

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ ЗА ЗАВЪРШВАНЕ НА
ОБРАЗОВАТЕЛНО-КВАЛИФИКАЦИОННА СТЕПЕН
„БАКАЛАВЪР“
СПЕЦИАЛНОСТ „ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА“

11 септември 2014 г.

Задача 1: Дадена е линейната оптимизационна задача:

$$(P) \begin{cases} \text{да се минимизира} & z(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + (a-3)x_2 + a(a+1)x_3 \\ \text{при ограничения} & \begin{aligned} ax_1 + (a-3)x_2 + (1-a+a^2)x_3 &= a-1 \\ x_1 - 2x_2 + ax_3 &= 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{aligned} \end{cases}$$

където a е параметър със стойности различни от едно. За кои стойности на параметъра a е изпълнено:

- а) точката $\bar{x} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)^T$ е единствен оптимален опорен план на тази задача;
- б) точката $\bar{x} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)^T$ е оптимален опорен план на тази задача, но не е единствен - да се определи общия вид на оптималните планове;
- в) целевата функция намалява неограничено в множеството от допустимите стойности за x_1, x_2 и x_3 ;
- г) има съседен опорен план на задачата, за който целевата функция има по-малка стойност.

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство \mathbb{R}^3 , линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ p & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}),$$

зависеща от реален параметър p . Да се пресметнат стойностите на реалния параметър p , за които характеристичният полином $f_\varphi(x)$ на φ изпълнява равенството $f_\varphi(2) = 10$. За получените стойности на p да се намери ортонормиран базис e_1, e_2, e_3 на \mathbb{R}^3 , в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази диагонална матрица D .

Време за работа 3 часа.

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!