MATRICI

MATRICE → DATI i E j, m E n, SI A UNA MATRICE $m \times n$ E UNA TABELLA DI NE ELEMENTI DISPOSTI IN i RIGHE E j COLONNE

SI SCRIVE COME $A = (a_{ij})$ → i RIGHE , j COLONNE

$$\begin{array}{c} \text{Riga 1} \\ \text{Riga 2} \\ \text{Riga 3} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

→ QUESTO TIPO DI MATRICE SI INDICANO CON $M_{m \times n}$

→ UN NUMERO È UNA MATRICE 1×1

→ $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ È UNA MATRICE 2×2

→ $v \in \mathbb{R}^n$ È UNA MATRICE $n \times 1$ $\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right)$ O $1 \times n$ $(v_1, v_2, \dots, v_n)$

→ $(1, 0, 1, 3, 2)$ È UNA MATRICE 1×5

→ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ È UNA MATRICE 2×2

→ DUE MATRICI $A(a_{ij})$ E $B(b_{ij})$ SONO UGUALI SE HANNO LO STESSO NR DI RIGHE E COLONNE E SE $a_{ij} = b_{ij}$

OPERAZIONI CON MATRICI

1) **SOMMA E SOTTRAZIONE**

$A, B \in M_{m \times n}$

$(A \pm B) = a_{ij} \pm b_{ij}$

PROPRIETÀ

1) COMMUTATIVA → $A + B = B + A$
2) ASSOCIATIVA → $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) $A + 0 = A$
4) $A + (-A) = 0$

2) **MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE** (MOLTIPLICAZIONE PER UNA COSTANTE)

$cA \in M_{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}$

$(cA)_{ij} = ca_{ij}$

PROPRIETÀ

1) SIANO h, k NUMERI → $h(kA) = (hk)A$
2) DISTRIBUTIVA → $h(A + B) = hA + hB$ // $(h + k)A = hA + kA$
3) $1A = A$

3) **PRODOTTO DI MATRICI**

$A \in M_{m \times n}$, $B \in M_{n \times q}$

SI HA: LEN $A = B$ SE E SOLO SE $n = 2$ (NON È COMMUTATIVA)

$$AB \neq BA$$

IL PRODOTTO TRA MATRICI SI FA RIGA PER COLONNA

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + -1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + -1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 5 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 5 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3 \times 2 \quad \cancel{2} \times 6 = 3 \times 6$$

PROPRIETÀ → QUANDO SEA $A \in M_{m \times n}$ E $B \in M_{n \times q}$ HANNO NR DI COLONNE UGUALI ALLA RIGA

$$(AB)_{ij} = c \text{ RIGA } i \text{ DI } A \text{, COLONNA } j \text{ DI } B$$

PROPRIETÀ

1) ASSOCIATIVA → $(AB)C = A(BC)$
2) DISTRIBUTIVA - SOMMA → $A(B + C) = AB + AC$ // $(A + B)C = AC + BC$
3) DISTRIBUTIVA - PRODOTTO → $A(cB) = (cA)B = c(AB)$

TIPI DI MATRICE

1) **MATRICE NULLA** → TUTTI I COEFF $= 0$

$A \in M_{m \times n}$, $B \in M_{n \times m}$

$A + 0 = A$

$0A = 0$

$0B = A$

→ NEL MATRICE $AB = 0$ SE E SOLO SE $a \cdot b = 0$, NELLE MATRICE NON È VERO

ESEMPIO: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) **MATRICE QUADRATA** → STESSO NUMERO DI RIGHE E COLONNE ($M_{n \times n}$)

→ NON SONO COMMUTATIVE → $AB \neq BA$ (QUASI SEMPRE)

ES: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Big] \neq$

PER LE MATRICI QUADRATE È PIÙ UTILIZZARE LA **TRACCIA** → SOMMA DEGLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE

$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ → SOMMA DI i CHE VA DA 1 A n ($n = a_{11} + a_{22} \dots$)

ESEMPIO: $\begin{pmatrix} 3 & 25 & -4 \\ 0 & -3 & 15 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{tr}(A) = 3 + (-3) + 2 = 2$ → SE SOPRA RIGHE E COLONNE SONO UGUALI

3) **MATRICE TRIANGOLARE** → UNA MATRICE QUADRATA SI DICE TRIANGOLARE SE $a_{ij} = 0$ QUANDO $i > j$

↳ ES: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → SE $a_{ij} = 0$ $i > j$

$a_{ij} = 0$ SE $i > j$

$a_{ij} < 0$ $i < j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICE IDENTITÀ

1) $A \cdot I = I \cdot A = A$

4) **MATRICE TRASPOSTA DI UNA MATRICE** (RIFERITO A MAT. QUADRATE)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow$$

SI OTTIENE UN "TRASLOCO" AL DI SOPRA DELLA DIAGONALE PRINCIPALE → SUPERIORE PERCHÉ SONO LA DIAGONALE SONO FUTTI 0.

5) **MATRICE INVERTIBILE** (RIFERITO A MAT. QUADRATE)

$A \in M_{n \times n}$ È **INVERTIBILE** SE $\exists B \in M_{n \times n}$ T.C. $\underbrace{AB = BA = I}_{\text{INVERSA DI } A}$ (NEUTRO)

↳ INVERSA DI A → SI NOTA CON A^{-1}

→ NOI L'INVERSIONE DEVE ESSERE

ESCURO: NEL NUMERI, BASTEREBBE 7 E IL SUO INVERSO È QUELLO T.C. $7 \cdot 1 = 1$ OR $7 \cdot \frac{1}{7} = 1$

! SE NO I MATRICI INVERTIBILI $A, M_{n \times n}$ → $A \cdot B$ È INVERTIBILE → $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

↳ VALE ANCHE $(AB)^{-1} \cdot AB = I$ (1)

$B^{-1} A^{-1} AB = B^{-1} \cdot I \cdot B =$

$= B^{-1} B = I$ (1)

6) **MATRICE TRASPOSTA** (QUADRATE)

$A \in M_{m \times n}$

$(A^T)_{ij} = A_{ji}$

ESEMPIO: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ → DIAGONALE RIMANE INVARIATA, I RESTI SCAMBIATI DI POSTO CON IL PESTO

PROPRIETÀ

1) $(A^T)^T = A$ → UN CASO È VERO QUANDO SI AMBIA
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
3) $(cA^T) = (cA)^T$
4) $(AB)^T = B^T A^T$ (NON $A^T B^T$)

→ SE $v \in \mathbb{R}^n$ → $v \in \mathbb{R}^n$ → VALE ANCHE $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$

$vv^T = v_1 v_1 + \dots + v_n v_n = \sum_{i=1}^{n} v_i v_i^T$ → PRODOTTO MATRICI

7) **MATRICE ORTOGONALE** (RIFERITO A MAT. QUADRATE)

$A \in M_{n \times n}$ È ORTOGONALE SE È INVERTIBILE E SE $A^{-1} = A^T$ → $A^T A = A A^T = I$

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} \dots & v_1^T & \dots \\ \dots & v_2^T & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & v_n^T & \dots \end{pmatrix}$$

$$A^T A = I = \begin{pmatrix} v_1^T v_1 & v_1^T v_2 & \dots & v_1^T v_n \\ v_2^T v_1 & v_2^T v_2 & \dots & v_2^T v_n \\ \vdots & & & \\ v_n^T v_1 & v_n^T v_2 & \dots & v_n^T v_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_i^T v_i = 1 \quad v_i^T v_j = 0 \quad i \neq j$$

$$\Rightarrow v_i^T v_i = 1 \quad v_i^T v_j = 0 \quad i \neq j$$

TUTTO QUESTO VUOL DIRE CHE LE COLONNE SONO I A 1 ORTOGONALI CON NORMA 1

8) **MATRICE SIMMETRICA** (QUADRATE)

$A \in M_{n \times n}$ È **SIMMETRICA** SE $A^T = A$ (OVVERO SE $a_{ij} = a_{ij}$ a_{ij})

→ QUANDO CI DICE CHE UNA DIAGONALE DEVONO ESSERE UGUALI, VUOL DIRE PRESENTE IL VOL. SIMMETRICA. SUPERIORE, MA NEL PRINCIPIO INFERIORE DEVONO ESSERE UGUALI. SIMMETRICA, SUPERIORE

$A \in M_{n \times n}$ È **ANTISIMMETRICA** SE $A^T = -A$ (OVVERO $a_{ij} = -a_{ij}$, OVVERO $a_{ii} = 0$)

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

AD OGNI MATRICE QUADRATA $A \in M_{n \times n}$ ASSOCIA IL DETERMINANTE IL NUMERO DEFINITO CON $\det(A)$ DENOMINATO DETERMINANTE DI A (DEFINITO PER UN ORDINE)

→ SE $n = 1$ → $A = (a)$ → $\det = a$

→ SE $n = 2$ → $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ → $\det A = a \cdot d - b \cdot c$

→ SE $n > 2$ → $\det = a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + \dots + a_{1n} \det(A_{1n})$

$\forall A_{ij}$ È DANNO DA ATTR. CANCELLANDO RIGA i E COLONNA j

ESEMPI: • $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} +1 & -0 & +0 \\ 0 & +1 & -0 \\ 0 & 0 & +1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} +1 & -0 & +0 \\ 0 & +1 & -0 \\ 0 & 0 & +1 \end{matrix}$

$\begin{matrix} -1 & -(-1) & 0 \\ 0 & -(+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 0 & -(-1) & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

$\det A = \underset{\text{RIGA}}{1} \cdot (1) - \underset{\text{RIGA}}{0} \cdot (0) + \underset{\text{RIGA}}{0} \cdot (0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (1 \cdot 4) - (2 \cdot 3) = 4 - 6 = -2$

→ $\det(0) = 0$

MATRICE NULLA

→ $\det(I) = 1$

→ $\det(-I) = (-1)^{n \times n}$

→ SE $\det(A) = 0$ → SI DICE CHE LA MATRICE È SINGOLARE (DEGENERE)

→ SE $\det(A) \neq 0$ → SI DICE CHE LA MATRICE È **NON - SINGOLARE**

→ SE LA MATRICE È DIAGONALE O TRIANGOLARE → IL TUTTO DEL TERMINE VIENE AL PRODOTTO DEGLI ELEMENTI LUNGO DIAGONALE PRINCIPALE

↳ ESEMPIO: SI TROVA SCRITTO AD ALLINEARE AD UNA TRIANGOLARE

↳ DIAGONALE TRIANGOLARE

OSS → A^T HANNO LA STESSA, A_{ij} INDICA UN RIGA j

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

PROPRIETÀ DET

1) $\det A = \det A^T$
2) SE $\exists$ RIGA DI $\det(A_{ij}, \dots, \underbrace{B^T}_{\text{MAGGIORE DI } n}, \dots, A^T) = \det(A^T, \dots, A^T, \dots, A^T)$
   ↳ LE CUI COLONNE DI A È NULLA → $\det A = 0$
   ↳ $\det(A^T, \dots, A^T, A^T, \dots, A^T) = \det(A^T, \dots, A^T, -A^T)$
   ↳ $\det(A^T, \dots, A^T, A^T, \dots, A^T)$
3) SE SCAMBIO DUE COLONNE → NE HANNO DI SEGNO
4) SE UNA MAT. HA DUE COLONNE UGUALI → $\det A = 0$
5) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ → COPIANO DI BINET !!! IMPORTANTE

OSS → A DET È RIGO SINGOLARE, ESISTE A QUADRATA RIGA O COLONNA, QUESTO È UTILE SE NON HO UNA COLONNA RIGA CON ZERI ($\det = 0$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ → A È INVERTIBILE SE $\det A \neq 0$ → QUANDO CI DICE MATRICE INVERTIBILE NOTIFICA ALLA $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ → NON - SINGOLARE

↳ **DIMOSTRAZIONE**: $(\det A)(\det A^{-1}) =$

$= \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$

OSS → DE MATRICE CHE SIAMO HANNO UN NUMERO FINITO DI ELEMENTI, QUINDI $\det \neq \infty$

PROPRIETÀ → SE $A \in M_{n \times n}$, $A \in$ INVERTIBILE → A UNA MATRICE NON SINGOLARE, ALLORA

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot (C)^T \quad \text{DOVE: } C = (A_{ij})^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

↳ ESEMPIO: $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ CON $\det A = 2$

$\Rightarrow A^{-1} = (\det - 6 \cdot 1)^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

MINORI E RANGO DELLA MATRICE

MINORE → È UNA MATRICE QUADRATA ($k \times k$) CHE POSSO TROVARE DENTRO $A \in M_{m \times n}$, CANCELLANDO RIGHE E COLONNE

↳ QUANTE? $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$ → m RIGHE E n COLONNE ($k \leq \min(m, n)$)

ESEMPIO: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}$

↳ MINORI DI ORDINE 2 SONO: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

↳ MINORI DI ORDINE 1 SONO: $2, 0, 1, -1, 3, 5$ (UGUALI DI A CONTRO DEFINITI)

RANGO → È UN $\mathbb{N}$ ELEMENTO TC SE $\exists$ UN MINORE DI ORDINE r CON $\det \neq 0$. TUTTI I MINORI DI ORDINE $> r$ HANNO $\det = 0$

ESEMPIO: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rg} A = 2$; $\operatorname{rg} B = 3$; $\operatorname{rg}(AB) = 2$

↳ $\det A = +1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

↳ $\det A = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$

↳ $\det A = 0$

↳ $\det(AB) = +1 \cdot 0 + 1 = 1$

↳ $\det(AB) = 0 - 0 = 0$

↳ $\det A = 0 - 0 + 1 \cdot (0) = 0$

↳ $\det(AB) = 0 - 0 + 1 = 1$

↳ $\det(AB) = 0 - 0 = 0$

OSS: SE $A \in M_{m \times n}$ → $\operatorname{rg} A \leq n$ OR $\det A = 0$

↳ $\operatorname{rg} A = n$ OR $\det A \neq 0$