概率论

1 随机事件

- 互斥、对立（相加为全集）、独立
- 相互独立（n个独立）、两两独立（任意两个独立）
- $P(A)=1$不能推出A是全集；$P(B)=\emptyset$不能推出A是空集 连续概率密度
- 易错点：没有条件概率的条件概率这种定义（贝叶斯公式使用）
- $\sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i} = C_{m+n}^k$

2 一维随机变量及其分布

- 分布函数的性质（充要条件）:单调不减 右连续 最左为0，最右为1

- 离散型随机变量分布

分布	概率分布	期望	方差
0-1 分布 B(1, p)	$PX=1=p$	p	p(1-p)
二项分布 B(n, p)	$PX=k=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	np(1-p)
泊松分布 P(λ)	$PX=k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,2...;\lambda>0)$	λ	λ
几何分布	$PX=k=q^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
超几何分布 H(n, N, M)	$PX=k=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(k=0,1,2...)$	$n\frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$

- 泊松定理：当n很大，p很小，$\lambda=np$适中时，泊松分布可近似表示二项分布 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda}{k!}e^{-\lambda}$

- 连续型随机变量

分布	密度函数	分布函数	期望	方差
均匀分布U(a,b)	\(f(x)=\frac{1}{b-a},a	$F(x)=\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布$E(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},x>0$	$F(x)=1-e^{-\lambda x},x\geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布N(μ, σ²)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$	$F(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$	μ	σ^2

- 技巧 正态函数的比较需要换做标准正态解决
- 连续行随机变量的分布函数一定是连续的；离散型随机变量分布一定是阶梯型函数
- 易错点 写密度函数或者分布函数不要忘记写其他情况（为0或为1）

3 二维随机变量

- 条件分布函数：$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(v|x)dv$
- 二维正态随机变量
  $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}) + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]\}$
  - X Y 的条件分布也都是正态分布
  - aX+bY 也是正态分布
  - X Y 相互独立的充要条件是X和Y不相关（其他分布没有这个性质）
- 技巧 求离散型的随机分布直接求某点的概率P即可
- 相互独立随机变量函数的分布 $(X,Y) \sim f(x,y)$
  - 可以先求出$F_Z(z)$的随机变量
  - 和的分布 $Z = X+Y, f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$
  - 差的分布 $Z = X-Y, f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-z)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y+z,y)dy$
  - 积的分布 $Z = XY, f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x,\frac{z}{x})dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f(\frac{z}{y},y)dy$
  - 商的分布 $Z = \frac{X}{Y}, f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz,y)dy$
- 常见分布的可加性（相互独立）
  - $X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p), then X+Y \sim B(n+m,p)$
  - $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2), then X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$（证明需要用到 $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$）
- 技巧 一个离散型，一个连续型随机变量分布问题，先确定随机变量的分布范围；再按照离散型变量分情况求概率，注意两个变量是否属于包含情况或者不是独立

4 随机变量的数字特征

- 数学期望E(X)如果不收敛，那么期望不存在（无穷）
- 期望的实际意义：概率的平均值（非样本）
- 期望相关公式
  - $E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$
  - $Ec = c$（均值为常数c）
  - $E(aX+bY) = aEX + bEY$
  - 当X Y相互独立，$E(XY) = E(X)E(Y)$
- 方差的实际意义：概率分布的离散程度

- 方差相关公式
  - $DX = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$
  - $Dc = 0$
  - $D(aX + c) = a^2 DX + c$
  - $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2Cov(X, Y)$
  - **对于任意常数，**$DX = E(X - EX)^2 \leq E(X - c)^2$
- 切比雪夫不等式
  $P|X - EX| \geq \varepsilon \leq \frac{DX}{\varepsilon}$
  $P|X - EX| < \varepsilon \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon}$
  实际意义：方差越小，X越趋于EX
- 协方差
  - 实际意义 刻画X Y 之间偏差的关联程度；$\rho = \pm 1$表示X Y之间有线性关系；$\rho = 0$不表示X Y之间不存在相依关系
  - $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
    $Cov(X, X) = DX$
  - $Cov(X, c) = 0; Cov(aX + b, Y) = aCov(X, Y)$
  - $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$
  - $D(X + Y) = DX + DY + 2Cov(X, Y) = DX + DY + 2\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}$
- 矩与协方差矩阵
  - k阶原点矩：$E(X^k)$
  - k阶中心矩：$E[(X - EX)^k]$（方差是 2阶中心矩）
  - 二维随机变量的协方差矩阵
- 技巧 圆周类的均匀分布，要以角度为单位
- 易错点 独立 $\longrightarrow$ 不相关，相关 $\longrightarrow$ 不独立；反之不可

5 大数定律

- 伯努利大数定律 $\lim\limits_{n \to \infty} P\{|\frac{U_n}{n} - p| < \varepsilon\} = 1$
- 辛钦大数定律 $\lim\limits_{n \to \infty} P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1} nX_i - \mu| < \varepsilon\} = 1$
- 实质 做$n(n \to \infty)$次实验，实验结果趋于 EX

6 中心极限定理

- 列维-林德伯格定理（独立同分布中心极限定理）
  $$\lim_{n \to \infty} P\{\frac{\sum\limits_{i=1} nX_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\} = \Phi(x)$$
- 棣莫弗-拉普拉斯定理（n项伯努利分布）
  $$\lim_{n \to \infty} P\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\} = \Phi(x)$$

- 实质 做$n(n \to \infty)$次重复实验，$X(\sum_{i=1} nX_i)$的结果可以使用正态分布刻画
- 技巧 对于二项分布B(n, p)，做n次重复实验，事件A发生次数的最大可能值为：
  - (n+1)p为整数，$k_0 = (n+1)p, (n+1)p-1$
  - (n+1)p为偶数，$k_0 = [(n+1)p]$

7 数理统计

- 样本数字特征
  - 样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1} nX_i$
  - 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X})$
  - 样本k阶原点矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$
  - 样本k阶中心矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$
  - 第k顺序量 将样本值按从小到大的顺序排列，其中$F_{(n)}(x) = [F(x)]^n$
- 常用统计量的性质（通用）
  - $EX = E\overline{X} = \mu; DX = \sigma^2; D\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}; E(S^2) = \sigma^2$
- χ^2分布（取上α分位）
  - X_i相互独立，服从标准正态分布，$X = \sum_{i=1} nX_i^2$服从χ^2分布
  - 自由度 和式中独立变量的个数
  - EX = n；DX = 2n
- t 分布（取上α分位）
  - $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，X Y相互独立，$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$
  - 图像关于 x=0 对称，EX=0
- F 分布
  - $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2), F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$
  - 若$F \sim F(n_1, n_2)$，那么$\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$ （使用公式证明）
  - $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$
- 单正态总体（X_i服从$N(0,1)$）
  - $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
  - $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1} n(X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$
  - $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma})^2 \sim \chi^2$

- $\overline{X}, S^2$相互独立，$\frac{(\overline{X}-\mu)}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$
- 双正态总体
  - $\overline{X}-\overline{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n})$
  - $\frac{\sum\limits_{i=1} n(X_i-\mu_1)^2/m\sigma_1^2}{\sum\limits_{i=1} n(Y_i-\mu_2)^2/n\sigma_2^2} \sim F(m,n)$
  - $\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} = \frac{\sum\limits_{i=1} n(X_i-\overline{X})^2/(m-1)\sigma_1^2}{\sum\limits_{i=1} n(Y_i-\overline{Y})^2/(n-1)\sigma_2^2} \sim F(m,n)$
- 统计量 不含任何未知参数的样本函数

8 参数估计

- 矩估计法 求$EX^t = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^t; t=1,2,3...$
- 最大似然估计法 通过样本观测值估计概率最大的参数作为估计值。可以通过求最大似然函数，确定参数的估计值，这个参数需要使最大似然函数值最大
- 估计标准 无偏性 有效性 一致性（相合性）
- 置信区间

Date: 2018-11-10

Author: hiro

Created: 2018-12-20 四 12:22