < 2f$ , le repliement fait apparaître la fréquence  $F_E - f = \frac{1}{3}f$ , le disque semble tourner à l'envers à une vitesse trois fois plus faible.
- Prenons un autre exemple correspondant au TP acquisition – filtres du deuxième ordre : Supposons que l'on veuille échantillonner un signal sinusoïdal de fréquence 1 kHz et d'amplitude 1 V. Les deux graphes ci-dessous montrent :

✚ En bleu, un échantillonnage à 6 kHz du signal ; le CAN prélève 6 valeurs par période et les points bleus sont bien représentatifs du signal analogique initial.

✚ En rouge, un échantillonnage à 1,05 kHz du signal ; le CAN prélève 1,05 points par période ce qui est insuffisant pour rendre compte des variations du signal initial. En fait la courbe rouge est une sinusoïde de fréquence  $1050 - 1000 = 50$  Hz ; on lit bien 0.01 s pour une demi-période.



#### Quelques données et remarques :

- Pour la restitution musicale, l'échantillonnage se fait à 44 kHz, sachant que l'oreille humaine est limitée en moyenne à 17 kHz ; le rapport  $\frac{F_E}{f_m}$  est alors environ égal à 2,6.
- En téléphonie, la bande passante est limitée à 3400 Hz ce qui est suffisant pour une conversation. La fréquence d'échantillonnage est de 8000 Hz, soit un rapport de 2,4 environ.
- Dans chaque cas on prend donc une marge de sécurité par rapport au filtre de restitution.
- Dans le cas où le spectre initial possède une fréquence maximale très élevée, on est obligé de filtrer le signal avant de l'échantillonner pour le limiter en fréquence : ceci est réalisé par un filtrage amont le filtre correspondant est dit « filtre anti-repliement » (cf. synoptique final).

### III. QUANTIFICATION

L'opération de quantification consiste à attribuer un nombre binaire à toute valeur prélevée au signal lors de l'échantillonnage.

C'est le CAN (convertisseur analogique numérique) qui réalise cette opération.

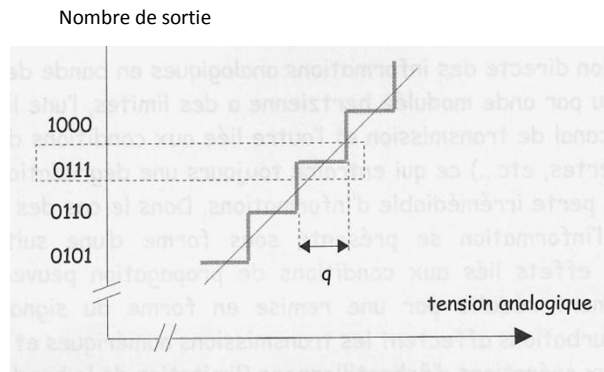
Chaque niveau de tension est codé sur p bits, chaque bit pouvant prendre deux valeurs (0 ou 1). Donc un convertisseur à p bits possède  $2^p$  niveaux de quantification.

Considérons un CAN 4 bits, il n'y a donc que  $2^4 = 16$  valeurs possibles attribuables à toutes les valeurs prélevées lors de l'échantillonnage.

L'opération se fait donc avec une perte d'information d'autant plus grande que p est petit.

Le schéma ci-dessous représente une partie de la caractéristique de transfert d'un convertisseur 4 bits ; à tous les niveaux de tension d'un même palier, le convertisseur fait donc correspondre un seul et même nombre binaire :

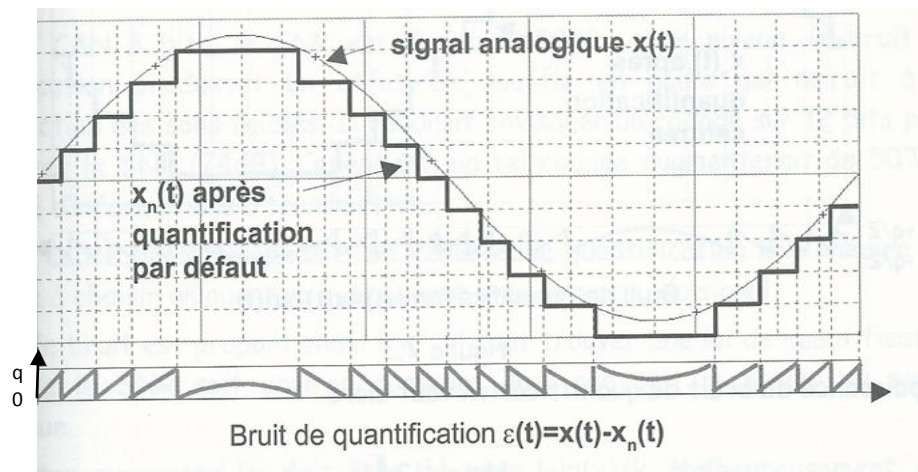




Caractéristique de transfert d'un CAN – Quantification à 4 bits

$q$  est le pas de quantification : il correspond à la plus petite variation de tension que le convertisseur peut coder. On voit bien que plus  $q$  est faible, meilleure sera la précision de codage.

Pour une quantification par défaut, où  $x_n = nq$  si  $x$  est compris entre  $nq$  et  $(n+1)q$ , l'erreur commise appelée bruit de quantification est donnée sur le graphe ci-dessous :



- Pour la restitution musicale, l'échantillonnage se fait à 44 kHz, la quantification sur 16 bits (soit 65536 niveaux) et le quantum vaut  $1,5 \cdot 10^{-3} \%$ .
- En téléphonie, l'échantillonnage se fait à 8000 Hz, la quantification sur 8 bits (soit 256 niveaux) et le quantum vaut 0,4 %

## IV. TRAITEMENT DU SIGNAL

### A. Analyse spectrale

Lors du traitement numérique à l'oscilloscope ou à l'ordinateur (Latispro par exemple) la détermination d'un signal numérisé passe par un algorithme appelé FFT : Fast Fourier Transform ou transformée de Fourier rapide.

Pour réaliser dans de bonnes conditions cette opération, il convient de respecter quelques règles liées au mode de calcul :

1. La fréquence d'échantillonnage doit respecter le **critère de Shannon**.
2. La partie du signal exploitée pour le calcul est limitée temporellement : soit  $T_H$  le temps total d'acquisition, aussi appelé horizon temporel. Les variations du signal qui se font sur une durée supérieure à  $T_H$  ne seront pas prises en compte : la résolution spectrale de la FFT est donc liée à  $T_H$  :

**La résolution en fréquence du spectre obtenu est  $\frac{1}{T_H}$ .**

3. N le nombre d'acquisitions vérifie  $NT_E = T_H$ . Comme  $F_E > 2f_m$ ,  $\frac{N}{T_H} > 2f_m$  et donc :

**La plage fréquentielle d'analyse est limitée à  $\frac{N}{2T_H}$  donc à  $\frac{F_E}{2}$ .**

4. L'algorithme de calcul est optimisé si **N est une puissance de 2.**

5. Si l'on utilise un ordinateur après une acquisition,

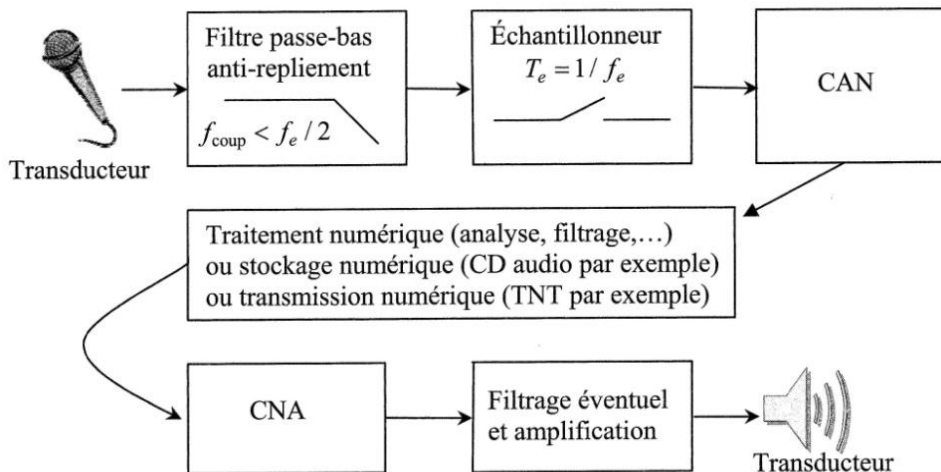
**$T_H$  doit être un nombre entier de périodes du signal.**

## B. Filtrage

Voir TP.

## V. SYNOPTIQUE COMPLET

On peut pour terminer donner le synoptique complet du traitement d'un signal analogique (sonore en l'occurrence) lors de sa numérisation, de son traitement numérique et de sa restitution :



Bibliographie partielle :

- ELECTRONIQUE - Thierry GERVAIS – VUIBERT deuxième édition
- PSI-PSI\* DUNOD Nouveaux programmes 2014
- ASDS « Conversion des signaux analogiques en numérique » :  
[http://www.lycee-champollion.fr/IMG/pdf/ads\\_can.pdf](http://www.lycee-champollion.fr/IMG/pdf/ads_can.pdf)