$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m EQUAZIONI — n INCOGNITE

COEFFICIENTI — INCOGNITE O VARIABILI — VETTORE TERMINI NOTI

* SE SONO TUTTI $\emptyset$, SI DICE CHE IL SISTEMA È OMOGENEO

→ SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI CON m EQUAZIONI E n INCOGNITE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{MATRICE COEFFICIENTI } (M_{m \times n})$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \rightarrow \text{VETTORE DEI TERMINI NOTI}$$

$$\boxed{(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)}$$

↓

MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA

↓

USANDO IL METODO RIGHE X COLONNE, POSSIAMO SCRIVERE IL SISTEMA IN FORMA MATRICIALE: $Ax = b$ DOVE $x = (x_1, \dots, x_n)^T$

È UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA SE I SUE COMPONENTI x_i, $i = 1, \dots, n$ SODDISFANO CONTEMPORANEAMENTE TUTTE LE EQUAZIONI DEL SISTEMA

L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA VERRÀ SCRITTO COME ↓

$$\boxed{Sol(A|b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}}$$

DEFINIZIONE → IL SISTEMA È COMPATIBILE E RISOLVIBILE SE AMMETTE ALMENO UNA SOLUZIONE ($Sol(A|b) \neq 0$)

* UN SISTEMA OMOGENEO È COMPATIBILE PERCHÉ AMMETTE SEMPRE LA SOLUZIONE BANALE $0 = (0, \dots, 0)^T$.

ESEMPIO:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -2 \\ x_1 - 6x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -2 \\ x_1 = 7 + 6x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(7+6x_2) + 5x_2 = -2 \\ * \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21 + 18x_2 + 5x_2 = -2 \\ * \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 23x_2 = -23 \\ * \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 \\ x_1 = 7 + 6(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$* \quad A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -6 & 7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{array}\right)$$

HO SCAMBIATO LE RIGHE

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 7 \\ 0 & 23 & -23 \end{array}\right)$$

2 RIGA = $-3 \cdot$ 1 R = $3 - 1 \cdot 1$; $5 - (3 \cdot -6)$; $-2 - (3 \cdot 7)$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

2R · $\frac{1}{23}$ = $0, 1, -1$

OPERAZIONI ELEMENTARI AMMISSIBILI

1. SCAMBIARE DI POSTO 2 RIGHE
2. SOMMARE O SOTTRARRE AD UNA RIGA IL MULTIPLO DI UN'ALTRA
3. MOLTIPLICARE UNA RIGA PER UNO SCALARE NON NULLO (→ COEFF.)

} VENGONO USATE PER RENDERE IL SISTEMA PIÙ FACILE SENZA CAMBIARE IL RISULTATO

ALGORITMO DI GAUSS

1. CONSIDERO LA MATRICE $X = (A|b) \in M_{m \times (n+1)}$
   - TROVO LA PRIMA COLONNA CHE È DIVERSA DA $\emptyset$ ($x^j \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$) — COLONNA $\neq 0$
   - QUINDI LA COLONNA X^j HA ALMENO UN ELEMENTO $\neq \emptyset$
   - INFINE METTO LA RIGA X_i (QUELLA CHE HA L'ELEMENTO $\neq \emptyset$) COME PRIMA RIGA
2. SOTTRAGGO MULTIPLI OPPORTUNI DI X_1 ALLE ALTRE RIGHE, IN MODO DA AVERE TUTTI $\emptyset$ SOTTO L'ELEMENTO X_{1j}.
3. CERCO LA PROSSIMA COLONNA NON NULLA E RIPETTO SULLA SOTTOMATRICE CHE SI OTTIENE TOGLIENDO LA PRIMA RIGA E LE PRIME j COLONNE

ESEMPIO

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1}$$

(SCAMBIO LE 2 RIGHE PERCHÉ $a_{11} = 0$ È ALTRO) — (VOGLIO TUTTI $\emptyset$ SOTTO QUI)

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$$

→ MATRICE A SCALA PRONTA PER I CALCOLI.

→ LAVORO SU QUESTA MATRICE

$a_{11} \neq 0$ → DEVO DIMINUIRE A 32 UNA RIGA PER DA FA −2.

PIVOT (VALORE SOTTO IL QUALE CI È 0) — → BLOCCO DI ZERI

ESEMPI DI MATRICI RIDOTTE A SCALA

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rg = 2 \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad rg = 3 \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rg = 2 \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad rg = 2.$$

RANGO → IL RANGO DI UNA MATRICE È IL NUMERO DI RIGHE NON NULLE QUANDO VIENE RIDOTTA A SCALA

INSIEME DELLE SOLUZIONI PER I SISTEMI RIDOTTI.

→ PARTIAMO DALLA MATRICE COMPLETA $(A|b)$ → GAUSS → $(S|d)$ → A SCALA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_m \end{array}\right)$$

CASO 1: HO DELLE RIGHE DI ZERI NELLA MATRICE S, MA I COEFF d_j RELATIVI A QUELLE RIGHE NON SONO NULLI → IL SISTEMA NON È COMPATIBILE

ESEMPIO:

$$(S|d) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

NON È RISOLVIBILE PERCHÉ LA III RIGA IN FORMA DI EQUAZIONE SAREBBE $0 = 1$ E QUINDI NON VERO

CASO 2:

- IL RANGO DI $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ È 2 PERCHÉ HA 2 RIGHE NON NULLE.
- INVECE IL RANGO DI $(S|d)$ È 3 PERCHÉ HA 3 RIGHE NON NULLE (CONSIDERANDO d)

↓

QUINDI SE E SOLO SE $rg(S|d) > rg\,S$

CASO 2: AD OGNI RIGA NULLA DI S CORRISPONDE UN COEFF. NULLO DI d

2A → $r = n$ (RIGHE $\neq 0$) = (n COLONNE) → $\forall$ VARIABILE C'È UN ELEMENTO DI TESTA. LE RISOLVO A RITROSO PARTENDO DA X_n E TROVO UN'UNICA SOLUZIONE $(x_1, \dots, x_n)^T$

2B → $r < n$ ((RIGHE $\neq 0$) < (n COLONNE)) ⇒ $n - r$ VARIABILI NON DEVONO SODDISFARE NESSUNA PARTICOLARE → HO $n - r$ PARAMETRI LIBERI (∞ SOL)

* VARIABILI LIBERE → IN UN SISTEMA LINEARE $Sx = d$ IN FORMA A SCALA, LE VAR. BASICHE SONO LE VARIABILI CORRISPONDENTI ALLE COLONNE CHE CONTENGONO UN ELEMENTO DI TESTA

* VARIABILI BASICHE → CORRISPONDONO ALLE COLONNE SENZA ELEMENTI DI TESTA.

ESEMPIO:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

→ PRIMA COLONNA NON NULLA

$$R_2 \to R_2 - R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \quad R_3 \to R_3 - R_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad R_3 \to R_3 + R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

↓

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_2 - x_3 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

→ x_3 È VAR LIBERA E PUÒ ESSERE SCRITTO COME $\boxed{x_3 = \lambda}$

$$Sol(A|b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1 - x_3 \,;\, x_2 = 1 - x_3 \right\} =$$

$$= \{(1 - \lambda, 1 - \lambda, \lambda)\} \rightarrow$$

→ SISTEMA CON ∞ SOLUZIONI

* IPOTESI: SE $\lambda = 0 \Rightarrow (1, 1, 0)$
$\lambda = 1 \Rightarrow (0, 0, 1)$
$\lambda = 7 \Rightarrow (-6, -6, 7)$

TEOREMA → (STRUTTURA DELL'INSIEME DELLE SOLUZIONI) → SIA $Ax = b$ UN SISTEMA LINEARE COMPATIBILE → TUTTE LE SUE SOLUZIONI SI OTTENGONO SOMMANDO AD UNA SOLUZIONE PARTICOLARE X_0 TUTTE LE SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE OMOGENEO ASSOCIATO $Ax = 0$.

IN ALTRE PAROLE $Sol(A|b) = X_0 + Sol(A|0)$

TEOREMA ROUCHÉ - CAPELLI → SIA A MATRICE $m \times n$ ⇒ IL SISTEMA LINEARE $Ax = b$ È COMPATIBILE ⇔ $rg\,A = rg(A|b)$

- SE $Ax = b$ È COMPATIBILE, LE SOLUZIONI DIPENDONO DA $n - rg$ PARAMETRI, CHE È LA DIMENSIONE DELL'INSIEME DELLE SOLUZIONI.

  IN PARTICOLARE È SOLUZIONE UNICA SE $rg = n$.
- SE $m = n$, $Ax = b$ HA ESATTAMENTE UNA SOL. ⇔ A È NON-SINGOLARE.

COROLLARIO → • SIA A MATRICE $m \times n$ → IL SISTEMA $Ax = 0$ HA UNA SOL. NON BANALE $x \neq 0$ ⇔ $rg\,A < n$ (QUINDI SE $m < n$, $Ax = 0$ HA SEMPRE UNA SOLUZIONE NON BANALE)

- SE $m = n$ → $Ax = 0$ HA UNA SOL. NON BANALE ⇔ A È SINGOLARE.

OSSERVAZIONI:

1) $Ax = 0$ HA SEMPRE LA SOLUZIONE $x = 0$
2) SE $A \in M_{n \times n}$, IL $rg\,A = n$ ⇔ $det\,A \neq 0$ (A È INVERTIBILE (NON SINGOLARE))
3) GAUSS SI APPLICA A UNA MAT. A SE VOGLIO CALCOLARE IL SUO RANGO.
4) GAUSS SI APPLICA ALLA MAT. COMPLETA DEL SISTEMA QUANDO VOGLIO RISOLVERE IL SISTEMA
5) GAUSS SI APPLICA ALLE RIGHE, NON ALLE COLONNE.