Notazione

- $a > 1$, p primo

$\downarrow$

$p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$

$ord_p(a)$ è il numero dei fattori p che compaiono nella decomposizione di a.

Se p non compare, $ord_p(a) = 0$.

Es: $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$ord_2(1000) = 3$ volte

$ord_5(1000) = 3$ volte

$ord_3(1000) = 0$ volte

(!) se $a < 0$ definiamo: $ord_p(a) = ord_p(-a)$

Esempio:

prodotto infinito di tutti i primi

$$1000 = \prod_p p = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^3 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdots$$

per avere 1000 prendo quelli che servono e metto 0 esponente agli altri

Quindi: se $a \neq 0$, $ord_p(a)$ è un numero negativo e:

- $\forall a > 0$, $a = \prod_p p^{ord_p(a)}$
- $\forall a < 0$, $a = -\prod_p p^{ord_p(a)}$

minimo numero quante volte p divide a e b

Osservazione principale: $MCD(a,b) = \prod_p p^{\min(ord_p(a),\, ord_p(b))} = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1$.

non c'è $\Rightarrow$ è $^{\wedge}0$

Es: $MCD(28, 35)$

28	2
14	2
7	7
1	

35	5
7	7
1	

$MCD = 7$

tutti elevati a

15/05/19

Dato un numero $a > 0$, lo scomponiamo in fattori primi: $a = \prod_p p^{ord_p(a)} = 2^{ord_2(a)} \cdot 3^{ord_3(a)} \cdot 5^{ord_5(a)} (\cdots)$

quante volte compare, DIVIDE a

Se $MCD(a,b) = d$, scompongo tutti e 3 i numeri > 0 (non considero i segni, non cambia), allora

$a = 2^{ord \cdots} \cdot 3^{ord \cdots} \cdot (\cdots)$

$b = 2^{ord \cdots} \cdot 3^{ord \cdots} \cdot (\cdots)$

$d = 2^{ord \cdots} \cdot 3^{ord \cdots} \cdot (\cdots)$

li confronto colonna per colonna

Osserv. 1: $ord_p(xy) = ord_p(x) + ord_p(y)$ infatti sono esponenti $(e^{x+y} = e^x \cdot e^y)$.

Osserv. 2: Un intero $d > 0$ divide $a \iff \forall p$, $ord_p(d) \leq ord_p(a)$

$\iff a = dx$ riscrivo così: $ord_p(dx) = ord_p(d) + ord_p(x)$

Ogni esponente nella scomposizione di d è quindi $\leq \min(esp(a), esp(b))$.

Ma d è il MASSIMO dei divisori comuni, dunque $\forall p$, $ord_p(d) = \min(ord_p(a), ord_p(b))$

In questo modo riesco a scrivere il MASSIMO COMUNE DIVISORE.

$\rightarrow$ Perciò: $MCD(a,b) = \prod_p p^{\min(ord_p(a),\, ord_p(b))}$, il perché è dimostrato con il confronto colonna per colonna (sopra).

MINIMO COMUNE MULTIPLO

Def: Siano $a, b \in \mathbb{Z}^*$ (= non nulli), allora: $\text{mcm}(a,b)$ è il più piccolo intero positivo multiplo sia di a che di b, ovvero tale che a/m e b/m (= m multiplo di a e b).

ES: $\text{mcm}(8,14) =$ mcm

Multipli di 8 (>0): 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56

Multipli di 14 (>0): 14, 28, 42, 56, 60, 74, 88

Se scompongo come sopra:

$a = 2^{\dots} 3^{\dots} 5^{\dots} 7^{\dots} (\dots)$

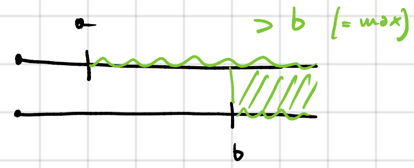
$b = 2^{\dots} 3^{\dots} 5^{\dots} 7^{\dots} (\dots)$

$d = 2^{\dots} 3^{\dots} 5^{\dots} 7^{\dots} (\dots)$

Siccome a/m, $\forall p$: $\text{ord}_p(a) \leq \text{ord}_p(m)$

e siccome b/m, $\forall p$: $\text{ord}_p(b) \leq \text{ord}_p(m)$

$\rightarrow$ quindi $\geq$ del $\max(\text{ord}_p(a), \text{ord}_p(b))$



Ottengo: $\text{mcm}(a,b) = \prod_p p^{\max(\text{ord}_p(a), \text{ord}_p(b))}$

Un metodo infatti era:

$8 = 2^3$

$14 = 2 \cdot 7$

$\text{mcm} = 2^3 \cdot 7 = 56$

tutti e con esp. max

MCM — tecnica euclide (numeri grandi)

MCM — scomposizione fattori (per numeri già scomposti con esponenti/valori semplici)

mcm — solo scomposizione fattori primi

Osservazione importante: c'è una SECONDA TECNICA ALTERNATIVA per risolvere l'mcm su numeri difficilmente scomponibili.

1.20: $a, b \in \mathbb{Z}^*$ (perché $\neq 0$? perché mcm è definito solo per valori $\neq 0$) $\rightarrow$ $\text{mcm}(a,b) \cdot \text{MCD}(a,b) = |ab|$

esponente max

esponente min

somma esponenti

$\rightarrow$ quindi $\text{mcm}(a,b) = \dfrac{|ab|}{\text{MCD}(a,b)}$

Cose richieste per $\mathbb{Z}$

- Decomporre in fattori primi
- MCD e mcm
- piccole dimostrazioni (cosa vuol dire dividere ecc...)

Insieme $\mathbb{Q}$

Come si definisce? $\longrightarrow$ considero $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ (le coppie ab con $b \neq 0$) e dico che due $\underbrace{\text{coppie}}_{(a,b)\ e\ (c,d)}$ sono equivalenti se vale:

$\rightarrow$ $a \cdot d = c \cdot b$.

(a, b), (c, d)

Allora definisco numero razionale ($\mathbb{Q}$) una classe di equivalenza di coppie, ovvero l'insieme di tutte le coppie equivalenti a una coppia fissata:

Es: (c,d) equivale a $(3,2)$ se vale $2c = 3d$, ovvero $c = \frac{3d}{2}$ con d libero, ovvero $c = 3k$ e $d = 2k$

$$x = \{\underset{k=1}{(3,2)}, \underset{k=2}{(6,4)}, \underset{k=3}{(9,6)}, \underset{k=-1}{(-3,-2)}, \underset{k=-2}{(-6,-4)} \dots\}$$

$\rightarrow$ prendo indifferentem. $x = 3/2 = 6/4 = 9/6 = -3/2 = -6/-4 \dots$ $\longrightarrow$ infatti $\frac{3}{2} \times \frac{6}{4}$ $\quad 3 \cdot 4 = 6 \cdot 2$

Quindi: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ e gli interi sono razionali con $b = 1$: $a \longrightarrow \frac{a}{1}$

$\rightarrow$ scrivere con la virgola vuol dire: $\frac{3}{2} = \frac{15}{10} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5}$ $\longrightarrow$ notazione: $1,5$

frazione equivalente

equivalente con $b = 10$

posizione virgola = quanti 10 al denominatore

Proprietà di $\mathbb{Q}$

Siano a/b e c/d due numeri razionali:

- **somma:** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{ad + bc}{bd}$

  trasformo

  se $b = d$ $\rightarrow$ somma semplice

- **prodotto:** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

- **inverso/divisione:** se anche $a \neq 0$ $\rightarrow$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ quindi $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{d}{c}\right)$

- **relazioni $(>, <)$:** $\frac{a}{b} > 0 \iff a \cdot b > 0$

- L'insieme $\mathbb{Q}$ è DENSO (differenza con $\mathbb{Z}$), ovvero $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ con $x > y$, $\exists\, t \in \mathbb{Q}$ come $x > t > y$

  c'è sempre un valore compreso.

  Es: $\frac{49}{8} < \frac{50}{8}$

  $\frac{98}{16} \quad \frac{99}{16} \quad \frac{100}{16}$