 17/3/2019

Esercizio

Considera la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Chi è l'elemento a_{13}? 2

a_{32}? 6

a_{23}? 5

Chi è la riga A_2? $(3,4,5)$

la colonna A^3? $(2,5,8)$

Calcolare $Tr(A) = 1+4+8 = 13$

Sia $B = I_3 =$ Identità in $M_{3\times3}$.

Calcolare AB, BA, $A+B$, $A+2B$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = BA = A$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A+2B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Esercizio

Calcola

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10+28 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12+30 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$$

VERO O FALSO

- Il prodotto di due matrici invertibili è invertibile — V

- Tutte le matrici 2x2 senza zeri (t.c. $a_{ij} \neq 0 \ \forall i,j$) sono invertibili — F $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $\det(A \cdot B) = \det A + \det B$ — F $\det(AB) = \det A \cdot \det$

- Se A, B sono invertibili, $A+B$ è invertibile — F $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ è invertibile — F $\det = 6-6=0$

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ è invertibile — V $\det = 7-6=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a+3c=1 \qquad 2a+7c=0$$
$$b+3d=0 \qquad 2b+7d=1$$

- $\det(A+B) = \det A + \det B$ — F $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- La matrice trasposta di $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ — V

Es $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Calcolare AB non si può

" " $AB^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -12+2 & -6 \end{pmatrix}$

" " $A^T B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4+18 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Es Calcolare il determinante di

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (12+1) - 2 \cdot (-2) + (-8) =$$

$$= -13 - 4 = -17$$

$$= -1 \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \quad + 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -13 + 2 \cdot (-2) = -17$$

(È meglio scegliere una riga o colonna con tanti zeri)

VERO O FALSO

- $(A^T)^T = A^T$ $\qquad$ $\underline{F}$ $\quad (A^T)^T = A$

- Il determinante è un operatore lineare $\qquad$ F : $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

- ~~Vero~~ Se A, B sono invertibili anche BA è invertibile $\qquad$ V $\quad$ ($\det BA = \det B \cdot \det A \neq 0$)

- Sia A una matrice $n \times n$, K scalare
  $KA = 0 \iff K = 0$ o $A = 0$ $\qquad$ V $\quad$ (guardo le componenti)

- $A^m = 0$ per $m \iff A = 0$ $\qquad$ F $\quad$ (A deve essere quadr.; matrici nilpotenti $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = 0$

- $Tr(A^T) = tr(A)$ $\qquad$ V $\qquad$ (defn di traccia)

- Il determinante di $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è -2 $\qquad$ F (Solo per $M_{n \times n}$)

- $ABC = 0 \iff A, B$ o $C = 0$ $\qquad$ F $\quad \overset{AB}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \overset{C}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = 0$

- $(AB)^T = A^T B^T$ $\qquad$ F $\qquad \boxed{(AB)^T = B^T A^T}$

- Il determinante di una matrice ortogonale è ± 1 $\qquad$ V $\quad A^T \cdot A = 1$, $\det A^T = \det$
  $\Rightarrow (\det A)^2 = 1$

- $\det(cA^T) = \dfrac{\det A}{c}$ $\qquad$ F $\quad \det(cA^T) = c \det A^T =$
  $= c \det A \Rightarrow$ esempi

Esercizio 1. Cosa vuol dire essere un operatore lineare.

2. Fare un elenco ~~delle applica~~ degli operatori lineari che abbiamo visto su ~~prodo~~ vettori e matrici quadrate

NO

TROPPO DIFFICILE

1. $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o $L : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$

$L(v+w) = L(v) + L(w)$

$L(av) = a\,L(v)$ a scalare

2. ~~$\langle v, w \rangle$~~

~~traccia~~. prodotto scalare;

traccia;

VERO O FALSO

- $Tr(A+cB) = TrA + c\,Tr(B)$ V defn/ linearità della traccia

- $(A+C)^T = A^T + C^T$ vero

- $\det(A^{-1}) = \det A$ F $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$
  $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$
  $\Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1.$

- $M_{n\times m}$ è uno spazio vettoriale di dimensione $m \cdot n$ V
  ⚠ Occhio perchè abbiamo $\times$ e $+$, è uno spazio vett. rispetto al $+$ perche non tutte le matrici hanno l'inverso.

  ⓐ
  - $A+B = B+A$ comm.
  - $(A+B)+C = A+(B+C)$ Assoc.
  - $A+0=A$, $A+(-A)=0$;

  ⓑ a, b scalare:
  - $a(bA) = (ab)A$
  - $a(A+B) = aA + aB$; $(a+b)A = aA+bA$
  - $1A = A$.

  Spazio Vettoriale = Gruppo abeliano + scalare)

- ~~Moltiplicazione~~
  $\det(A^T) = \det A$ V

- $tr(AB) = tr(BA)$ (matrici quadrate) V

- $AC = AB \Leftrightarrow C = B$ (posso semplificare A) F
  $A(C-B) = 0 \Leftrightarrow C-B=$
  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= C-B} = 0, \; C-B \neq$

<u>def</u>. Il <u>rango</u> di una matrice $A \in M_{n \times m}$ è

il massimo ordine di un minore con determinante $\neq 0$.

$$\operatorname{rnk}(A+B) \leq \operatorname{rnk} A + \operatorname{rnk} B$$
$$\operatorname{rnk}(AB) \leq \min(\operatorname{rnk}(A), \operatorname{rnk}(B))$$

<u>Esempi</u>

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \qquad \det A = 0 \qquad \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

VERO O FALSO

- Il prodotto di due matrici triangolari sup è triangolare sup   V   (conto) (sottogruppo)

- Il prodotto di due matrici $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ è della forma $C=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ V

- Tutte le matrici ortogonali sono invertibili   V : $A^{-1}=A^{T}$ che si può sempre fare

- $rg(A) < n \iff \det A = 0$ $A \in M_{n\times n}$ V $\Rightarrow$ rg = ordine del min. con $\det \neq 0$.

- Se due colonne di A sono uguali $\det A = 0$ V $\det \tilde{A}$ con le colonne scamb. $= -\det A = \det A$

- $rnk(A+B) = rnk(A) + rnk(B)$ F $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \equiv 0$

- Sia $A \in M_{n\times n}$ invertibile $\Rightarrow rg(A) = n$ V   perché $\det A \neq 0$

Es Dare un esempio di matrice t.c. $A^T = A$ e un esempio t.c. $A^T = -A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} = A^T$$ (matrice simm.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ +1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ (Antisimm)

(Devono essere quadrate perché la trasp. scambia il numero di righe e il numero di colonne)

---

esercizio

Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Calcolare $\operatorname{tr} A$, , A^T, A^2, $\det A$

$\operatorname{tr} A = -1+1+0 = 0$

$\det A = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3-2) = -10$

$A^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

VERO o FALSO

- le colonne di una matrice ortogonale sono vettori $\perp$ tra loro — **V** — def $A^T = A^{-1} \equiv A^T A = \mathbb{1} \Rightarrow$ il pr. sc. $\langle A^i, A^j \rangle = 0$ if $i \neq j$.

- $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & k \\ 7 & -k & 0 \end{pmatrix}$ è simm. per $k < 1$ — **F**

- $\mathrm{rnk}(A \cdot B) \geq \mathrm{rnk} A \cdot \mathrm{rnk} B$ — **F** — $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Se $A, B \in M_{5\times5}$ sono invertibili $\det(AB) \neq 0$ — **V** — $\det AB = \det A \det B = (\neq 0) \cdot (\neq 0)$

- $A \in M_{n\times n}$ n dispari $\Rightarrow \det(-A) = \det A$ — **F** — $\det(cA) = c \det A$

- Se $A, B \in M_{2\times2}$ invert $\Rightarrow \det(A+B) \neq 0$ — **F** — $(\mathbb{1}_2 - \mathbb{1}_2)$

- $A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale per tutti i ϑ? — **F**; si può fare il conto $A^T \cdot A \neq \mathbb{1}$

  $A^T A = \begin{pmatrix} \cos^2 + \sin^2 & 2\cos\sin \\ 2\cos\sin & \cos^2 + \sin^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ per $\vartheta \neq 0, \pi, \frac{\pi}{2}, 2\pi$

Es. Matrici parte 2 + ripasso rette e piani 19/3/1

Rette e piani

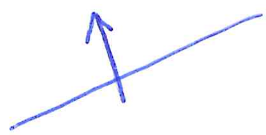
1) Determinare il piano π_1 passante per $A=(5,1,1)$ ortogonale a r
$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=0 \\ z=-t+3 \end{cases}$$

2) Trovare una eq. parametrica per la retta $\pi_1 \cap \pi_2$, $\pi_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+2z+1=0$

1) π_1 ha n_{π_1} = vettore direzione di r

$\Rightarrow$ scriviamo r in forma parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{vettore direzione}}$$



$$\pi_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - z = \text{cost} \right\}$$

$$2\cdot 5 - 1 = 9$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \{ 2x - z = 9 \}$$

2) $$\pi_1 \cap \pi_2 = \begin{cases} 2x - z = 9 \\ x+y+2z+1=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = t \\ z = 2t-9 \\ y = -1-t-2(2t-9) \end{cases}$$

x, y, z in funzione di t, non dell altre var.

$$= -1 - t - 4t + 18$$
$$= 17 - 5t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es $\quad r: \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4 = 0 \end{cases}$

1) • Equazione per $\pi \perp r$ passante per $P = (1,0,3)$

2) • $Q = r \cap \pi$; trovare equazione parametrica per la retta passante per P, Q.

1) π è identif dal suo n_π, $\equiv$ vettore direzione della retta

$\Rightarrow$ Scriviamo la retta in forma parametrica

R. $x_1 = t$

$2t - x_3 = 1 \qquad x_3 = 2t - 1$

$x_2 = x_1 + 4 = 4 + t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \pi: \quad x + y + 2z = \text{cost}$

passa per $P \Leftrightarrow 1 + 0 + 6 = 7$ $\qquad \Rightarrow \pi: x + y + 2z = \cancel{\text{cost}}\ 7$

2) $Q = r \cap \pi$ Oss. che è un punto $\quad \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

Risolvo il sistema. Osservo che 3 eq. per 3 incognite danno una soluzione esatta per x_1, x_2, x_3.

$$\begin{cases} x_3 = 2x_1 - 1 & \text{EQ1} \\ x_2 = x_1 + 4 & \text{EQ2} \\ x_1 + \underbrace{x_1 + 4}_{x_2} + 2\underbrace{(2x_1 - 1)}_{x_3} = 7 & \text{EQ3} \end{cases}$$

$$EQ_3 : 2x_1 + \cancel{4} + 4x_1 - \cancel{2} = \cancel{7}\;5$$

$$6x_1 = 5 \qquad x_1 = \frac{5}{6}$$

$$x_2 = \frac{5}{6} + 4 = \frac{29}{6}$$

$$x_3 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$Q = \left(\frac{5}{6}, \frac{29}{6}, \frac{2}{3}\right)$$

Retta passante per P, Q =

$$P + t(P - Q) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 - 5/6 \\ -29/6 \\ 3 - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/6 \\ -29/6 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -29 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Es 6.2 Determinare le matrici $B \in M_{2\times 2}$ che commutano con $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = BA$ $\qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 3c & 3d \\ 3a & 3b \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 3b & 3a \\ 3d & 3c \end{pmatrix}$$

$\rightarrow c = b \quad a = d \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \rightarrow$ Controllare

Es Trovare le matrici $B \in M_{2\times 2}$ che commutano con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = BA = \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix}$$

$\cancel{a} = \cancel{a}+2b \quad b=0 \qquad b = b$ ✓

$2a+\cancel{c} = \cancel{c}+2d \qquad 2b+d = d$

$a = d$

$\Rightarrow b = 0 \qquad d = d$

$c =$ libero $\quad a = d$

controllo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c+2a & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2a+c & a \end{pmatrix} \quad ✓$$

<u>Es</u> Considerare le matrici seguenti.
Calcolare il rango e quando possibile il det.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rg: 1, 2, 1, 3, 1, 1

$$\det = \cancel{3\cdot(-2)-2} \quad 3\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -12$$

ES Stabilire per quali valori del parametro reale h la seguente matrice è inv.
(e calcolare il rango in funz. di h)

$$\begin{pmatrix} -1 & h & 0^{+} \\ 1 & -1 & 0^{-} \\ 2h & 2 & 1^{+} \end{pmatrix}$$

$$\det = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & h \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot (1-h) \neq 0 \quad \text{per } h \neq 1$$

$\Rightarrow h \neq 1 \quad \det \neq 0 \quad \text{rk} = 3$
matrice invert.

$h=1 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{rk} = 2$

Es

Vero o falso

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ V

Come per la trasposta $(AB)^T = B^T A^T$

perchè? $C = (AB)^{-1}$ è la matrice t.c.

$$C \cdot AB = \mathbb{1} \Rightarrow CAB = B^{-1}A^{-1}AB = \mathbb{1}$$

mentre $A^{-1}B^{-1}AB = ?$

Ricordiamo che il prodotto tra matrici non commuta.

- Il prodotto di due matrici ortogonali è ortogonale

$$A^T A = A A^T = \mathbb{1}_n$$
$$B^T B = B B^T = \mathbb{1}_n$$

$$(AB)^T AB = ?$$

$$= \underbrace{B^T \underbrace{A^T A}_{\mathbb{1}} B}_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$$

AB è ortog. $\Leftrightarrow$

$(AB)^T = (AB)^{-1} \Leftrightarrow$

$(AB)^T AB = \mathbb{1}$.

- La trasposta di una matrice invert. potrebbe non essere invertibile F

A invert $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

$\det A^T = \det A \neq 0 \Longrightarrow$ A^T è invert.

- $\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}A, \mathrm{rg}B)$

$\mathrm{rg}(A+B) \leq \mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Se A è invertibile,

$\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}B$ V

Sappiamo $\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}A, \mathrm{rg}B)$

$\leq \mathrm{rg}B$

$\mathrm{rg}(A^{-1}AB) \leq \mathrm{rg}B$

$\leq \min(\mathrm{rg}A^{-1}, \mathrm{rg}AB) \leq \mathrm{rg}AB.$

- Sia $A \in M_{n \times n}$, n dispari $\Rightarrow$

$\det(-A) = -\det A$ V

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = -a \det | \quad | + b \det | \quad | - c \det | \quad | = -\det \ldots$$

- Sia $A \in M_{n \times n}$ n pari

$\det(-A) = \det A$ V

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

(Ricordiamo che la matrice più semplice a disposizione è sempre uno scalare)

- Vero o falso

$A \in M_{4 \times 4}$, $K \in \mathbb{R}$ reale positivo

$\Rightarrow \det(KA) = K^4 \cdot \det A$ F

$\det KA = K \det A$ indipendentemente dalla dimensione dello spazio.

Esercizio

$A, B \in M_{n \times n}$ $\quad$ $\det A \neq 0$

B invertibile.

A) $B^{-1}AB = A$

B) $AB = BA$

C) $B^{-1}AB$ è invert.

D) $B^{-1}AB$ è ortogonale

E) Nessuna

C) Perchè $\det(B^{-1}AB) = \det B^{-1} \cdot \det A \cdot \det B \neq 0$