フィボナッチ数列は次の三項間漸化式と同等

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geqq 3)$

特性方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解を $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とすると、漸化式は次のように変換できる

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \quad \text{—①}$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \quad \text{—②}$$

①+② を整理すると、$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

$a_{n+1} - \alpha a_n$ は

初項：$a_2 - \alpha a_1 = 1 - \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \beta$

公比：β

の等比数列なので $a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1} \times \beta = \beta^n$ —③

同じようにして、$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^n$ —④

③−④ より $a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$