

Разписани теми за държавен изпит, приложна математика,  
ФМИ на СУ, 2017г.

Никола Юруков

18 август 2017 г.

## Съдържание

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | Тема 1. Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния и ъгли. Криви от втора степен.                      | 3 |
| 2 | Тема 2. Алгебрическа затвореност на полето на комплексните числа. Следствия. Формули на Виет.                   | 3 |
| 3 | Тема 3. Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация. | 3 |

Задачи са за теми: 1-8 и 10-19

## 1 Тема 1. Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния и ъгли. Криви от втора степен.

Материали: От записки на Илия от интернет.

Задачи: Прикачени на листа решени с другите задачи. Трансферзала, перпендикулярни прави и равнини, уравнения на прави и равнини.

**Векторни и параметрични (скаларни) уравнения на права и равнина. Общо уравнение на права в равнината. Декартово уравнение. Взаимно положение на две прави. Нормално уравнение на права. Разстояние от точка до права. Ъгъл между прави.**

**Общо уравнение на равнина. Взаимно положение на две равнини. Нормално уравнение на равнина. Разстояние от точка до равнина.**

**Уравнение на окръжност. Канонични уравнения на елипса, хипербола и парабола. Фокални свойства на елипса, хипербола и парабола.**

## 2 Тема 2. Алгебрическа затвореност на полето на комплексните числа. Следствия. Формули на Виет.

Материали: Тема 17 от книжката на Чъкарян и Сидеров по Висша Алгебра.

## 3 Тема 3. Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.

Материали: Тема 24 от книжката на Сидеров по Линейна Алгебра.

---

**Изисквания по конспект.** Симетричен оператор – определение, матрица спрямо ортонормиран базис. Всички характеристични корени на симетричен оператор са реални числа; всеки два собствени вектора, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални помежду си; съществува ортонормиран базис на пространството, в който матрицата на симетричен оператор е диагонална. Примерна задача: За даден симетричен оператор да се намерят ортонормиран базис на пространството, в който матрицата му е диагонална, както и самата матрица. Литература: [25]

---

Нека  $V$  е  $n$ -мерно евклидово пространство.

### Дефиниция 3.1. Симетричен оператор.

Нека  $\varphi \in \text{Hom} V$ . Симетричен е ако  $\forall u, v \in V : (\varphi(u), v) = (u, \varphi(v))$

..Редуцираме твърдението само до базисни вектори.  $(\varphi(e_i), e_j) = (e_i, \varphi(e_j))$

### Дефиниция 3.2. Симетрична матрица.

Една матрица е симетрична ако  $A^T = A$  или  $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j \in I$

**Твърдение 3.3. Свойства на симетричните матрици**

1. Подпространство на симетричните матрици
2. Ако  $\exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1}$  също е симетрична + доказателство
3.  $A$  и  $B$  комутират  $\Rightarrow AB$  е симетрична + доказателство

**Твърдение 3.4. Оператор  $\leftrightarrow$  матрица.**  $\varphi$  е симетричен оператор тогава и само тогава когато  $A$  е симетрична матрица.

*Доказателство.* Нека  $e_1, e_2, \dots, e_n$  е ортонормиран базис на  $V$ ,  $\varphi \in \text{Hom} V$  и  $A = (a_{ij})$  е матрицата на  $\varphi$  в този базис.

Разпадаме един вектор на компонентните му базисни, после като разгледаме скаларното произведение излиза веднага твърдението.  $\square$

**Твърдение 3.5.  $\lambda$  са реални числа.** Характеристичните корени на симетрична матрица са реални числа

*Доказателство. Гадно е.* Разглеждат се уравнения за коерните на характеристичния полином и от там се извеждат спрегнатости и реалност.  $\square$

**Твърдение 3.6.  $\lambda$  са реални числа за оператор.**

**Твърдение 3.7. Ортогонални базисни вектори.**

**Твърдение 3.8. Диагонализираем оператор. ГАААДНО.**

**Твърдение 3.9. Диагонализируема матрица.**

---

**Задача:** За симетричен оператор да се намери базис на пространството, в който матрицата му е диагонална, както и самата матрица.

**Пример 3.10.** Спрямо базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  на  $\mathbb{R}^n$  операторът  $\varphi$  има матрица:  
... Виж задача 15 от файла 3-примерни-задачи

---