INTEGRALI PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy$$

$y = e^x \xrightarrow{y'} dy = e^x\, dx$

esempio 1

$$\int \text{sen}(e^x)\, e^x dx = \int \text{sen}(y)\, dy = -\cos(y) =$$

$$= -\cos(e^x) + c$$

$y = e^x \xrightarrow{y'} dy = e^x dx$

1) Sostituzione $y = g(x)$
2) Nuovo differenziale $dy = g'(x)\, dx$
3) Se definito : $a \to g(a)$
$b \to g(b)$

esempio 2

$$\int \cos x \; \text{sen}(\text{sen}\, x)\, dx =$$

$$= \int \text{sen}(y)\, dy = -\cos(y) + c =$$

$$= -\cos(\text{sen}(x)) + c$$

$y = \text{sen}\, x$

$dy = \cos x\, dx$

esempio 3

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int \frac{e^x}{1+{e^x}^2}\, dx = \int \frac{1}{1+y^2}\, dy$$

$$= \text{arctan}(y) + c = \text{arctan}(e^x) + c$$

$y = e^x$

$dy = e^x\, dx$

esempio 4

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2)\, dx = \int_0^{\pi} \cos(y)\, \frac{dy}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(y)\, dy = \frac{1}{2}\Big[\text{sen}\, y\Big]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\text{sen}\,\pi}_{0} - \underbrace{\text{sen}\, 0}_{0}\Big] = 0$$

$y = x^2$

$dy = 2x\, dx$

$0 \to g(0) = 0^2 \to 0$

$\sqrt{\pi} \to \sqrt{\pi}^2 = \pi$

esempio 5

$$\int \frac{1}{x(\ln x+1)}\,dx = \int \frac{1}{\ln x+1}\cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$y = \ln x + 1$

$dy = \frac{1}{x}\,dx$

$$= \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + c = \ln|\ln x + 1| + c$$

esempio 6

$y = x^2 \quad x = \sqrt{x}$

$x = \operatorname{sen} y$

$\downarrow$

$dx = \cos y\, dy$

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}\cdot \cos y\,dy =$$

$$= \int \cos y \cdot \cos y\, dy = \int \cos^2 y\, dy = \ldots$$

$\rightarrow$ parti

$\rightarrow$ duplicaz coseno

Pt.2

- meglio dx o dy?
- es. + complicati

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

$\nearrow$ $y = e^x$, $dy = e^x dx$: $\quad \int \frac{dy}{y^2+1} = \arctan(y) + c = \arctan(e^x) + c$

$\searrow$ $y = e^x$, $x = \ln x$, $dx = \frac{1}{y}\,dy$: $\quad \int \frac{\cancel{y}}{y^2+1}\,\frac{1}{\cancel{y}}\,dy = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan(e^x) + c$

Quando trovare dy è semplice, metodo 1

Se dy è nascosto, metodo 2

esempio 7

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx = \int \operatorname{sen}^4 x\, \underbrace{\cos^2 x}_{1-\operatorname{sen}^2 x}\cdot \cos x\, dx$$

$y = \operatorname{sen} x$

$dy = \cos x\, dx$

$$= \int y^4(1-y^2)\,dy = \int (y^4 - y^6)\,dy = \int y^4\,dy - \int y^6\,dy =$$

$$= \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + c = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

esempio 8

$$\int \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{y^2-1}{1+y}\,2y\,dy =$$

$y=\sqrt{x} \rightarrow x=y^2$

$dy=\frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow dx = 2y\,dy$

$$=\int \frac{(\cancel{y+1})(y-1)}{\cancel{1+y}}\,2y\,dy = \int (y-1)\cdot 2y\,dy$$

m. 2. perché il dy è nascosto bene.

$$\int 2y^2-2y\,dy = \int 2y^2 dy - \int 2y\,dy$$

$$= \frac{2}{3}y^3 - y^2 + c = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 - x + c$$

dove ci sono le radici conviene usare il metodo 2

scorciatoia

$$\int \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{(\sqrt{x}-1)(\cancel{\sqrt{x}+1})}{\cancel{1+\sqrt{x}}}\,dx = \int (\sqrt{x}-1)\,dx = \int \sqrt{x}\,dx - \int dx$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 - x + c$$

esempio 9

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int 2\,(y^2+1)\,dy =$$

$y=\sqrt{x-1} \rightarrow y^2 = x-1 \rightarrow x = y^2+1$

$dy = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx$

$$= 2\int y^2+1\,dy = 2\int y^2 dy + 2\int 1\,dy =$$

$$= \frac{2}{3}y^3 + 2y + c = \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + 2\sqrt{x-1} + c =$$

$$= 2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)}{3} + 1\right] + c = 2\sqrt{x-1}\cdot\frac{x+2}{3} + c$$

Integrazione per parti

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

esempio 1

$$\int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{\cos x}\,dx = x\,\text{sen}\,x - \int \text{sen}\,x =$$

$$= x\,\text{sen}\,x + \cos x + c$$

$f = x \quad f' = 1$

$g' = \cos x \quad g = \text{sen}\,x$

esempio 2

$$\int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{e^x}\,dx = x e^x - \int e^x =$$

$$= x e^x - e^x + c$$

$f = x \quad f' = 1$

$g' = e^x \quad g = e^x$

esempio 3

$$\int \underset{f}{x^2}\,\underset{g'}{e^x}\,dx = x^2 e^x - \int 2x e^x\,dx =$$

$$= x^2 e^x - 2\int \boxed{x e^x\,dx =}$$

x parti di nuovo vedi es 2

$$= x^2 e^x - 2\left(x e^x - e^x\right) + c$$

$f = x^2 \quad f' = 2x$

$g' = e^x \quad g = e^x$

$$\int x^\alpha e^x\,dx \qquad \int x^\alpha \cos x\,dx \qquad \int x^\alpha\,\text{sen}\,x\,dx \qquad \alpha \in \mathbb{N}$$

Si procede più volte per parti

esempio 4

$$\int (x^4 + 3x^2 - 6)\,e^x\,dx \overset{\text{Spezzarlo}}{=} \int x^4 e^x\,dx + \int 3x^2 e^x\,dx + \int -6\,e^x\,dx =$$

$$= \underbrace{\int x^4 e^x\,dx}_{\text{parti}} + 3\underbrace{\int x^2 e^x\,dx}_{\text{parti}} - 6\underbrace{\int e^x\,dx}_{\text{imm.}} =$$

$\int p(x)\, e^x\, dx \qquad \int p(x) \cos x\, dx \qquad \int p(x)\, \text{sen}\, x\, dx$

$p =$ polinomio, vedi def sopra

esempio 5

$$\int \underset{g'}{x}\, \underset{f}{\ln x}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\, dx = \qquad f = \ln x \quad f' = \frac{1}{x}$$

$$g' = x \quad g = \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \underbrace{x\, dx}_{\frac{x^2}{2}} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c \underset{\text{raccolt.}}{=}$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c$$

Moltiplicazione ·1 e Integrali ciclici

esempio 1

$$\int \ln x\, dx = \int \underset{f}{\ln x} \cdot \underset{g'}{1}\, dx \qquad f = \ln x \quad f' = \frac{1}{x}$$

$$g' = 1 \quad g = x$$

$$x \ln x - \int 1\, dx = x \ln x - x + c =$$

$$= x(\ln x - 1) + c$$

esempio 2

$$\int \text{arctg}(x)\, dx = \int \underset{f}{\text{arctg}(x)} \cdot \underset{g'}{1}\, dx \qquad f = \text{arctg}(x) \quad f' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g' = 1 \quad g = x$$

molt. dividi

$$= x\, \text{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int 2\frac{x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= x\, \text{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

esempio 3

$$\int x\, dx = \int x \cdot 1\, dx$$

Usando la stessa logica di prima

$$f = x \quad f' = 1 \quad g' = 1 \quad g = x$$

$x^2 - \int x \, dx$ = conviene dire che $\frac{x^2}{2}$ è direttamente la funzione primitiva, perché così giro in tondo

CICLICI!!!

Altrimenti

$\int x \, dx = x^2 - \int x \, dx$ l'integrale che volevamo calcolare è uguale a qualcosa meno l'integrale di partenza

quindi $\rightarrow 2\int x \, dx = x^2 \rightarrow \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$

esempio 4

$f = \cos x \quad f' = -\operatorname{sen} x$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \overset{f}{\cos} x \cdot \overset{g'}{\cos} x \, dx =$$

$g' = \cos x \quad g = \operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen} x \cos x - \int (-\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen} x \, dx =$

$= \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int 1 - \cos^2 x \, dx$

$\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx$ porto a sinistra

$= \int \cos^2 x \, dx + \int \cos^2 x \, dx = \operatorname{sen} x \cos x + x$

$= 2\int \cos^2 x \, dx = \operatorname{sen} x + \cos x + x =$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x + x}{2} + c$$

esempio 5

ancora per parti

$$\int \underset{f}{e^x} \underset{g'}{\operatorname{sen} x} \, dx = -\cos x \, e^x - \int \underset{g'}{(-\cos x)} \underset{f}{e^x} \, dx$$

$f = e^x \quad f' = e^x$

$g' = \operatorname{sen} x \quad g = -\cos x$

$(-\cos x) e^x - \left[\operatorname{sen} x \, e^x - \int (-\operatorname{sen} x) e^x \, dx \right]$

$f = e^x \quad f' = e^x$

$g' = -\cos x \quad g = -\operatorname{sen} x$

$(-\cos x) e^x + \operatorname{sen} x \, e^x - \int \operatorname{sen} x \, e^x \, dx$

$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)$

$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + c$

Divisione fra polinomi

$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

dividendo | divisore | quoziente | resto

$7 : 2 = 3,\ 1$

D E Q R

esempio 1

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -2x^2 & +x & -3 & x^2+1 \\
-x^3 & & -x & & \\ \hline
& -2x^2 & & -3 & x-2 \\
& +2x^2 & & +2 & \\ \hline
& & & \boxed{-1} &
\end{array}$$

$\dfrac{x^3-2x^2+x-3}{}$

- Prendi il monomio di grado max, dividi per mon. di grado max.
- Scrivi risultato sotto
- molt per divisore e scrivi cambiato di segno.
- il resto scende, altro si elimina
- ripeti aggiungendo al •
- quando il grado del dividendo è < del grado del divisore, è fatta.

esempio 2

$$\frac{x^3-4x-2}{x+1}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -4x & -2 & x+1 \\
-x^3 & -x^2 & & & x^2-x-3 \\ \hline
& -x^2 & -4x & -2 & \\
& -x^2 & +x & & \\ \hline
& & -3x & -2 & \\
& & +3x & +1 & \\ \hline
& & & -1 &
\end{array}$$