线性代数

1 行列式

- 逆序数 一个排列中逆序的排列的总数 $\tau(231546)=3$
- 奇排列 逆序数是奇数的叫做奇排列；反之为偶排列
- 行列式性质（区别与矩阵）
  - 行列式的两行（列）互换，行列式值取反
  - 行列式的乘法，只能乘到一行上
  - 行列式的加法，只能有一行的值不同
- 余子式(M_{ij}) & 代数余子式$((-1)^{i+j}M_{ij})$
- 副对角线行列式计算 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}\dots a_{n1}$
- $\begin{vmatrix} O & A_{m*n} \\ B_{m*n} & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$

2 矩阵

- 矩阵性质（区别于行列式）
  - 矩阵任意行列交换，不变
  - 矩阵（数）乘法，乘每一个元素
  - 矩阵加法，每个元素相加
  - $|A+B|=|A|+|B|$
  - 易错点 一般情况下，$AB\neq BA$（不可交换性）
  - $|AB|=|A||B|$
- 转置矩阵的性质
  - $(A+B)^T=A^T+B^T$
  - 易错点 **当m=n时** ，$|A^T|=|A|^T$
- 数量矩阵 数k和单位矩阵的乘积
- 对角矩阵 非主对角线元素均为0
- 对称矩阵 满足 $A^T=A, a_{ij}=a_{ji}$
  - $(A+B)^T=A^T+B^T$
  - $(AB)^T=B^TA^T$
- 非对称矩阵 满足 $A^T=-A; a_{ij}=-a_{ji} \& a_{ii}=0$
- 逆矩阵 满足$AB=BA=E$，（A、B可逆，满秩，$|A|\neq 0$，可交换）
  - $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

  - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
  - $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
  - A^{-1}, A^*都可逆，但A^T不可逆
  - 易错点 **A+B 不一定可逆**
- 技巧 求A^n 观察矩阵可否化为$A = \alpha^T\beta$；尝试计算A^2, A^3
- 技巧 与对角矩阵可交换的矩阵也是对角矩阵
- 伴随矩阵 $AA^* = |A|E$
- 技巧 $x^TAx = 0$的必要充分条件是A是反对称矩阵（证明：取$x = e_i = [0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0]$）
- 伴随矩阵
  - $(A^T)^* = (A^*)^T$
  - $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$
  - $(AB)^* = B^*A^*$
  - $|A^*| = |A|^{n-1}$
  - $(A^*)^* = |A|^{n-1}A$
- 初等矩阵 由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵
  - $E_2(k)A$ 将第二行乘k倍；$AE_2(k)$ 将第二列乘k倍
  - $E_{12}A$ 将第一行和第二行互换；$AE_2(k)$ 将第一列和第二列互换
  - $E_{31}(k)A$ 将第一行的k倍加到第三行上；$AE_{31}(k)$ 将第三列的k倍加到第一列上
- 等价矩阵 存在可逆矩阵P Q使得$PAQ = B$，则A B等价$A \cong B$
- 矩阵的秩
  - $r(AB) \leq min(r(A), r(B))$
  - $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$

3 向量

- 线性相关 存在一组不为0的数，使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_2$
- 含有零向量或者成比例向量的向量组必线性相关
- 线性相关 非齐次线性方程组有解 齐次方程组有解
- 等价向量组 两组向量都可以被互相表出
- 过渡矩阵 基1到基2的变换，基2=基1*C，C为过渡矩阵
- 正交 向量点乘为0
- 标准正交向量组 $\alpha_{ii} = 1$, 其余为0
- 施密特标准正交化
  - $\beta_1 = \alpha_1$
  - $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$

  - $\beta_n = \alpha_n - \ldots - \frac{(\alpha_n,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\beta_i$
- 正交矩阵 $A^TA = E, A^T = A^{-1}$，A的行列向量组都是标准正交向量，$|A| = 1$
- 易错点 **线性无关不能推出两两正交 正交向量组必线性无关**

4 线性方程组

- $r(A) = n$，齐次方程组有唯一0解；\(r(A)
- 基础解系 方程组的解都可以由这个解系表出；通解由基础解系构成
- $r(A) = r(A|b) = n$，非齐次线性方程组有唯一解；\(r(A)=r(A|b)
- 技巧 证明β是$Ax = 0$的基础解系
  - 证明β是$Ax = 0$的解
  - 证明β线性无关
  - 证明β元素数量为A的秩
- 非齐次线性方程组的通解 = 对应齐次线性方程组的通解 + 特解
- 同解方程组 两个方程组有完全相同的解
  - $r(A) = r(B)$，A的解满足B的解
  - $r(A) = r(B) = r(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix})$
- 特征值 $A\xi = \lambda\xi$
  - $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1} na_{ii}$
  - $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$

5 相似矩阵

- 存在可逆矩阵P P^{-1}，使得$PAP^{-1} = B$，那么$A \sim B$
- $A \sim B, A^m \sim B^m, f(A) \sim f(B)$
- $A \sim B$，若A可逆，$A^{-1} \sim B^{-1}, f(A^{-1}) \sim f(B^{-1})$
- 矩阵相似对角化 存在可逆矩阵P，$P^{-1}AP = \Lambda$，Λ是对角矩阵，称A可相似对角化，Λ是A的相似对角形
  - 一定有 n 个线性无关的特征向量，不一定有 n 个特征值
- 实对称矩阵 矩阵的元素都是实数的对称矩阵
  - 属于不同特征值的特征向量相互正交
  - 必相似于对角矩阵$diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$
  - 存在正交矩阵Q $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$，相似并合同于对角矩阵
- 技巧 判断一个矩阵是否相似于对角矩阵
  - 判断是否是实对称矩阵

- 判断特征值是否是单根
- r 重特征值是否有r重特征向量

6 二次型矩阵

- 二次型矩阵 $f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots, f(x) = x^TAx$, A是实对称矩阵，被称为f(x)的二次型矩阵
- 线性变换 $x = Cy, f(x) = x^TAx = (Cy)^TA(Cy) = y^T(C^TAC)y$
- 矩阵合同 $B = C^TAC$，称$A \simeq B$，A合同B
- 二次型的标准型 二次型中只有斜对角线元素
- 二次型的规范性 二次型中只有斜对角线元素且只有 -1，0，1
- 惯性定理 正惯性系数（标准型中正数的个数）
- 两个二次型（实对称矩阵）合同的充要条件是：有相同的正负惯性数；或者有相同的正（负）惯性数和秩
- 正定二次型 对于任意的x，都有$x^TAx > 0$，f(x)为正定二次型，A是正定矩阵
- 二次型正定的充要条件
  - 正惯性系数p=n
  - A 的所有顺序主子式 > 0
  - A 的特征值 $\lambda_i > 0$
  - $A \simeq E$
- 二次型正定的必要条件
  - $a_{ii} > 0$
  - $|A| > 0$

Author: hiro

Created: 2018-11-16 五 15:13