

Метод Ритца (Рэля-Ритца) #2

Николай Животенко

niko.zvt@gmail.com

МГТУ им. Н. Э. Баумана — 18 июня 2020 г.

Введение

❶

Информация: Вариационное исчисление – математическая дисциплина, посвящённая отысканию экстремальных (наибольших и наименьших) значений функционалов – переменных величин, зависящих от выбора одной или нескольких функций. Вариационное исчисление является естественным развитием той главы математического анализа, которая посвящена задаче отыскания экстремумов функций. Возникновение и развитие вариационного исчисления тесно связано с задачами механики, физики и других технических наук.

Ещё в античные времена появились первые вариационные проблемы, относящиеся к категории изопериметрических задач – например, задача Дидоны. Первый вариационный принцип сформулировал Герон Александрийский для траекторий отражённых световых лучей в работе «Катоптрика» (I в. н.э.). В средневековой Европе изопериметрическими задачами занимались И. Сакробоско (XIII в.) и Т. Брадвардин (XIV в.). После разработки анализа появились новые типы вариационных задач, в основном механического характера. Ньютон в «Математических началах натуральной философии» (1687 г.) решает задачу: найти форму тела вращения, обеспечивающую наименьшее сопротивление при движении в газе или жидкости при заданных размерах. Важной исторической задачей, давшей толчок к развитию современного варианта вариационного исчисления, стала задача о брахистохроне (1696 г.). Её быстрое решение сразу несколькими математиками показало огромные возможности новых методов. Среди других задач стоит отметить определение формы цепной линии, то есть формы равновесия тяжёлой однородной нити (1690 г.). Общих методов решения вариационных задач в этот период ещё не существовало, каждая задача решалась с помощью остроумных и не всегда безупречных геометрических рассуждений.

Решающий вклад в развитие вариационного исчисления внесли Леонард Эйлер и Жозеф Лагранж. Эйлеру принадлежит первое систематическое изложение вариационного исчисления и сам термин (1766 г.). Лагранж независимо получил многие основополагающие результаты и ввёл понятие вариации (с 1755 г.). На этом этапе были выведены уравнения Эйлера – Лагранжа.

Методы вариационного исчисления широко применяются в различных областях математики. Например, в дифференциальной геометрии с их помощью ищут геодезические линии и минимальные поверхности. В физике вариационный метод – одно из мощнейших орудий получения уравнений движения, как для дискретных, так и для распределённых систем, в том числе и для физических полей. Методы вариационного исчисления применимы и в статике.

Выделяют два основных типа методов решения вариационных задач. К первому типу относятся методы, сводящие исходную задачу к решению дифференциальных уравнений. Альтернативой являются так называемые прямые методы. Эти методы тем или иным способом решают исходную задачу по поиску функции в заданном классе, которая доставляла бы экстремальное значение заданному функционалу. Один из самых популярных методов этого класса — метод Ритца (также называемый методом Рэля-Ритца).

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

1 Problem title

In hac habitasse platea dictumst. Curabitur mattis elit sit amet justo luctus vestibulum. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque lobortis justo enim, a condimentum massa tempor eu. Ut quis nulla a quam pretium eleifend nec eu nisl. Nam cursus porttitor eros, sed luctus ligula convallis quis. Nam convallis, ligula in auctor euismod, ligula mauris fringilla tellus, et egestas mauris odio eget diam. Praesent sodales in ipsum eu dictum.

1.1 Theoretical viewpoint

В курсе высшей математики вводилось понятие функции. Если некоторому числу x из области D ставится в соответствие по определенному правилу или закону число y , то говорят, что задана функция $y = f(x)$. Область D называют областью определения функции $f(x)$.

Question 1

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit.

- (a) Do this.
- (b) Do that.
- (c) Do something else.

1.2 Algorithmic issues

In malesuada ullamcorper urna, sed dapibus diam sollicitudin non. Donec elit odio, accumsan ac nisl a, tempor imperdiet eros. Donec porta tortor eu risus consequat, a pharetra tortor tristique. Morbi sit amet laoreet erat. Morbi et luctus diam, quis porta ipsum. Quisque libero dolor, suscipit id facilisis eget, sodales volutpat dolor. Nullam vulputate interdum aliquam. Mauris id convallis erat, ut vehicula neque. Sed auctor nibh et elit fringilla, nec ultricies dui sollicitudin. Vestibulum vestibulum luctus metus venenatis facilisis. Suspendisse iaculis augue at vehicula ornare. Sed vel eros ut velit fermentum porttitor sed sed massa. Fusce venenatis, metus a rutrum sagittis, enim ex maximus velit, id semper nisi velit eu purus.

Algorithm 1: FastTwoSum

Input: (a, b) , two floating-point numbers

Result: (c, d) , such that $a + b = c + d$

```
if  $|b| > |a|$  then
  exchange  $a$  and  $b$  ;
end
 $c \leftarrow a + b$  ;
 $z \leftarrow c - a$  ;
 $d \leftarrow b - z$  ;
return  $(c, d)$  ;
```

Fusce varius orci ac magna dapibus porttitor. In tempor leo a neque bibendum sollicitudin. Nulla pretium fermentum nisi, eget sodales magna facilisis eu. Praesent aliquet nulla ut bibendum lacinia. Donec vel mauris vulputate, commodo ligula ut, egestas orci. Suspendisse commodo odio sed hendrerit lobortis. Donec finibus eros erat, vel ornare enim mattis et.

Question 2 (with optional title)

In congue risus leo, in gravida enim viverra id. Donec eros mauris, bibendum vel dui at, tempor commodo augue. In vel lobortis lacus. Nam ornare ullamcorper mauris vel molestie. Maecenas vehicula ornare turpis, vitae fringilla orci consectetur vel. Nam pulvinar justo nec neque egestas tristique. Donec ac dolor at libero congue varius sed vitae lectus. Donec et tristique nulla, sit amet scelerisque orci. Maecenas a vestibulum lectus, vitae gravida nulla. Proin eget volutpat orci. Morbi eu aliquet turpis. Vivamus molestie urna quis tempor tristique. Proin hendrerit sem nec tempor sollicitudin.

Mauris interdum porttitor fringilla. Proin tincidunt sodales leo at ornare. Donec tempus magna non mauris gravida luctus. Cras vitae arcu vitae mauris eleifend scelerisque. Nam sem sapien, vulputate nec felis eu, blandit convallis risus. Pellentesque sollicitudin venenatis tincidunt. In et ipsum libero. Nullam tempor ligula a massa convallis pellentesque.

2 Implementation

Proin lobortis efficitur dictum. Pellentesque vitae pharetra eros, quis dignissim magna. Sed tellus leo, semper non vestibulum vel, tincidunt eu mi. Aenean pretium ut velit sed facilisis. Ut placerat urna facilisis dolor suscipit vehicula. Ut ut auctor nunc. Nulla non massa eros. Proin rhoncus arcu odio, eu lobortis metus sollicitudin eu. Duis maximus ex dui, id bibendum diam dignissim id. Aliquam quis lorem lorem. Phasellus sagittis aliquet dolor, vulputate cursus dolor convallis vel. Suspendisse eu tellus feugiat, bibendum lectus quis, fermentum nunc. Nunc euismod condimentum magna nec bibendum. Curabitur elementum nibh eu sem cursus, eu aliquam leo rutrum. Sed bibendum augue sit amet pharetra ullamcorper. Aenean congue sit amet tortor vitae feugiat.

In congue risus leo, in gravida enim viverra id. Donec eros mauris, bibendum vel dui at, tempor commodo augue. In vel lobortis lacus. Nam ornare ullamcorper mauris vel molestie. Maecenas vehicula ornare turpis, vitae fringilla orci consectetur vel. Nam pulvinar justo nec neque egestas tristique. Donec ac dolor at libero congue varius sed vitae lectus. Donec et tristique nulla, sit amet scelerisque orci. Maecenas a vestibulum lectus, vitae gravida nulla. Proin eget volutpat orci. Morbi eu aliquet turpis. Vivamus molestie urna quis tempor tristique. Proin hendrerit sem nec tempor sollicitudin.

```
hello.py

#!/usr/bin/python

import sys
sys.stdout.write("Hello World!\n")
```

Fusce eleifend porttitor arcu, id accumsan elit pharetra eget. Mauris luctus velit sit amet est sodales rhoncus. Donec cursus suscipit justo, sed tristique ipsum fermentum nec. Ut tortor ex, ullamcorper varius congue in, efficitur a tellus. Vivamus ut rutrum nisi. Phasellus sit amet enim efficitur, aliquam nulla id, lacinia mauris. Quisque viverra libero ac magna maximus efficitur. Interdum et malesuada fames ac ante ipsum primis in faucibus. Vestibulum mollis eros in tellus fermentum, vitae tristique justo finibus. Sed quis vehicula nibh. Etiam nulla justo, pellentesque id sapien at, semper aliquam arcu. Integer at commodo arcu. Quisque dapibus ut lacus eget vulputate.

Command Line

```
$ chmod +x hello.py
$ ./hello.py

Hello World!
```

Vestibulum sodales orci a nisi interdum tristique. In dictum vehicula dui, eget bibendum purus elementum eu. Pellentesque lobortis mattis mauris, non feugiat dolor vulputate a. Cras porttitor dapibus lacus at pulvinar. Praesent eu nunc et libero porttitor malesuada tempus quis massa. Aenean cursus ipsum a velit ultricies sagittis. Sed non leo ullamcorper, suscipit massa ut, pulvinar erat. Aliquam erat volutpat. Nulla non lacus vitae mi placerat tincidunt et ac diam. Aliquam tincidunt augue sem, ut vestibulum est volutpat eget. Suspendisse potenti. Integer condimentum, risus nec maximus elementum, lacus purus porta arcu, at ultrices diam nisl eget urna. Curabitur sollicitudin diam quis sollicitudin varius. Ut porta erat ornare laoreet euismod. In tincidunt purus dui, nec egestas dui convallis non. In vestibulum ipsum in dictum scelerisque.



Notice: In congue risus leo, in gravida enim viverra id. Donec eros mauris, bibendum vel dui at, tempor commodo augue. In vel lobortis lacus. Nam ornare ullamcorper mauris vel molestie. Maecenas vehicula ornare turpis, vitae fringilla orci consectetur vel. Nam pulvinar justo nec neque egestas tristique. Donec ac dolor at libero congue varius sed vitae lectus. Donec et tristique nulla, sit amet scelerisque orci. Maecenas a vestibulum lectus, vitae gravida nulla. Proin eget volutpat orci. Morbi eu aliquet turpis. Vivamus molestie urna quis tempor tristique. Proin hendrerit sem nec tempor sollicitudin.