COMBINAZIONE LINEARE → UN VETTORE $v \in \mathbb{R}^n$ SI DICE COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORE $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ SE ESISTONO $\underbrace{a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}}_{\text{COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE}}$ t.c. $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$

★ LA COMBINAZIONE LINEARE È DETTA NON BANALE SE ALMENO UN COEFF. $\neq 0$.

↳ INFATTI IL VETTORE NULLO CI SERVIRÀ COME COMBINAZIONE LINEARE DI TUTTI I COEFF. $a_i = 0$

ESEMPIO

① $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ È COMB. LIN. DI $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ PERCHÉ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ È COMB. LIN. DI $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ PERCHÉ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NON È COMB. LIN DI $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ PERCHÉ $a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 0 = 1 \\ 0 + a_2 = 0 \\ a_1 + 0 = 0 \end{cases}$ NON POSSIBILE

ESERCIZIO $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ È C.L. DI $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

SOLUZIONE: DOBBIAMO TROVARE $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ TALI CHE VERIFICHI LA C.L.

$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + (-a_2) + 0 = 4 \\ 0 + 2a_2 + 2a_3 = -3 \\ a_1 + 0 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R_3 \to R_3 - R_1 \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ← NON COMPATIBILE QUINDI È ASSURDO C.L. DI v_1, v_2, v_3

SPAZIO GENERATO DAI VETTORI $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ È L'INSIEME DI TUTTI I VETTORI CHE SI OTTENGONO COME COMBINAZIONI LINEARI DI $v_1, \dots, v_k$

$\Rightarrow \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) := \{ a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \}$

OSSERVAZIONI: LE RETTE E I PIANI SONO SPAZI GENERATI COME SE PASSANO PER L'ORIGINE.

INSIEME DI GENERATORI → UN INSIEME DI VETTORI $\{v_1, \dots, v_k\} \in \mathbb{R}^n$ È UN INSIEME DI GENERATORI PER $\mathbb{R}^n$ SE $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) = \mathbb{R}^n$, OVVERO $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\exists a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ TALI CHE $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$

★ SE DUE VETTORI DI $\mathbb{R}^n$ È COMBINAZIONE LINEARE DI $v_1, \dots, v_k$, SI DICE CHE $v_1, \dots, v_k$ GENERANO $\mathbb{R}^n$

ESEMPIO

① $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ SONO GENERATORI DI $\mathbb{R}^n$.

INFATTI IN GENERALE UN VETTORE $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ È $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ESEMPIO: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ SONO GENERATORI DI $\mathbb{R}^2$ INFATTI $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ SI SCRIVE COME $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_2 - x_1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2x_1 - x_2}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

COME LI HO TROVATI?

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a + b \\ x_2 = a + 2b \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a = x_1 - b \\ a = x_2 - 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - b = -x_2 + 2b \\ a = x_1 - b \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = b \\ a = x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ a = \frac{2x_1 - x_1 - x_2}{2} \end{cases} \Rightarrow$ QUINDI $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2x_1 - x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\det A = 1$, $\det A_x = 1$

OSSERVAZIONE → SIGNIFICA IN FORMA MATRICIALE OSSERVIAMO:

SE $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A|b$ → COMPATIBILE,

SE, INOLTRE, $(A) = \operatorname{rg} A$ IL SISTEMA HA UNICA SOLUZIONE.

+ INCOMPATIBILE

SE, INVECE, $(A) > \operatorname{rg} A$ → SECONDO ROUCHÉ - CAPELLI IL SISTEMA HA ∞ SOLUZIONI.

ESEMPI: RETTE E PIANI IN $\mathbb{R}^3$.

⑤ SE $v_1 \neq 0$ → VETTORE NON NULLO DI $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathcal{L}(v_1)$ È LA RETTA $\{a_1 v_1 \mid a_1 \in \mathbb{R}\}$ PER L'ORIGINE $\{ t v_1 \mid t \in \mathbb{R} \}$.

SE $v_2 \neq 0$ → $\mathcal{L}(v_2)$ CONSISTE DELLA SOLA ORIGINE

⑥ SE v_1, v_2 SONO DUE VETTORI DI $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathcal{L}(v_1, v_2)$ È UN PIANO?

- SE $v_1 = v_2 = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(v_1, v_2) = 0$ → PUNTO
- SE $v_1 = t v_2$, $t \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}(v_1, v_2) = \{ t v_2 \}$ → RETTA
- SE $v_1 = t v_2$, $v_1, v_2 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}(v_1, v_2) = \{ s v_1 + t v_2 \}$ → PIANO

OSS: SE UNO DEI VETTORI È NULLO (ES: $v_1 = 0$, $v_2 \neq 0$) $\Rightarrow \mathcal{L}(v_1, v_2) = \mathcal{L}(v_2)$ È UN NUOVO RETTA

⑦ LO SPAZIO GENERATO DA 3 VETTORI PUÒ ESSERE TUTTO $\mathbb{R}^3$, O UN PIANO PASSANTE PER L'ORIGINE, O RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE O L'ORIGINE STESSA.

DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI (LD) E LINEARMENTE INDIPENDENTI (LI)

LD → I VETTORI $(v_1, \dots, v_k)$ SONO LD SE $\exists\, a_1, \dots, a_k$ ALMENO UNO $\neq 0$ t.c. $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$.

CIOÈ SE IL $0 = 0$ (VETTORE NULLO) PUÒ ESSERE SCRITTO COME C.L. NON BANALE DI $v_1, \dots, v_k$.

LI → I VETTORI $(v_1, \dots, v_k)$ SONO LI SE $\nexists\, a_1, \dots, a_k$ ALMENO UNO $\neq 0$ t.c. $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$

OVVERO SE $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$

QUINDI L'UNICA C.L. DI $v_1, \dots, v_k$ CHE È UGUALE AL VETTORE NULLO È QUELLA BANALE

ESEMPIO: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ SONO LD

INFATTI $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_3 = 3v_1 + 4v_2 \equiv v_3 - 3v_1 - 4v_2 = 0 \equiv v_3 = \frac{v_1 - v_2}{2}$

PROPRIETÀ

① SE UNO DEI VETTORI $v_1, \dots, v_k$ È IL VETTORE NULLO $\Rightarrow v_1, \dots, v_k$ SONO LD

② UN VETTORE v_1 È LI $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$

③ DUE VETTORI v_1 E v_2 SONO LI $\Leftrightarrow$ NON SONO MULTIPLI L'UNO DELL'ALTRO

④ SE v_1, v_2 SONO LI, MA v_1, v_2, v_3 SONO LD $\Rightarrow v_3$ È C.L. DI v_1, v_2.

VICEVERSA SE v_3 È C.L. DI $v_1, v_2 \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ SONO LD

⑤ I VETTORI DI $\mathbb{R}^n$ NON NULLI E ORTOGONALI SONO LI

BASE → UNA BASE DI $\mathbb{R}^n$ È UN INSIEME ORDINATO DI GENERATORI LI DI $\mathbb{R}^n$.
- UNA BASE ORDINATA DI $\mathbb{R}^n$ È UNA BASE + UN VETTORE SONO QUE A RUE ORDINATA.

↳ SE NOTERE TUTTI I SUOI VETTORI HANNO LUNGHEZZA 1, LA BASE ORDINATA SI DICE ORTONORMALE

ESEMPIO: $e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

★ e_1, e_2, e_3 FORMANO UNA BASE DI $\mathbb{R}^n$ CHIAMATA BASE STANDARD (CANONICA) DI $\mathbb{R}^n$ E VIENE INDICATA CON $C = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. ESSA È ORTONORMALE, ORTOGONALE

ALGORITMO DI GRAM-SCHMIDT → SIA (v_1, v_2, v_3) UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$. VERIFICARE CHE I VETTORI $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1$, $w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2$ FORMANO UNA BASE ORTOGONALE DI $\mathbb{R}^3$

DIMENSIONE

CONCETTO → UNA BASE DI $\mathbb{R}^n$ È FORMATA SEMPRE DA N VETTORI.

↳ SIANO $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ CON $v \in \mathbb{R}^n$

① PER ESSERE LI DEVO ALMEN AVERNE N VETTORI. INFATTI $A = (v_1, \dots, v_k) \in M_{n,k}$ MA SE $k < n$ HA $\operatorname{rg} \leq \min(k, n) < n$ QUINDI NON PUÒ AVERE RANGO N.

② PER GENERARE DEVO AVERE ALMENO N VETTORI. INFATTI COMPONENTE SIGNIFICA MATRICE, SISTEMA (AX=B) HA SOLUZIONE $\forall v \in \mathbb{R}^n$, È QUINDI CHE A DEVE ESSERE ALMENO $\operatorname{rg} n$ (K=n)

CONCLUSIONE → LA DIMENSIONE DI $\mathbb{R}^n$ È IL NR. DI VETTORI CHE COMPONGONO UNA SUA BASE. QUINDI $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

COORDINATE → SIA $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ BASE DI $\mathbb{R}^n$. POICHÉ $v_1, \dots, v_n$ GENERANO, OGNI VETTORE $v \in \mathbb{R}^n$ SI PUÒ SCRIVERE COME $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. POICHÉ SONO LI, $a_1, \dots, a_n$ SONO DETERMINATI IN MANIERA UNICA.

★ $a_1, \dots, a_n$ SI CHIAMANO COORDINATE DI v RISPETTO A B E SI SCRIVE

$$[v]_B = (a_1, \dots, a_n)^T$$

ESEMPIO: SE C È LA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$ E $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow [v]_C = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

② $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ → BASE DI $\mathbb{R}^2$ E $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 \\ x_2 = a_1 + a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = x_1 - a_2 \\ x_2 = (x_1 + a_2) + a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{x_1 + x_2 - x_1}{2} \\ a_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{x_1 - x_2}{2} \end{pmatrix}$

OSS: A PROPOSITO DI RANGO / LI

SE SE $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ SONO LI $\Rightarrow$ SE $\in \mathbb{R}$ ANCHE $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ SONO LI

ESEMPIO: $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \end{pmatrix}$ CON $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^n$ E QUINDI ANCHE $A \in M_{k,n}$.

IL NUMERO DI RIGHE LI NON CAMBIA QUANDO APPLICHIAMO GAUSS $\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \text{NR. RIGHE LI}$

PROPRIETÀ (EQUIVALENTI DI RANGO) // $A \in M_{m,n}$

① $\operatorname{rg} A$ = ORDINE DEL MINORE PIÙ GRANDE CON DET $\neq 0$

② $\operatorname{rg} A$ = NR. RIGHE NON NULLE DOPO APPLICAZIONE DI A GAUSS

③ $\operatorname{rg} A$ = NR. COLONNE LI

④ $\operatorname{rg} A$ = NR. RIGHE LI

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

NOTE: SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^n$ HANNO PROPRIETÀ ANALOGHE A QUELLE DI $\mathbb{R}^n$ STESSO

UN SOTTOINSIEME $W \neq 0$ DI $\mathbb{R}^n$ SI DICE SOTTOSPAZIO VETTORIALE (O VARIETÀ) SE:

① $\forall v, w \in W$: $v + w \in W$

② $\forall v \in W$ $\forall a \in \mathbb{R}$: $av \in W$

★ DALLE DUE CONDIZIONI SEGUE ANCHE CHE $0 \in W$ PERCHÉ SECONDO ② $-v \in W$ E QUINDI $v + (-v) \in W$

ESEMPI → **PROPRIETÀ** (SSV = SOTTOSPAZIO VETTORIALE)

① $\{0\}$ È UN SSV DI $\mathbb{R}^n$

② PIANI E RETTE SONO SSV DI $\mathbb{R}^3$ → PASSANO PER L'ORIGINE

③ SOL $(A|0)$ È UN SSV

④ SOL $(A|b)$ CON $b \neq 0$ NON È SSV

⑤ $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \}$ È SSOTTOSPAZIO VETTORIALE (O VARIETÀ) SE:

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rg} A = 1$ $\dim(W) = 3 - \operatorname{rg} A = 2$

⑥ $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2^2 \}$ NON È SSV

⑦ $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \geq 0 \}$ NON È SSV.