FAISCEAUX PERVERS SUR LES ESPACES D'ARCS

ALEXIS BOUTHIER, DAVID KAZHDAN

(A. Bouthier) UC BERKELEY, 970 EVANS HALL, BERKELEY, CA 94720 USA *E-mail address*: abouthier@berkeley.edu

(D. Kazhdan) Einstein Institute of Mathematics, Hebrew University, Givat Ram, Jerusalem, 91904, Israël

E-mail address: kazhdan@math.huji.ac.il

Résumé:

Cet article jette les bases d'une théorie des faisceaux pervers sur les espaces d'arcs ainsi qu'elle a été conjecturée par Feigin-Frenkel en 1990. Dans un premier temps, on établit un théorème de structure sur les espaces d'arcs $\mathcal{L}X$ où X est un k-schéma de type fini, k un corps. Plus précisément, on montre que localement pour la topologie pro-lisse, l'espace d'arcs est un produit de la forme $Y \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ avec Y de type fini. Cet énoncé globalise le théorème de Drinfeld-Grinberg-Kazhdan et montre une conjecture de Kollar et Nemethi. On utilise ensuite ce théorème de structure pour construire une catégorie dérivée de faisceaux constructibles, stable par les six opérations, équipée d'un dual de Verdier et munie d'une t-structure naturelle. Cette t-structure donne lieu à un complexe d'intersection dont on montre que ses fibres sont les mêmes que celles du complexe d'intersection des morceaux de dimension finie donnés par Drinfeld et Grinberg-Kazhdan. Enfin, dans un deuxième temps, on montre que ce complexe d'intersection est compatible aux modèles globaux déjà existants, construits dans divers contextes, Whittaker, L-monoïde et variété de drapeaux semi-infinis. Il ouvre également la voie à une étude systématique de problèmes en théorie des représentations à l'aide de techniques de géométrie algébrique en dimension infinie.

Abstract:

This article sets the foundations of a theory of perverse sheaves on arc spaces as it was conjectured by Feigin-Frenkel in 1990. We establish a structure theorem on the arc space $\mathcal{L} X$ of a k-scheme of finite type. More precisely, we show that the arc space is locally for the pro-smooth toplogy of the form $Y \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ where Y is of finite type. This statement globalizes Drinfeld-Grinberg-Kazhdan's theorem and proves a conjecture of Kollar and Nemethi. Then, we use this theorem to construct a derived category of constructible sheaves, stable by the six operations, equipped with a Verdier dual and with a natural t-structure. This t-structure gives rise to an intersection complex whose fibers are the same as the ones coming from the IC-sheaves on the finite dimensional model of Drinfeld and Grinberg-Kazhdan. Finally, we prove that this intersection complex is compatible to the existing global models, Whittaker,

L-monoids and semi-infinite flag varieties. It also opens the way to a systematic study of problems in representation theory, using infinite-dimensional algebraic geometry.

Introduction

0.1. État du problème. La nécessité de définir une bonne catégorie de faisceaux pervers sur des espaces de dimension infinie et plus particulièrement sur certains espaces d'arcs, remonte aux travaux fondateurs de Feigin-Frenkel [16] sur la variété de drapeaux semi-infinie. Depuis, cette hypothétique catégorie de faisceaux pervers n'a cessé de faire son apparition comme fil directeur de nombreux travaux, d'abord en théorie de la représentation et en Langlands géométrique ([17], [10], [19]) puis plus récemment dans l'étude des fonctions L ([40], [34]).

En l'absence d'une telle catégorie, la méthode dont on disposait jusqu'alors était de remplacer ces objets de nature locale de dimension infinie, par des espaces de modules globaux sur lesquels on pouvait par exemple calculer des complexes d'intersections. On retrouve ce type de techniques, entre autres, dans les travaux de Finkelberg-Mirkovic [17], Braverman-Gaitsgory-Finkelberg-Mirkovic [10] et Bouthier-Ngô-Sakellaridis [9]. Pour s'assurer que ces espaces de modules globaux soient compatibles aux modèles locaux, on dispose sur ces espaces d'arcs d'un théorème de structure dû à Drinfeld [13] et Grinberg-Kazhdan [21] qui décompose le voisinage formel d'un arc non-dégénéré en une partie de dimension finie multipliée par un disque formel de dimension infinie. La nature de la singularité en un arc $\gamma(t)$ est alors contenue dans la partie de dimension finie; si de plus on se place sur un corps fini, il est possible, à partir de ces morceaux de dimension finie de définir une « fonction locale » et Bouthier-Ngô-Sakellaridis montrent que la fonction locale est compatible à la « fonction globale » [9, 1.21-2.5]. Toutefois, on s'attend à ce que cette « fonction locale » provienne d'un certain faisceau pervers sur l'espace d'arcs. Cet article répond à ce problème et construit une catégorie des faisceaux pervers sur les espaces d'arcs $\mathcal{L}X$ pour un k-schéma de type fini X sur un corps k algébriquement clos. Il est également une étude des singularités de l'espace d'arcs sur lequel peu de choses étaient connues jusqu'alors.

0.2. Énoncés principaux. Soit k algébriquement clos, soit ℓ un premier différent de la caractéristique. Soit $f: S' \to S$, un morphisme de k-schémas, il est dit pro-lisse, s'il s'écrit comme une limite projective filtrante de S-schémas lisses avec des morphismes de transition affines, arbitraires. Soit X un k-schéma de type fini, $\mathcal{L}X$ son espace d'arcs, on dispose d'une suite croissante d'ouverts $\mathcal{L}X^{\leq n}$ où l'on borne la valuation de la singularité par n. Avant d'énoncer les principaux théorèmes, on commence par rappeler l'énoncé de Drinfeld-Grinberg-Kazhdan [13], [21]. Supposons dim $X \geq 1$, soit $\gamma(t) \in (\mathcal{L}X^{\leq d})(k)$, alors le théorème de Drinfeld-Grinberg-Kazhdan montre qu'il existe un k-schéma de type fini Y et un k-point k0 de k1 tel que l'on a un isomorphisme de voisinages formels :

$$\mathcal{L}X_{\gamma(t)}^{\wedge} \simeq (Y \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}})_{(y,0)}^{\wedge}.$$

où $\mathbb{A}^{\mathbb{N}} := \operatorname{Spec}(k[x_1, x_2, \dots])$. Le but est d'obtenir cet énoncé dans un voisinage, pour une topologie appropriée, de l'arc $\gamma(t)$.

Suivant une idée du premier auteur, on démontre alors le théorème suivant :

Théorème 0.1. Soit $d \in \mathbb{N}$, Il existe un schéma Z et un morphisme :

$$z: Z \to \mathcal{L}\mathbf{X}^{\leq d}$$

sujet aux propriétés suivantes :

- (1) z est pro-lisse, affine, surjectif et induit un isomorphisme sur les voisinages formels en tout k-point de Z.
- (2) Le schéma réduit Z_{red} est un produit $T \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ avec T un schéma de type (S) (cf. sect. 1.5).

On renvoie au théorème 1.25 pour un énoncé plus précis. L'inconvénient de cet énoncé est l'introduction technique de ces schémas de type (S). Ce sont des schémas non-noethériens dont les complétions formelles en tout k- point sont des schéma formel noethérien.

L'exemple de base d'un tel schéma est le plan privé du droite auquel on ajoute l'origine. On montre que cet ensemble constructible a en fait une structure de schéma, mais qui n'est pas de type fini. De plus, les schémas de type (S) sont indispensables car ils permettent de recoller les différents modèles formels qui apparaissent dans le théorème de Drinfeld-Grinberg-Kazhdan et un exemple à la fin de cet article montre que ce n'est pas possible de le faire avec des schémas de type finis. Dans le cas analytique, l'existence de tels atlas avait été conjecturée par Kollar-Nemethi [29, Conj.73]. Avec les notations ci-dessus, on a également l'énoncé suivant (1.29) :

Théorème 0.2. Le schéma $\mathcal{L}X^{\leq d}$ admet une stratification finie constructible par des schémas de la forme $H \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ avec H un k-schéma de type fini.

Un énoncé analogue a été obtenu indépendamment par Hauser-Woblistin [28], dans un cadre un peu plus général d'une famille à un paramètre d'espaces d'arcs.

A la suite d'une série d'exposés au séminaire Drinfeld sur notre travail au printemps 2017, B.C. Ngô a écrit des notes [35] sur le théorème 0.1, en même temps qu'il nous a signalé une erreur dans la preuve de l'énoncé. Cette nouvelle version a grandement bénéficié des clarifications qu'il a faites à cette occasion, nous lui en sommes très reconnaissants. En revanche, la nécessité de formuler l'énoncé géométrique à l'aide de schémas de type (S) requiert un travail supplémentaire pour construire une bonne théorie des faisceaux pervers sur les espaces d'arcs, qui sera fait dans une version prochaine avec le concours de B.C. Ngô.

Nous tenons à exprimer nos plus vifs remerciements à Peter Scholze pour sa relecture attentive du manuscrit ainsi que pour ses nombreux commentaires éclairés. Nous remercions également Thomas Bitoun, Ofer Gabber, Gérard Laumon et Yakov Varshavsky pour les multiples discussions et questions que nous avons eu au sujet de ce travail. Enfin, nous remercions Bhargav Bhatt, Julien Sebag et David Bourqui. Durant l'exécution de ce travail les auteurs ont été partiellement financés par le ERC Grant et le Lady Davis Fellowship. Le premier auteur tient également à remercier l' Université Hébraïque de Jerusalem pour les très bonnes conditions de travail.

1. Construction d'un atlas

1.1. Le théorème de préparation de Weierstrass.

Définition 1.1. Soit A un anneau local commutatif, \mathfrak{m} son idéal maximal, k son corps résiduel. On dit qu'il vérifie la division de Weierstrass, si pour tout $f \in A[[t]]$ tel qu'en réduction $\bar{f} = t^n u(t)$ avec $u(t) \in k[[t]]^{\times}$, le module A[[t]]/(f) est un A-module libre de type fini de base $(1, \ldots, t^{n-1})$.

Proposition 1.2. Si A satisfait la division de Weierstrass, alors pour $f \in A[[t]]$ comme ci-dessus, il existe un unique couple $(b, r) \in A[[t]] \times A[t]$ avec $\deg(r) < n$, tel que:

$$q = bf + r$$
.

De plus, il existe un unique polynôme unitaire $q \in A[t]$ de degré n tel que :

$$f = qv$$

avec $v \in A[[t]]^{\times}$.

Démonstration. Soit $f \in A[[t]]$, comme dans la définition, comme A[[t]]/(f) est libre de base $(1, \ldots, t^{n-1})$, on a immédiatement l'existence. Montrons l'unicité. Soit (b', r') un autre couple, alors on a :

$$r' - r = (b - b')f.$$

Il faut donc montrer que si r = bf est un polynôme de degré au plus n - 1, alors b = 0. Par l'absurde, si $b \neq 0$, soit N minimal tel que $b \neq 0$ modulo $\mathfrak{m}^N A[[t]]$. Soit d le plus petit entier tel que $t^d \notin \mathfrak{m}^N A[[t]]$. Modulo $\mathfrak{m}^N A[[t]]$, on a :

$$b = at^d + (\text{termes d'ordres supérieurs})$$

et par minimalité de N, on a $a \in \mathfrak{m}^{N-1}$ ainsi que pour tous les coefficients d'ordre supérieur. En multipliant par f, tous les coefficients de degré inférieur à n-1 annulent b comme ils sont dans \mathfrak{m} . Comme le coefficient de t^n de f est une unité, on obtient que bf a au moins un coefficient non nul de degré n+d>n-1, une contradiction.

Passons au second point, on applique la division de Weierstrass à t^n , il existe donc un unique couple (b,r) tel que

$$t^n = bf + r$$
 et $bf = t^n - r$,

avec $r \in A_{n-1}[t]$ à coefficients dans \mathfrak{m} . Il suffit donc de montrer que $b \in A[[t]]^{\times}$. Modulo $\mathfrak{m}A[[t]], \bar{b} = u(t)^{-1} \in k[[t]]^{\times}$, donc cela conclut.

Le théorème fondamental est le suivant [7, §3, n°9, Prop.6] :

Théorème 1.3. Si A est local noethérien complet, alors il satisfait la division de Weierstrass.

On va avoir besoin de cet énoncé dans un cadre légèrement plus général. Soit A un anneau local commutatif. On considère la catégorie Inf_A des épaississements de A. Elle consiste en les paires (A', I) où A' est une A-algèbre locale, $I \subset A'$ un idéal tel que $I^m = 0$ pour un

certain $m \in \mathbb{N}$ et A'/I = A. Les morphismes sont les morphismes de A-algèbres. On note également $\operatorname{Inf}_{\mathbb{Z}}$ la catégorie des algèbres locales B, d'idéal maximal \mathfrak{m}_B telles que $\mathfrak{m}_B^m = 0$.

Proposition 1.4. Si A satisfait la division de Weierstrass alors pour tout $A' \in Inf_A$, A'satisfait la division de Weierstrass.

Démonstration. On a un lemme :

Lemme 1.5. Soit M un A'-module. Soient u_1, \ldots, u_r , des éléments de M dont la réduction engendre M/IM alors u_1, \ldots, u_r engendrent M.

Démonstration. Soit
$$N=A'u_1+\cdots+A'u_r$$
 et $M'=M/N$, on a $M'=IM'$, d'où $M'=I^mM'=0$ et $M=N$.

Maintenant, on applique le lemme à M := A'[[t]]/(f) pour $f \in A'[[t]]$ comme dans la définition 1.2. Soit f_0 la réduction de f modulo I, comme A satisfait la division de Weierstrass, on a:

$$M/IM = A[[t]]/(f_0)$$

qui est un A-module libre de type fini et donc d'après le lemme, M est également un A'-module libre de type fini de base $(1, \ldots, t^{n-1})$.

1.2. Rappels sur les espaces d'arcs. Soit un corps k algébriquement clos et un k-schéma de type fini X. Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, on considère le foncteur des arcs tronqués d'ordre $j, \mathcal{L}_{i}X$, dont les R-points, pour une k-algèbre R, sont les $R[t]/(t^{j+1})$ -points de X. Il est représentable par un k-schéma de type fini et pour $j \geq i$ les flèches :

$$\mathcal{L}_i X \to \mathcal{L}_i X$$
,

sont affines. On considère alors l'espace d'arcs formels:

$$\mathcal{L}X:=\varprojlim_{j\in\mathbb{N}}\mathcal{L}_{j}X.$$

En général, c'est un k-schéma non noethérien (à part si dim X=0, cf. [36, Thm.2.5.5] pour un énoncé relatif plus général), il vérifie la propriété universelle pour toute k-algèbre R:

$$\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec}(R), \mathcal{L}X) = \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec}(R[[t]]), X).$$

Remarque: Pour un k-schéma de type fini X quelconque, cette assertion est non triviale et fait l'objet d'un théorème de Bhatt [4, Thm.1.1].

Si $X = \mathbb{A}^1$, on a $\mathcal{L} \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^{\mathbb{N}} = \operatorname{Spec}(k[x_1, \dots])$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on dispose de flèches de projection:

$$f_j: \mathcal{L}X \to \mathcal{L}_jX$$
.

Si X est lisse, ces flèches sont formellement lisses et surjectives. Dans le cas singulier, les flèches ne sont ni formellement lisses, ni plates, ni même surjectives et l'étude des singularités de l'espace d'arcs s'avère délicate. De plus, si on a un morphisme $f:X\to Y$, on a par fonctorialité un morphisme :

$$\mathcal{L} f: \mathcal{L} \mathbf{X} \to \mathcal{L} \mathbf{Y}.$$

Si f est étale alors $\mathcal{L}f$ l'est également et on a un carré cartésien ([33, sect.3]) :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}X \longrightarrow \mathcal{L}Y \\
\downarrow & & \downarrow \\
X \longrightarrow Y
\end{array}$$

En particulier si on a un recouvrement de X par des ouverts U_i , les ouverts $\mathcal{L}U_i$ forment un recouvrement ouvert de $\mathcal{L}X$. Dans le cas lisse, la structure de l'espace d'arcs est aisée à étudier :

Lemme 1.6. Soit X un k-schéma lisse de type fini, alors localement pour la topologie Zariski, $\mathcal{L}X$ est un produit $U \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ avec U un k-schéma de type fini.

Démonstration. On commence par écrire $X = \bigcup U_i$ avec des ouverts affines U_i étales sur \mathbb{A}^n . D'après ci-dessus, on a :

$$\mathcal{L}U_{i} = U_{i} \times_{\mathbb{A}^{n}} \mathcal{L} \mathbb{A}^{n} \simeq U_{i} \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$$

et les $\mathcal{L}U_i$ forment un recouvrement ouvert de $\mathcal{L}X$.

Tout le but est de maintenant comprendre la situation singulière, bien plus complexe. On commence par un théorème sur la structure formelle de l'espace d'arcs.

Soit un k-schéma de type fini X réduit et pur. On considère le sous-schéma jacobien Jac_X , défini par l'idéal de Fitting $\operatorname{Fitt}_{\dim X}(\Omega_X)$. On renvoie à [15] pour des rappels sur les idéaux de Fitting. Le support du schéma jacobien est précisément le lieu singulier X_{sing} de X. Si X est affine, en le plongeant X dans un espace affine \mathbb{A}^N défini par des équations $f_1 = \cdots = f_m = 0$ dans \mathbb{A}^N , alors Jac_X est engendré par les mineurs d'ordre l de la matrice jacobienne $(\partial f_i/\partial x_j)_{i,j}$ avec l = N - m. on considère l'ouvert des arcs non-dégénérés :

$$\mathcal{L}^{\bullet}X := \mathcal{L}X - \mathcal{L}X_{sing}.$$

C'est un ouvert qui n'est pas quasi-compact et qui est non-vide dès que X est réduit. On rappelle le théorème de Drinfeld [13] et Grinberg-Kazhdan [21] :

Théorème 1.7. Supposons dim $X \ge 1$, soit $\gamma(t) \in \mathcal{L}^{\bullet}X(k)$, alors il existe un k-schéma de type fini Y et un k-point y de Y tel que l'on a un isomorphisme de voisinages formels :

$$\mathcal{L}X^{\wedge}_{\gamma(t)} \simeq (Y \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}})^{\wedge}_{(u,0)}$$

Remarques:

- (1) A la suite de [9], on appelle la paire (Y, y) un modèle formel de dimension finie en $\gamma(t)$. Il s'agit maintenant de voir comment l'on peut globaliser ce théorème.
- (2) Un modèle formel de type fini n'est en général ni irréductible, ni même réduit, on renvoie à [13] pour des exemples.
- (3) D'après Bourqui-Sebag [8], le théorème de Drinfeld-Grinberg-Kazhdan ne s'étend pas pour les arcs dégénérés $\gamma \in \mathcal{L}X_{sing} \subset \mathcal{L}X$.

Ce modèle formel de type fini peut se calculer de manière très explicite, l'ingrédient clé est le théorème de préparation de Weierstrass. Voyons comment on utilise ce théorème dans un exemple précis.

Soit $\gamma_0(t) \in \mathcal{L}^{\bullet}X(k)$. L'anneau local complété $\mathcal{L}X^{\wedge}_{\gamma_0(t)}$ pro-représente le foncteur des déformations Def : $\mathrm{Inf}_k \to \mathrm{Ens}$:

$$A \mapsto \{\gamma(t) \in X(A[[t]]), \gamma(t) = \gamma_0(t) \mod \mathfrak{m}_A\}.$$

En particulier, pour obtenir l'énoncé de Drinfeld-Grinberg-Kazhdan, il suffit d'étudier le foncteur des déformations sur des anneaux tests.

Exemple : Soit
$$X := \{(x, y, z) \mid xy = z^2\}$$
 et l'arc $\gamma_0(t) = (t^2, 0, 0)$. Alors, on a : $Y = \{(a, b, v, w) \in \mathbb{A}^4 \mid aw^2 = v^2, 2wv = bw^2\}$ et $y = (0)$.

Soit $A \in \text{Inf}_k$, d'idéal maximal \mathfrak{m}_A . On regarde une déformation $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in X(A[[t]])$ de $\gamma_0(t)$, d'après le théorème de division de Weierstrass, on a :

$$x(t) = q(t)u(t),$$

où u est une unité avec $q(t) = a + bt + t^2$ et $a, b \in \mathfrak{m}_A$. On fait alors la division de Weierstrass pour z(t):

$$z(t) = v + wt + q(t)h(t).$$

On en déduit :

$$q(t)u(t)y(t) = z(t)^2 = v^2 + 2wt + w^2t^2 + qH'(t)$$

en particulier $v^2 + 2vwt + w^2t^2 \in (q)$ et de l'isomorphisme $A[t]/(q) \simeq A[[t]]/(q)$, on obtient les équations :

$$aw^2 = v^2 \text{ et } bw^2 = 2wv.$$

ainsi qu'une flèche:

$$\phi: Y \times \mathcal{L} \mathbb{G}_m \times \mathcal{L} \mathbb{A}^1 \to \mathcal{L} X$$

donnée par

$$(a,b,v,w,x(t),z(t)) \mapsto (q(t)x(t),y(t),v+wt+q(t)z(t)).$$

qui induit un isomorphisme sur les complétés formels en tout point de la forme ($\{0\} \times \mathcal{L} \mathbb{G}_m \times \mathcal{L} \mathbb{A}^1$).

Pour pouvoir développer une théorie des faisceaux pervers sur les espaces d'arcs, on a besoin d'un énoncé global, qui ne fait pas intervenir les complétions formelles. L'inconvénient est que l'on ne dispose de théorème de division de Weierstrass pour des anneaux locaux henséliens, cela nous amène donc à étudier une nouvelle classe de morphismes.

1.3. Morphismes pro-lisses. Soit Sch_k la catégorie des k-schémas quasi-compacts quasi-séparés.

Définition 1.8. Soit $f: Z \to S$ un morphisme de k-schémas. On dit que :

(1) f est pro-lisse (resp. pro-étale) s'il s'écrit comme une limite projective filtrante de morphismes lisses (resp. étales) avec des morphismes de transition affines.

- (2) f est fortement pro-lisse, s'il s'écrit comme une limite projective filtrante de morphismes lisses avec des morphismes de transition affines, lisses, surjectifs.
- (3) f est placide s'il s'écrit comme une limite projective filtrante $Y \simeq \varprojlim Z_i$ où les Z_i sont de présentation finie sur S et où les morphismes de transition sont affines, lisses et surjectifs.
- (4) Un k-schéma S est pro-lisse (resp. placide) si $S \to \operatorname{Spec}(k)$ est pro-lisse (resp. placide).

Remarques:

- Il est crucial de remarquer que pour un morphisme pro-lisse, les morphismes de transition sont arbitraires. En revanche, pour un morphisme pro-étale, les morphismes de transition sont automatiquement étales.
- Un exemple typique de morphisme fortement pro-lisse est le morphisme :

$$S \times \mathbb{A}^I \to S$$

où I est un ensemble et $\mathbb{A}^I := \operatorname{Spec}(k[x_i]_{i \in I})$ ou plus généralement l'espace d'arcs d'un k-schéma lisse de type fini.

Les morphismes pro-lisses, fortement pro-lisses, placides sont stables par changement de base arbitraire et par composition.

Proposition 1.9. Si $f: Z \to S$ est pro-lisse entre k-schémas, alors Z est plat sur S et le complexe cotangent $L_{Z/S}$ est concentré en degré zéro et plat sur Z.

Démonstration. Cela vient directement du fait que le complexe cotangent commute aux limites inductives filtrantes d'algèbres [30, II.1.2.3.4] et qu'une limite inductive filtrante d'algèbres plates est plate.

Remarque: La réciproque est malheureusement fausse d'après un contre-exemple de Gabber, rédigé par Bhatt [5]. De plus, l'exemple rédigé par Bhatt pourrait amener à croire qu'il s'agit d'une pathologie typique de la caractéristique p. Néanmoins, Gabber nous a communiqué que le résultat reste faux en caractéristique zéro. En remplaçant la perfection de l'algèbre B_i de [5] par l'algèbre où l'on ajoute les racines carrés, on obtient à nouveau une algèbre non-réduite dont le complexe cotangent est plat et placé en degré zéro.

La première classe de morphismes pro-lisses intéressants nous est donnée par le théorème de Popescu ([37],[38],[39]) :

Théorème 1.10. Soit $f: \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ un morphisme régulier entre schémas noethériens, alors f est pro-lisse. En particulier, si Y est un k-schéma excellent et $y \in Y$, le morphisme de complétion :

$$\operatorname{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$$

est pro-lisse.

Remarques:

(1) On rappelle qu'un morphisme régulier est un morphisme plat à fibres géométriquement régulières et que si A est un anneau excellent, une des propriétés est que pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, le morphisme de complétion $A \to \hat{A}_{\mathfrak{p}}$ est régulier.

- (2) On rappelle que si A est excellent, il en est de même de toute A-algèbre de type fini. De plus, les exemples typiques d'anneaux excellents qui apparaîtront ici sont donnés par les corps et les anneaux locaux complets noethériens. On renvoie à [41, Tag 07QS] pour plus de détails.
- (3) De ce théorème, on remarque qu'en particulier, un morphisme pro-lisse n'est pas nécessairement formellement lisse.

A l'aide du théorème de Popescu, on peut clarifier la relation entre régulier et pro-lisse dans le cas noethérien :

Théorème 1.11. Soit $f: \tilde{Y} \to Y$ un morphisme entre schémas affines noethériens, on a les équivalences suivantes :

- (1) f est régulier.
- (2) f est pro-lisse.
- (3) f est plat et le complexe cotangent $L_{\tilde{Y}/Y}$ est concentré en degré zéro et plat sur \tilde{Y} .

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ est l'objet du théorème de Popescu, $(ii) \Rightarrow (iii)$ se déduit de la proposition 1.9 et $(iii) \Rightarrow (i)$ se déduit d'un théorème d'André [1, Th.30, p. 331].

Lemme 1.12. Soit $f: Z \to S$ un morphisme pro-lisse entre k-schémas qcqs. On suppose S réduit, alors Z l'est également.

Démonstration. Si on suppose de plus que f est lisse, le résultat est classique ([41, Tag.033B]). Le résultat se déduit alors de [24, Prop. 8.7.1] par passage à la limite.

Lemme 1.13. Soit $f: Z \to S$ un morphisme \aleph_0 -pro-lisse, alors il admet des sections localement pour la topologie pro-étale.

Remarque: Par ℵ₀-pro-lisse, on entend que le système projectif est dénombrable, on n'aura pas besoin d'un cas plus général.

Démonstration. On écrit $Z = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} Z_i$ avec Z_i lisse sur S, où les morphismes de transition sont affines. On construit une tour de schémas affines, étales sur S:

$$S_i \to \cdots \to S_1 \to S$$

de telle sorte que $Z_i \to S$ admette une section après tiré-en-arrière sur S_i . Comme $Z_1 \to S$ est lisse, il admet des sections pour la topologie étale. Soit $S_1 \to S$ un voisinage affine étale qui convient. On suppose construits $S_i \to \dots S_1 \to S$, le morphisme

$$\phi_{i+1}: Z_{i+1} \times_S S_i \to S_i$$

est lisse. On choisit alors $S_{i+1} \to S_i$ affine étale tel que ϕ_{i+1} admette une section après changement de base. On pose alors :

$$S_{\infty} := \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} S_i$$

qui est affine pro-étale sur S et vérifie la condition voulue.

Définition 1.14. Soit $f: Z \to S$ entre k-schémas. On dit que :

(1) f est Weierstrass, si f est pro-lisse et pour tout k-point $x \in Z(k)$ et y = f(x), le morphisme au niveau des complétés formels :

$$\hat{f}_x:\hat{Z}_x\to\hat{S}_y$$

est formellement lisse.

- (2) f est un isomorphisme formel si pour tout k-point $x \in Z(k)$, \hat{f}_x est un isomorphisme.
- (3) f est strictement Weierstrass, si f est pro-lisse et est un isomorphisme formel.

Remarque: Les morphismes de Weierstrass, strictement Weierstrass et les isomorphismes formels sont stables par changement de base arbitraire et composition.

Proposition 1.15. Soit $f: Z \to S$ un morphisme entre k-schémas placides affines, on suppose qu'en tout k-point $x \in Z(k)$, \hat{f}_x est formellement lisse, alors f est de Weierstrass.

Démonstration. On écrit $Z = \operatorname{Spec}(A)$ avec $A = \varinjlim A_i$ et $S = \operatorname{Spec}(B)$ avec $B = \varinjlim B_j$ où les A_i, B_j sont des k-algèbres de type fini et les morphismes de transition lisses surjectifs. Fixons j, alors le morphisme $Z \to S_j := \operatorname{Spec}(B_j)$ se factorise par un $Z_i := \operatorname{Spec}(A_i)$. On a alors un diagramme commutatif:

$$Z \xrightarrow{f} S \\ \downarrow q_j \\ Z_i \longrightarrow S_j$$

où les flèches verticales sont formellement lisses et surjectives. Soit $x \in Z(k)$, on pose y = f(x), $x_i := p_i(x)$ et $y_j = q_j(x)$, alors on a un diagramme au niveau des complétés formels :

$$\hat{Z}_{x} \xrightarrow{\hat{f}_{x}} \hat{S}_{y}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\hat{Z}_{i,x_{i}} \longrightarrow \hat{S}_{j,y_{j}}$$

où cette fois \hat{f}_x est également formellement lisse et les verticales sont toujours formellement lisses et surjectives. On déduit donc que la flèche :

$$\hat{Z}_{i,x_i} \to \hat{S}_{j,y_j}$$

est formellement lisse et comme Z_i et S_j sont des k-schémas de type fini,

$$Z_i \to S_j$$

est lisse en x_i et donc en tout point de Z_i comme $Z \to Z_i$ est surjective. On obtient alors que f est pro-lisse comme il s'écrit comme limite projective filtrante des morphismes :

$$Z_i \times_{S_j} S \to S$$
.

La terminologie de morphisme de Weierstrass se justifie par ce qui suit. Pour tout entier $d \geq 1$, on considère Q_d le k-schéma qui classifie les polynômes unitaires de degré d et A_d le k-schéma qui classifie les polynômes de degré au plus d-1. On définit l'ouvert :

$$\mathcal{L} \,\mathbb{A}^{\leq d} := ev_d^{-1}(\mathcal{L}_d \,\mathbb{A}^1 - \{0\}),$$

avec $ev_d: \mathcal{L} \mathbb{A}^1 \to \mathcal{L}_d \mathbb{A}^1$. On considère alors le morphisme :

$$\alpha_d: \mathcal{Q}_d \times \mathcal{L} \mathbb{G}_m \to \mathcal{L} \mathbb{A}^{\leq d}$$

donné par $(q, u) \mapsto qu$.

Proposition 1.16. Le morphisme α_d est Weierstrass, surjectif et est strictement Weierstrass en les points de la forme $(t^d, u(t))$.

Démonstration. Les schémas sont clairement placides et affines et la flèche est surjective sur les K-points, pour tout corps K, donc surjective. D'après la proposition 1.15, il faut donc démontrer que α_d induit un isomorphisme sur les complétés formels en les points de la forme $(t^d, u(t))$ et qu'il est formellement lisse sur les complétés formels des autres k-points. Il suffit d'étudier le foncteur des déformations sur Inf_k .

Soit $A \in \text{Inf}_k$, d'idéal maximal \mathfrak{m}_A et de corps résiduel k. Soit $\gamma_0 = t^d u \in k[[t]]$ et $\gamma \in A[[t]]$ qui se réduit modulo \mathfrak{m}_A sur γ_0 . Par le théorème de division de Weierstrass 1.4, on a alors :

$$\gamma(t) = qv$$

avec $v \in A[[t]]^{\times}$ et $q \in \mathcal{Q}_d(A)$. On obtient ainsi l'isomorphisme au niveau des complétés formels en $\gamma_0(t)$. Il s'agit de voir l'assertion en les autres points. Soit $y \in \mathcal{L} \mathbb{A}^{\leq d}(A)$ de réduction $y_0 = t^e v_0$ avec $v_0 \in k[[t]]^{\times}$ et $e \leq d$. Soit $x_0 := (t^e + t^d, (1 + t^{d-e})^{-1}v_0)$ qui s'envoie sur y_0 . A nouveau, par le théorème de Weierstrass, on a :

$$y = pv'$$

avec p unitaire de degré e et v' inversible. Comme Q_{d-e} est lisse, on choisit un relèvement arbitraire p' de $1 + t^{d-e}$ et l'élément :

$$x = (pp', (p')^{-1}v')$$

s'envoie sur y, ce qui conclut.

Le morphisme α_d admet un compagnon :

$$\beta_d: \mathcal{Q}_d \times A_d \times \mathcal{L} \,\mathbb{A}^1 \to \mathcal{Q}_d \times \mathcal{L} \,\mathbb{A}^1,$$

donné par $(q, v, \xi) \mapsto (q, v + q\xi)$.

Proposition 1.17. Le morphisme β_d est Weierstrass, surjectif et est strictement Weierstrass en les points de la forme $(t^d, u(t))$.

Démonstration. La preuve est analogue à la précédente en utilisant à nouveau la proposition 1.15. Le fait que le morphisme soit formellement lisse au niveau des complétés formels se déduit immédiatement du théorème de Weierstrass pour les anneaux $A \in Inf_k$.

1.4. Schémas décents. Considérons la notion suivante introduite dans [35, Déf. 4.4] :

Définition 1.18. Soit A un anneau commutatif, il est dit décent si :

$$\operatorname{nil}_{\infty}(A) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{p}^n = \{0\}.$$

En particulier, si A est décent, $x \in A$ est non-nul si et seulement s'il existe $\nu : A \to R$ avec $R \in \text{Inf}_{\mathbb{Z}}$ tel que $\nu(x) \neq 0$.

- (1) On a $\operatorname{nil}_{\infty}(A) \subset \operatorname{nil}(A)$ comme le nilradical est l'intersection des idéaux premiers.
- (2) Tout anneau de $Inf_{\mathbb{Z}}$ est bien sûr décent.
- (3) Les anneaux réduits sont décents et les anneaux noethériens également par réduction au cas local et le théorème d'intersection de Krull [41, Tag. 10.50.4].
- (4) Si l'on considère, $B=\bigcup_{n\geq 0} k[[t^{\frac{1}{n}}]]$ alors l'anneau B/tB est indécent. En faisant le produit tensoriel par n'importe quel k-algèbre C, on obtient à nouveau un objet indécent.

La construction suivante nous a été suggérée par Laumon, elle rend les énoncés plus agréables à formuler.

Définition 1.19. Soit S un k-schéma, il est dit décent si pour tout ouvert U, $\mathcal{O}_S(U)$ est un anneau décent.

Remarque : Une preuve analogue à [41, Tag. 01IZ] montre qu'un k-schéma est décent si et seulement si tous ses anneaux locaux sont déce

Pour tout anneau commutatif A, alors $A_{dec} := A/\operatorname{nil}_{\infty}(A)$ est décent, on obtient alors une immersion fermée :

$$\operatorname{Spec}(A_{dec}) \to \operatorname{Spec}(A),$$

où les espaces topologiques sous-jacents sont les mêmes. En particulier, le spectre d'un anneau décent est un schéma décent. Cette construction se faisceautise : partant d'un k-schéma S, on dispose d'un faisceau d'idéaux $\operatorname{nil}_{\infty}(\mathcal{O}_S)$ dont les sections sur un ouvert sont données par :

$$\operatorname{nil}_{\infty}(\mathcal{O}_{S}(U)) := \{ f \in \mathcal{O}_{S}(U) | \forall n \in \mathbb{N}, f(t) = 0 \in \mathcal{O}_{S,t}/\mathfrak{m}_{t}^{n} \}.$$

On considère alors le sous-schéma fermé S_{dec} défini par ce faisceau d'idéaux décent de telle sorte que pour tout ouvert affine :

$$\mathcal{O}_{S_{dec}}(U) := \mathcal{O}_S(U)_{dec},$$

en particulier, il est décent et l'immersion fermée $S_{dec} \to S$ est également décente. Il vérifie la même propriété d'unicité que le réduit (la preuve est analogue à [41, Tag. 01IZ]).

Définition 1.20. Une immersion fermée $i: S_0 \to S$ est dite décente si le faisceau d'idéaux \mathcal{I} qui la définit est contenu dans $\operatorname{nil}_{\infty}(\mathcal{O}_S)$.

Remarque: Les immersions décentes sont stables par changement de base.

Lemme 1.21. Pour tout morphisme $W \to S$ avec W un schéma décent, la flèche se factorise par S_{dec} . De plus, toute immersion décente est un isomorphisme formel.

Remarque: En revanche, si l'on prend l'immersion nilpotente $S_{red} \to S$, elle n'est pas en général un isomorphisme formel.

Démonstration. La première assertion est locale et on peut supposer que la source et le but sont affines et le résultat est clair. La deuxième assertion vient du fait que les foncteurs $S_{dec}(R)$ et S(R) sont les mêmes pour tout anneau décent et donc en particulier pour les anneaux de Inf_k .

1.5. Schémas de type (S). On construit une famille de schémas non-noethériens qui interviennent de manière fondamentale dans la construction de nos atlas pro-lisses. Son importance a été dégagée dans [35], l'ingrédient fondamental que l'on y ajoute est le théorème de Popescu. Soit $d \ge 1$, on considère le carré cartésien :

$$S_d \longrightarrow \mathcal{Q}_d \times A_d \times \mathcal{L} \, \mathbb{A}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow^{\beta_d}$$

$$\mathcal{Q}_d \longrightarrow \mathcal{Q}_d \times \mathcal{L} \, \mathbb{A}^1$$

où la flèche horizontale du bas est donnée par $q \mapsto (q,0)$. Le schéma S_d est pro-lisse sur \mathcal{Q}_d et est non-noethérien car β_d n'est pas de type fini. Il admet une section :

(2)
$$\sigma: \mathcal{Q}_d \to S_d$$

donné par $q \mapsto (q,0,0)$. Décrivons-le de manière explicite pour d=1. Le schéma $\mathcal{Q}_1 \times A_1 \times \mathcal{L} \mathbb{A}^1$ classifie les triplets (q,v,ξ) avec q=t+a le polynôme universel de degré un et $\mathcal{Q}_1 := \operatorname{Spec}(k[a])$. On écrit $\mathcal{L} \mathbb{A}^1 := \operatorname{Spec}([\xi_0,\xi_1\dots])$. Les équations pour S_1 sont alors données par :

- $(3) v + a\xi_0 = 0$
- $\xi_0 + a\xi_1 = 0$
- $\xi_1 + a\xi_2 = 0$
- $(6) \qquad \dots$

avec $\xi = (\xi)_{i \in \mathbb{N}}$. En particulier, la fibre au-dessus de S_1 pour $a \neq 0$ est isomorphe à \mathbb{A}^1 et la fibre au-dessus de 0 est nulle. On va montrer comment on peut étendre cette situation dans un certain voisinage.

Il résulte de ces équations que pour tout n, a^n divise tous les ξ_i . En particulier, en tirant les équations sur $\operatorname{Spec}(k[[a]])$, on trouve que le schéma S_1 est isomorphe à k[[a]]. Le point-clé est que le changement de base par ce morphisme est pro-lisse. On va voir que cette situation se généralise :

Proposition 1.22. En tout point fermé $x \in S_d(k)$, on a un isomorphisme de complétés formels :

$$S_d)_x^{\wedge} \simeq D^{d(x)},$$

avec $D := \operatorname{Spf}(k[[t]]).$

 $D\acute{e}monstration.$

Définition 1.23. Les schémas de type (S) sont les schémas de présentation finie sur un produit fini $S_d \times_{\mathcal{Q}_d} \cdots \times_{\mathcal{Q}_d} S_d$.

Lemme 1.24. Si T est un k-schéma de type (S), alors la complétion formelle de T en tout k-point est isomorphe à un k-schéma formel noethérien.

Démonstration. Il résulte du lemme 1.22 que les complétions formelles en tout k-point d'un produit fini s'identifient à des certaines puissances de D. Par changement de base, on a donc un schéma de présentation finie sur $\operatorname{Spec}(k[[t]]^m)$, donc en prenant la complétion, on obtient le résultat voulu.

On va construire une famille typique de schémas de type (S). Soit Z un k-schéma affine de type fini. On considère le foncteur $Z_{\mathcal{Q}_d}$ sur la catégorie des k-algèbres :

$$Z_{\mathcal{Q}_d}(R) := \{(q, x) | q \in \mathcal{Q}_d(R), x : \operatorname{Spec}(R[t]/q) \to Z\}$$

Il est représentable par un schéma affine de type fini au-dessus de Q_d . Sa fibre au-dessus d'un polynôme séparable est le produit Z^d et au-dessus de t^d , on obtient $\mathcal{L}_{d-1} Z$. Dans le cas $Z = \mathbb{A}^1$, on a :

$$\mathbb{A}^1_{\mathcal{Q}_d}(R) := \{(q, x) | q \in \mathcal{Q}_d(R), x \in R[t]/(q)\},$$

qui est un fibré vectoriel de rang d sur \mathcal{Q}_d . Comme la flèche canonique $A_d(R) \to R[t]/(q)$ est un isomorphisme par la division euclidienne, ce fibré se trivialise en :

$$Q_d \times A_d \simeq \mathbb{A}^1_{Q_d}$$
.

A tout morphisme $f: Z \to V$, on a par fonctorialité une flèche

$$f_{\mathcal{Q}_d}: Z_{\mathcal{Q}_d} \to V_{\mathcal{Q}_d}.$$

En particulier, si l'on dispose de n fonctions régulières $f=(f_1,\ldots,f_n)$ sur Z, on a une flèche $f:Z\to\mathbb{A}^n$. On forme alors le carré cartésien :

$$S_d(Z, f) \xrightarrow{} S_d \times_{\mathcal{Q}_d} \cdots \times_{\mathcal{Q}_d} S_d$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$Z_{\mathcal{Q}_d} \xrightarrow{f_{\mathcal{Q}_d}} \mathbb{A}^n_{\mathcal{Q}_d} = \mathcal{Q}_d \times A^n_d$$

Comme $f_{\mathcal{Q}_d}$ est de présentation finie, $S_d(Z, f)$ est de type (S).

1.6. Énoncés principaux et dévissages. On considère un k-schéma de type fini X réduit et pur. On dispose de l'ouvert $\mathcal{L}^{\bullet}X := \mathcal{L}X - \mathcal{L}X_{sing}$, comme c'est un schéma qui n'est pas quasi-compact, on va considérer des ouverts plus petits. Pour tout entier $d \in \mathbb{N}$, on peut alors considérer l'ouvert

$$\mathcal{L}\mathbf{X}^{\leq \mathbf{d}} := ev_d^{-1}(\mathcal{L}_{\mathbf{d}}\mathbf{X} - \mathcal{L}_{\mathbf{d}}\mathbf{X}_{sing})$$

avec $ev_d: \mathcal{L}X \to \mathcal{L}_dX$. C'est un schéma quasi-compact quasi-séparé, comme image inverse d'un schéma de type fini par un morphisme affine.

Théorème 1.25. Soit $d \in \mathbb{N}$, alors il existe un morphisme de schémas $f: Z \to \mathcal{L}X^{\leq d}$ avec Z quasi-compact quasi-séparé tel que :

- (1) f est Weierstrass, affine et surjectif.
- (2) $Z_{dec} \simeq T \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ avec T un k-schéma de type (S).

On appelle un tel Z un atlas formel.

Remarques:

- (1) On rappelle que les immersions décentes sont des isomorphismes formels.
- (2) Ce théorème est l'outil qui va nous permettre de définir des faisceaux pervers. En effet, par invariance du topos étale, les faisceaux sur Z ou Z_{dec} sont les mêmes. Sur un produit $T \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ avec T de type (S), il s'agit de définir une t-structure et on utilise ces atlas pour obtenir la t-structure par tiré-en-arrière.

On dit qu'un k-schéma est un schéma d'intersection complète spécial, s'il est défini comme un sous-schéma fermé de $\operatorname{Spec}(k[x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_l])$ par les équations $p_1=\cdots=p_l=0$. Dans ce cas, le lieu singulier consiste en le lieu d'annulation du déterminant de la matrice jacobienne $(\frac{\partial p_i}{\partial u_i})$.

Proposition 1.26. Le théorème 1.25 pour les intersections complètes spéciales implique le cas général.

On commence par l'énoncé suivant :

Proposition 1.27. Soit $S' \to \mathcal{L}X^{\leq d}$ de présentation finie, alors l'atlas formel de $\mathcal{L}X^{\leq d}$ induit par changement de base un atlas formel de S'.

 $D\acute{e}monstration$. Soit $Z \to \mathcal{L}X^{\leq d}$ comme dans le théorème 1.25. Soit Z_1 le changement de base de Z à S'. Par changement de base, Z_1 est affine, surjectif et Weierstrass. Toujours par changement de base, on a une immersion décente :

$$Z_{dec} \times_{\mathcal{L}X^{\leq d}} S' \to Z_1$$

et le terme de gauche est de présentation finie sur Z_{dec} , donc décent et s'identifie donc à $Z_{1,dec}$. De plus, par descente noethérienne, il s'écrit comme un produit $T' \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ avec T' de type (S).

On a besoin de la proposition suivante qui résulte de [12] et [33, Prop.4.1, Lem. 4.2] :

Proposition 1.28. Supposons de plus X affine. Soient r, d des entiers avec $r \geq d$, alors il existe des schémas intersections complètes spéciaux M_i et un recouvrement par des ouverts affines U_i de $\mathcal{L}_r X^{\leq d}$ qui vérifient les conditions suivantes :

- (1) On a des immersions fermées $X \to M_i$.
- (2) Les ouverts U_i sont contenus dans $\mathcal{L}_r M_i^{\leq d}$.
- (3) Soit V_i l'image réciproque de U_i dans $\mathcal{L}X$, alors on a un carré cartésien :

$$V_{i} \longrightarrow \mathcal{L}M_{i}^{\leq d}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$U_{i} \longrightarrow \mathcal{L}_{r}M_{i}^{\leq d}$$

Passons maintenant à la preuve de la proposition 1.26

Démonstration. Tout d'abord, on peut se ramener immédiatement au cas où X est affine en prenant un recouvrement par des ouverts affines. On considère alors des ouverts U_i , V_i et un schéma intersection complète M_i , tels que dans la proposition 1.28. Il suffit de montrer l'existence d'un atlas formel pour V_i . On a alors un carré cartésien :

$$V_{i} \longrightarrow \mathcal{L}M_{i}^{\leq d}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$U_{i} \longrightarrow \mathcal{L}_{r}M_{i}^{\leq d}$$

En particulier, on a une immersion affine, localement fermée constructible, $V_i \to \mathcal{L}M_i^{\leq d}$. On conclut alors par la proposition 1.27.

En plus de l'atlas, on a besoin d'une bonne stratification de l'espace d'arcs.

Théorème 1.29. Le schéma $\mathcal{L}X^{\leq d}$ admet une stratification finie constructible par des schémas isomorphe à $H \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ pour un k-schéma de type fini H.

Proposition 1.30. Le théorème 1.29 se déduit du cas intersection complète spécial.

Démonstration. On utilise à nouveau la proposition 1.28 et l'assertion se réduit à montrer que si l'on a une immersion fermée constructible :

$$F \to H \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$$

alors F est également de la forme $H_1 \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ avec H_1 un k-schéma de type fini et cela se déduit immédiatement par descente noethérienne.

On montre dans la section 1.8 les théorèmes 1.25 et 1.29 dans le cas d'intersection complète spécial.

1.7. Le cas d'intersection complète spécial. On reprend la présentation de [35, sect. 4-5].

Définition 1.31. Soit A un anneau commutatif, $x \in A[[t]]$ est une série non-dégénérée si pour tout morphisme $\nu : A \to K$ avec K un corps, $\nu(x) \in K[[t]] \cap K((t))^{\times}$.

Lemme 1.32. Soit $B \in \text{Inf}_{\mathbb{Z}}$, alors si $x \in B[[t]]$ est non-dégénérée, on a $x \in B[[t]] \cap B((t))^{\times}$.

Démonstration. Soit \mathfrak{m} l'idéal maximal de B et K son corps résiduel. Comme $\bar{x} = t^b u(t) \in K[[t]] \cap K((t))^{\times}$ et que par hypothèse $\mathfrak{m}^r = (0)$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$, on obtient qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$x^N = t^{bN}H(t)$$

avec $H(t) \in B[[t]]^{\times}$, d'où l'on déduit que $x^N \in B[[t]] \cap B((t))^{\times}$ ainsi que x.

Lemme 1.33. Soit A un anneau décent, $x \in A[[t]]$ une série non-dégénérée, alors la multiplication par x est injective.

Démonstration. On commence par prouver le lemme pour les objets de $\operatorname{Inf}_{\mathbb{Z}}$. Si $B \in \operatorname{Inf}_{\mathbb{Z}}$ et $x \in B[[t]]$ est non-dégénérée, d'après le lemme précédent, on a $x \in B((t))^{\times}$ donc la multiplication sur B((t)) est bijective et comme on a une injection $B[[t]] \to B((t))$, on a le résultat pour B.

Si A est décent, la multiplication est injective si et seulement si elle l'est pour tout $B \in \operatorname{Inf}_{\mathbb{Z}}$, et cela se déduit du cas précédent.

Proposition 1.34. Soit A un anneau décent, $\phi \in M_n(A[[t]])$ tel que $\psi := \det(\phi) \in A[[t]]$ est une série formelle non-dégénérée, alors l'application linéaire associée :

$$\phi:A[[t]]^n\to A[[t]]^n$$

est injective et son image consiste en l'ensemble des $u \in A[[t]]^n$ tels que :

$$\phi' u = 0 \mod \psi$$
.

où ϕ' est la matrice adjointe de ϕ , telle que $\phi'\phi = \psi I_n$.

Démonstration. De l'égalité de Cramer $\phi'\phi = \psi.I_n$ et du lemme 1.33, on en déduit que ϕ et ϕ' sont injectives. De plus, si l'on a deux vecteurs $u, \nu \in A[[t]]^n$, de l'injectivité de ϕ et ϕ' , on déduit que $\phi(\nu) = u$ si et seulement si $\phi'(u) = \psi\nu$. En particulier, $u \in \text{Im } \phi$ si et seulement si :

$$\phi'(u) = 0 \mod \psi$$
.

Soient deux entiers $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$. On définit le schéma intersection complète X, comme le sous-schéma fermé de $\operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_{m-n}, y_1, \ldots, y_n]$ défini par les équations $f_1 = \cdots = f_n = 0$. On note $f := (f_1, \ldots, f_n)$ et pour $x := (x_1, \ldots, x_{m-n}, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{A}^m$, on considère la matrice :

$$\phi(x) := \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial y_j}\right)_{1 \le i, j \le n}.$$

et on note $\psi(x) := \det(\phi(x))$. Le développement de Taylor de f par rapport aux variables y_1, \ldots, y_n donne :

$$f(x + \nu) = f(x) + \phi(x, \nu) + \phi_2(x, \nu) + \dots$$

avec la notation:

(7)
$$x + \nu := (x_1, \dots, x_{m-n}, y_1 + \nu_1, \dots, y_n + \nu_n)$$

pour $\nu := (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{A}^n$. Ici, $\phi(x, \nu)$ est linéaire en ν et est donné par la matrice $\phi(x)$, $\phi_2(x, \nu)$ est une fonction quadratique qui dépend polynomialement en x et ainsi de suite pour les termes de plus haut degré. On considère le sous-schéma fermé $F := \{\psi = 0\} \subset \mathbb{A}^m$ et on considère l'ouvert de $\mathcal{L} \mathbb{A}^m$:

$$\mathcal{L}_F^{\bullet} \, \mathbb{A}^m := \mathcal{L} \, \mathbb{A}^m - \mathcal{L} \, F.$$

On remarque que cet ouvert n'est pas quasi-compact. On forme alors le carré cartésien :

$$\begin{array}{c}
N & \xrightarrow{f} \mathcal{L}X \\
\downarrow g & \downarrow \\
\mathcal{L}_F^{\bullet} \mathbb{A}^m \times \mathcal{L} \mathbb{A}^n & \xrightarrow{\beta} \mathcal{L} \mathbb{A}^m
\end{array}$$

(8)
$$\alpha(x,\nu) := x + t\psi(x)\nu,$$

avec l'addition définie telle que dans (7). D'après la proposition 1.17, β est de Weierstrass, affine et surjectif et donc également f. De plus, le morphisme g est affine par changement de base. Pour toute k-algèbre A, N(A) est donné par les paires $(x, \nu) \in A[[t]]^m \times A[[t]]^n$ tel que :

$$(9) f(x+t\psi(x)\nu) = 0,$$

avec $\psi(x)$ non-dégénérée. On considère alors le sous-schéma fermé $N_1 \subset \mathcal{L}_Z^{\bullet} \mathbb{A}^m$ donné par les équations :

(10)
$$\phi'(x, f(x)) = 0 \mod t\psi(x)^2$$

où $x \in \mathcal{L} \mathbb{A}^m$ et $\psi(x) \in \mathcal{L} \mathbb{A}^1 - \{0\}$.

Proposition 1.35. Le morphisme $N \to \mathcal{L}_F^{\bullet} \mathbb{A}^m$ se factorise par N_1 ; de plus pour tout anneau décent A, on a une bijection fonctorielle en A:

$$N(A) \simeq N_1(A)$$
.

 $D\acute{e}monstration$. Soit A un anneau commutatif. On fait le développement de Taylor de l'équation (9) pour obtenir :

$$f(x + t\psi(x)\nu) = f(x) + t\psi(x)\phi(x,\nu) + t^2\psi(x)^2H(x,\nu) = 0$$

pour $H := (H_1, \dots, H_n) \in A[[t]][x, \nu]$. En appliquant l'application linéaire $\phi'(x)$, on obtient l'équation :

(11)
$$\phi'(x, f(x)) + t\psi(x)^2 \nu + t^2 \psi(x)^2 \phi'(x, H(x, \nu)) = 0,$$

avec $\nu_1 := \nu + \phi'(x, H(x, \nu))$ et on obtient l'équation (10), donc la flèche se factorise. Montrons la deuxième assertion. Soit $x \in N_1(A)$ et ν_1 l'élément correspondant défini par (11); d'après le lemme 1.36, il existe un unique ν_0 tel que :

$$\nu_1 := \nu_0 + \phi'(x, H(x, \nu_0))$$

Comme (x, ν_1) vérifient (11), on obtient un point de N(A) à l'aide de la proposition 1.34 si A est décent.

Lemme 1.36. Soit $h: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ une application polynomiale, alors pour tout anneau commutatif A, l'application :

$$A[[t]]^n \to A[[t]]^n$$

 $\nu_0 \mapsto \nu_0 + th(\nu_0)$ est bijective.

Démonstration. Soit $x \in A[[t]]^n$, on définit la norme $|x| = 2^{-d}$ où d est le plus petit entier tel que la réduction de x modulo t^d soit non-nulle. Pour cette norme, $A[[t]]^n$ est un espace métrique complet, comme on considère la topologie limite projective.

Soit $\nu_1 \in A[[t]]^n$, il suffit de montrer que l'application $\nu \mapsto \phi(\nu) = \nu_1 - th(\nu)$ admet un point fixe. Comme h est polynomiale, $|h(\nu) - h(w)| \leq |\nu - w|$, d'où

$$|\phi(\nu) - \phi(w)| \le \frac{1}{2}|\nu - w|.$$

On obtient donc que ϕ est contractante et admet donc un unique point fixe par le théorème de Banach.

1.8. **Décomposition en morceaux.** On va maintenant utiliser le schéma N_1 pour séparer la partie de dimension finie de la partie fortement pro-lisse. Dans la suite, pour simplifier les notations, on pose $c(x) = t\psi(x)^2$ et $a(x) = \phi'(x, f(x))$. On obtient ainsi un morphisme :

$$(a,c): \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1.$$

Fixons $d \ge 1$ et on considérons N_d l'image inverse de $\mathcal{L}\mathbf{X}^{\le d}$ et $N_{1,d}$ l'image de N_d dans N_1 . On forme le carré cartésien :

$$\begin{array}{c|c} N_{2,d} & \xrightarrow{f_1} & N_{1,d} \\ \downarrow & & \downarrow^{\gamma} \\ Q_d \times \mathcal{L} \mathbb{G}_m \times A^m_{d+1} \times \mathcal{L} \mathbb{A}^m & \xrightarrow{(\alpha_d, \beta_d)} & \mathcal{L} \mathbb{A}^1 \times \mathcal{L} \mathbb{A}^m \end{array}$$

avec

(12)
$$\gamma(x,\nu) = (c(x),x)$$

et (α_d, β_d) donné par :

$$(\alpha_d, \beta_d)(q, u, \bar{x}, \xi) = (qu, \bar{x} + tq\xi).$$

Il est important de remarquer que contrairement au morphisme (8) où l'on décomposait seulement sur la partie \mathbb{A}^n , on décompose ici par rapport à toute les coordonnées de \mathbb{A}^m . A nouveau, comme (α_d, β_d) est de Weierstrass, f_1 l'est aussi. On commence par montrer que

 $N_{2,d}$ est isomorphe à un produit d'un schéma de type (S) avec un $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$. On considère M le schéma qui classifie les quintuples $(q, u\bar{x}, \xi, \nu)$:

$$M := \mathcal{Q}_d \times \mathcal{L} \, \mathbb{G}_m \times A^m_{d+1} \times \mathcal{L} \, \mathbb{A}^m \times \mathcal{L} \, \mathbb{A}^n$$

Le schéma $N_{2,d}$ est donc le sous-schéma fermé donné par les équations :

(13)
$$a(\bar{x} + tq\xi) = tuq\nu,$$

$$(14) c(\bar{x} + tq\xi) = uq.$$

On fait un développement de Taylor de a:

$$a(\bar{x} + tq\xi) = \bar{a}(q, \bar{x}) + tqa'(q, \bar{x}, \xi)$$

où $a'(q, \bar{x}, \xi) \in k[[t]]^n$ est polynomiale en les coefficients q, \bar{x}, ξ . On obtient ainsi un morphisme:

$$\bar{a}: \mathcal{Q}_d \times A^m_{d+1} \to \mathcal{Q}_d \times A^n_{d+1}$$

En faisant un développement similaire pour c, on obtient :

$$c(\bar{x} + tq\xi) = \bar{c}(q, \bar{x}) + tqc'(q, \bar{x}, \xi)$$

où $c'(q, \bar{x}, \xi) \in k[[t]]^n$ est polynomiale en les coefficients q, \bar{x}, ξ et donc une flèche :

$$\bar{c}: \mathcal{Q}_d \times A^m_{d+1} \to \mathcal{Q}_d \times A_{d+1}.$$

On obtient donc pour $N_{2,d}$ le système d'équations :

(15)
$$\bar{a}(q,\bar{x}) + tq(a'(q,\bar{x},\xi) - u\nu) = 0,$$

(16)
$$(\bar{c}(q,\bar{x}) - u_0 q) + tq(c'(q,\bar{x},\xi) - u') = 0,$$

avec $u = u_0 + tu'$. On forme alors un diagramme :

$$\begin{array}{c} N_{2,d} \xrightarrow{g_N} T_d \xrightarrow{} S_{d+1,n+1} \xrightarrow{} \mathcal{Q}_{d+1} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow 0 \\ M \xrightarrow{g_M} \mathbb{G}_m \times \mathcal{Q}_d \times A^m_{d+1} \times \mathcal{L} \, \mathbb{A}^{n+1} \xrightarrow{} \mathcal{Q}_{d+1} \times A^{n+1}_{d+1} \times \mathcal{L} \, \mathbb{A}^{n+1} \xrightarrow{\beta_{d+1,m}} \mathcal{Q}_{d+1} \times \mathcal{L} \, \mathbb{A}^{n+1} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{G}_m \times \mathcal{Q}_d \times A^m_{d+1} \times \mathcal{L} \, \mathbb{A}^{n+1} \xrightarrow{} \Phi \mathcal{Q}_{d+1} \times A^{n+1}_{d+1} \end{array}$$

où tous les carrés sont cartésiens, ce qui définit en particulier les schémas T_d et $S_{d+1,n+1}$. Les flèches de ce diagramme se décrivent alors de la façon suivante, de gauche à droite : — Le morphisme $0: \mathcal{Q}_{d+1} \to \mathcal{Q}_{d+1} \times \mathcal{L} \,\mathbb{A}^{n+1}$ est la section nulle $q_{d+1} \mapsto (q_{d+1}, 0)$.

- $\beta_{d+1,m}$ est la variante de (1) pour \mathbb{A}^{n+1} .
- Le morphisme Φ est donné par :

$$\Phi(u_0, q, \bar{x}) = (tq, \bar{a}(q, \bar{x}), \bar{c}(q, \bar{x}) - u_0q).$$

- Le carré central du bas obtenu en faisant le changement de base par les projections évidentes est clairement cartésien; on construit ainsi Y.
- Le morphisme $g_M: M \to \mathbb{G}_m \times \mathcal{Q}_d \times A^m_{d+1} \times \mathcal{L} \, \mathbb{A}^{n+1}$ envoie un point $(q, u, \bar{x}, x', \nu) \in M$ avec $u = u_0 + tu'$ sur :

$$g_M(q, u, \bar{x}, x', \nu) = (u_0, q, \bar{x}, (a'(q, \bar{x}, x') - u\nu, c'(q, \bar{x}, x') - u')).$$

— Par définition, comme $N_{2,d} = M \times_{\mathcal{Q}_{d+1} \times \mathcal{L} \mathbb{A}^{n+1}} \mathcal{Q}_{d+1}$, il existe une unique flèche $g_N : N_{2,d} \to T_d$ qui rend le carré en question cartésien.

Par construction T_d est de type (S), montrons que $N_2 \simeq T_d \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$. Par changement de base, il suffit de le voir pour g_M . Considérons un point :

$$(u_0, q, (tq, \bar{x}), w) \in \mathcal{B}_d := \mathbb{G}_m \times \mathcal{Q}_d \times_{\mathcal{Q}_{d+1}} \mathbb{A}^m_{\mathcal{Q}_{d+1}} \times \mathcal{L} \mathbb{A}^{n+1}.$$

On écrit le vecteur $w \in \mathcal{L} \mathbb{A}^{n+1}$ comme $(w_n, w_1) \in \mathcal{L} \mathbb{A}^n \times \mathcal{L} \mathbb{A}^1$. Il suffit donc de résoudre les équations :

$$(17) a'(q, \bar{x}, x') - uv = w_n$$

(18)
$$c'(q, \bar{x}, x') - u' = w_1$$

$$(19) u = u_0 + tu'.$$

En particulier, l'ensemble des solutions est paramétrisé uniquement par $x' \in \mathcal{L} \mathbb{A}^m$ et on a un isomorphisme canonique au-dessus de \mathcal{B}_d :

$$\mathcal{B}_d \times \mathcal{L} \, \mathbb{A}^m \simeq M.$$

Résumons dans la proposition suivante ce que nous venons de démontrer :

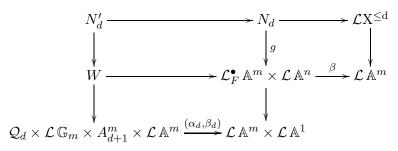
Proposition 1.37. Il existe un schéma N'_d et un morphisme $f_d: N'_d \to \mathcal{L}X^{\leq d}$ tel que :

- (1) Le morphisme f_d est affine, Weierstrass, surjectif et strictement Weierstrass sur $f_d^{-1}(\mathcal{L}X^{=d})$ avec $\mathcal{L}X^{=d} := \mathcal{L}X^{\leq d} \mathcal{L}X^{\leq d-1}$.
- (2) Il existe un morphisme $g_d: N'_d \to Y_d^{\flat} \times \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ qui est une bijection sur les A-points pour A décent, avec Y_d^{\flat} un schéma de type (S).

 $D\acute{e}monstration$. On pose $N'_d := N_d \times_{N_{1,d}} N_{2,d}$ et on note

$$f_d: N'_d \to \mathcal{L}\mathbf{X}^{\leq \mathbf{d}},$$

le morphisme canonique associé. Ce schéma ainsi que f_d a toutes les propriétés voulues d'après ce que l'on vient de voir. La seule chose dans cet énoncé qui n'a pas été explicitée est le fait que f_d est strictement Weierstrass aux points de $f_d^{-1}(\mathcal{L}X^{=d})$. On a un diagramme :



où W est tel que le carré du bas est cartésien et où les autres carrés sont cartésiens par définition. De plus, la flèche $\mathcal{L}_F^{\bullet} \mathbb{A}^m \times \mathcal{L} \mathbb{A}^n \to \mathcal{L} \mathbb{A}^m \times \mathcal{L} \mathbb{A}^1$ est donnée par la composée de la projection sur $\mathcal{L} \mathbb{A}^m$ avec le morphisme γ de (12). Par changement de base et composition, on vérifie que la flèche horizontale composée :

$$W \to \mathcal{L} \mathbb{A}^m$$

est un isomorphisme sur les complétés formels des points $f_d^{-1}(\mathcal{L}X^{=d})$.

Il reste à montrer le théorème 1.29, il suffit de montrer la proposition suivante :

Proposition 1.38. Pour tout d, le schéma $\mathcal{L}X^{=d}$ est isomorphe à $D_d \times \mathcal{L} \mathbb{A}^m$ avec D_d qui est un k-schéma de type fini.

Démonstration. On considère le foncteur B_d sur la catégorie des k-algèbres donné par :

$$B_d(R) := \{\bar{x} \in R[[t]]^m, f(\bar{x}) = 0 \ [t^{2d+1}], \psi(\bar{x}) = t^d u, u \in R[[t]]^\times \}.$$

Comme les équations ne portent que sur la réduction de \bar{x} modulo t^{2d+1} , le foncteur est représentable par un schéma de la forme $D_d \times \mathcal{L} \mathbb{A}^m$ avec :

$$D_d(R) := \{ \bar{x} \in (R[t]/(t^{2d+1}))^m, f(\bar{x}) = 0 \ [t^{2d+1}], \psi(\bar{x}) = t^d u, u \in R[[t]]^\times \}.$$

Pour toute k-algèbre R, si $x \in \mathcal{L}X^{=d}(R)$, on commence par l'écrire $x = \bar{x} + t^{2d+1}\nu \in R[[t]]^m$ avec $\nu := (0, \dots, 0, \nu_1, \dots, \nu_n) \in R[[t]]^n$. En faisant un développement de Taylor de $f(\bar{x} + t^{2n+1}\nu)$, on obtient immédiatement que \bar{x} définit un point de $B_d(R)$. Pour démontrer l'énoncé, il nous suffit de vérifier que les foncteurs sont isomorphes pour tout anneau commutatif A. Si on a un point $\bar{x} \in B_d(A)$, le même argument que pour la proposition 1.34 nous fournit l'existence et unicité d'un ν tel que :

$$f(x + t^{2d+1}\nu) = 0.$$

Il est à noter que dans ce cas on n'a pas besoin de la condition de décence étant donné que $\psi(\bar{x}) = t^d u, u \in A[[t]]^{\times}$ n'est jamais un diviseur de zéro. On obtient donc le résultat souhaité.

On termine par un exemple qui montre le caractère indispensable des schémas de type (S). En effet, ces schémas non-noethériens permettent de recoller les différents modèles formels qui apparaissent dans le théorème de Drinfeld-Grinberg-Kazhdan. En revanche, cela ne peut être fait avec des k-schémas de type fini, ainsi que le montre l'exemple suivant.

Exemple : On considère le cas du cône quadratique $X := \{(x, y, z) | xy = z^2\}$.

Si l'on prend les arcs de valuation un et deux, $\gamma_1(t)=(t,0,0)$ et $\gamma_2(t)=(t^2,0,0)$, les modèles formels Y_1 et Y_2 sont donnés par $\{v^2=0\}$ et

$$\{(a,b,v,w)|aw^2=v^2,\,bw^2=2wv\}.$$

On a alors un morphisme:

$$\phi: Y_2 \times \mathcal{L} \, \mathbb{G}_m \times \mathcal{L} \, \mathbb{A}^1 \times \mathcal{L} \, X^{\leq 2},$$

donné par $((a, b, v, w), u(t), \xi(t)) \mapsto (qu(t), y(t), v + wt + q\xi(t))$, avec y(t) défini uniquement par (x(t), z(t)) et $q = a + bt + t^2$. Le morphisme ϕ induit un isomorphisme formel sur les points qui s'envoient sur $\mathcal{L} X^{=2}$. En revanche, cela n'est plus vrai aux autres points où les singularités des deux côtés sont différentes. En effet, le quadruplet (1, 0, 0, 0) est un point singulier de Y_2 mais s'envoie sur un point lisse de $\mathcal{L} X$.

Références

- [1] M. André. Homologie des algèbres commutatives. *Grundlehren der Math. Wiss.*, vol. 206, 1974, Springer, Berlin.
- [2] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne. Faisceaux pervers. Analyse et topologie sur les espaces singuliers, Astérisque vol. 100, SMF Paris (1982)
- [3] R. Bezrukavnikov, D. Kazhdan, Y. Varshavsky. On the stable center conjecture. De la géométrie aux formes automorphes I, volume en l'honneur de G. Laumon, Astérisque vol. 369, pp. 27-97, SMF Paris, 2015.
- [4] B. Bhatt. Algebraization and Tannaka duality. arXiv:1404.7483.
- [5] B. Bhatt. An imperfect ring with a trivial cotangent complex. $http://www-personal.umich.edu/\sim bhattb/math/trivial-cc.pdf.$
- [6] B. Bhatt, P. Scholze. The Pro-étale topology for schemes. Astérisque 369, volume en l'honneur de G. Laumon, 99-201, 2015.
- [7] N. Bourbaki. Algèbre commutative Ch. VII. Hermann, Paris, 1972.
- [8] D. Bourqui, J. Sebag. Drinfeld-Grinberg-Kazhdan's theorem is false for singular arcs. Prépublication, http://blogperso.univ-rennes1.fr/julien.sebag/, A paraître au J. Inst. Math. Jussieu.
- [9] A. Bouthier, B. C. Ngô, Y. Sakellaridis. On the formal arc space of a reductive monoid (with Erratum). *Am. Journal of Math.*, vol. 138 en l'honneur d'Igusa, pp 81-109, fév. 2016.
- [10] A. Braverman, M. Finkelberg, D. Gaitsgory, I. Mirkovic. Intersection cohomology of Drinfeld's compactifications Selecta Math., vol. 8 no. 3, pp. 381-418, (2002).
- [11] P. Deligne. Cohomologie étale. SGA 4.5, Lecture Notes in Mathematics 569, Springer-Verlag, Berlin (1977).
- [12] J. Denef, F. Loeser Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration. *Inventiones Math.*, vol. 135, pp. 201-232, (1999).
- [13] V. Drinfeld. On the Grinberg-Kazhdan formal arc theorem. arXiv:math-ag/ 0203263.
- [14] V. Drinfeld. Infinite-dimensional vector bundles in algebraic geometry: an introduction. The unity of mathematics, vol. 244, pp. 263-304, Progr. Math, Birkhäuser Boston, MA, 2006.
- [15] D. Eisenbud. Commutative algebra, with a view towards algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [16] B. Feigin, E. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds. Comm. Math. Phys., vol. 128, pp. 161-189 (1990).
- [17] M. Finkelberg, I. Mirkovic. Semiinfinite flags. I. Case of global curve P¹. AMS Translations, vol. 194
 (2), pp. 81-112, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [18] B. Feigin, M. Finkelberg, I. Mirkovic, A. Kuznetsov. Semiinfinite flags. II. Local and global intersection cohomology of quasimaps' spaces. AMS Translations, vol. 194 (2, pp. 112-148, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [19] E. Frenkel, D. Gaitsgory, K. Vilonen, Whittaker patterns in the Geometry of Moduli Spaces of Bundles on Curves. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 153, No. 3, pp. 699-748, (Mai 2001).
- [20] O. Gabber. Notes on some t-structures. Geometric Aspects of Dwork Theory II, pp. 711-734, edité par A. Adolphson et all, Walter de Gruyter, Berlin 2004.
- [21] M. Grinberg, D. Kazhdan. Versal deformations of formal arcs. Geom. Funct. Anal., 10 (3), pp. 543-555, 2000.
- [22] A. Grothendieck, avec la collaboration de Jean Dieudonné. EGA II : Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Publ. Math. IHES*, vol. 8, 1961.

- [23] A. Grothendieck, avec la collaboration de Jean Dieudonné. EGA IV.2 : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. *Publ. Math. IHES*, vol. 24, 1965.
- [24] A. Grothendieck, avec la collaboration de Jean Dieudonné. EGA IV.3 : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. *Publ. Math. IHES*, vol. 28, 1966.
- [25] A. Grothendieck, avec la collaboration de Jean Dieudonné. EGA IV.4 : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. *Publ. Math. IHES*, vol. 32, 1967.
- [26] A. Grothendieck et al. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, SGA 4. Lecture Notes in Mathematics 269, 270, 305, Springer-Verlag, Berlin (1972).
- [27] A. Grothendieck et al. Cohomologie ℓ -adique et fonctions L, SGA 5. Edité par L. Illusie, Lecture notes in Maths, vol. 589, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [28] H. Hauser, S. Woblistin. On the structure of varieties of power series in one variable. Preprint, https://homepage.univie.ac.at/herwig.hauser/.
- [29] J. Kollar, A. Nemethi. Holomorphic arcs on singularities. *Inventiones Math.*, Vol. 200, Issue 1, pp. 97-147, Avril 2015.
- [30] L. Illusie. Complexe cotangent et déformations I et II. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239-283, Springer-Verlag, Berlin.
- [31] L. Illusie, Y. Laszlo, F. Orgogozo. Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents. *Astérisque*, Vol. 363-364, (2014), SMF, Paris.
- [32] I. Mirkovic, K. Vilonen. Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings. *Ann. of Math.*, (2) 166, 95-143, (2007).
- [33] M. Mustata, L. Ein. Jet schemes and singularities. *Algebraic geometry-Seattle 2005*, vol. 80 Part 2, pp. 505-546. Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [34] B.C. Ngô. On a certain sum of automorphic *L*-functions. *Cont. Math*, vol. 614, in honor of Piatetski-Shapiro, 2014.
- [35] B.C. Ngô. On finite dimensional models of singularities in the space of non-degenerated arcs. https://math.uchicago.edu/ngo/Weierstrass.pdf.
- [36] J. Nicaise, J. Sebag. Greenberg approximation and the geometry of arc spaces. *Comm. Algebra*, Vol. 38, pp. 1-20, 2010.
- [37] D. Popescu. General Néron desingularization. Nagoya Math Journal, 100, pp. 97-126, 1985.
- [38] D. Popescu. General Néron desingularization and approximation. Nagoya Math Journal, 104, pp. 85-115, 1986.
- [39] D. Popescu. Letter to the editor : General Néron desingularization and approximation. *Nagoya Math Journal*, 118, pp. 45-53, 1990.
- [40] Y. Sakellaridis. Spherical varieties and integral representations of L-functions. *Algebra Number Theory*, vol. 6(4): 611-667, 2012.
- [41] Stack Project. http://stacks.math.columbia.edu/.
- [42] T. Szamuely. Galois Groups and Fundamental groups. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 117, Cambridge University Press, 2009.