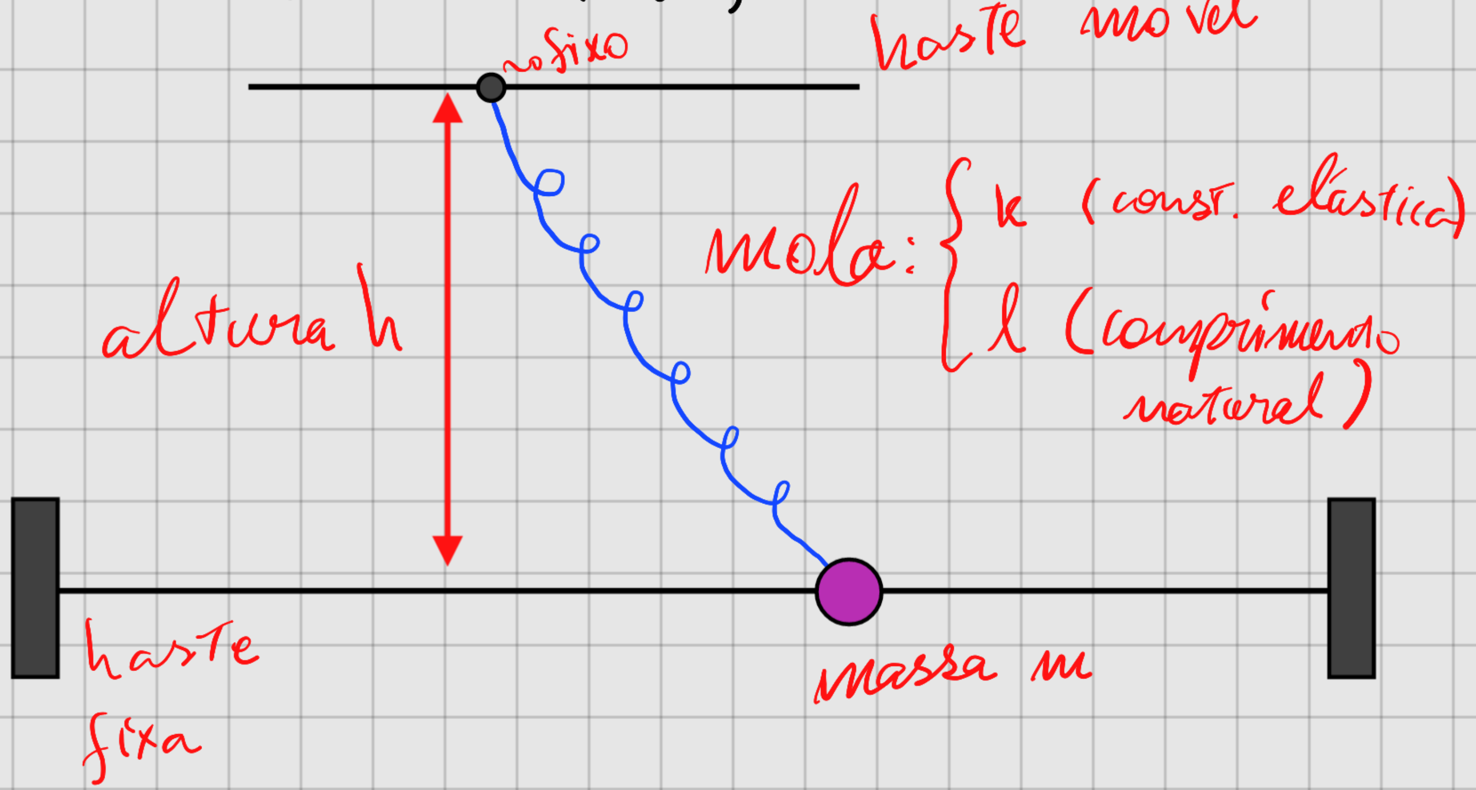
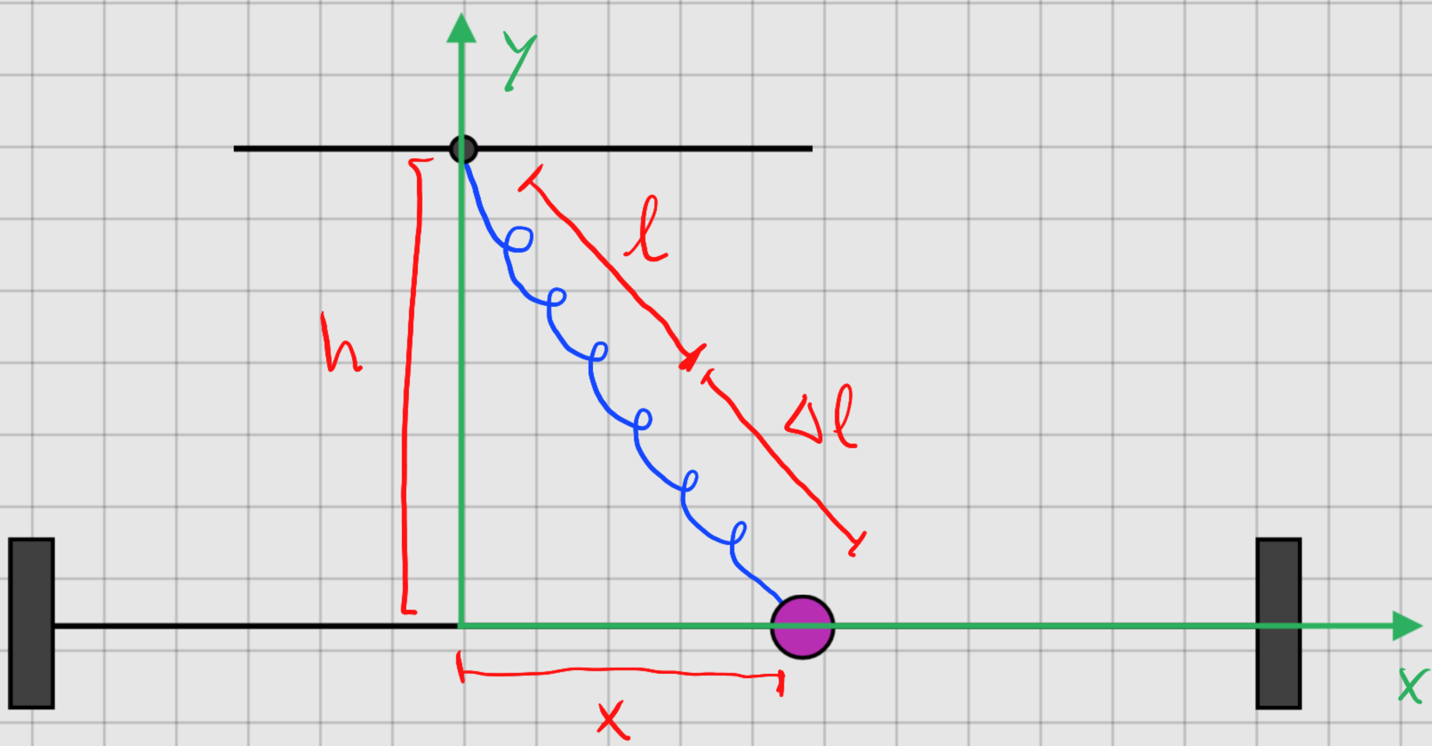
Example 5.2 A bead of mass m slides along a smooth horizontal cylindrical rod connected to a spring with force constant k and natural length l, as depicted in Fig. 5.2. Find the equilibrium positions and classify them as to stability in the cases $l > a$ and $l < a$.

Nivaldo (Mec. Analítica)



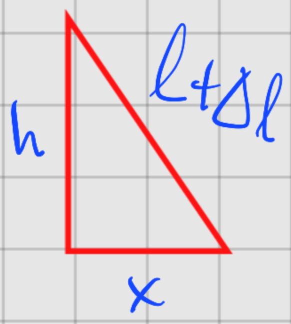
find equilibria, stability !



Determinar $\mathcal{L} = T - V$

$$\begin{cases} T = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} & \text{[mov. restrito ao eixo } x\text{]} \\[2em] V = \dfrac{k\Delta l^2}{2} & \text{[energia pot. elástica]} \end{cases}$$

mas $(l + \Delta l)^2 = h^2 + x^2$



$$\Rightarrow \boxed{\Delta l = +\sqrt{h^2 + x^2} - l}$$

↳ + pois $l + \Delta l$ é positivo

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}\left(\sqrt{h^2 + x^2} - l\right)^2}$$

Eqs de movimento: (sem dissipação)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x\left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{h^2+x^2}}\right) \quad \text{mas} \quad \dot{x} = v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}x\left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{h^2+x^2}}\right) \end{cases} \quad \boxed{\text{Eq (1)}}$$

Eqs de movimento (com dissipação)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}}$$

função dissipação de Rayleigh

Força ∝ velocidade

$$\mathcal{F} = \frac{b\,v^2}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{b}{m}v - \frac{k}{m}x\left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{h^2+x^2}}\right) \end{cases} \quad \boxed{\text{Eq (2)}}$$

A) Sem dissipação

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}x\left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{h^2+x^2}}\right)$$

→ Equilíbrio (Pontos Fixos)

$\dot{x} = 0$ e $\dot{v} = 0$ para $\overbrace{x = x^* \text{ e } v = v^*}^{PF}$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{v^* = 0}$$

$$\underbrace{\frac{k}{m}x^*}_{=0}\left(1 - \underbrace{\frac{\ell}{\sqrt{h^2+x^{*2}}}}_{=0}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m}x^* = 0 \Rightarrow \boxed{x^* = 0}$$

$$\Rightarrow \ell = \sqrt{h^2 + x^{*2}} \Rightarrow \boxed{x^* = \pm\sqrt{\ell^2 - h^2}}$$

B) Com dissipação

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{b}{m} v - \frac{k}{m} x \left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right)$$

→ Equilíbrio (Pontos Fixos)

$\dot{x} = 0$ e $\dot{v} = 0$ para $\overbrace{x = x^* \text{ e } v = v^*}^{PF}$

$\Downarrow$ $\quad\quad\quad\quad$ $\Downarrow$

$v^* = 0$ $\quad$ $x^* = 0$ e $x^* = \pm\sqrt{\ell^2 - h^2}$

$(h < \ell)$

↳ mesmos PF com e sem dissipação

→ PF (x^*, v^*) com $\underbrace{x^*, v^* \in \mathbb{R}}$

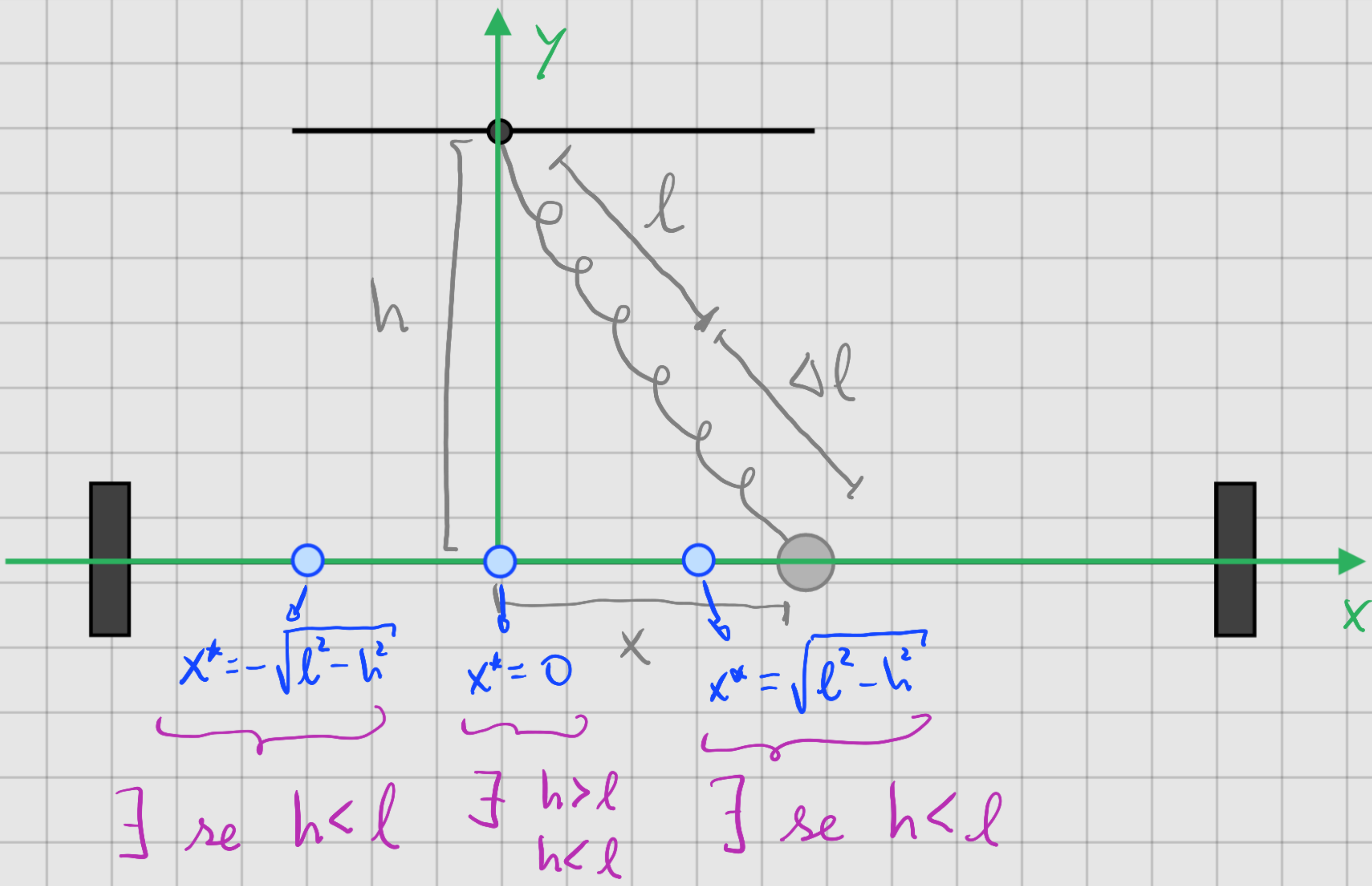
PF 1: $(0, 0)$

PF 2: $(+\sqrt{\ell^2 - h^2}, 0)$ com $h < \ell$

PF 3: $(-\sqrt{\ell^2 - h^2}, 0)$ com $h < \ell$

altura menor que o comprimento natural da mola

Visualizando:



Agora, precisamos determinar a estabilidade dessas soluções para

$\underbrace{h < \ell}_{3\ \text{PF}}$ e $\underbrace{h > \ell}_{1\ \text{PF}\ [x^* = 0]}$

→ $\underset{\sim}{\text{Estabilidade}}$: Determinar $\lambda_{1,2}$ de J

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x} = f(x,v)\\ \dot{v} = g(x,v)\end{array}\right. \Rightarrow J = \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial v}\end{bmatrix}$$

com $\boxed{J\vec{u} = \lambda\vec{u}}$

λ → autovalores de J

$\vec{u}$ → autovetores de J

e o deslocamento do PF é

$$\Delta\vec{q} = \begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x - x^*\\ v - v^*\end{bmatrix}$$

a solução é (linearizando no PF)

$$\Delta\vec{q} = c_1 \underbrace{\vec{u}_1}_{\text{autovetor de } J} e^{\lambda_1 t} + c_2 \underbrace{\vec{u}_2}_{\text{autovetor de } J} e^{\lambda_2 t}$$

→ Portanto a solução "atrai" [i.e. é estável] dependendo da parte Real de λ

→ a solução oscila dependendo da parte imaginária de λ

⇒ Parte $Re(\lambda)$ → estabilidade

Estável: $Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$

Instável: $Re(\lambda_i) > 0 \quad \forall i$

Sela: misto $Re(\lambda_i) \gtrless 0$

⇒ Parte $Im(\lambda)$ → frequência das oscilações

Calculando a Jacobiana:

A) Sem dissipação

$\dot{x} = v$

$\dot{v} = -\frac{k}{m} x \left(1 - \frac{l}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = 1$

$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{k}{m}\left(1 - \frac{h^2 l}{(h^2+x^2)^{3/2}}\right)$

$\frac{\partial g}{\partial v} = 0$

B) Com dissipação

$\dot{x} = v$

$\dot{v} = -\frac{b}{m} v - \frac{k}{m} x \left(1 - \frac{l}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = 1$

$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{k}{m}\left(1 - \frac{h^2 l}{(h^2+x^2)^{3/2}}\right)$

$\frac{\partial g}{\partial v} = -\frac{b}{m}$

Sem dissipação = Com dissipação usando $\underline{\underline{b=0}}$

→ Com / Sem dissipação:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m}\left(1 - \frac{h^2 l}{(h^2+x^2)^{3/2}}\right) & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ PF: $x^* = v^* = 0$ $\left[\exists \quad h \substack{> \ell \\ < \ell} \right]$

$$J\Big|_{x^*, v^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell}{h}\right) & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

autovalores:

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell}{h}\right)}}$$

Note que o argumento da raiz é

$$\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell}{h}\right) > 0 \quad \text{se} \quad \boxed{h < \ell}$$

estritamente positivo!

$\rightsquigarrow$ portanto, vamos separar em dois casos: $\begin{cases} h < \ell \\ h > \ell \end{cases}$

$\Rightarrow$ Caso $h < \ell$: $\boxed{Re(\lambda_{1,2}) = \lambda_{1,2}}$

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell}{h}\right)} < 0 \quad \forall \; b>0, m>0, \; k>0, \; 0<h<\ell$$

$\hookrightarrow$ PF: $x^* = 0$ é sempre $(h < \ell)$ atrator (estável) na autodireção $\vec{u}_1$ associada a λ_1

Olhando o λ_2 : (ainda com $h < \ell$)

$$\lambda_2 = -\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell}{h}\right)} < 0 \; ?$$

i.e. pode ser estável

$$\frac{b}{2m} \overset{?}{>} \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell}{h}\right)}$$

$$\frac{b}{2m} \overset{?}{>} \frac{b}{2m}\underbrace{\sqrt{1 + \frac{4mk}{b^2 h}(\ell - h)}}_{= B > 1 \text{ pois } \ell > h}$$

$$\boxed{\frac{b}{2m} \cancel{>} B\frac{b}{2m} \quad \text{pois } B > 1}$$

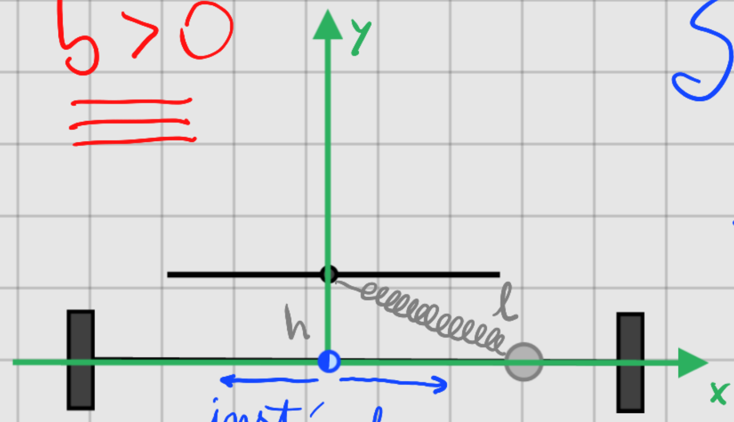
$$\frac{b}{2m} \overset{?}{>} \frac{b}{2m} \cdot \overbrace{B}^{>1} \rightsquigarrow \text{contradição!}$$

Isso significa que $\vec{u}_2$ associada a λ_2 é sempre instável! (repelente)

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{PF: } (x^* = 0, V^* = 0) \text{ é } \underline{\underline{\text{Sela}}}}$

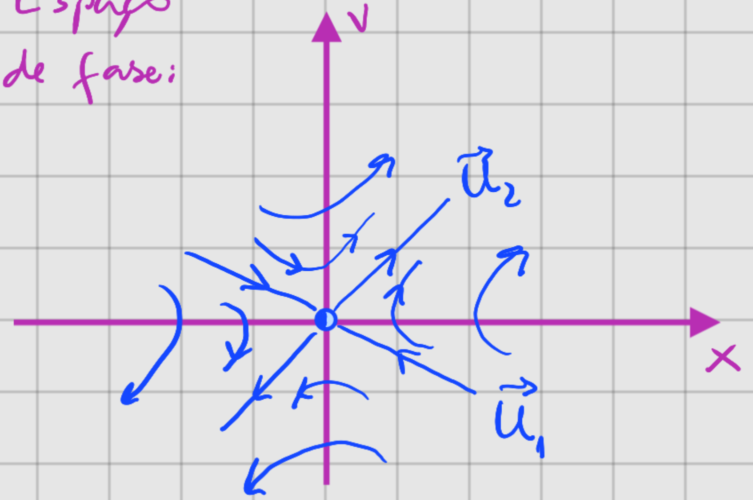
pois atrai (é estável) em $\vec{u}_1$ e repele (é instável) em $\vec{u}_2$ quando $\boxed{h < \ell}$; Visualizando:

$\underline{\underline{b > 0}}$



Somente CI sobre $\vec{u}_1$ levam à $x^* = 0$, $V^* = 0$

Espaço de fase:



Ou seja, é preciso uma combinação exata de x_0, V_0 para ficar parado ou chegar em $\boxed{x^* = 0}$

$\rightarrow$ diferentes soluções

$\Rightarrow$ Caso $h > l$: [Ainda PF: $x^* = v^* = 0$]

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m}\left(1-\frac{l}{h}\right) - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$Re(\lambda_{1,2}) = -\frac{b}{2m} < 0 \quad \boxed{\text{sempre!}} \quad \left(\begin{array}{l}\text{pois} \\ b>0 \\ m>0\end{array}\right)$$

---

lembrando que

$$\Delta\vec{q} = c_1 \vec{u}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{u}_2 e^{\lambda_2 t}$$

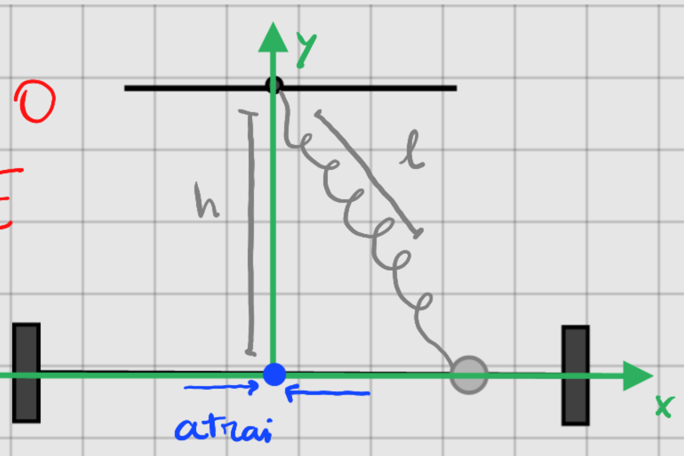
$$e \quad \lambda = \mu + i\omega \quad \begin{cases} Re\,\lambda = \mu \\ Im\,\lambda = \omega \end{cases}$$

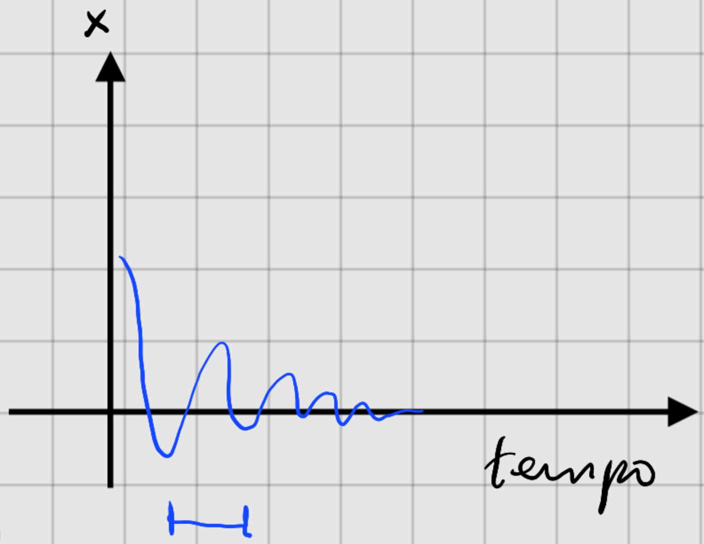
$$\Rightarrow \Delta\vec{q} = c_1 \vec{u}_1 e^{\mu_1 t} e^{i\omega_1 t} + c_2 \vec{u}_2 e^{\mu_2 t} e^{i\omega_2 t}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1-\frac{l}{h}\right) - \frac{b^2}{4m^2}}}$$

são as frequências das oscilações próximas ao PF

$b > 0$

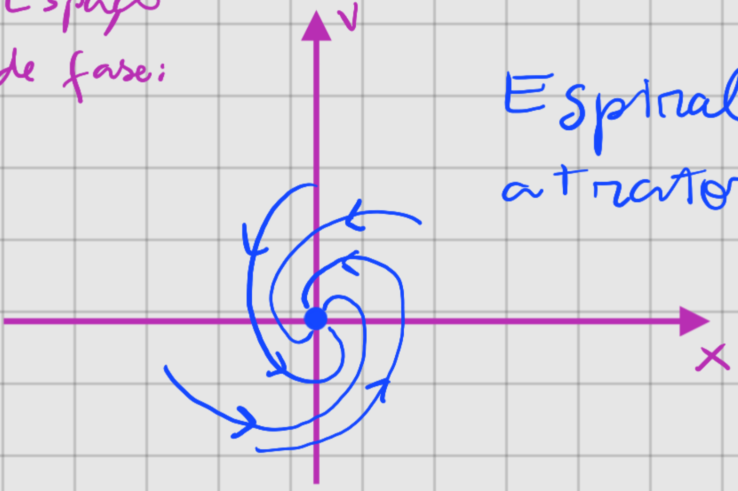




$$T \cong \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T \cong 2\pi \left[\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l}{h}\right) - \frac{b^2}{4m^2} \right]^{-1/2}$$

Espaço de fase:



Espiral atratora

→ diferentes soluções

O $\boxed{\text{PF} \quad x^* = 0}$ é atrator

através de oscilações amortecidas

sempre que $\boxed{h > l}$ $\forall$ CI

o período das oscilações é

$$\boxed{T \approx \frac{2\pi}{\omega}}, \text{ com } \boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}\left(1 - \frac{l}{h}\right) - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Caso sem dissipação $[x^* = 0]$

$b = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_{1,2} = \sqrt{-\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l}{h}\right)}$

→ Caso $h < l$: $\boxed{Re(\lambda_{1,2}) = \lambda_{1,2}}$

↳ a análise é basicamente a mesma que no caso anterior

$\Rightarrow x^*$ é sela $\begin{cases} \vec{u}_1 \text{ atrai} \\ \vec{u}_2 \text{ repele} \end{cases}$ → instável

→ Caso $h > l$: $\boxed{Re(\lambda_{1,2}) = 0}$

↳ $x^* = 0$ não atrai, nem repele

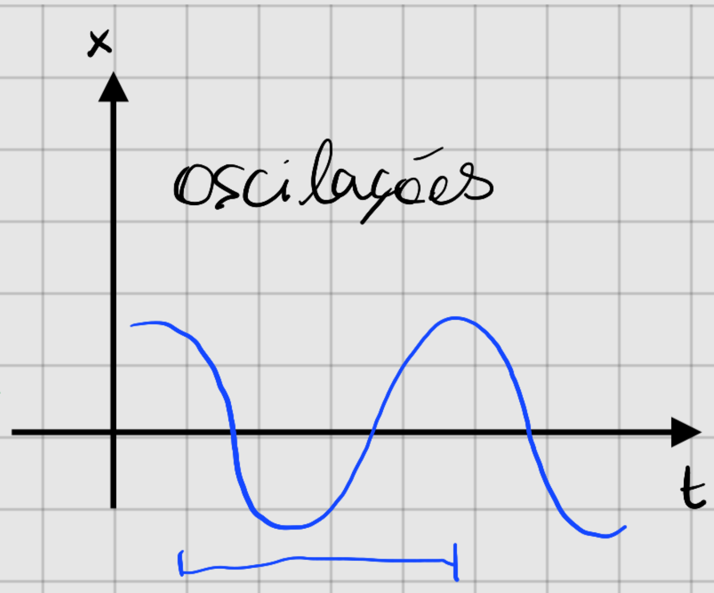
$\Rightarrow$ é "neutro"

$$\lambda_{1,2} = i \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l}{h}\right)}}_{= \omega}$$

Note que

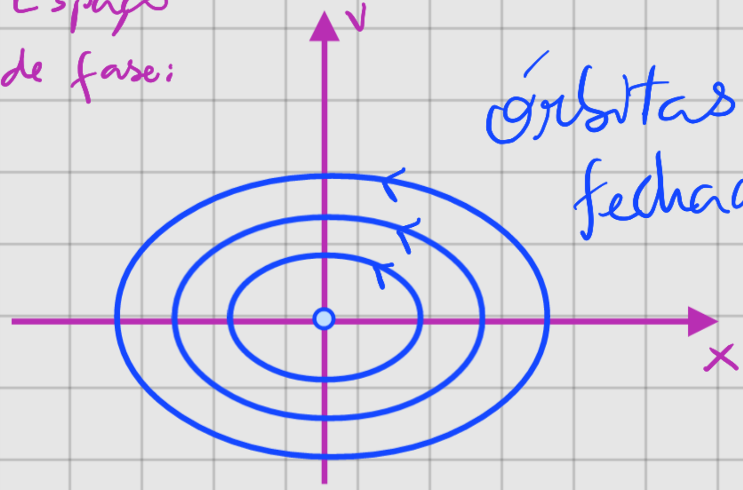
$\boxed{Tr(J|_{x^*, v^*}) = 0}$ ↳ $x^* = 0$ é um "centro" (neutro)

$b = 0$ $\equiv$



$$T \cong \frac{2\pi}{\omega}$$

Espaço de fase:



órbitas fechadas

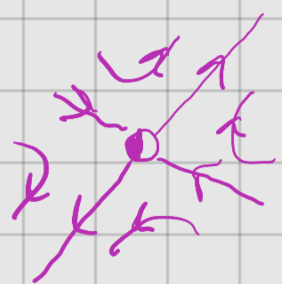
$$T \cong 2\pi\left[\frac{k}{m}\left(1-\frac{\ell}{h}\right)\right]^{-1/2}$$

→ diferentes soluções

as órbitas são fechadas e neutras, todas estáveis

$\boxed{\to \text{Resumo} \quad x^* = 0}$

- $h > \ell \to$ estável
  - $b = 0 \to$ centro
  - $b > 0 \to$ atrator espiral
- $h < \ell \to$ instável
  - $b \geq 0 \to$ sela



$\rightsquigarrow$ PF: $x^* = \pm\sqrt{\ell^2 - h^2}$ Somente $h < \ell$

$v^* = 0$

A matriz $$\mathbb{J}\Big|_{x^*, v^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m}\left(1 - \frac{h^2}{\ell^2}\right) & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b}{2m} \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{h^2}{\ell^2}\right) - \frac{b^2}{4m^2}}}_{\text{freq. das osc. amortecidas}} = \mu_{1,2} \pm i\,\omega_{1,2}$$

$$\boxed{\operatorname{Re}[\lambda_{1,2}] \leq 0}$$

[Ver resolução no Mathematica]

$\hookrightarrow$ assumindo $b \geq 0$, $m > 0$, $0 < h < \ell$, $k > 0$

$\Rightarrow$ $x^* = \pm\sqrt{\ell^2 - h^2}$ são sempre estáveis ou neutros

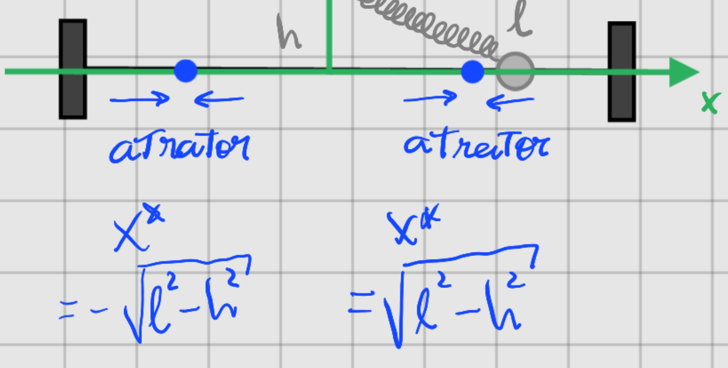
osc. amortecidas

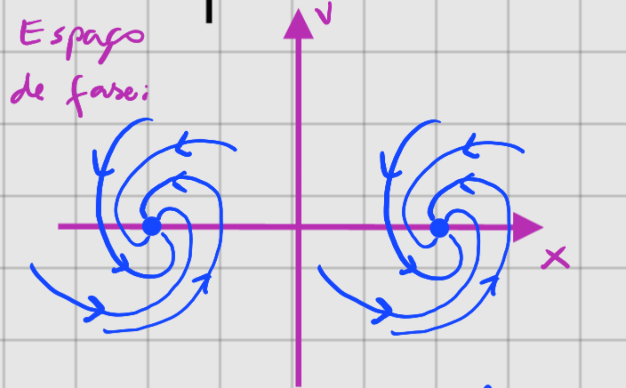
$b>0$ Também é possível achar combinações de m, b, k, h e l que torna o amortecimento crítico ou supercrítico (ou seja, $x \xrightarrow[t\to\infty]{} x^*$ sem oscilações)

Por exemplo, se $m < \frac{b^2}{4k}$

ou se $m > \frac{b^2}{4k}$ e $h < l < 2\sqrt{\frac{h^2 k m}{4km - b^2}}$

Nos outros casos, as oscilações são amortecidas (espirais estáveis):





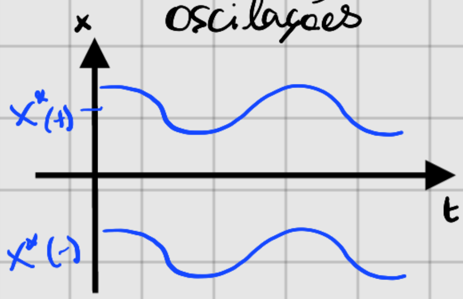
→ diferentes soluções

$\underline{b = 0}$ Da mesma maneira, as espirais se tornam órbitas estáveis e fechadas (conservativas)

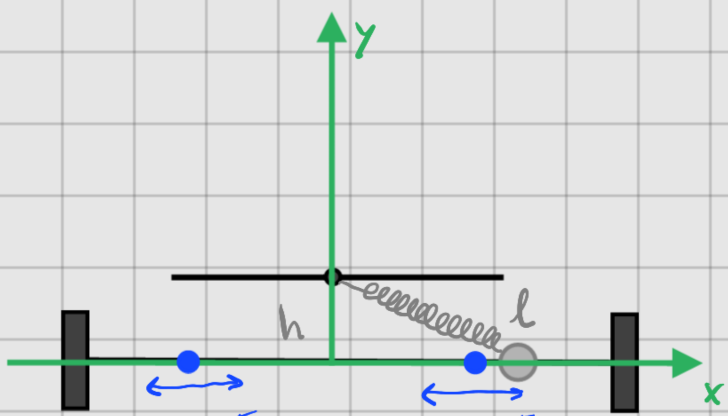
pois

$$\lambda_{1,2} = i\sqrt{\frac{K}{m}\left(1-\frac{h^2}{\ell^2}\right)} = i\,\omega_{1,2} \Rightarrow T = 2\pi\left[\frac{K}{m}\left(1-\frac{h^2}{\ell^2}\right)\right]^{-1/2}$$

↳ período das oscilações



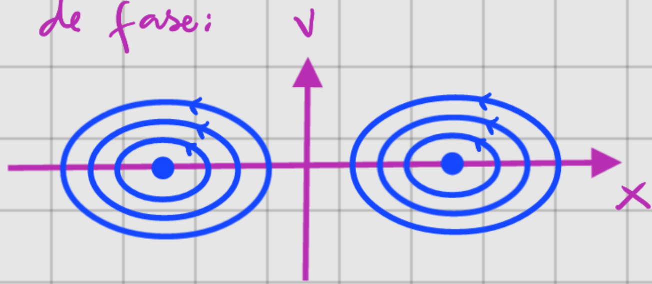
órbitas fechadas



neutro $x^* = -\sqrt{\ell^2 - h^2}$

neutro $x^* = \sqrt{\ell^2 - h^2}$

Espaço de fase:

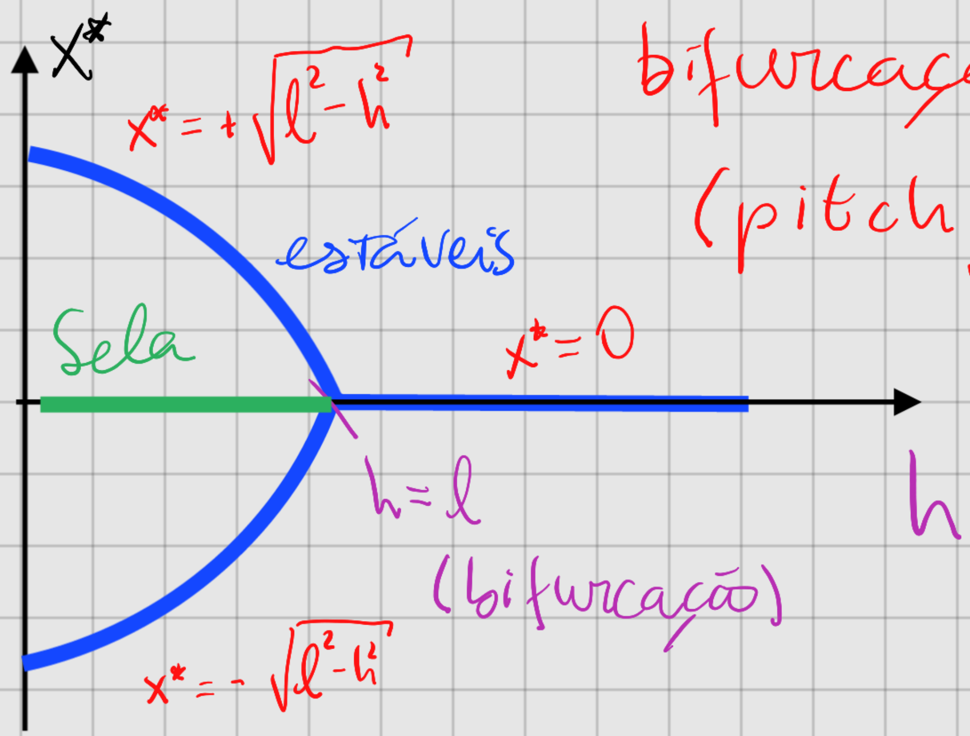


→ diferentes soluções

$$\boxed{\rightarrow \text{Resumo} \quad x^* = \pm\sqrt{\ell^2 - h^2}}$$

$$
\begin{cases}
h > \ell \rightarrow \nexists \\[2em]
h < \ell \rightarrow \text{estável} \begin{cases} b = 0 \rightarrow \text{centro} \\ b > 0 \rightarrow \text{atrator espiral} \end{cases}
\end{cases}
$$

→ Diagrama de Bifurcação:



bifurcação "forquilha"
(pitchfork)

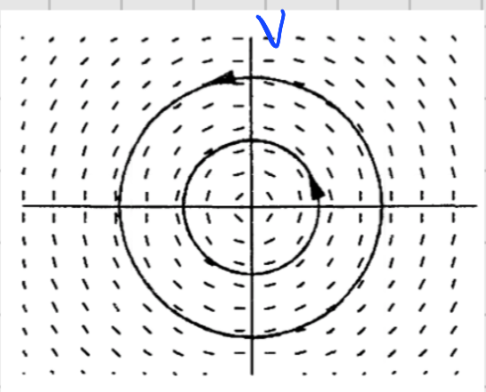
O diagrama de Bifurcação é válido para $b \geq 0$.

Entretanto, os pontos estáveis são centros quando $b = 0$ e espirais quando $b > 0$

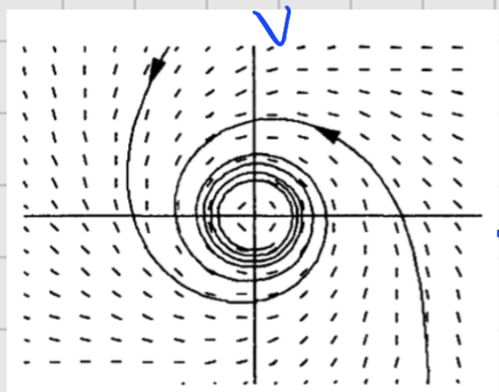
→ **Espaço de fase completo**

$h > l$

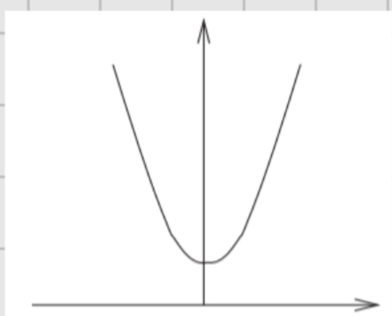
$b = 0$



$b > 0$

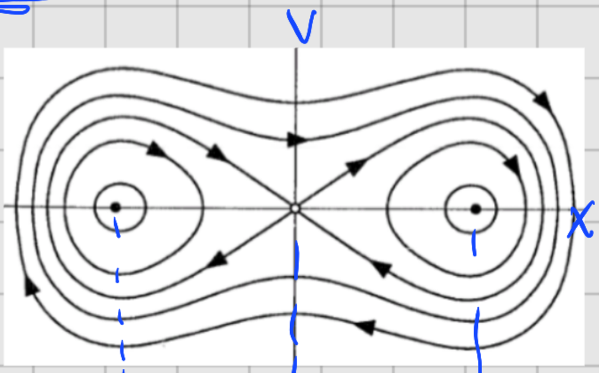


Energia

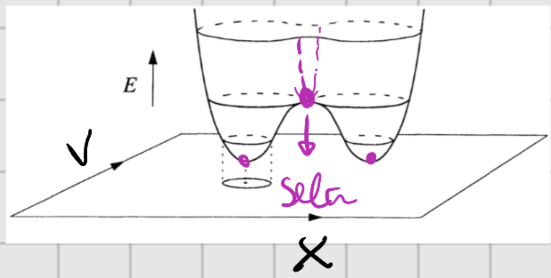


$h < l$

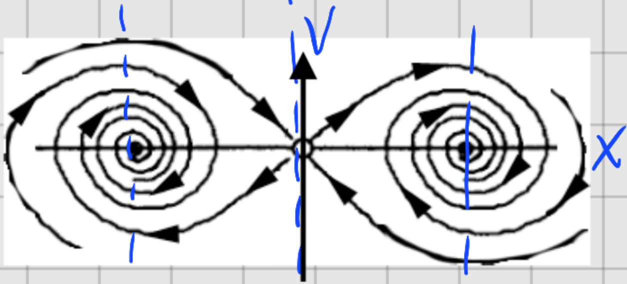
$b = 0$



Energia



$b > 0$



$X^*(-)$ $X^*=0$ $X^*(+)$