① $T(n)=2T(\frac{n}{2})+O(n^2)$ ならば $T(n)=O(n^2)$ の証明

$O(n^2)$ の部分を an^2 とすると、$T(n)=2T(\frac{n}{2})+an^2$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(\frac{n}{2})+an^2 \\
&= 2(2T(\frac{n}{2^2})+\frac{an^2}{2^2})+an^2 \\
&= 2^2T(\frac{n}{2^2})+an^2+\frac{an^2}{2} \\
&= 2^2(2T(\frac{n}{2^3})+\frac{an^2}{2^4})+an^2+\frac{an^2}{2} \\
&= 2^3T(\frac{n}{2^3})+an^2+\frac{an^2}{2}+\frac{an^2}{2^2} \\
&= 2^3(2T(\frac{n}{2^4})+\frac{an^2}{2^6})+an^2+\frac{an^2}{2}+\frac{an^2}{2^2} \\
&= 2^4T(\frac{n}{2^4})+an^2+\frac{an^2}{2}+\frac{an^2}{2^2}+\frac{an^2}{2^3} \\
&= (\text{中略}) \\
&= an^2+\frac{an^2}{2}+\frac{an^2}{2^2}+\frac{an^2}{2^3}+\cdots \\
&= an^2(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots) \\
&\leqq an^2(1+1) \quad (\because \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots \text{は1に収束する}) \\
&= 2an^2
\end{aligned}
$$

よって $T(n)\leqq 2an^2$ より $T(n)$ 時間計算量は $O(n^2)$ と言える