Станислава Стоилова

Учебно пособие
по
аналитична геометрия
I част

Уравнения на права. Уравнения на равнина

София, 2013

Съдържание

Предговор

Предложеното учебно пособие по аналитична геометрия I част съдържа две глави, отнасящи се до уравнения на права и уравнения на равнина. Всяка глава е разделена на параграфи, в които са дадени кратки теоретични сведения, касаещи разглежданите видове уравнения. Във всяка от двете глави последният параграф е наречен „Задачи“. В тези параграфи са предложени задачи, които илюстрират теоретичният материал. На една част от задачите са дадени пълните решения, а за друга – са дадени упътвания. Отговорите на всички задачи са дадени непосредствено под условието на самата задача.

В първа глава се разглеждат видовете уравнения на права, както в пространството, така и в равнината. Особено внимание е отделено на взаимното положение на две прави, на разстоянието от точка до права, както и на уравненията на ъглоповящите на ъглите, образувани от две пресичащи се прави. Споменото е също какво е сноп прави и сноп успоредни прави.

Втора глава като естествено обощение на материала от първа глава има подобна структура. Тук кратко са описани видовете уравнения на равнина, взаимното положение на две равнини, сноп равнини и сноп успоредни равнини. Засегнат е въпроса за ъгъл между две равнини, както и за ъгъл между права и равнина. Даден е още един начин на представяне на права в пространството чрез уравненията на две произволни равнини през нея. В тази глава особено място е отделено на трансверзала на кръстосани прави (забележка 2.13.2), ос на кръстосани прави (забележка 2.13.3) и ос-отсечка на тези прави (забележка 2.13.4).

Разгледан е също въпроса и намиране на ортогонално симетрична точка относно равнина и относно права, както в равнината (глава 1), така и в пространството (глава 2).

Както теоретичния материал, така и някои от решените задачи са илюстрирани с чертежи.

Учебното пособие може да се използва от студенти от всички специалности на Университета по архитектура, строителство и геодезия. Представеният тук материал е естествено продължение на знанията, които студентите вече имат за вектори, координати на вектори и точки, както в равнината, така и в пространството, операции с вектори, а също и на познанията им за матрици, детерминанти и системи линейни уравнения.

Надявам се учебното пособие да бъде полезно на студентите при овладяването на този материал, включен в дисциплината „Линейна алгебра и аналитична геометрия“ за инженерните специалности и в дисциплината „Математика“ за студентите от специалност „Архитектура“.

Нямам претенции за авторство на изложения материал. Той е просто друг поглед на добре известни факти.

Тук е мястото да изкажа искрената си благодарност на доц. д-р Владимир Самодивкин и гл. ас. Петър Стоев за ценните съвети и полезните забележки, които допринесоха за подобряването на учебното пособие.

София, 2013

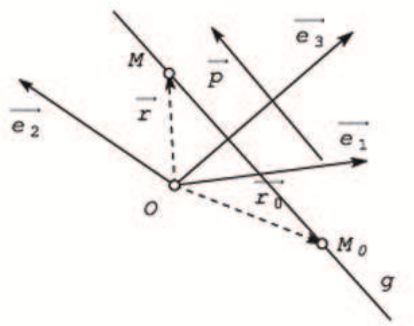
Станислава Стоилова

Глава 1

Уравнения на права

1.1 Параметрични уравнения на права

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е фиксирана афинна координатна система, относно която ще отчитаме координатите на точките и векторите в пространството. Да разгледаме права g, определена от точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевия вектор $\overrightarrow{p}(\lambda, \mu, \nu)$, колинеарен с g (Фигура.1.1).



Фигура 1.1.

Правата g се състои от всички точки $M(x, y, z)$, за които $\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{p}$. Следователно

$$\overrightarrow{M_0M} = s\overrightarrow{p}. \tag{1.1}$$

Ако $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{r_0}$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$, то равенството (1.1) можем да запишем във вида

$$g : \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = s\overrightarrow{p}. \tag{1.2}$$

По този са определени координатите на радиус-векторите на всички точки от правата g, т.е. координатите на точките от правата g, или правата g се определя с уравнението (1.2), което се нарича **векторно параметрично уравнение на правата** g.

Тъй като $\overrightarrow{r}(x, y, z)$, а $\overrightarrow{r_0}(x_0, y_0, z_0)$ и $\overrightarrow{p}(\lambda, \mu, \nu)$, то уравнението (1.2), записано за координатите на векторите, добива вида

$$g : \begin{cases} x = x_0 + \lambda s, \\ y = y_0 + \mu s, \\ z = z_0 + \nu s, \end{cases} \tag{1.3}$$

които се наричат **координатни (скаларни) параметрични уравнения на правата** g **относно** K**, а** s, $-\infty < s < +\infty$ – **параметър**.

1.2 Канонично уравнение на права

Ако от всяко от уравненията (1.3) изразим параметъра s, то получаваме

$$g : \frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu}, \tag{1.4}$$

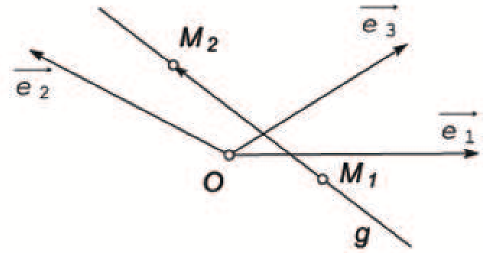
което се нарича **канонично уравнение на** g.

1.3 Уравнение на права през две точки

Нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са две точки в пространството. Те определят права g, която минава през тях (Фигура 1.2.). Векторът

$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ е колинеарен с правата g. Тогава правата g има канонични уравнения (1.4), написани за вектора $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{M_1M_2}$, т.е.

$$g : \frac{x - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_1}. \tag{1.5}$$



Фигура 1.2.

Уравненията (1.5) се наричат **уравнения на правата** g **през две точки**.

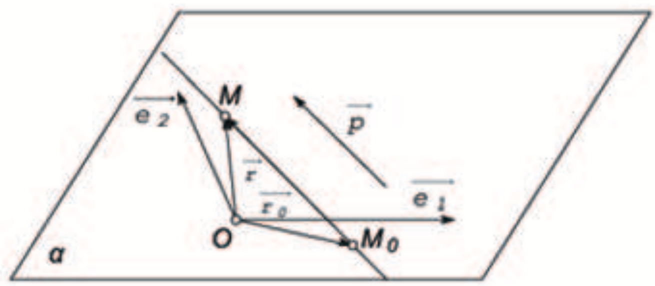
1.4 Уравнения на права в равнината

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е фиксирана афинна координатна система в равнината α, относно която ще отчитаме координатите на точките и векторите в α. Уравнението (1.2) запазва вида си и когато правата g лежи в равнината α (Фигура 1.3.). Тогава за уравненията (1.3) и (1.4), като вземем предвид, че $M_0(x_0, y_0)$ и ненулевия вектор $\overrightarrow{p}(\lambda, \mu)$ имат по две координати, получаваме

$$g : \begin{cases} x = x_0 + \lambda s, \\ y = y_0 + \mu s, \end{cases} \tag{1.6}$$

и

$$g : \frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu}, \tag{1.7}$$



Фигура 1.3.

които се наричат съответно **параметрични уравнения** и **канонично уравнение** на правата g.

1.4.1 Общо уравнение на права

От уравнението (1.7) получаваме

$$(1.7') \qquad g : \mu x - \lambda y - \mu x_0 + \lambda y_0 = 0,$$

което можем да запишем във вида

$$(1.8) \qquad g : Ax + By + C = 0,$$

където A, B и C са реални числа, такива че

$$(1.9) \qquad |A| + |B| \neq 0,$$

тъй като вектора $\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{o}$.

1) Уравнението (1.8), със свойството (1.9), се нарича **общо уравнение на правата** g **относно** K, а само лявата му страна - *полином на* g.

2) Всяко уравнение от вида (1.8), за което е в сила (1.9), е уравнение относно K на точно една права g от α.

3) Ако (1.8) е общо уравнение на правата g и ρ е произволно различно от нула реално число, то и уравнението

$$(\rho A)x + (\rho B)y + \rho C = 0$$

е уравнение на същата права g.

4) Един **вектор** $\overrightarrow{q}(\lambda, \mu)$ **е колинеарен на правата** g с общо уравнение (1.8) точно тогава, когато координатите му удовлетворяват равенството

$$A\lambda + B\mu = 0.$$

Тогава

5) Ако правата g има общо уравнение (1.8), векторът $\overrightarrow{p}(-B, A)$ **е колинеарен** с нея.

6) Когато правата g **има специално положение** относно координатната система K, тогава и уравнението ѝ (1.8) има **специален вид**. По-точно имаме:

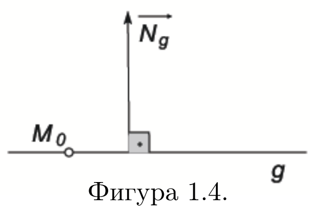
6.а) Правата g **минава през началото** O на K тогава и само тогава, когато $C = 0$, т.е. $\boldsymbol{g : Ax + By = 0}$;

6.б) Правата g **е точно тогава успоредна на** $O\overrightarrow{e_1}$, когато $A = 0$, но $C \neq 0$, т.е. $\boldsymbol{g : By + C = 0}$; g **съвпада с** $O\overrightarrow{e_1}$ точно тогава, когато $A = 0$, $C = 0$, т.е. $\boldsymbol{g : y = 0}$.

6.в) Правата g **е точно тогава успоредна на** $O\overrightarrow{e_2}$, когато $B = 0$, но $C \neq 0$, т.е. $\boldsymbol{g : Ax + C = 0}$; g **съвпада с** $O\overrightarrow{e_2}$ точно тогава, когато $B = 0$, $C = 0$, т.е. $\boldsymbol{g : x = 0}$.

Ако координатната система K е **ортонормирана** свойствата 1) - 6) са в сила и сега, но в този случай още имаме:

7) Векторът $\overrightarrow{N}_g(A, B)$ **е перпендикулярен на правата** g с общо уравнение (1.8).



Фигура 1.4.

8) Ако точката $M_0(x_0, y_0) \in g$ и векторът $\overrightarrow{N}_g(A, B)$ перпендикулярен на g, то g има уравнение

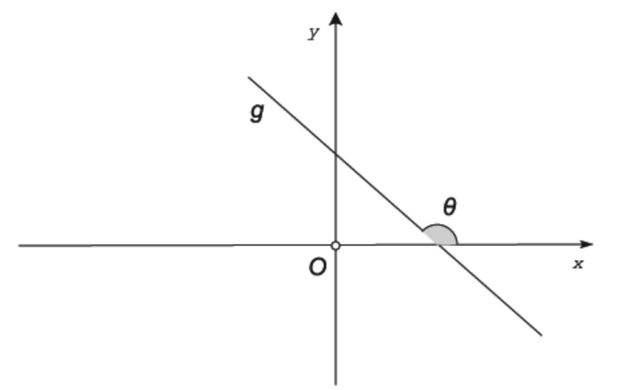
$$g : A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{1.10}$$

1.4.2 Декартово уравнение на права

Ако $M_0(x_0, y_0)$ е фиксирана точка в α, а g е произволна права през M_0 с общо уравнение (1.8), то тогава уравнението (1.8) приема вида

$$g : A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{1.11}$$

Уравнението (1.11) се нарича **уравнение на правата g, минаваща през точката** $M_0(x_0, y_0)$.



Фигура 1.5.

Ако предположим, че правата g пресича ординатната ос $O\overrightarrow{e_2}$, то от 6.в) следва $B \neq 0$ и следователно общото уравнение (1.8) можем да запишем във вида

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}, \tag{1.12}$$

или

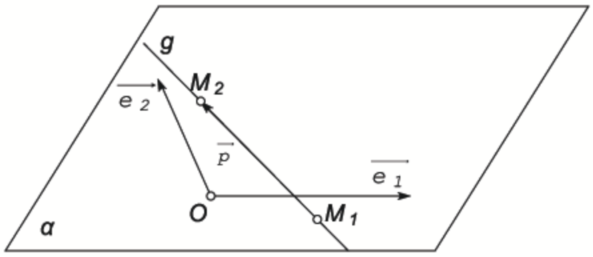
$$y = kx + b, \tag{1.13}$$

където
$$k = -\frac{A}{B}$$
се **ъглов коефициент на правата** g **относно абсцисната ос** $O\overrightarrow{e_1}$, а уравнението (1.13) се нарича **декартово уравнение на права**.

Ако предположим, че координатната система K е **ортонормирана** и равнината α е ориентирана посредством K, то тогава
$$k = \mathrm{tg}\ \theta,$$
където $\theta = (\overrightarrow{e_1}, g)$ (Фигура 1.5.).

1.4.3 Уравнение на права през две точки

Уравнението на права през две точки в равнината е следствие от уравнението (1.5). Тук обаче ще дадем и още някои записи на уравнение през две точки в равнината.



Фигура 1.6.

Нека $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ са две точки в равнината α (Фигура 1.6.). Правата $g = M_1M_2$ минава през точката $M_1(x_1, y_1)$ и върху нея лежи вектора $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ и следователно едно нейно уравнение ще намерим, като заместим в (1.11) $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$, $A = y_2 - y_1$, $B = -(x_2 - x_1)$. Получаваме уравнението

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0, \tag{1.14}$$

което можем да запишем и във вида

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{1.15}$$

или

$$
\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.16}
$$

Всяко от уравненията (1.14) – (1.16) се нарича **уравнение на права през две точки**.

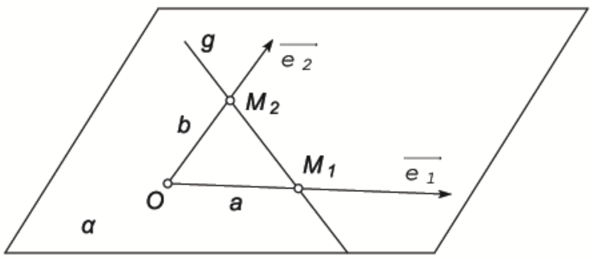
В случай, че правата $g = M_1M_2$ пресича ординатната ос $O\overrightarrow{e_2}$, то $x_2 - x_1 \neq 0$ и тогава можем да запишем (1.14) по следния начин:

$$
y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \tag{1.17}
$$

т.е. правата $g = M_1M_2$ има ъглов коефициент $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

1.4.4 Отрезово уравнение на права

Да предположим, че правата g не минава през началото O на K и пресича координатните ѝ оси $O\overrightarrow{e_1}$ и $O\overrightarrow{e_2}$ съответно в точките $M_1(a, 0)$ и



Фигура 1.7.

$M_2(0, b)$ (Фигура 1.7.). Реалните числа a и b се наричат **отрези на правата** $g = M_1M_2$ **от координатните оси**. От (1.16) следва, че правата $g = M_1M_2$ има уравнение

$$
\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{1.18}
$$

което след кратко преобразуване, приема вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{1.19}$$

Уравнението (1.19) се нарича **отрезово уравнение на правата** g.

Ако правата g има общо уравнение (1.8) и минава през координатното начало O, то от 6.а) следва, че тя няма отрезово уравнение.

Ако g е успоредна на оста $O\overrightarrow{e_1}$, то от 6.б) за отрезовото ѝ уравнение получаваме

$$\frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1,$$

а ако g е успоредна на оста $O\overrightarrow{e_2}$, то от 6.в) за нейното отрезово уравнение имаме

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} = 1.$$

Ясно е, че ако правата g съвпада с някоя от координатните оси, тя няма да има отрезово уравнение.

1.4.5 Нормални уравнения на права

Нека K е **ортонормирана** координатна система в α и правата g е зададена с общото си уравнение (1.8). Тогава всяко от уравненията

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{Ax + By + C}{-\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \tag{1.20}$$

ще наричаме **нормално уравнение на правата** g **относно** K.

Да отбележим, че векторите

$$\overrightarrow{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) \quad и \quad -\overrightarrow{n}\left(-\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, -\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right),$$

чиито координати съответстват на коефициентите пред x и y в (1.20) са единични и перпендикулярни вектори на g.

Двете нормални уравнения (1.20) на правата g са съвършено равноправни.

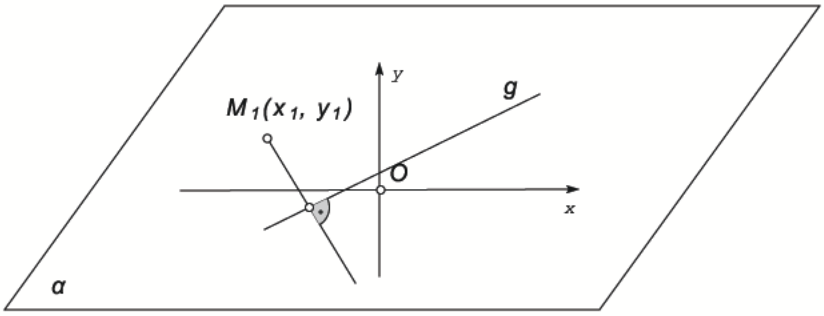
Обаче в случая, когато g **не минава** през началото O на K, за конкретност можем да приемем да работим с нормалното уравнение

$$\frac{Ax + By + C}{-sgnC\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \tag{1.21}$$

което съответствува на нормалния единичен вектор $\overrightarrow{n} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OO_0}$, където O_0 е ортогоналната проекция на началото O върху g.

1.4.6 Разстояние от точка до права

Нека $M_1(x_1, y_1)$ е произволна точка в α, която не лежи на правата g, зададена с нормалното си уравнение (1.21).



Фигура 1.8.

Тогава **ориентираното разстояние** δ **от точката** M_1 **до правата** g (Фигура 1.8.) (при дадения нормален вектор $\overrightarrow{n}$, който сочи към полуравнината, несъдържаща началото O) се пресмята по формулата

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{-sgnC\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{1.22}$$

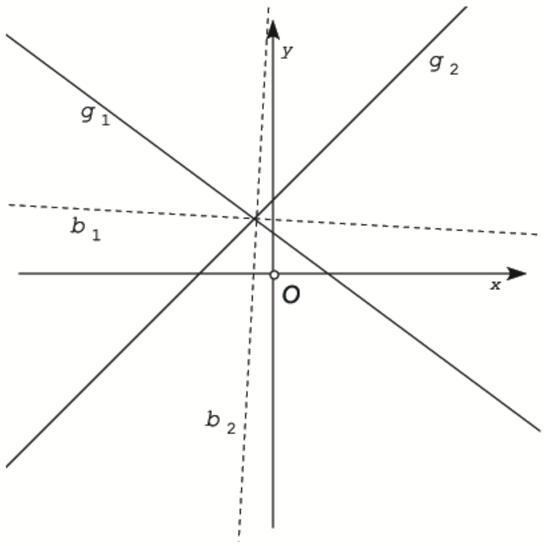
а за обикновеното **разстояние** $d = |\delta|$ имаме

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

1.4.7 Уравнения на ъглополовящите

Нека g_1 и g_2 са две пресекателни прави, определени съответно с общите уравнения

$$g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \;\text{ и }\; g_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0, \tag{1.23}$$



Фигура 1.9.

относно ортонормираната координатна система K. Тогава двете ъглополовящи b_1 и b_2 на ъглите, образувани от g_1 и g_2 (Фигура 1.9.) имат уравнения

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0. \tag{1.24}$$

1.4.8 Взаимно положение на две прави

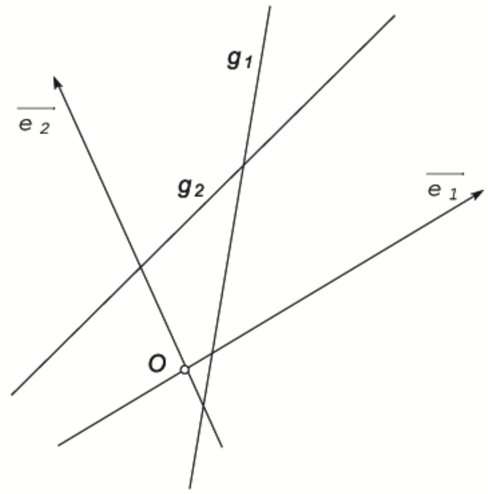
Нека g_1 и g_2 са две прави в равнината α, които имат относно афинната координатна система K съответно общи уравнения (1.23). Тогава:

10)

10.а) Правите g_1 и g_2 се пресичат (Фигура 1.10.) тогава и само тогава, когато

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

10.б) Правите g_1 и g_2 съвпадат тогава и само тогава, когато същес-



Фигура 1.10.

твува реално число $\rho \neq 0$, такова че

$$A_2 = \rho A_1, \quad B_2 = \rho B_1, \quad C_2 = \rho C_1.$$

10.в) Правите g_1 и g_2 са различни и успоредни (Фигура 1.11) тогава и само тогава, когато съществува реално число $\rho \neq 0$, такова, че

$$A_2 = \rho A_1, \quad B_2 = \rho B_1, \quad C_2 \neq \rho C_1.$$

В случай, че правите g_1 и g_2 имат съответно декартови уравнения

$$g_1 : y = k_1 x + b_1 \quad \text{и} \quad g_2 : y = k_2 x + b_2, \tag{1.25}$$

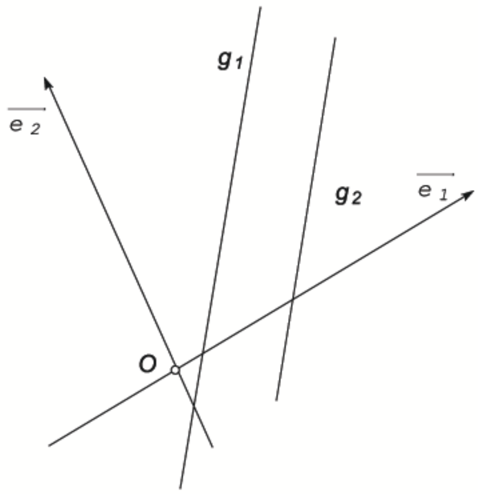
то 10) приема вида

11)

11.а) Правите g_1 и g_2 се пресичат тогава и само тогава, когато $k_1 \neq k_2$.

11.б) Правите g_1 и g_2 съвпадат тогава и само тогава, когато $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$.

11.в) Правите g_1 и g_2 са различни и успоредни тогава и само тогава, когато $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$.



Фигура 1.11.

12)

12.а) Правите g_1 и g_2, определени с (1.23), са точно тогава перпендикулярни, когато

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

12.б) Правите g_1 и g_2, определени с (1.25), са точно тогава перпендикулярни, когато

$$k_1k_2 = -1.$$

1.4.9 Сноп прави

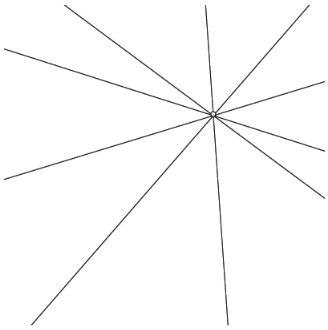
Множеството от всички прави в равнината α, които минават през дадена точка (Фигура 1.12.), се нарича **сноп прави с център дадената точка**.

Нека g_1 и g_2 са две различни прави от сноп прави, зададени с уравненията

$$g_1 : l_1(x, y) = 0, \quad g_2 : l_2(x, y) = 0,$$

където $l_i(x, y) = A_ix + B_iy + C_i$, $i = 1, 2$, са полиномите на правите. Тогава

13)



Фигура 1.12.

13.а) Ако поне едно от числата λ_1 и λ_2 е различно от нула, уравнението

$$\lambda_1 l_1(x,y) + \lambda_2 l_2(x,y) = 0 \tag{1.26}$$

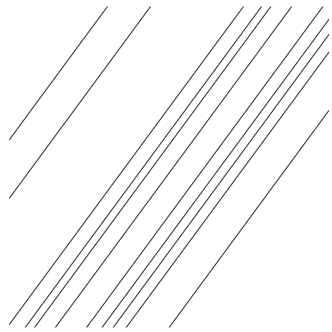
е уравнение на права от снопа.

13.б) За всяка права от снопа съществува ненулева двойка числа (λ_1, λ_2), такава че (1.26) е уравнение на правата.

Ако правите g_1 и g_2 са успоредни, с уравнението (1.26), при условието $\lambda_1 + \rho\lambda_2 \neq 0$, $\rho \neq 0$, се описва множеството на всички успоредни или съвпадащи с тях прави (Фигура 1.13.). Това множество се нарича **сноп успоредни прави**.

1.4.10 Ъгъл между две прави

Нека сега координатната система K в α е **ортонормирана** и g_1 и g_2 са две пресекателни прави, зададени относно K с общите си уравнения (1.23). Когато g_1 и g_2 не са перпендикулярни, те определят една двойка равни връхни остри ъгли и една двойка равни връхни тъпи ъгли. Ако означим мярката на първите с φ, вторите ще имат мярка $\pi - \varphi$. Тъй като векторите $\overrightarrow{p_1}(-B_1, A_1)$ и $\overrightarrow{p_2}(-B_2, A_2)$ са колинеарни съответно с g_1 и g_2, то $\sphericalangle(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}) = \varphi$ или $\sphericalangle(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}) = \pi - \varphi$ в зависимост от това дали $\overrightarrow{p_1}\overrightarrow{p_2} > 0$ или $\overrightarrow{p_1}\overrightarrow{p_2} < 0$. От известните формули за ъгъл между два вектора следват



Фигура 1.13.

равенствата

$$(1.27)\qquad \begin{aligned} \cos\sphericalangle(\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2}) &= \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}},\\ \sin\sphericalangle(\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2}) &= \frac{|A_1B_2+A_2B_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}, \end{aligned}$$

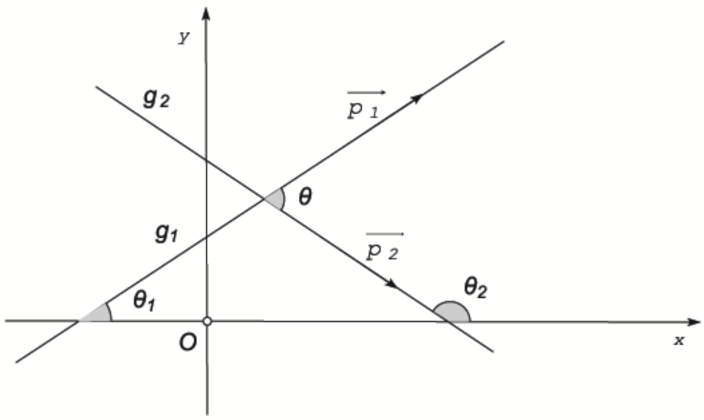
които очевидно са в сила и когато двете прави са перпендикулярни, т.е. когато $\sphericalangle(\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2}) = \dfrac{\pi}{2}$.

В случай, че равнината α е ориентирана посредством K (Фигура 1.14.) и g_1, g_2 имат съответно ъглови коефициенти $k_1 = \mathrm{tg}\ \theta_1$, $k_2 = \mathrm{tg}\ \theta_2$, където $\theta_1 = \sphericalangle(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{p_1})$, $\theta_2 = \sphericalangle(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{p_2})$, то за мярката θ на $\sphericalangle\overrightarrow{p_1p_2}$ имаме

$$(1.28)\qquad \mathrm{tg}\ \theta = \mathrm{tg}\ (\theta_2-\theta_1) = \frac{\mathrm{tg}\ \theta_2 - \mathrm{tg}\ \theta_1}{1+\mathrm{tg}\ \theta_1 \mathrm{tg}\ \theta_2} = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

1.5 Задачи

Забележка 1.5.1 До края на параграфа, ако не е казано друго, ще считаме, че координатната система K е **ортонормирана**.



Фигура 1.14.

Задача 1.5.1 Относно афинната координатна система K са дадени точките $M_1(1,1)$ и $M_2(2,-3)$. За правата $g = M_1M_2$ да се напишат:

а) параметрични уравнения;

б) общо уравнение;

в) декартовото уравнение;

г) отрезовото уравнение;

д) нормалните уравнения.

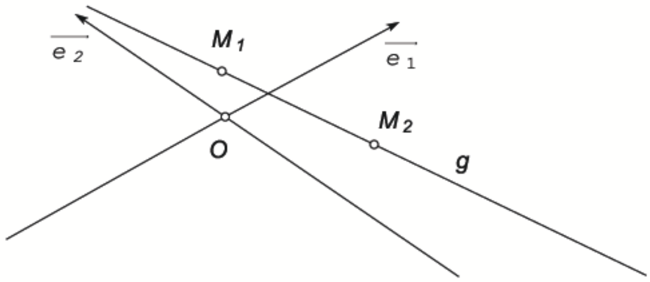
Решение. а) Правата $g = M_1M_2$ е определена с точката $M_1(1,1)$ и вектора $\overrightarrow{p}(1,-4)$. Тогава, като заместим в (1.3) $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $\lambda = 1$, $\mu = -4$, получаваме, че правата g има параметрични уравнения (Фигура 1.15.)

$$g : \begin{cases} x = 1 + s, \\ y = 1 - 4s, \end{cases} \qquad -\infty < s < +\infty.$$

б) **I начин.** Да предположим, че правата g има общо уравнение (1.8). Тъй като точките M_1 и M_2 лежат на g, координатите им удовлетворяват уравнението (1.8) на g, т.е.

$$A + B + C = 0, \quad 2A - 3B + C = 0.$$

От горната система определяме $A = 4\rho$, $B = \rho$, $C = -5\rho$, където $\rho \neq 0$ е произволен параметър. Като заместим тези стойности в (1.8) и



Фигура 1.15.

съкратим на ρ, получаваме, че g има общо уравнение

$$4x + y - 5 = 0. \tag{1.29}$$

II начин. Заместваме координатите на M_1 и M_2 в (1.16) (или (1.14), или (1.15)). Имаме

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

и като развием детерминантата и направим приведение ще получим точно (1.29).

в) **I начин.** Нека g има декартово уравнение (1.13). От $M_1 \in g$ и $M_2 \in g$ следват равенствата

$$1 = k + b, \quad -3 = 2k + b,$$

от които намираме $k = -4$, $b = 5$. Заместваме тези стойности в (1.13) и получаваме

$$y = -4x + 5. \tag{1.30}$$

II начин. Декартовото уравнение (1.30) можем да получим и като изразим y от общото уравнение (1.29).

г) Записваме (1.29) във вида

$$\frac{x}{\frac{5}{4}} + \frac{y}{5} = 1$$

и това е търсеното отрезово уравнение на g.

д) Тъй като общото уравнение на g е (1.29), то съгласно 9) двете ѝ нормални уравнения са

$$\frac{4x+y-5}{\sqrt{17}} = 0 \quad и \quad \frac{4x+y-5}{-\sqrt{17}} = 0.$$

Задача 1.5.2 Дадени са точките $L(1,-1)$, $M(-2,2)$ и $N(2,3)$. Да се намери уравнение на правата g, която минава през точката L и е:

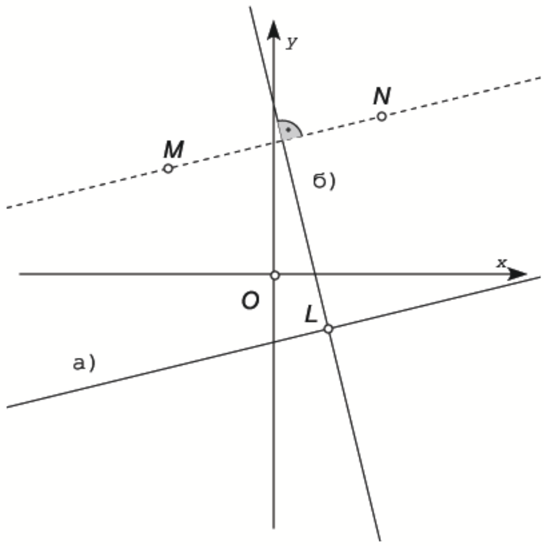
а) успоредна на правата MN;

б) перпендикулярна на правата MN.

Решение. а) **I начин.** Тъй като $g \parallel MN$, векторът $\overrightarrow{MN}(4,1)$ е колинеарен на g (Фигура 1.16.). Тогава съгласно 3), правата g има общо уравнение от вида

$$x - 4y + C = 0.$$

Изразяваме, че правата g минава през точката L и получаваме $C = -5$. Следователно $g : x - 4y - 5 = 0$.



Фигура 1.16.

II начин. Понеже $g \parallel MN$, съгласно 11.в), двете прави имат равни ъглови коефициенти, т.е.

$$k_g = k_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{3-2}{2+2} = \frac{1}{4} \qquad (\text{Виж}(1.17)).$$

Тогава като използваме (1.12), написваме уравнението на правата g, която минава през точката $L(1,-1)$ и има ъглов коефициент $k_g = \dfrac{1}{4}$. Имаме

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x-1), \quad \text{т.е.} \quad x - 4y - 5 = 0.$$

б) **I начин.** От $g \perp MN$ следва, че векторът $\overrightarrow{MN}(4,1)$ е перпендикулярен на g. Тогава съгласно 7), правата g има общо уравнение от вида

$$4x + y + C = 0.$$

От условието точката $L(1,-1)$ да лежи върху g, намираме $C = -3$ и следователно $g : 4x + y - 3 = 0$.

II начин. Тъй като $g \perp MN$, то съгласно 12.б) имаме

$$k_g k_{MN} = -1.$$

Но $k_{MN} = \dfrac{1}{4}$ и следователно $k_g = -4$. Тогава

$$y + 1 = -4(x-1), \quad \textit{т.е.} \quad 4x + y - 3 = 0.$$

Задача 1.5.3 Намерете уравнение на правата g, която минава през точката $M(1,1)$ и е:

а) успоредна на правата $h : 2x + 3y - 12 = 0$;

б) перпендикулярна на правата $h : x - 2y + 3 = 0$.

Отговор. а) $g : 2x + 3y - 5 = 0$; б) $g : 2x + y - 3 = 0$.

Задача 1.5.4 Да се напишат уравнения на страните на $\triangle ABC$, ако $M_1(2,1)$, $M_2(5,3)$ и $M_3(3,-4)$ са средите съответно на BC, CA и AB. (Координатната система е афинна).

Упътване. Използвайте, че например AB **z** M_3, $AB \parallel M_1M_2$

Отговор. $AB : 2x - 3y - 18 = 0$, $BC : 7x - 2y - 12 = 0$, $CA : 5x + y - 28 = 0$.

Задача 1.5.5 Точките $A(1,-1)$, $B(-2,1)$ и $C(3,5)$ са върхове на $\triangle ABC$. Да се намери уравнение на перпендикуляра h, спуснат от върха A към медианата през върха B.

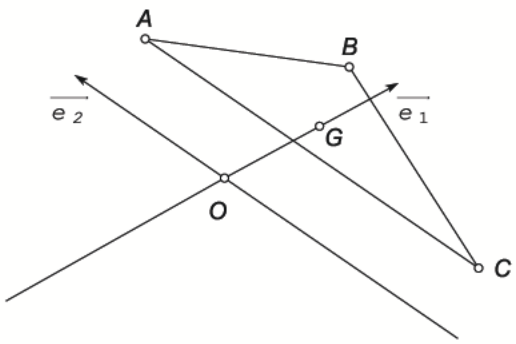
Отговор. $h : 4x + y - 3 = 0$.

Задача 1.5.6 Спрямо афинна координатна система са дадени точките $A(3,5)$ и $B(6,1)$, които са върхове на $\triangle ABC$, а $G(4,0)$ е пресечната точка на медианите му. Да се напишат уравнения на страните на триъгълника.

Решение. Нека върхът C има координати (x_C, y_C) (Фигура 1.17.). Тъй като координатите на медицентъра G са средно аритметично от координатите на върховете A, B и C, то в сила са равенствата

$$\frac{3+6+x_C}{3} = 4, \quad \frac{5+1+y_C}{3} = 0,$$

от които следва, че $x_C = 3$, $y_C = -6$. Тогава, както постъпихме в задача 1.5.1, намираме $AB : 4x+3y-27=0$, $BC : 7x-3y-39=0$, $CA : x-3=0$.



Фигура 1.17.

Задача 1.5.7 Да се намерят координатите на върха C на $\triangle ABC$, ако $A(-6,2)$, $B(2,-2)$, а $H(1,2)$ е ортоцентърът му.

Упътване. Върхът C е пресечна точка на правата $a : \begin{cases} a \ \mathbf{z} \ B, \\ a \perp AH \end{cases}$ с правата $b : \begin{cases} b \ \mathbf{z} \ A, \\ b \perp BH. \end{cases}$

Отговор. $C(2,4)$.

Задача 1.5.8 Да се определят ъглите между правите g_1 и g_2 ако:

а) $g_1 : 5x - y + 7 = 0$, $g_2 : 3x + 2y = 0$;

б) $g_1 : 2x + y - 1 = 0$, $g_2 : x - y + 2 = 0$;

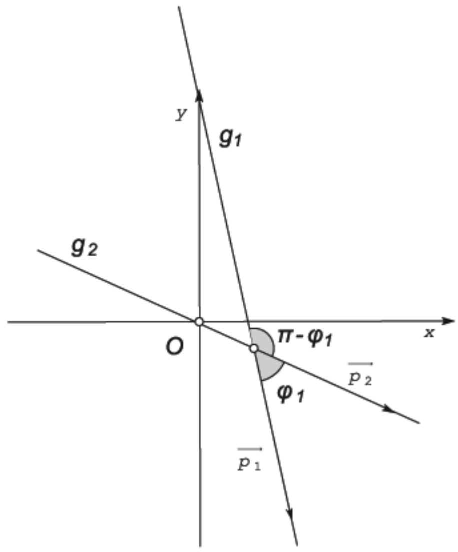
в) $g_1 : 3x - 2y + 7 = 0$, $g_2 : 2x + 3y - 3 = 0$;

г) $g_1 : x - 2y - 4 = 0$, $g_2 : 2x - 4y + 3 = 0$.

Решение. а) Имаме $\overrightarrow{p_1}(1,5) \parallel g_1$, $\overrightarrow{p_2}(-2,3) \parallel g_2$ (Фигура 1.18.) и като използваме (1.27), получаваме

$$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}) = \frac{5.3 + (-1).2}{\sqrt{25+1}\sqrt{9+4}} = \frac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и следователно правите g_1 и g_2 сключват ъгли $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi_2 = \pi - \varphi_1 = \dfrac{3\pi}{4}$.



Фигура 1.18.

Отговор. б) $\varphi_1 = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$; в) $\varphi_1 = \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$;
г) $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$.

Задача 1.5.9 Да се намери уравнение на права g_2, която минава през точката M и сключва ъгъл φ с правата g_1, ако:

а) $M(2,1)$, $g_1 : 2x + 3y + 4 = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$;

б) $M(1,3)$, $g_1 : 3x - y = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$;

в) $M\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -3\right)$, $g_1 : x = \sqrt{3} + t, y = -2 + \sqrt{3}t$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. а) **I начин.** Тъй като правата g_2 минава през точката $M(2,1)$, то съгласно (1.11), тя има уравнение от вида (Фигура 1.19.)

$$A(x-2)+B(y-1)=0. \tag{1.31}$$

От друга страна, правата g_2 сключва ъгъл $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ с дадената права g_1 и съгласно (1.27), в сила е равенството

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2A+3B}{\sqrt{13}\sqrt{A^2+B^2}},$$

което преобразуваме до $5A^2-24AB-5B^2=0$. В последното уравнение полагаме $\dfrac{A}{B}=q$ и получаваме квадратното уравнение $5q^2-24q-5=0$, което има корени $q'=5$ и $q''=-\dfrac{1}{5}$. Оттук намираме

$$A'=5\rho', B'=\rho', \rho'\neq 0 \ \text{ и } \ A''=\rho'', B''=-5\rho'', \rho''\neq 0. \tag{1.32}$$

Но съгласно 4), общото уравнение на всяка права е определено с точност до ненулев множител. От (1.31) и (1.32) получаваме, че има две прави, които удовлетворяват условията на задачата:

$$g_2' : 5x+y-11=0 \ \ \textit{и} \ \ g_2'' : x-5y+3=0.$$

II начин. Дадената права g_1 има ъглов коефициент $k_1=-\dfrac{2}{3}$. Да означим с k_2 ъгловия коефициент на търсената права g_2, а с θ – мярката на ориентирания ъгъл $\sphericalangle\overrightarrow{g_1g_2}$. Тогава имаме, че

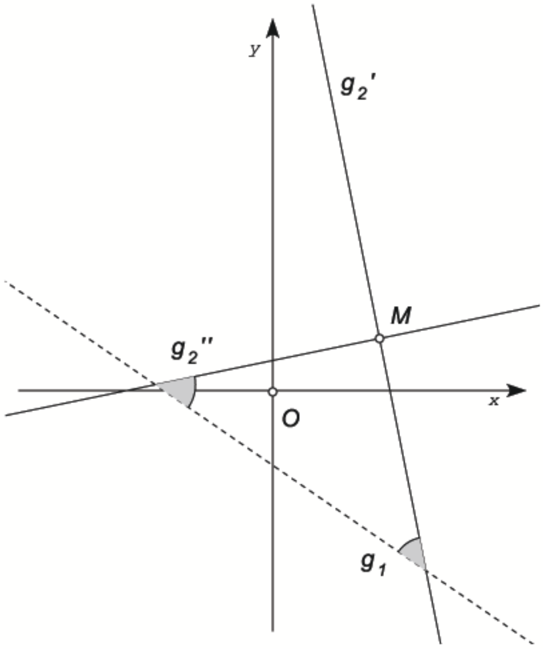
$$\theta = \pm\frac{\pi}{4} + m.2\pi, \quad m=0,\pm1,\pm2,\dots$$

и от (1.28) получаваме

$$\frac{k_2+\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{2}{3}k_2} = \pm 1. \tag{1.33}$$

От (1.33) намираме $k_2'=-5$, $k_2''=\dfrac{1}{5}$ и следователно

$$g_2' : y-1=(x-2), \ \text{т.е. } 5x+y-11=0, \ \ g_2'' : y-1=\frac{1}{5}(x-2), \ \text{т.е. } x-5y+3=0.$$



Фигура 1.19.

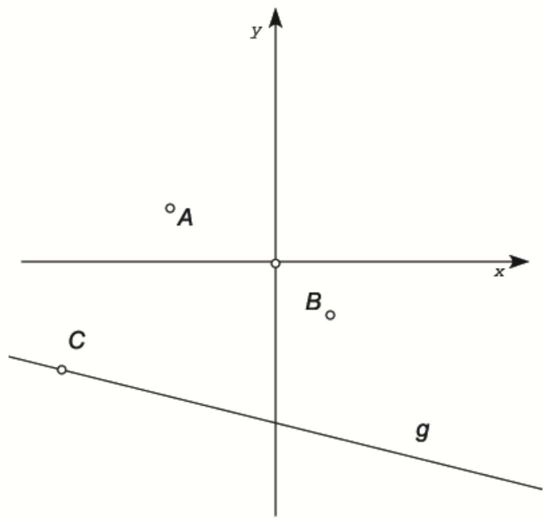
Отговор. б) $g_2' : 2x + y - 5 = 0$, $g_2'' : x - 2y + 5 = 0$;
в) $g_2' : y + 3 = 0$, $g_2'' : \sqrt{3}x + y + 1 = 0$.

Задача 1.5.10 Дадени са точките $A(-2, 1)$, $B(1, -1)$, $C(-4, -2)$ и правата $g : 5x - 12y - 4 = 0$. Да се определят:
а) ориентираните разстояния от дадените точки до правата g;
б) положението на началото O и точките A и B относно g.

Решение. а) Тъй като правата g не минава през началото O, можем да използваме формулата (1.22) за ориентирано разстояние от точка до права (Фигура 1.20.). Намираме:

$$\delta_A = \frac{5.(-2) - 12.1 - 4}{\sqrt{25 + 144}} = -2.$$

Аналогично получаваме $\delta_B = 1$, $\delta_C = 0$.



Фигура 1.20.

б) От $\delta_O < 0$ и $\delta_A < 0$ следва, че точката A и началото O са от една и съща стана на правата g, а от $\delta_B > 0$ – B и O са от различни страни на g.

Задача 1.5.11 Даден е $\triangle ABC$. Да се пресметнат дължините на височините му, ако:

а) $A(3,6)$, $B(-1,3)$, $C(2,-1)$;

б) $A(3,-4)$, $B(-4,-2)$, $C(1,3)$.

Отговор. а) $|AH_1| = 5$, $|BH_2| = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$, $|CH_3| = 5$;

б) $|AH_1| = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$, $|BH_2| = \dfrac{45}{\sqrt{53}}$, $|CH_3| = \dfrac{45}{\sqrt{53}}$.

Задача 1.5.12 Да се пресметне дължината d на перпендикуляра, спуснат от върха B към медианата през върха C в $\triangle ABC$, ако $A(1,2)$, $B(3,7)$ и $C(5,-13)$.

Отговор. $d = \dfrac{25}{\sqrt{34}}$.

Задача 1.5.13 Да се намери уравнение на права h, която е успоредна на правата $g : 12x + 5y - 52 = 0$ и се намира на разстояние $d = 2$ от нея.

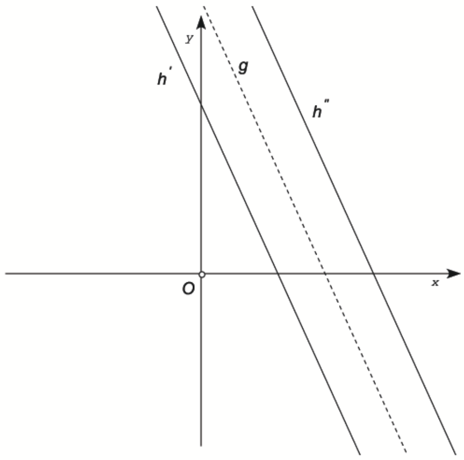
Решение. Всички прави, които са успоредни на дадената права g, образуват сноп успоредни прави с уравнение (Фигура 1.21.)

$$12x + 5y + C = 0. \tag{1.34}$$

На този сноп принадлежи и правата h, която се намира на разстояние $d = 2$ от g. Тогава, ако $M_0(x_0, y_0)$ е произволна точка от правата g, то тя се намира на разстояние $d = 2$ от h и следователно

$$\frac{|12x_0 + 5y_0 + C|}{13} = 2. \tag{1.35}$$

Като вземем предвид, че $M_0(x_0, y_0)$ е точка от правата g, то имаме, че



Фигура 1.21.

$12x_0 + 5y_0 = 52$ и като заместим в (1.35), получаваме $C' = -26$ и $C'' = -78$. С тези стойности от (1.34) получаваме уравненията на двете прави:

$$h' : 12x + 5y - 26 = 0 \quad \text{и} \quad h'' : 12x + 5y - 78 = 0.$$

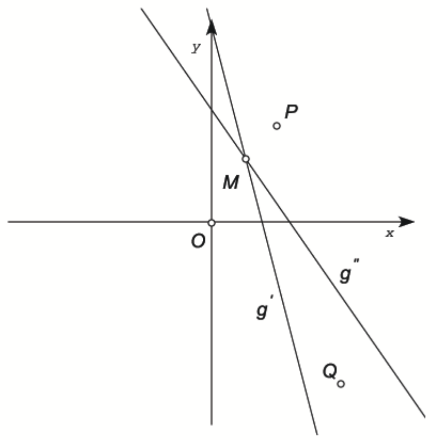
Задача 1.5.14 Да се намери уравнение на права h, която е успоредна на правата $g : 15x - 8y + 2 = 0$ и се намира на разстояние $d = 3$ от нея.

Отговор. $h' : 15x - 8y - 19 = 0, \quad h'' : 15x - 8y + 53 = 0.$

Задача 1.5.15 Да се намери уравнение на права g, която минава през точката $M(1, 2)$ и се намира на равни разстояния от точките $P(2, 3)$ и $Q(4, -5)$.

Решение. Съгласно (1.11) правите, минаващи през $M(1,2)$, имат уравнения от вида (Фигура 1.22.)

$$A(x-1)+B(y-2)=0. \tag{1.36}$$



Фигура 1.22.

От тези прави отделяме онези, които се намират на равни разстояния от точките $P(2,3)$ и $Q(4,-5)$. За тях имаме

$$\frac{|A(2-1)+B(3-2)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|A(4-1)+B(-5-2)|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

и оттук намираме $A'=4$, $B'=1$ и $A''=3$, $B''=2$. Заместваме в (1.36) и получаваме двете прави

$$g':4x+y-6=0 \quad \text{и} \quad g'':3x+2y-7=0.$$

Задача 1.5.16 Да се намери уравнение на права g, която минава през точката M и се намира на разстояние d от точката P, ако:
а) $M(-1,2)$, $d=5$, $P(6,1)$;
б) $M(2,-2)$, $d=3$, $P(5,2)$;
в) $M(-4,3)$, $d=5$, $P(0,0)$.

Отговор. а) $g':3x-4y+11=0$, $g'':4x+3y-2=0$;
б) $g':7x-24y-62=0$, $g'':x-2=0$;
в) $g:4x-3y+25=0$.

Задача 1.5.17 Да се намери уравнение на права g, от която точките $P(1,1)$ и $Q(2,3)$ се намират съответно на разстояние $d_1 = 2$ и $d_2 = 4$.

Отговор. $g' : 4x + 3y + 3 = 0, \quad g'' : y + 1 = 0.$

Задача 1.5.18 Да се намери уравнение на права g, която е перпендикулярна на правата $h : 2x + 6y - 3 = 0$ и е на разстояние $d = \sqrt{10}$ от точката $P(5,4)$.

Упътване. Всички прави, които са перпендикулярни на правата $h : 2x+6y-3 = 0$, образуват сноп успоредни прави с уравнение $3x-y+C = 0$. От този сноп отделете онези прави, които се намират на разстояние $d = \sqrt{10}$ от точката $P(5,4)$.

Отговор. $g' : 3x - y - 21 = 0, \quad g'' : 3x - y - 1 = 0.$

Задача 1.5.19 Да се намери уравнение на права g, която минава през пресечната точка на правите g_1 и g_2 и се намира на разстояние $d = 5$ от точката P, ако:

а) $g_1 : x + 2y - 11 = 0,\ g_2 : 2x - y - 2 = 0,\ P(0,0);$
б) $g_1 : 7x + y - 58 = 0,\ g_2 : x - 7y + 6 = 0,\ P(1,1);$
в) $g_1 : 3x + y - 5 = 0,\ g_2 : x - 2y + 10 = 0,\ P(-1,-2).$

Решение. в) **I начин.** Дадените прави g_1 и g_2 се пресичат в точката $Q(0,5)$ (Фигура 1.23.). Правите, минаващи през точката Q, имат уравнение от вида

$$Ax + B(y - 5) = 0.$$

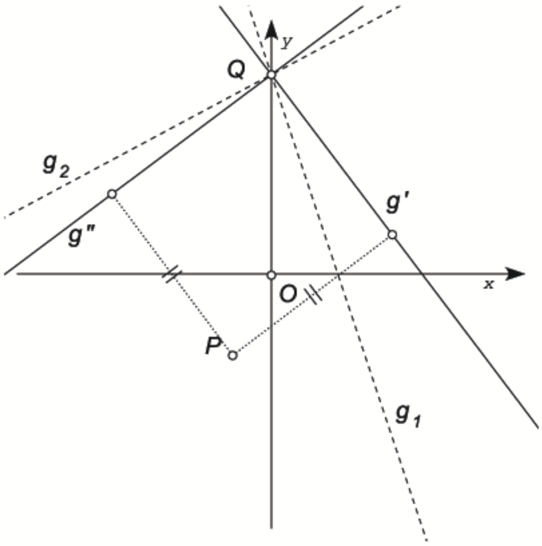
От тези прави отделяме онези, които се намират на разстояние $d = 5$ от точката $P(-1,-2)$. За тях получаваме условието

$$\frac{|-A - 7B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 5,$$

от което намираме $A' = 4,\ B' = 3$ и $A'' = 3,\ B'' = -4$. Следователно има две прави $g' : 4x + 3y - 15 = 0, \quad g'' : 3x - 4y + 20 = 0$, които удовлетворяват условието на задачата.

II начин. Търсената права g принадлежи на снопа прави, определени от g_1 и g_2 и съгласно 13.б) има уравнение от вида

$$\lambda_1(3x + y - 5) + \lambda_2(x - 2y + 10) = 0, \tag{1.37}$$



Фигура 1.23.

където λ_1 и λ_2 е ненулева двойка реални числа. Определяме ги от изискването g да отстои на разстояние $d = 5$ от точката $P(-1,-2)$, т.е.

$$\frac{|-10\lambda_1 + 13\lambda_2|}{\sqrt{(3\lambda_1+\lambda_2)^2 + (\lambda_1 - 2\lambda_2)^2}} = 5.$$

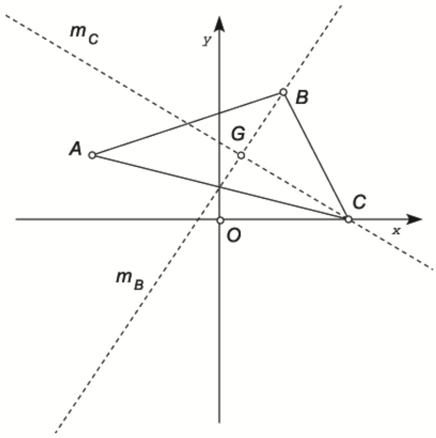
От последното равенство намираме $\lambda_1' = 5$, $\lambda_2' = -11$ и $\lambda_1'' = 2$, $\lambda_2'' = 15$. С тези стойности от (1.37) получаваме отново $g' : 4x + 3y - 15 = 0$ и $g'' : 3x - 4y + 20 = 0$.

Отговор. а) $g : 3x + 4y - 25 = 0$;
б) $g' : 4x - 3y - 26 = 0$, $g'' : 3x + 4y - 32 = 0$.

Задача 1.5.20 Правите $m_B : 3x - 2y + 2 = 0$ и $m_C : 3x + 5y - 12 = 0$ са медиани на $\triangle ABC$ съответно през върховете му B и C. Да се намери лицето S на триъгълника, ако $A(-4, 2)$.

Решение. Медианите m_B и m_C се пресичат в медицентъра $G(x_0, y_0)$ на триъгълника (Фигура 1.24.). От системата

$$\left| \begin{array}{l} 3x_0 - 2y_0 + 2 = 0 \\ 3x_0 + 5y_0 - 12 = 0 \end{array} \right.$$



Фигура 1.24.

намираме $x_0 = \dfrac{2}{3}$, $y_0 = 2$. Координатите (x_B, y_B) и (x_C, y_C), съответно на B и C, удовлетворяват уравненията

$$\begin{aligned} 3x_B - 2y_B + 2 = 0, \\ 3x_C + 5y_C - 12 = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}(-4 + x_B + x_C) = \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{3}(2 + y_B + y_C) = 2.$$

От тях получаваме $x_B = 2$, $y_B = 4$, $x_C = 4$, $y_C = 0$. За лицето S на $\triangle ABC$ получаваме

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = 14.$$

Задача 1.5.21 Правите $m_A : 4x + y - 6 = 0$, $m_B : 2x + y - 2 = 0$ и $m_C : x - 2 = 0$ са медианите на $\triangle ABC$ съответно през върховете A, B и C. Да се намерят координатите на върховете на триъгълника, ако се знае, че ориентираното му лице е равно на -3.

Отговор. $A'(3, -6)$, $B'(1, 0)$, $C'(2, 0)$; $A''(1, 2)$, $B''(3, -4)$, $C''(2, -4)$.

Задача 1.5.22 Спрямо афинна координатна система са дадени страните $AB : 7x + 4y - 1 = 0$ и $BC : 5x + 2y - 5 = 0$ на $\triangle ABC$, чийто медиани се пресичат в точката $M(1, -1)$. Да се намерят координатите на върховете на триъгълника.

Отговор. $A(-1, 2)$, $B(3, -5)$, $C(1, 0)$.

Задача 1.5.23 Точката $A(4, -1)$ и правите $h : 2x - 3y + 12 = 0$ и $m : 2x + 3y = 0$ са връх, височина и медиана, които минават през един и същи връх на триъгълник. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника.

Упътване. Най-напред покажете, че правите h и m не минават през A.

Отговор. $3x + 2y - 10 = 0$, $3x + 7y - 5 = 0$, $9x + 11y + 5 = 0$.

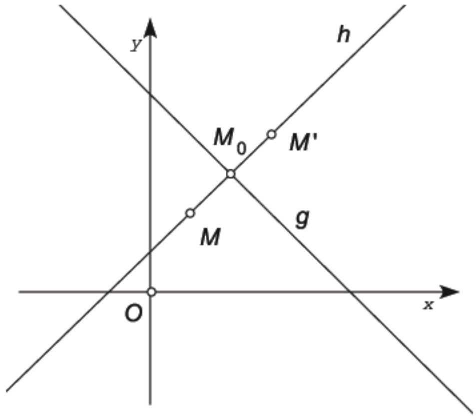
Задача 1.5.24 Точката A и правите h и m са съответно връх, височина и медиана, които минават през различни върхове на триъгълник. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако:
а) $A(8, -3)$, $h : 5x - 6y + 26 = 0$, $m : x + 2y - 16 = 0$;
б) $A(2, 7)$, $h : 3x + y + 11 = 0$, $m : x + 2y + 7 = 0$.

Отговор. а) $x - 5y + 47 = 0$, $x - 8 = 0$, $6x + 5y - 33 = 0$;
б) $x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$.

Задача 1.5.25 Да се намери точката M', ортогонално симетрична на точката M относно правата g, ако:
а) $M(1, 2)$, $g : x + y - 5 = 0$;
б) $M(8, -9)$, $g : x + 2y + 5 = 0$;
в) $M(2, -6)$, $g : 4x - 5y + 3 = 0$.

Решение. а) **I начин.** Търсената точка M' лежи на перпендикуляра $h : x = 1+s, \;\; y = 2+s$ (Фигура 1.25.) през M към правата g и следователно координатите ѝ (x', y') се получават за някаква стойност s' на параметъра s на h, т.е. $x' = 1 + s', \;\; y' = 2 + s'$. От друга страна, средата $M_0(x_0, y_0)$ на отсечката MM' лежи върху g, откъдето следва, че координатите ѝ $x_0 = \frac{1}{2}(2 + s')$, $y_0 = \frac{1}{2}(4 + s')$ удовлетворяват уравнението на g, т.е. $\frac{1}{2}(2 + s') + \frac{1}{2}(4 + s') - 5 = 0$. Оттук намираме $s' = 2$ и следователно $M'(3, 4)$.

II начин. Правата $h : x - y + 1 = 0$, която минава през точката M и е перпендикулярна на дадената права g, пресича g в точката $M_0(2, 3)$.



Фигура 1.25.

Но точката M_0 е средата на отсечката MM' и следователно координатите (x', y') на M' намираме, като от удвоените координати на M_0 извадим координатите на M, т.е.

$$x' = 2.2 - 1 = 3, \quad y' = 2.3 - 2 = 4.$$

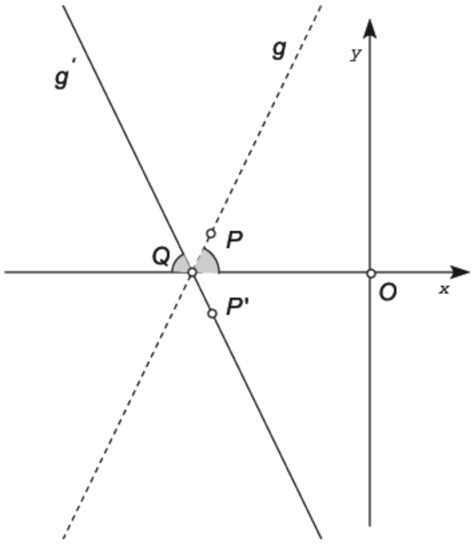
Отговор. б) $M'(10, -5)$; в) $M'(-6, 4)$.

Задача 1.5.26 Светлинен лъч $l^{\rightarrow}$ е пуснат по правата $g : 2x - y + 9 = 0$ и се отразява от абсцисната ос Ox. Да се намери уравнение на правата g' на отразения лъч $l'^{\rightarrow}$.

Решение. Върху правата g' на отразения лъч $l'^{\rightarrow}$ лежат ортогонално симетричните точки на точките на правата g на падащия лъч $l^{\rightarrow}$ относно отразяващата права (Фигура 1.26.). Избираме произволна точка от правата g, например $P(-4, 1)$. Намираме ортогонално симетричната ѝ точка $P'(-4, -1)$ относно абсцисната ос Ox. От друга страна, правата g пресича оста Ox в точката $Q(-\frac{9}{2}, 0)$. Правата g' е определена от точките си P' и Q и следователно има уравнение $2x + y + 9 = 0$.

Задача 1.5.27 Светлинен лъч $l^{\rightarrow}$ е пуснат по правата g и се отразява от правата m. Да се намери уравнение на правата g' на отразения лъч $l'^{\rightarrow}$, ако:

а) $g : x - 2y + 5 = 0$, $m : 3x - 2y + 7 = 0$;
б) $g : 2x - 9y + 18 = 0$, $m : 8x - 2y - 3 = 0$.



Фигура 1.26.

Отговор. а) $g' : 29x - 2y + 33 = 0$; б) $g' : 6x + 7y - 21 = 0$.

Задача 1.5.28 Светлинен лъч $l^{\rightarrow}$, пуснат от точката P, след отразяването си от правата m, минава през точката Q. Да се намерят уравнения на правите g и g', съответно на падащия и на отразения лъч, ако:
а) $P(1,1)$, $m : x + y - 1 = 0$, $Q(2,3)$;
б) $P(2,3)$, $m : x + y + 1 = 0$, $Q(1,1)$;
в) $P(-3,4)$, $m : x - y = 0$, $Q(-2,5)$.

Упътване. Върху правата g' лежи ортогонално симетричната точка P' на P относно m, а върху g – ортогонално симетричната точка Q' на Q относно m.

Отговор. а) $g : 2x - 3y + 1 = 0$, $g' : 3x - 2y = 0$;
б) $g : 5x - 4y + 2 = 0$, $g' : 4x - 5y + 1 = 0$;
в) $g : 3x + 4y - 7 = 0$, $g' : 4x + 3y - 7 = 0$.

Задача 1.5.29 Светлинен лъч $l^{\rightarrow}$, пуснат от точката $P(1,1)$, след отразяването си от правата $m : x + y + 1 = 0$, става успореден на правата $n : 5x - 4y - 10 = 0$. Да се намерят уравнения на правите g и g', съответно на падащия и на отразения лъч.

Отговор. $g : 4x - 5y + 1 = 0$, $g' : 5x - 4y + 2 = 0$.

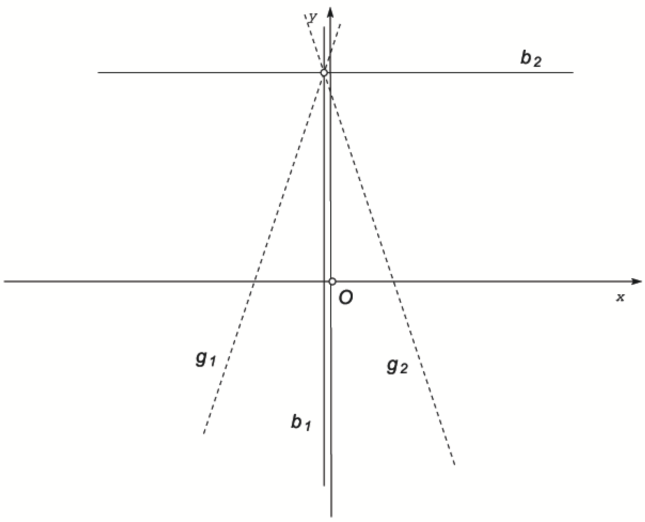
Задача 1.5.30 Да се намерят уравнения на ъглополовящите b_1 и b_2 ва двойките връхни ъгли, определени от правите g_1 и g_2, ако:

а) $g_1 : 3x - y + 5 = 0$, $g_2 : 3x + y - 4 = 0$;

б) $g_1 : x - y = 0$, $g_2 : x + y = 0$;

в) $g_1 : 4x + 3y = 0$, $g_2 : 3x - 4y = 0$.

Решение. а) За да намерим двойката ъглополовящи на ъглите меж-



Фигура 1.27.

ду правите g_1 и g_2 (Фигура 1.27.) ще използваме (1.24). Имаме

$$\frac{3x - y + 5}{\sqrt{10}} \pm \frac{3x + y - 4}{\sqrt{10}} = 0$$

и следователно $b_1 : 6x + 1 = 0$, $b_2 : 2y - 9 = 0$.

Отговор. б) $b_1 : x = 0$, $b_2 : y = 0$; в) $b_1 : 7x - y = 0$, $b_2 : x + 7y = 0$.

Задача 1.5.31 Да се определи ъглополовящата b на острите ъгли между правите g_1 и g_2, ако:

а) $g_1 : x + y + 1 = 0$, $g_2 : x - 7y - 3 = 0$;

б) $g_1 : x - 3y = 0$, $g_2 : 3x - y + 5 = 0$;

в) $g_1 : x + 2y - 7 = 0$, $g_2 : 4x + 2y + 3 = 0$;
г) $g_1 : 3x + 4y - 5 = 0$, $g_2 : 5x - 12y + 3 = 0$;
д) $g_1 : 3x + 4y - 3 = 0$, $g_2 : 5x + 12y + 6 = 0$;
е) $g_1 : 3x - 2y - 4 = 0$, $g_2 : 2x - 3y - 7 = 0$.

Решение. а) Векторите $\overrightarrow{p_1}(-1, 1)$ и $\overrightarrow{p_2}(7, 1)$ са колинеарни съответно с правите g_1 и g_2 и понеже

$$\overrightarrow{p_1}\overrightarrow{p_2} = -1.7 + 1.1 = -6 < 0,$$

то $\sphericalangle(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}) > \frac{\pi}{2}$. Тогава векторите $-\overrightarrow{p_1}(1, -1)$ и $\overrightarrow{p_2}(7, 1)$ определят остър ъгъл.

По-нататък намираме векторът

$$\left(-\frac{\overrightarrow{p_1}}{|\overrightarrow{p_1}|} + \frac{\overrightarrow{p_2}}{|\overrightarrow{p_2}|}\right)\left(\frac{12}{5\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)$$

е колинеарен с търсената ъглополовяща b. Вместо него, можем да изберем колинеарния му вектор $\overrightarrow{p}(3, -1)$, който има по-прости координати. Тогава търсената ъглополовяща b на острите ъгли е определена от пресечната точка $P(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ на правите g_1 и g_2 и векторът $\overrightarrow{p}(3, -1)$. Като заместим в (1.3), получаваме, че b има параметрични уравнения

$$b : \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} + 3s, \\ \\ y = -\dfrac{1}{2} - s. \end{cases}$$

От тях, изключвайки параметъра s, получаваме общото уравнение $x + 3y + 2 = 0$.

Отговор. б) $b : 4x - 4y + 5 = 0$; в) $b : 6x + 6y - 11 = 0$;
г) $b : 7x + 56y - 40 = 0$; д) $b : 64x + 112y - 9 = 0$; е) $b : 5x - 5y - 11 = 0$.

Задача 1.5.32 Да се определи ъглополовящата b на тъпите ъгли между правите g_1 и g_2, ако:
а) $g_1 : x - 3y + 5 = 0$, $g_2 : 3x - y + 15 = 0$;
б) $g_1 : x + 2y - 7 = 0$, $g_2 : 4x + 2y + 3 = 0$;
в) $g_1 : 3x + 4y - 7 = 0$, $g_2 : 12x - 5y - 11 = 0$.

Отговор. а) $b : x + y + 5 = 0$; б) $b : 6x - 6y + 11 = 0$;
в) $b : 21x - 77y + 36 = 0$.

Задача 1.5.33 Да се намери ъглополовящата b на онзи ъгъл определен от правите g_1 и g_2, в който лежи точката P, ако:
а) $g_1 : 3x + 4y - 11 = 0$, $g_2 : 4x + 3y - 6 = 0$, $P(1, 1)$;
б) $g_1 : 4x + 7y - 3 = 0$, $g_2 : 8x - y + 6 = 0$, $P(0, 0)$;
в) $g_1 : 3x - 2y + 1 = 0$, $g_2 : 2x - 3y - 1 = 0$, $P(-1, -1)$.

Решение. а) Ще използваме (1.22). Тъй като ориентираните разстояния

$$\delta_1 = \frac{3.1 + 4.1 - 11}{5} = -\frac{4}{5} \quad \textit{и} \quad \delta_2 = \frac{4.1 + 3.1 - 6}{5} = \frac{1}{5}$$

от точката P съответно до правите g_1 и g_2 са с различни знаци, ъглополовящата b на ъгъла, в който лежи точката P, има уравнение

$$\frac{3x + 4y - 11}{5} = -\frac{4x + 3y - 6}{5},$$

от което, след приведение, получаваме $7x + 7y - 17 = 0$.
Отговор. б) $b : 4x + 2y + 1 = 0$; в) $b : x - y = 0$.

Задача 1.5.34 Да се намери уравнение на ъглополовящата b на вътрешния ъгъл при върха A на $\triangle ABC$, ако $A(1, 2)$, $B(3, -4)$ и $C\left(\frac{14}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Упътване. I начин. Намерете средата M на отсечката BC и след това приложете метода от задача 1.5.33, за да получите уравнение на ъглополовящата на онзи ъгъл на правите AB и AC, в който се намира точката M.

II начин. Ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A на $\triangle ABC$ е определена от точката A и вектора $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}$.

Отговор. $b : 2x + y - 4 = 0$.

Задача 1.5.35 Да се намерят уравнения на ъглополовящите на вътрешните ъгли на триъгълника, страните на който имат уравнения $4x - 3y = 0$, $3x - 4y + 1 = 0$, $5x + 12y - 10 = 0$.

Отговор. $77x + 21y - 50 = 0$, $7x - 56y + 25 = 0$, $x - y = 0$.

Задача 1.5.36 Да се намери радиусът r на окръжността, вписана в $\triangle ABC$, ако $AB : 3x - 4y - 25 = 0$, $BC : 5x + 12y - 65 = 0$, $CA : 8x + 15y - 85 = 0$.

Отговор. $r = 5$.

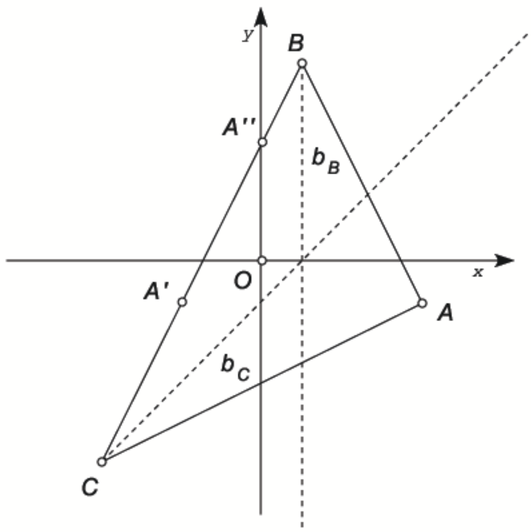
Задача 1.5.37 Точката A и правите b_B и b_C са връх и ъглополовящи на вътрешните ъгли съответно при върховете B и C на $\triangle ABC$. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако:

а) $A(4,-1)$, $b_B : x-1=0$, $b_C : x-y-1=0$;

б) $A(2,-4)$, $b_B : x+y-2=0$, $b_C : x-3y-6=0$;

в) $A(2,5)$, $b_B : 3x+4y-12=0$, $b_C : x-y-1=0$.

Решение. а) Ще използваме, че ортогонално симетричните точки A' и A'' на върха A (Фигура 1.28.) съответно относно ъглополовящите b_B и b_C лежат върху правата BC (Защо?). Както в задача 1.5.25, намираме $A'(-2,-1)$, $A''(0,3)$ и следователно $BC : 2x-y+3=0$. Тогава намираме върховете B и C като пресечни точки на правата BC съответно с правите b_B и b_C. Получаваме $B(1,5)$, $C(-4,-5)$ и оттук следва, че $AB : 2x+y-7=$



Фигура 1.28.

0, $CA : x-2y-6=0$.

Отговор. б) $AB : 7x+y-10=0$, $BC : x+7y-6=0$, $CA : x-y-6=0$;

в) $AB : 9x+2y-28=0$, $BC : 3x-46y+28=0$, $CA : 46x-3y-77=0$.

Задача 1.5.38 От $\triangle ABC$ са дадени страната $AB : 3x+4y=0$ и ъглополовящите $b_A : x+4=0$ и $b_B : 4x+7y+5=0$ на вътрешните ъгли съответно при върховете A и B. Да се намерят уравнения на страните BC и CA.

Отговор. $BC : 5x + 12y + 16 = 0$, $CA : 3x - 4y + 24 = 0$.

Задача 1.5.39 Да се намерят уравнения на страните на $\triangle ABC$, ако $A(2, -1)$, $B(1, 5)$, а $L(3, 0)$ е центърът на вписаната в триъгълника окръжност.

Отговор. $AB : 6x + y - 11 = 0$, $BC : 146x + 99y - 641 = 0$,
$CA : x + 6y + 4 = 0$.

Задача 1.5.40 Дадени са върхът A и правите h_B и b_B, които са съответно височината и ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха B на $\triangle ABC$. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако:
а) $A(2, 6)$, $h_B : x - 7y + 15 = 0$, $b_B : 7x + y + 5 = 0$;
б) $A(4, -3)$, $h_B : 6x - 5y + 7 = 0$, $b_B : 3x - 2y + 5 = 0$.

Отговор. а) $AB : 4x - 3y + 10 = 0$, $BC : 3x + 4y - 5 = 0$,
$CA : 7x + y - 20 = 0$;
б) $AB : y + 3 = 0$, $BC : 276x + 115y + 1357 = 0$, $CA : 5x + 6y - 2 = 0$.

Задача 1.5.41 Дадени са върхът A и правите h_B и b_C, които са съответно височината през върха B и ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха C на $\triangle ABC$. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако:
а) $A(2, 5)$, $h_B : x - 2y + 7 = 0$, $b_C : 4x + y - 1 = 0$;
б) $A(2, -1)$, $h_B : 3x - 4y + 27 = 0$, $b_C : x + 2y - 5 = 0$.

Отговор. а) $AB : 254x - 431y + 1647 = 0$, $BC : 38x + y + 135 = 0$,
$CA : 2x + y - 9 = 0$;
б) $AB : 4x + 7y - 1 = 0$, $BC : y - 3 = 0$, $CA : 4x + 3y - 5 = 0$.

Задача 1.5.42 Дадени са върхът A и правите m_C и b_C, които са съответно медианата и ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха C на $\triangle ABC$. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако:
а) $A(-5, 5)$, $m_C : 19x + 26y - 79 = 0$, $b_C : 3x + 3y - 11 = 0$;
б) $A(4, 3)$, $m_C : 4x + 13y - 10 = 0$, $b_C : x + 2y - 5 = 0$.

Отговор. а) $AB : x + 6y - 25 = 0$, $BC : 2x + y - 6 = 0$,
$CA : x + 2y - 5 = 0$;
б) $AB : x - 8y + 20 = 0$, $BC : x + 7y + 5 = 0$, $CA : x + y - 7 = 0$.

Задача 1.5.43 Дадени са върхът C и правите m_B и b_A, които са съответно медианата през върха B и ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A на $\triangle ABC$. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако:

а) $C(4,3)$, $m_B : 4x + 13y - 10 = 0$, $b_A : x + 2y - 5 = 0$;
б) $C(3,-1)$, $m_B : 6x + 10y - 59 = 0$, $b_A : x - 4y + 10 = 0$.

Отговор. а) $AB : 2x + 5y + 1 = 0$, $BC : 2x + 29y - 95 = 0$,
$CA : 14x + 23y - 125 = 0$;
б) $AB : 2x+9y-65 = 0$, $BC : 18x+13y-41 = 0$, $CA : 6x-7y-25 = 0$.

Глава 2

Уравнения на равнина

2.1 Параметрични уравнения на равнина

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е афинна координатна система в пространството и α е произволна равнина, която е определена с точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколинеарни вектора $\overrightarrow{p_1}(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $\overrightarrow{p_2}(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, компланарни с α (Фигура 2.1.). Тогава α се състои от всички точки $M(x, y, z)$, за които векторът $\overrightarrow{M_0M}$ е компланарен с векторите $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$. Следователно

$$\overrightarrow{M_0M} = s_1\overrightarrow{p_1} + s_2\overrightarrow{p_2}. \tag{2.1}$$

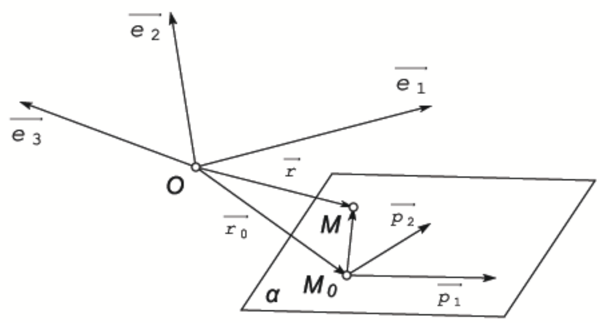
Ако $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{r_0}$ и $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$, то равенството (2.1) можем да запишем във вида

$$\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = s_1\overrightarrow{p_1} + s_2\overrightarrow{p_2}. \tag{2.2}$$

По този начин са определени радиус-векторите на всички точки от равнината α, т.е. координатите на точките от равнината или самата равнина α е определена с уравнението

$$\alpha : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + s_1\overrightarrow{p_1} + s_2\overrightarrow{p_2}, \tag{2.3}$$

което се нарича **векторно параметрично уравнение на равнината** α.



Фигура 2.1.

Тъй като $\overrightarrow{r}(x, y, z)$ и $\overrightarrow{r_0}(x_0, y_0, z_0)$, а $\overrightarrow{p_1}(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $\overrightarrow{p_2}(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, то уравнението (2.3), записано за координатите на векторите, има вида

$$\alpha : \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2, \\ y = y_0 + \mu_1 s_1 + \mu_2 s_2, \\ z = z_0 + \nu_1 s_1 + \nu_2 s_2, \end{cases} \tag{2.4}$$

където $s_1, s_2, \ -\infty < s_1, s_2 < +\infty$ се наричат **параметри**, а уравненията (2.4) – **координатни параметрични уравнения на** α.

2.2 Общо уравнение на равнина

Ако от координатните параметрични уравнения (2.4) изключим параметрите s_1 и s_2, получаваме, че равнината α има уравнение от вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2.5}$$

където A, B, C и D са реални числа и

$$|A| + |B| + |C| \neq 0. \tag{2.6}$$

Тогава са в сила следните твърдения:

1) Всяка равнина α има относно K поне едно уравнение от вида (2.5) при условието (2.6).

2) Всяко уравнение от вида (2.5), при условието (2.6), е уравнение относно K на точно една равнина.

Уравнението (2.5), със свойството (2.6), се нарича **общо уравнение на равнината** α **относно** K, а само лявата му част – *полином на* α *относно* K.

3) Един вектор $\overrightarrow{p}(\lambda, \mu, \nu)$ е компланарен с равнината α с общо уравнение (2.5) тогава и само тогава, когато

$$A\lambda + B\mu + C\nu = 0. \tag{2.7}$$

4) Ако (2.5) е общо уравнение на равнината α и ρ е произволно реално число, различно от нула, то и уравнението

$$(\rho A).x + (\rho B).y + (\rho C).z + \rho D = 0$$

е уравнение на същата равнина α.

Ще отбележим следните частни случаи на (2.5):

5) Равнината α с общо уравнение (2.5)

5.а) **минава през началото** O на K точно тогава, когато $D = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha : Ax + By + Cz = 0}$;

5.б.1) **е успоредна на оста** Ox точно тогава, когато $A = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha : By + Cz + D = 0}$;

5.б.2) **е успоредна на оста** Oy точно тогава, когато $B = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha : Ax + Cz + D = 0}$;

5.б.3) **е успоредна на оста** Oz точно тогава, когато $C = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha : Ax + By + D = 0}$;

5.в.1) **съдържа оста** Ox точно тогава, когато $D = 0$, $A = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha : By + Cz = 0}$;

5.в.2) **съдържа оста** Oy точно тогава, когато $D = 0$, $B = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha : Ax + Cz = 0}$;

5.в.3) **съдържа оста** Oz точно тогава, когато $D = 0$, $C = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha : Ax + By = 0}$;

5.г.1) **е успоредна на равнината** Oxy точно тогава, когато $A = 0$, $B = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha : Cz + D = 0}$;

5.г.2) **е успоредна на равнината** Oyz точно тогава, когато $B = 0$, $C = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha : Ax + D = 0}$;

5.г.3) **е успоредна на равнината** Oxz точно тогава, когато $C = 0$, $A = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha : By + D = 0}$;

5.д.1) **съвпада с равнината** Oxy точно тогава, когато $D = 0$, $A = 0$, $B = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha : z = 0}$;

5.д.2) **съвпада с равнината** Oyz точно тогава, когато $D = 0$, $B = 0$, $C = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha : x = 0}$;

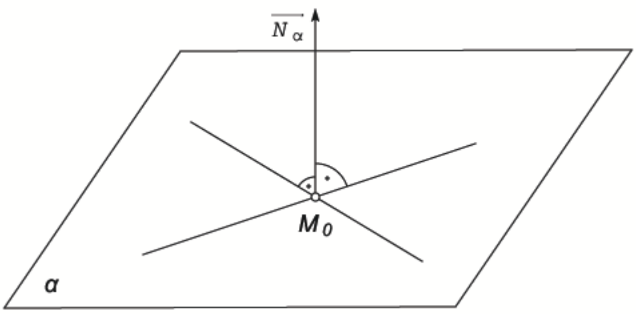
5.д.3) **съвпада с равнината** Oxz точно тогава, когато $D = 0$, $C = 0$, $A = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha : y = 0}$.

По-нататък имаме:

6) Ако координатната система K е **ортонормирана**, векторът $\overrightarrow{N}(A, B, C)$ е **перпендикулярен** (**нормален**) на равнината α с общо уравнение (2.5) относно K.

7) Ако спрямо ортонормирана координатна система K са дадени точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\overrightarrow{N_\alpha}(A, B, C)$, нормален на равнината α (Фигура 2.2.), то тя има уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

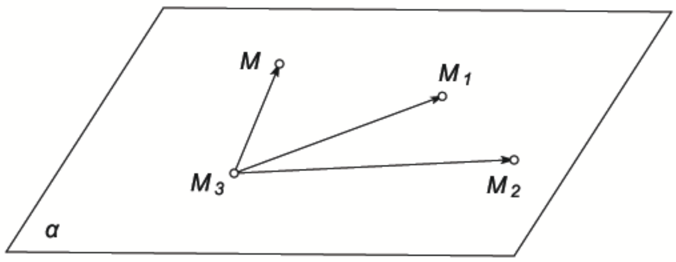


Фигура 2.2.

2.3 Уравнение на равнина през три неколинеарни точки

Ако $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ са неколинеарни точки, те определят единствена равнина α. Ако точката $M(x, y, z)$ е произволна точка от α, то векторите $\overrightarrow{MM_3}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_2M_3}$ са компланарни (Фигура

2.3.). Тогава изразявайки това условие за компланарност, получаваме, че α има следното общо уравнение, написано в детерминантна форма



Фигура 2.3.

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{2.8}$$

или

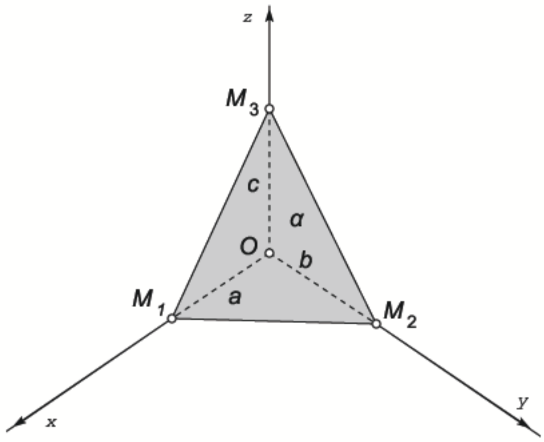
$$\alpha : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.9}$$

2.4 Отрезово уравнение на равнина

Нека α е равнина, която **не минава през началото** O на K и пресича координатните оси Ox, Oy и Oz съответно в точките $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$ и $M_3(0, 0, c)$ (Фигура 2.4.). Тогава α има уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{2.10}$$

което се нарича **отрезово уравнение**, а числата a, b и c – **отрези на** α **от координатните оси**.



Фигура 2.4.

2.5 Нормални уравнения на равнина

Нека K е **ортонормирана координатна система** и α е равнина с общо уравнение (2.5). Тогава съгласно 6) векторът $\overrightarrow{N}(A, B, C)$ е нормален на α.

Всяко от уравненията

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \quad и \quad \frac{Ax+By+Cz+D}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0. \tag{2.11}$$

наричаме **нормално уравнение на α относно K.**

8) Очевидно нормалните уравнения (2.11) на α са напълно равноправни и съответстват на двата ѝ нормални единични вектора

$$\overrightarrow{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

и

$$-\overrightarrow{n}\left(-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

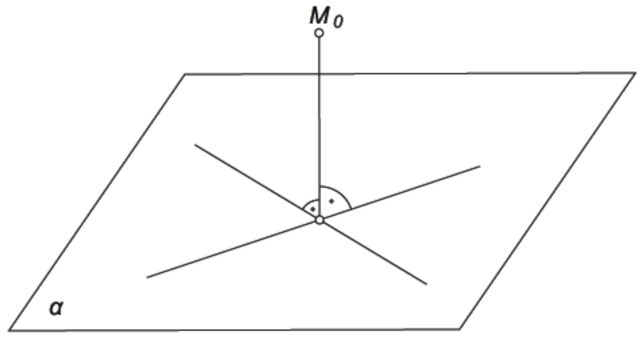
Ако равнината α **не минава** през началото O на K, за конкретност можем да приемем да работим само с едно от двете уравнения (2.11), а именно с онова, което има вида

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{-sgnD\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \tag{2.12}$$

Ще отбележим, че уравнението (2.12) е получено с онзи нормален единичен вектор на α, който сочи в полупространството относно α, което **не съдържа** началото O на K.

2.6 Разстояние от точка до равнина

Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка в пространството, която не лежи в равнината α. Ако предположим, че α е определена с нормалното уравнение, получено с нормалния единичен вектор $\overrightarrow{n}$, то числото



Фигура 2.5.

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{2.13}$$

се нарича **ориентирано разстояние от точката** M_0 **до равнината** α **при нормален вектор** $\overrightarrow{n}$ **на** α (Фигура 2.5.).

В случай, че α **не минава** през началото O на K, можем да използваме нормалното ѝ уравнение (2.12) и тогава за ориентираното разстояние δ ще бъде в сила формулата

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{-sgnD\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.14}$$

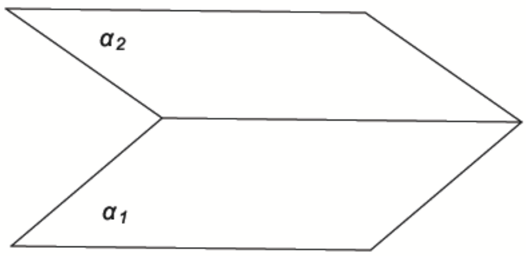
Числото $d = |\delta|$ се нарича **разстояние от точката** M_0 **до равнината** α. За него от (2.13) (или (2.14)) намираме

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.15}$$

2.7 Взаимно положение на две равнини

Нека α_1 и α_2 са равнини, които имат относно афинната координатна система K съответно уравненията

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \alpha_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$



Фигура 2.6.

9)

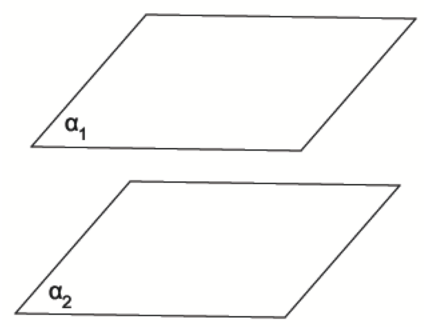
9.а) Равнините α_1 и α_2 се пресичат точно тогава, когато поне едно от числата

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \tag{2.17}$$

е различно от нула (Фигура 2.6.), т.е. точно тогава, когато не съществува реално число $\rho \neq 0$, такова че да бъдат изпълнени едновременно равенствата $A_2 = \rho A_1$, $B_2 = \rho B_1$, $C_2 = \rho C_1$.

9.б) Равнините α_1 и α_2 съвпадат тогава и само тогава, когато съществува реално число $\rho \neq 0$, такова че

$$A_2 = \rho A_1, \; B_2 = \rho B_1, \; C_2 = \rho C_1, \; D_2 = \rho D_1.$$



Фигура 2.7.

9.в) Равнините α_1 и α_2 са различни и успоредни точно тогава (Фигура 2.7.), когато съществува реално число $\rho \neq 0$, такова че

$$A_2 = \rho A_1,\ B_2 = \rho B_1,\ C_2 = \rho C_1,\ \text{но } D_2 \neq \rho D_1.$$

2.8 Сноп равнини

Ако g е произволна права в пространството, множеството от всички равнини, минаващи през правата g, се нарича **сноп равнини с ос** g. Очевидно всеки сноп се определя с две кои да е свои пресекателни равнини.

Нека α_1 и α_2 са две различни равнини от снопа с ос правата g, зададени с (2.16) и да означим с

$$l_i(x, y, z) = A_i x + B_i y + C_i z + D_i,\ i = 1, 2,$$

техните полиноми. Тогава имаме:

10)

10.а) Ако поне едно от числата λ_1 и λ_2 е различно от нула, уравнението

$$\lambda_1 l_1(x, y, z) + \lambda_2 l_2(x, y, z) = 0 \tag{2.18}$$

е уравнение на равнина от снопа.

10.б) За всяка равнина от снопа съществува ненулева двойка реални числа (λ_1, λ_2) такава, че (2.18) е уравнение на равнината.

Ще отбележим, че ако $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, то с уравнението (2.18), при условието $\lambda_1 + \rho\lambda_2 \neq 0$, $\rho \neq 0$, се описва множеството на всички успоредни или съвпадащи с тях равнини. Така множеството се нарича **сноп успоредни равнини**.

2.9 Ъгъл между две равнини

Нека α_1 и α_2 са пресекателни равнини с нормални вектори съответно $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$. Тогава под **ъгъл между** α_1 **и** α_2 ще разбираме ъгъла между нормалните им вектори $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$. Ако равнините α_1 и α_2 са зададени с общите уравнения (2.16) и координатната система K е **ортонормирана**, то имаме

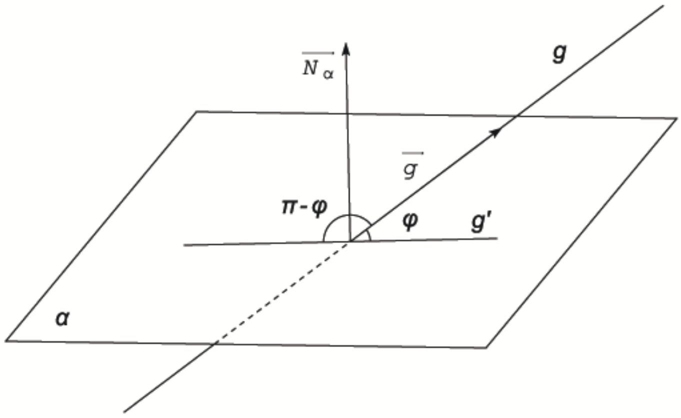
$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}, \\ \sin\varphi &= \frac{\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

където $\varphi = \sphericalangle(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2})$ и Δ_1, Δ_2, Δ_3 са числата, дефинирани с (2.17).

2.10 Ъгъл между права и равнина

Аналогично на определянето на ъгъл между две равнини се определя и ъгъл между правата g и равнината α, а именно под **ъгъл между права и равнина** разбираме ъгъла между вектора $\overrightarrow{g}$, колинеарен с правата g и нормалния вектор $\overrightarrow{N_\alpha}$ на равнината α (Фигура 2.8.). Така, ако α е зададена с общо уравнение (2.5), а правата g – с координатните параметрични уравнения (1.3) или каноничното уравнение (1.4), то за ъгъла $\varphi = \sphericalangle(\overrightarrow{g}, \overrightarrow{N_\alpha})$ между α и g получаваме

$$\cos\varphi = \frac{\lambda A + \mu B + \nu C}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$



Фигура 2.8.

2.11 Уравнения на ъглополовящите на ъгли, образувани от две пресекателни равнини

Ако α_1 и α_2 са пресекателни равнини съответно с нормални уравнения

$$\alpha_1 : \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = 0 \text{ и } \alpha_2 : \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0,$$

двете им ъглополовящи (бисектрични) равнини β_1 и β_2 имат уравнения

$$\beta_1, \beta_2 : \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0. \tag{2.20}$$

2.12 Представяне на права чрез уравнения на две равнини през нея

Ако α_1 и α_2 са пресекателни равнини с пресечница правата g, които имат относно K уравненията (2.16), то съгласно 9.a) поне едно от числата

(2.17) е различно от нула. Тогава двойката уравнения

$$g : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

се нарича **двойка уравнения на правата g относно K.**

Очевидно правата g може да се представи чрез уравненията на коя да е двойка равнини през нея и следователно:

11) Всяка права има безбройно много двойки уравнения от вида (2.21).

12) Всяка двойка уравнения от вида (2.21), за която поне едно от числата (2.17) не е нула, е двойка уравнения спрямо K на точно една права.

Ако **правата g пробожда координатната равнина** Oxy (респ. Oyz или Ozx), тя има двойка уравнения относно K от вида

$$x = az + p, \quad y = bz + q, \tag{2.22}$$

респективно

$$y = ax + p, \quad z = bx + q \tag{2.23}$$

или

$$z = ay + p, \quad x = by + q. \tag{2.24}$$

Уравненията (2.22), (2.23) и (2.24) се наричат **канонични уравнения на правата g относно K.** Тъй като всяка права пробожда поне една от координатните равнини на K, следва че всяка права има поне една двойка канонични уравнения.

2.13 Задачи

Забележка 2.13.1 До края на параграфа, ако не е казано друго, ще предполагаме, че *координатната система* $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е *дясна и ортонормирана.*

Задача 2.13.1 Спрямо афинна координатна система са дадени точката M_0 и неколинеарните вектори $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$. Да се намерят параметрични уравнения и общо уравнение на равнината α, определена от M_0, $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$, ако:

а) $M_0(3,1,2)$, $\overrightarrow{p_1}(1,0,2)$, $\overrightarrow{p_2}(2,-1,1)$;
б) $M_0(0,0,1)$, $\overrightarrow{p_1}(1,2,3)$, $\overrightarrow{p_2}(0,5,2)$;
в) $M_0(2,0,1)$, $\overrightarrow{p_1}(1,1,1)$, $\overrightarrow{p_2}(1,0,0)$.

Решение. а) За да намерим параметрични уравнения на равнината α, заместваме в (2.4) $x_0 = 3$, $y_0 = 1$, $z_0 = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\nu_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_2 = -1$, $\nu_2 = 1$ (виж Фигура 2.1.). Получаваме

$$\alpha : \begin{cases} x = 3 + s_1 + 2s_2, \\ y = 1 - s_2, \\ z = 2 + 2s_1 + s_2. \end{cases}$$

Оттук, като изключим параметрите s_1 и s_2, получаваме общото уравнение на α:

$$\alpha : 2x + 3y - z - 7 = 0. \tag{2.25}$$

До същото уравнение достигаме и като изразим условието за компланарност на векторите $\overrightarrow{M_0M}(x-3, y-1, z-2)$, $\overrightarrow{p_1}(1,0,2)$ и $\overrightarrow{p_2}(2,-1,1)$:

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2x + 3y - z - 7 = 0.$$

За да намерим общо уравнение на α, можем да постъпим и по друг начин. Нека α има общо уравнение (2.5). Тъй като равнината съдържа точката M_0, координатите ѝ $(3,1,2)$ удовлетворяват (2.5), т.е.

$$3A + B + 2C + D = 0. \tag{2.26}$$

От друга страна, векторите $\overrightarrow{p_1}(1,0,2)$ и $\overrightarrow{p_2}(2,-1,1)$ са компланарни с α и следователно съгласно 3) ще бъдат изпълнени равенства от вида (2.7):

$$A + 2C = 0, \quad 2A - B + C = 0. \tag{2.27}$$

От (2.26) и (2.27) намираме $A = 2\rho$, $B = 3\rho$, $C = -\rho$, $D = -7\rho$, $\rho \neq 0$ и като заместим в (2.5) и отчетем 4), получаваме отново (2.25).

Отговор. б) $x = s_1$, $y = 2s_1 + 5s_2$, $z = 1 + 3s_1 + 2s_2$, $11x + 2y - 5z + 5 = 0$;
в) $x = 2 + s_1 + s_2$, $y = s_1$, $z = 1 + s_1$, $y - z + 1 = 0$.

Задача 2.13.2 Спрямо афинна координатна система са дадени точките:

а) $M_1(1,2,3)$, $M_2(1,3,-1)$, $M_3(0,1,4)$;

б) $M_1(1,1,1)$, $M_2(2,2,2)$, $M_3(-1,0,3)$;

в) $M_1(1,0,1)$, $M_2(3,1,1)$, $M_3(4,-1,1)$.

Да се намерят общо уравнение и параметрични уравнения на равнината α, определена от дадените точки.

Решение. а) Заместваме координатите на дадените точки в (2.9) (виж Фигура 2.3.):

$$\alpha : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пресмятаме горната детерминанта и получаваме, че α има общо уравнение $3x - 4y - z + 8 = 0$.

Векторите $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{M_1M_2}(0,1,-4)$ и $\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{M_1M_3}(-1,-1,1)$ са компланарни с α, откъдето следва, че тя има параметрични уравнения

$$\alpha : \begin{cases} x = 1 - s_2, \\ y = 2 + s_1 - s_2, \\ z = 3 - 4s_1 + s_2. \end{cases}$$

Отговор. б) $3x - 4y + z = 0$,
$x = 1 + s_1 + 2s_2$, $y = 1 + s_1 + s_2$, $z = 1 + s_1 - 2s_2$;
в) $z - 1 = 0$, $x = 1 + 2s_1 + s_2$, $y = s_1 - 2s_2$, $z = 1$.

Задача 2.13.3 Спрямо афинната координатна система $K = Oxyz$ в пространството е дадена точката $M(1,-1,2)$. Намерете уравнения на равнините, които минават през M и:

а) съдържат съответно координатните оси Ox, Oy и Oz;

б) са успоредни съответно но координатните равнини Oyz, Ozx и Oxy.

Решение. Ще използваме 5).

а) Всяка равнина, която съдържа оста Ox има уравнение от вида

$$By + Cz = 0. \tag{2.28}$$

От снопа равнини (2.28) отделяме равнината α_1, която минава през точката $M(1,-1,2)$. Заместваме координатите на M в (2.28) и получаваме $-B +$

$2C = 0$. Оттук намираме $B = 2\rho$, $C = \rho$, $\rho \neq 0$ и следователно α_1 има общо уравнение $2y + z = 0$.

До същото уравнение достигаме и като изразим, че равнината α_1 минава през дадената точка M и през две точки от оста Ox, например $O(0, 0, 0)$ и $N(1, 0, 0)$.

Аналогично за равнините α_2 и α_3, които минават през точката M и съдържат съответно осите Oy и Oz, намираме уравненията $\alpha_2 : 2x - z = 0$ и $\alpha_3 : x + y = 0$.

б) Равнината β_1, успоредна на координатната равнина Oyz, има общо уравнение от вида $Ax + D = 0$. Понеже β_1 съдържа точката $M(1, -1, 2)$, то $A + D = 0$. Следователно $A = \rho$, $D = -\rho$, $\rho \neq 0$. Тогава β_1 има уравнение $x - 1 = 0$.

Като постъпим по същия начин, намираме, че равнините β_2 и β_3, които минават през M и са успоредни съответно на координатните равнини Ozx и Oxy имат уравнения $\beta_2 : y + 1 = 0$, $\beta_3 : z - 2 = 0$.

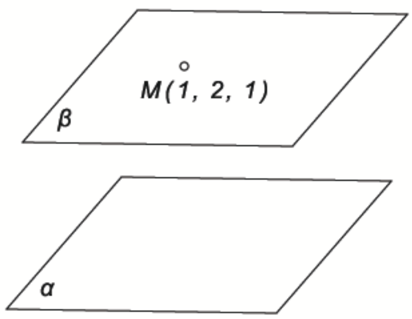
Задача 2.13.4 Да се намери уравнение на равнината α, която минава през точката M и е успоредна на равнината β, ако:

а) $M(1, 2, 1)$, $\beta : 3x - y + z + 10 = 0$;

б) $M(1, 1, 0)$, $\beta : x + y - z + 1 = 0$.

(Координатната система е афинна).

Решение. а) От 9.в) следва, че равнината α, която минава през точката $M(1, 2, 1)$ и е успоредна на равнината $\beta : 3x - y + z + 10 = 0$ има общо уравнение (Фигура 2.9.)



Фигура 2.9.

$$3.(x - 1) - 1.(y - 2) + 1.(z - 1) = 0,$$

т.е. $3x - y + z - 2 = 0$.

Отговор. б) $\alpha : x + y - z - 2 = 0$.

Задача 2.13.5 Да се намери уравнение на равнината α, която минава през точката M и съдържа правата g, ако:

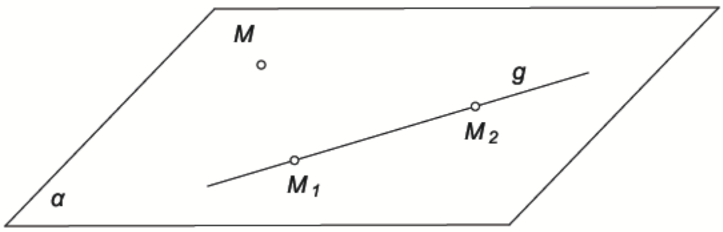
а) $M(3,2,1)$, $g : x = 2 + 4s,\ y = -3 + s,\ z = 1 + 2s$;

б) $M(-1,-2,0)$, $g : x = s,\ y = 1 - s,\ z = 2$;

в) $M(2,3,1)$, $g : 3x - 2y + 5z - 2 = 0,\ x - 4y + z + 3 = 0$.

(Координатната система е афинна).

Решение. а) **I начин.** Равнината α е определена от дадената точка $M(3,2,1)$ и точките $M_1(2,-3,1)$ и $M_2(6,-2,3)$, които се получават от параметричните уравнения на g съответно за $s = 0$ и $s = 1$. Тогава α има общо уравнение $10x - 2y - 19z - 7 = 0$. (Фигура 2.10., виж задача 2.13.2).



Фигура 2.10.

II начин. Равнината α принадлежи на снопа равнини с ос правата g. Като изключим параметъра s от параметричните уравнения на g, получаваме двойката уравнения $x - 4y - 14 = 0$, $2y - z + 7 = 0$. Тогава съгласно 10.б) съществува ненулева двойка числа (λ_1, λ_2) така, че α има уравнение от вида

$$\lambda_1(x - 4y - 14) + \lambda_2(2y - z + 7) = 0. \tag{2.29}$$

Двойката (λ_1, λ_2) намираме, като изразим, че M лежи в α. Получаваме равенството $-19\lambda_1 + 10\lambda_2 = 0$, от което определяме $\lambda_1 = 10\rho$, $\lambda_2 = 19\rho$, $\rho \neq 0$. Заместваме тези стойности в (2.29) и достигаме до уравнението $10x - 2y - 19z - 7 = 0$.

Отговор. б) $\alpha : x + y - 2z + 3 = 0$; в) $\alpha : 7x - 8y + 11z - 1 = 0$.

Задача 2.13.6 Да се намери уравнение на равнината α, която съдържа точките $M_1(3,-2,2)$ и $M_2(1,0,4)$ и е успоредна на правата $g : x = 5 + 5s,\ y = 3 + 3s,\ z = 1 + s$. (Координатната система е афинна).

Упътване. Равнината α минава през точката $M_2(1,0,4)$ и е компланарна на векторите $\overrightarrow{p}(5,3,1) \parallel g$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2}(-1,1,1)$.

Отговор. $\alpha : x - 3y + 4z - 17 = 0$.

Задача 2.13.7 Да се намерят отрезите, които равнината $\alpha : x + 2y - 3z + 6 = 0$ отсича от координатните оси на афинната координатна система $K = Oxyz$.

Решение. Отчитайки (2.10), заключаваме, че равнината α има отрезово уравнение

$$\frac{x}{-6} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{2} = 1$$

и следователно отрезите ѝ от координатните оси Ox, Oy и Oz са съответно $a = -6$, $b = -3$ и $c = 2$.

Задача 2.13.8 Да се намери уравнение на равнината α, която минава през точката $M(2,1,-1)$ и отсича от координатните оси Ox и Oz на афинната координатна система $K = Oxyz$ съответно отрези $a = 2$ и $c = 1$.

Отговор. $\alpha : x + 2y + 2z - 2 = 0$.

Задача 2.13.9 Да се намери уравнение на равнината α, която минава през точката $M(2,-1,3)$ и отрезите ѝ от координатните оси Oy и Oz са два пъти по-големи от отреза ѝ от оста Ox на афинната координатна система $K = Oxyz$.

Отговор. $\alpha : 2x + y + z - 6 = 0$.

Задача 2.13.10 Да се намери уравнение на равнината α, която минава през точката M и има нормален вектор $\overrightarrow{N}$, ако:

а) $M(2,1,-1)$, $\overrightarrow{N}(1,-2,3)$;

б) $M(1,1,3)$, $\overrightarrow{N}(5,2,1)$.

Упътване. Използвайте, че ако координатната система K е ортонормирана, равнината α, която минава през точката $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и има нормален вектор $\overrightarrow{N}(A,B,C)$, притежава уравнение от вида

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2.30}$$

Отговор. а) $\alpha : x - 2y + 3z + 3 = 0$; б) $\alpha : 5x + 2y + z - 10 = 0$.

Задача 2.13.11 Да се намери уравнение на равнината α, която е перпендикулярна на отсечката AB и съдържа средата ѝ, ако:
а) $A(1,2,3)$, $B(3,4,-1)$;
б) $A(0,0,1)$, $B(4,2,1)$;
в) $A(1,1,1)$, $B(3,-1,5)$.

Отговор. а) $\alpha : x+y-2z-3=0$; б) $\alpha : 2x+y-5=0$,
в) $\alpha : x-y+2z-8=0$.

Задача 2.13.12 Да се намери уравнение на равнината α, която минава през точката M и е перпендикулярна на равнините β и γ, ако:
а) $M(4,-2,1)$, $\beta : x-2y+z-3=0$, $\gamma : 3x-y+2z-4=0$;
б) $M(3,1,1)$, $\beta : 3x-y+2z+4=0$, $\gamma : x+2y-z+5=0$.

Решение. а) **I начин.** Понеже координатната система K е ортонормирана, векторите $\overrightarrow{N_\beta}(1,-2,1)$ и $\overrightarrow{N_\gamma}(3,-1,2)$ са нормалните вектори съответно на β и γ и следователно са компланарни с търсената равнина α. Тогава α има общо уравнение, което може да се запише в детерминантната форма

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+2 & z-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $3x-y-5z-9=0$.

II начин. От $\alpha\perp\beta$, $\alpha\perp\gamma$ следва, че векторното произведение $\overrightarrow{N_\beta}\times\overrightarrow{N_\gamma}$ е вектор, нормален на α. Намираме $(\overrightarrow{N_\beta}\times\overrightarrow{N_\gamma})(-3,1,5)$ и следвайки (2.30), получаваме, че α има уравнение $-3.(x-4)+1.(y+2)+5.(z-1)=0$, или $3x-y-5z-9=0$.

III начин. Равнината α минава през точката $M(4,-2,1)$ и съгласно (2.30) има уравнение от вида

$$A(x-4)+B(y+2)+C(z-1)=0, \tag{2.31}$$

където $\overrightarrow{N_\alpha}(A,B,C)$ е нормален вектор на α. От $\alpha\perp\beta$ и $\alpha\perp\gamma$ следва $\overrightarrow{N_\alpha}\overrightarrow{N_\beta}=0$ и $\overrightarrow{N_\alpha}\overrightarrow{N_\gamma}=0$. Последните скаларни произведения са еквивалентни на равенствата $A-2B+C=0$ и $3A-B+2C=0$, от които намираме $A=3\rho$, $B=-\rho$, $C=-5\rho$, $\rho\neq 0$. Заместваме тези стойности в (2.31) и получаваме уравнението $3x-y-5z-9=0$.

Отговор. б) $\alpha : 3x-5y-7z+3=0$.

Задача 2.13.13 Да се намери уравнение на равнината α, която съдържа точките A и B и е перпендикулярна на равнината β ако:
а) $A(3,1,1)$, $B(1,-1,-2)$, $\beta : x-2y+3z-5=0$;
б) $A(1,1,1)$, $B(1,0,2)$, $\beta : x+2y-3z+2=0$.

Отговор. а) $\alpha : 4x-y-2z-9=0$; б) $\alpha : x+y+z-3=0$.

Задача 2.13.14 Да се намери уравнение на равнината α, която съдържа правата $g : 3x-2y+3z-5=0, x-4y+2z-3=0$ и е перпендикулярна на равнината $\beta : 2x+y-3z+2=0$.

Упътване. Равнината α принадлежи на снопа равнини с ос дадената права g.
Отговор. $\alpha : 25x-20y+10z-11=0$.

Задача 2.13.15 Да се намери ориентираното разстояние от точката A до равнината α, ако:
а) $A(1,0,-2)$, $\alpha : x+y+3z-1=0$;
б) $A(-1,2,-2)$, $\alpha : 2x-3y+2z-9=0$.

Решение. а) Тъй като равнината α не минава през началото O на координатната система (Защо?), можем да използваме формулата (2.14) за ориентирано разстояние от точка до равнина. Имаме

$$\delta = \frac{1.1+1.0+3.(-2)-1}{\sqrt{1^2+0^2+3^2}} = -\frac{6}{\sqrt{10}}.$$

Отговор. б) $\delta = -\dfrac{21}{\sqrt{17}}$.

Задача 2.13.16 Върху апликатната ос Oz намерете точка, която се намира на разстояние d от равнината α, ако:
а) $d=4$, $\alpha : x+2y-2z-2=0$;
б) $d=2$, $\alpha : 2x-3y+6z+2=0$.

Упътване. Търсената точка върху Oz има координати от вида $(0,0,z_0)$. Използвайте (2.15).

Отговор. а) $M'(0,0,5)$, $M''(0,0,-7)$; б) $M'(0,0,2)$, $M''\left(0,0,-\dfrac{8}{3}\right)$.

Задача 2.13.17 Върху абсцисната ос Ox намерете точка, която е равноотдалечена от равнините α и β, ако:
а) $\alpha : 12x-16y+15z+1=0$, $\beta : 2x+2y-z-1=0$;
б) $\alpha : 3x-2y-6z-1=0$, $\beta : x-2y-2z+1=0$.

Отговор. а) $M'(2,0,0)$, $M''\left(\frac{11}{43},0,0\right)$; б) $M'(5,0,0)$, $M''\left(-\frac{1}{4},0,0\right)$.

Задача 2.13.18 Да се намери разстоянието d между успоредните равнини α и β, ако:
а) $\alpha : 2x - y - 2z + 5 = 0$, $\beta : 2x - y - 2z - 4 = 0$;
б) $\alpha : 3x - 2y - 6z - 12 = 0$, $\beta : 3x - 2y - 6z + 2 = 0$.

Отговор. а) $d = 3$; б) $d = 2$.

Задача 2.13.19 Да се намери уравнение на равнината α, която е успоредна на равнината $\beta : 4x - 2y - 4z - 5 = 0$ и се намира на разстояние $d = 4$ от нея.

Решение. Равнините, успоредни на равнината β, образуват сноп успоредни равнини с уравнение $4x - 2y - 4z + D = 0$. Тогава търсената равнина α има нормално уравнение от вида

$$\frac{4x - 2y - 4z + D}{\pm\sqrt{36}} = 0.$$

Понеже $\alpha \parallel \beta$, разстоянието от коя да е точка на β, например $M(0, -\frac{5}{2}, 0)$ до α е равно на 4. Имаме

$$\frac{|4.0 - 2.\frac{5}{2} - 4.0 + D|}{6} = 4,$$

т.е. $|5 + D| = 24$. От последното равенство намираме $D_1 = 19$, $D_2 = -29$ и следователно имаме две равнини, удовлетворяващи условието на задачата: $\alpha_1 : 4x - 2y - 4z + 19 = 0$ и $\alpha_2 : 4x - 2y - 4z - 29 = 0$.

Задача 2.13.20 Да се намери уравнение на равнина α, която съдържа правата $g : 2x-3y-z = 0, 4x+y+5z-28 = 0$ и се намира на разстояние $d = \sqrt{14}$ от началото O на координатната система.

Отговор. $\alpha_1 : 3x - y + 2z - 14 = 0$ и $\alpha_2 : x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Задача 2.13.21 Да се пресметне ъгълът между равнините:
а) $\alpha : x + 4y - z + 1 = 0$, $\beta : x + y - z - 3 = 0$;
б) $\alpha : x + 2y - z - 1 = 0$, $\beta : x - y - 3 = 0$;
в) $\alpha : x + 2y - 2z = 0$, $\beta : z - 5 = 0$;
г) $\alpha : x + 2y - z - 1 = 0$, $\beta : 3x - 5y - 7z = 0$.

Решение. а) Нормалните вектори на равнините α и β са съответно $\overrightarrow{N_\alpha}(1,4,-1)$ и $\overrightarrow{N_\beta}(1,1,-1)$. Тогава, като използваме (2.19), за ъгъла φ между тях, получаваме

$$\cos\varphi = \frac{1.1+4.1+(-1).(-1)}{\sqrt{1^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{18}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

и следователно $\varphi = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Отговор. б) $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$; в) $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$; г) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Задача 2.13.22 Да се напишат уравнения на бисектричните равнини β_1 и β_2 на равнините α_1 и α_2, ако:

а) $\alpha_1 : x-3y+2z-5=0$, $\alpha_2 : 3x-2y-z+3=0$;

б) $\alpha_1 : 5x-5y-2z-3=0$, $\alpha_2 : x+7y-2z+1=0$;

в) $\alpha_1 : 2x-y+5z+3=0$, $\alpha_2 : x-5y+2z-1=0$.

Решение. а) Равнините α_1 и α_2 имат съответно нормални уравнения

$$\alpha_1 : \frac{x-3y+2z-5}{\sqrt{14}} = 0, \quad \alpha_2 : \frac{3x-2y-z+3}{\sqrt{14}} = 0$$

и като приложим (2.20), намираме

$$\beta_1 : \frac{x-3y+2z-5}{\sqrt{14}} + \frac{3x-2y-z+3}{\sqrt{14}} = 0,$$

$$\beta_2 : \frac{x-3y+2z-5}{\sqrt{14}} - \frac{3x-2y-z+3}{\sqrt{14}} = 0.$$

Оттук получаваме $\beta_1 : 4x-5y+z-2=0$ и $\beta_2 : 2x+y-3z+8=0$.

Отговор. б) $\beta_1 : 3x+y-2z-1=0$, $\beta_2 : x-3y-1=0$;

в) $\beta_1 : 3x-6y+7z+2=0$, $\beta_2 : x+4y+3z+4=0$.

Задача 2.13.23 Спрямо афинна координатна система са дадени точката $M(1,-2,3)$ и вектора $\overrightarrow{p}(1,2,-1)$. Да се намерят:

а) параметрични уравнения на правата g, която минава през точката M и е колинеарна с вектора $\overrightarrow{p}$;

б) възможните двойки канонични уравнения на правата g.

Решение. а) Съгласно (1.3) правата g има параметрични уравнения

$$g : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -2 + 2s \\ z = 3 - s. \end{cases} \tag{2.32}$$

б) Правата g пробожда координатната равнина $Oxy : z = 0$ в точката $M_1(4, 4, 0)$ и е колинеарна с вектора $\overrightarrow{p_1}(-1, -2, 1)$. Тогава според (2.22) тя има каноничните уравнения

$$g : x = -z + 4,\ y = -2z + 4. \tag{2.33}$$

Тъй като g пробожда координатната равнина $Oyz : x = 0$ в точката $M_2(0, -4, 4)$ и е колинеарна с вектора $\overrightarrow{p}(1, 2, -1)$, тя има каноничните уравнения

$$g : y = 2x - 4,\ z = -x + 4. \tag{2.34}$$

Най-после, g пробожда координатната равнина $Ozx : y = 0$ в точката $M_3(2, 0, 2)$ и е колинеарна с вектора $\overrightarrow{p_2}(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$. Оттук следва, че g има каноничните уравнения

$$g : z = -\frac{1}{2}y + 2,\ x = \frac{1}{2}y + 2. \tag{2.35}$$

Ще отбележим, че да каноничните уравнения (2.33), (2.34) и (2.35) можем да стигнем и ако изразим параметъра s съответно от третото, първото и второто уравнение на (2.32) и заместим в останалите две.

Задача 2.13.24 Относно афинна координатна система са дадени точките $M_1(1, -1, 0)$ и $M_2(2, 3, 1)$. За правата $g = M_1M_2$ да се напишат:
а) параметрични уравнения;
б) възможните двойки канонични уравнения.

Отговор. а) $g : x = 1 + s,\ y = -1 + 4s,\ z = s$;
б) $x = z + 1,\ y = 4z - 1$; $y = 4x - 5,\ z = x - 1$; $z = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4},\ x = \frac{1}{4}y + \frac{5}{4}$.

Задача 2.13.25 Относно афинна координатна система е дадена правата

$$g : x - 2y + 3z + 1 = 0,\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \tag{2.36}$$

Да се напишат възможните двойки канонични уравнения на g.

Упътване. От уравненията (2.36) изразете последователно: x и y посредством z; y и z посредством x; z и x посредством y.

Отговор. $x = z+3,\ y = 2z+2;\ y = 2x-4,\ z = x-3;\ z = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2},\ x = \frac{1}{2}y - 2.$

Задача 2.13.26 Дадена е правата

$$g : x + 2y - 3z + 4 = 0,\ x - y - z + 2 = 0. \tag{2.37}$$

Да се намери вектор, колинеарен с g в случаите, когато:

а) координатната система е афинна;

б) координатната система е дясна и ортонормирана.

Решение. а) Ще намерим две точки от правата g. Полагаме $y = 0$ в (2.37) и получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} x - 3z + 4 = 0 \\ x - z + 2 = 0. \end{array}\right.$$

От нея намираме $x = -1$, $z = 1$ и следователно точката $M_1(-1, 0, 1)$ лежи върху g. Аналогично, като положим $z = 4$, от системата

$$\left|\begin{array}{l} x + 2y - 8 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{array}\right.$$

определяме и координатите $x = 4$, $y = 2$ на точката $M_2(4, 2, 4)$ на g. Тогава векторът $\overrightarrow{M_1M_2}(5, 2, 3)$ е колинеарен на правата g.

б) Методът от а) е приложим и при ортонормирана координатна система. Сега обаче ще използваме, че векторното произведение $\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$ на нормалните вектори $\overrightarrow{N_1}(1, 2, -3)$ и $\overrightarrow{N_2}(1, -1, -1)$ на двете равнини, чиито уравнения са тези в (2.37), е вектор, колинеарен с тяхната пресечница, т.е. с g. По този начин намираме $(\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2})(5, 2, 3)$.

Задача 2.13.27 Да се намери разстоянието от точката A до правата g, ако:

а) $A(1, -1, -2)$, $g : x = -3 + 3s,\ y = -2 + 2s,\ z = 8 - 2s$;

б) $A(7, 9, 7)$, $g : x = 2 + 4s,\ y = -1 + 3s,\ z = 2s$;

в) $A(-1, 1, 2)$, $g : x - y + 1 = 0,\ x - z - 2 = 0$.

Решение. а) Търсеното разстояние е $d = |AA_0|$, където A_0 е ортогоналната проекция на точката A върху правата g. За да намерим A_0, през A прекарваме равнина α, перпендикулярна на g. Тогава A_0 е прободът на g и α. За равнината α получаваме уравнението $3.(x-1)+2.(y+1)-2.(z+2) = 0$, т.е.

$$3x + 2y - 2z - 5 = 0. \tag{2.38}$$

За да намерим координатите на A_0, решаваме системата, образувана от параметричните уравнения на g и уравнението (2.38). Имаме

$$3(-3 + 3s) + 2(-2 + 2s) - 2(8 - 2s) - 5 = 0$$

и оттук следва, че точката A_0 се получава за $s = 2$. Намираме $A_0(3, 2, 4)$ и следователно $d = |AA_0| = 7$.

Отговор. б) $d = \sqrt{10}$; в) $d = \sqrt{14}$.

Задача 2.13.28 Да се намери точката M', която е ортогонално симетрична на точката M относно равнината α, ако:

а) $M(-12, -4, 18)$, $\alpha : 6x + 2y - 9z + 121 = 0$;

б) $M(2, 7, 1)$, $\alpha : x - 4y + z + 7 = 0$;

в) $M(0, 0, 0)$, $\alpha : 6x + 2y - 9z + 121 = 0$.

Решение. а) Ортогонално симетричната точка M' на M относно равнината α лежи върху перпендикуляра

$$h : x = -12 + 6s,\ y = -4 + 2s,\ z = 18 - 9s,$$

през M към α и следователно има координати от вида $M'(-12 + 6s_0, -4 + 2s_0, 18 - 9s_0)$. Числото s_0 ще определим, като използваме, че средата $M_0(-12 + 3s_0, -4 + s_0, 18 - \frac{9}{2}s_0)$ на отсечката MM' лежи в α, т.е.

$$6.(-12 + 3s_0) + 2.(-4 + s_0) - 9.(18 - \frac{9}{2}s_0) + 121 = 0.$$

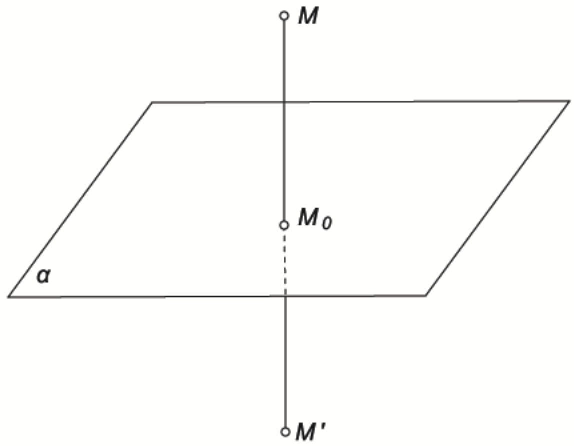
Оттук намираме $s_0 = 2$ (Фигура 2.11) и следователно $M'(0, 0, 0)$.

Отговор. б) $M'(4, -1, 3)$; в) $M'(-12, -4, 18)$.

Задача 2.13.29 Да се намери точката M', ортогонално симетрична на точката M относно правата g, ако:

а) $M(4, 3, 10)$, $g : x = 1 + 2s,\ y = 2 + 4s,\ z = 3 + 5s$;

б) $M(3, 1, -4)$, $g : x = -1 + 2s,\ y = -4 - s,\ z = -1 - s$.



Фигура 2.11.

Решение. а) През точката M прекарваме равнина α, която е перпендикулярна на правата g. Имаме

$$\alpha : 2.(x-4)+4.(y-3)+5.(z-10)=0,$$

т.е. $\alpha : 2x+4y+5z-70=0$ (Фигура 2.12). Равнината α пресича правата g в точката $M_0(3,6,8)$, която е средата на отсечката MM'. Оттук намираме $M'(2,9,6)$.

Отговор. б) $M'(-1,-11,0)$.

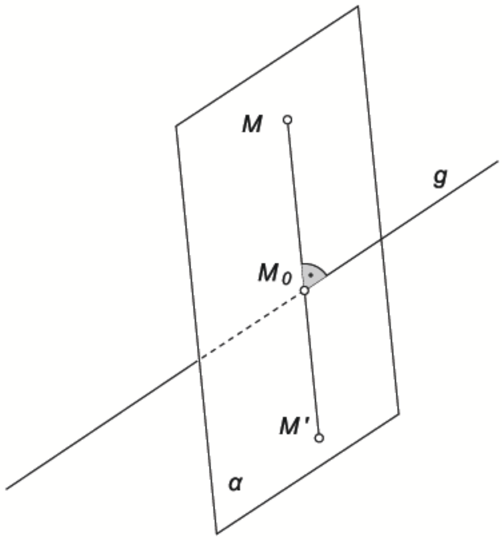
Задача 2.13.30 Дадени са права $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{3}$ и точка $A(2,1,5)$.

а) Да се намери уравнение на равнината α, определена от правата p и точката A;

б) Да се намери симетричната точка A' на точката A относно правата p.

Отговор. а) $\alpha : 2x+2y-z-1=0$; б) $A'\left(\dfrac{8}{11}, \dfrac{19}{11}, \dfrac{57}{11}\right)$.

Задача 2.13.31 Дадени е права $p : x-y+z=3,\ 2x+y-z=-1$ и точки $A(1,3,0)$ и $B(-2,0,-5)$. Да се намери точка $M \in p$ такава, че $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}|$.



Фигура 2.12.

Отговор. $M'\left(\frac{2}{3}, -\frac{83}{24}, -\frac{9}{8}\right)$.

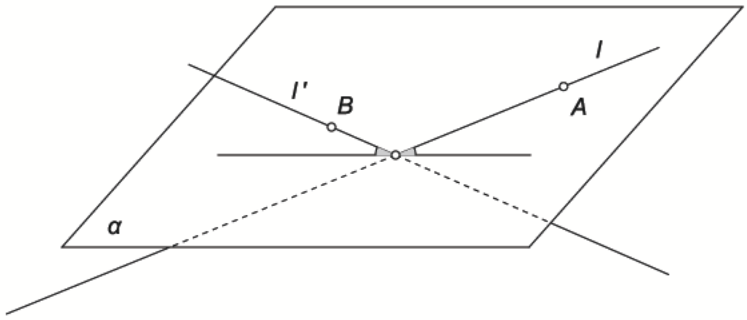
Задача 2.13.32 Дадени са точката $M(7,5,1)$, правата $g : x = 1 + 2s,\ y = 9-s,\ z = -4+2s$ и равнината $\alpha : x+y+2z-8 = 0$. Нека M' е точката, ортогонално симетрична на M относно g, а M'' – точката, ортогонално симетрична на M относно α. Да се намери лицето S на $\triangle MM'M''$.

Упътване. Използвайте, че $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{MM'} \times \overrightarrow{MM''}|$.

Отговор. $S = 6\sqrt{2}$.

Задача 2.13.33 Дадени са точките $A(0,2,3)$, $B(1,4,1)$ и равнината $\alpha : x + 2y - z + 1 = 0$. Светлинен лъч, пуснат от A, след отразяването си от равнината α, минава през B. Да се намерят уравнения на правите на падащия и отразения лъч и ъглите между тях.

Решение. Да означим с l и l' правите съответно на падащия и отразения лъч (Фигура 2.13.). Тогава $l = AB'$ и $l' = A'B$, където A' и B' са ортогонално симетричните точки съответно на A и B относно равнината α. Както в задача 2.13.28, намираме $A'(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3})$, $B'(-2,-2,4)$ и следователно



Фигура 2.13.

$$l : x = 2s,\ y = 2 + 4s,\ z = 3 - s$$

и

$$l' : x = 1 + 5t,\ y = 4 + 10t,\ z = 1 - 8t.$$

Векторът $\overrightarrow{p}(2, 4, -1)$ е колинеарен с l, а $\overrightarrow{q}(5, 10, -8)$ – с l'. Тогава

$$\cos(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})_e = \frac{2.5 + 4.10 + (-1).(-8)}{\sqrt{21}\sqrt{189}} = \frac{58}{63}$$

и ъглите между l и l' са $\varphi_1 = \arccos\dfrac{58}{63}$ и $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$.

Задача 2.13.34 Светлинен лъч, пуснат от точката $A(23, 0, 4)$, след отразяването си от равнината $\alpha : 2x - y + z - 5 = 0$, минава през точката $B(-2, -5, 4)$. Да се намерят уравнения на правите l и l' съответно на падащия и на отразения лъч.

Отговор. $l : z = 4,\ x - 5y - 23 = 0;\quad l' : x = -2 + s,\ y = -5 - 4s,\ z = 4 + 3s.$

Задача 2.13.35 Светлинен лъч, пуснат от началото на координатната система, след отразяването си от равнината $\alpha : 2x + 3y + 2z - 4 = 0$, става успореден на ординатната ос. Да се намерят уравнения на падащия лъч.

Отговор. $l : x = 12s,\ y = s,\ z = 12s.$

Задача 2.13.36 Светлинен лъч, пуснат от точката $A(7,3,6)$ в посоката, определена от вектора $\overrightarrow{p}(-1,3,-2)$, се отразява от равнината $\alpha : 5x+3y-2z+8=0$. Да се намерят уравнения на правата l' на отразения лъч и ъгълът φ на падане.

Упътване. Точката A и векторът $\overrightarrow{p}$ определят правата l на падащия лъч. Тогава $l' = A'B$, където B е прободната точка на l с α, а A' – ортогонално симетричната точка на A относно α.

Отговор. $l' : x = 12+59s,\ y = -12-33s,\ z = 16+22s$; $\varphi = \arccos \dfrac{4}{\sqrt{133}}$.

Задача 2.13.37 Светлинен лъч, пуснат от точката $A(1,1,3)$ успоредно на оста Ox, се отразява от равнината $\alpha : 5x+y-z+12=0$. Намерете точката на отражение B и правата l' на отразения лъч.

Отговор. $B(-2,1,3)$; $l' : x = -2+3s,\ y = 1+10s,\ z = 3-10s$.

Задача 2.13.38 Светлинен лъч, пуснат от точката $A(4,1,2)$, се отразява последователно от координатните равнини Oxy и Oyz. Да се намерят уравнения на правата l'' на повторно отразения лъч, ако след отразяването си от Oyz той минава през точката $B(1,1,4)$.

Упътване. Намерете ортогонално симетричната точка A' на A относно Oxy. Тогава $l'' = A''B$, където A'' е ортогонално симетрична точка на A' относно Oyz.

Отговор. $l'' : x = 1+5s,\ y = 1,\ z = 4+6s$.

Задача 2.13.39 Светлинен лъч, пуснат по оста Oy, се отразява последователно от равнините $\alpha : 2x-3y-z+9=0$ и $\beta : x-y+z+1=0$. Да се намерят уравнения на правата l'' на повторно отразения лъч.

Отговор. $l'' : x = 4+8s,\ y = 3+4s,\ z = -5-19s$.

Задача 2.13.40 Да се намерят уравнения на бисектрисите на правите g_1 и g_2, ако:

а) $g_1 : x = 3+6s,\ y = -2-3s,\ z = 1+2s$,
$g_2 : x = 3+2t,\ y = -2+3t,\ z = 1+6t$;
б) $g_1 : x = 1+3s,\ y = 2+8s,\ z = 3+s$,
$g_2 : x = 1+4t,\ y = 2+7t,\ z = 3+3t$.

Решение. а) Векторите $\overrightarrow{p_1}(6,-3,2)$ и $\overrightarrow{p_2}(2,3,6)$ са колинеарни съответно на g_1 и g_2. Тогава бисектрисите b_1 и b_2 минават през пресечната точка $M(3,-2,1)$ на g_1 и g_2 и са колинеарни съответно с векторите $\overrightarrow{p} = \frac{\overrightarrow{p_1}}{|\overrightarrow{p_1}|} + \frac{\overrightarrow{p_2}}{|\overrightarrow{p_2}|}$ и $\overrightarrow{q} = \frac{\overrightarrow{p_1}}{|\overrightarrow{p_1}|} - \frac{\overrightarrow{p_2}}{|\overrightarrow{p_2}|}$. Намираме $\overrightarrow{p}\left(\frac{8}{7}, 0, \frac{8}{7}\right)$ и $\overrightarrow{q}\left(\frac{4}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}\right)$ и следователно имаме $b_1 : x = 3+u,\ y = -2,\ z = 1+u$ и $b_2 : x = 3-2v,\ y = -2+3v,\ z = 1+2v$.

Отговор. б) $b_1 : x = 1+7u,\ y = 2+15u,\ z = 3+4u$ и $b_2 : x = 1-v,\ y = 2+v,\ z = 3-2v$.

Забележка 2.13.2 Една права се нарича **трансверзала на две кръстосани прави**, ако пресича и двете прави.

Задача 2.13.41 Относно афинна координатна система са дадени точката $A(1,0,1)$, правите $l : x = 1-s,\ y = s,\ z = 4s$, $m : x = 2-u,\ y = 4+2u,\ z = 1$, $n : x = 1+2v,\ y = 2+4v,\ z = -1+3v$ и равнината $\alpha : y+2z = 0$. Да се намерят уравнения на трансверзалата t на кръстосаните прави l и m в случаите, когато:

а) t минава през точката A;

б) t е успоредна на правата n;

в) t лежи в равнината α.

Решение. а) **I начин.** Понеже t минава през точката A и пресича l, тя лежи в равнината α_1, определена от A и l. Равнината α_1 има уравнение

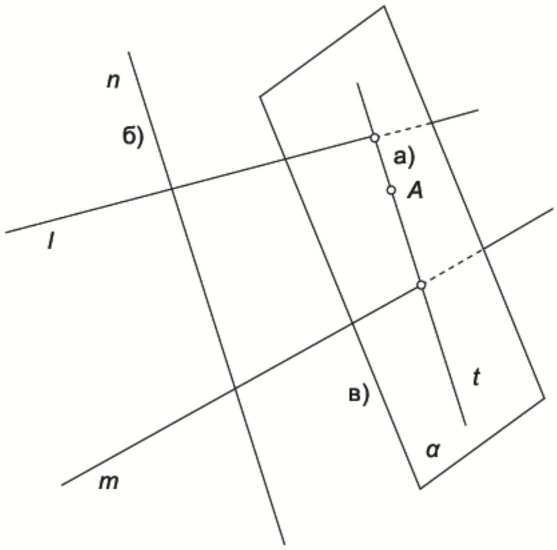
$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } \alpha_1 : x+y-1 = 0.$$

Аналогично (Фигура 2.14.), от изискването t да минава през A и да пресича m следва, че t лежи в равнината α_2 с уравнение

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ \textit{или} } \alpha_2 : z-1 = 0.$$

Следователно трансверзалата t, като пресечница на равнините α_1 и α_2, има уравнения

$$t : x+y-1 = 0,\ z-1 = 0.$$



Фигура 2.14.

II начин. Нека $L_0(1-s_0, s_0, 4s_0)$ и $M_0(2-u_0, 4+2u_0, 1)$ са пресечните точки на търсената трансверзала t с правите l и m. От $\overrightarrow{AL_0} = \lambda\overrightarrow{AM_0}$, като вземем предвид, че $\overrightarrow{AL_0}(-s_0, s_0, -1+4s_0)$, $\overrightarrow{AM_0}(1-u_0, 4+2u_0, 0)$ намираме

$$-s_0 = \lambda(1-u_0),\ s_0 = \lambda(4+2u_0),\ -1+4s_0 = 0.$$

Оттук определяме $s_0 = \dfrac{1}{4}$ и тогава $\overrightarrow{AL_0}(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, 0)$. Трансверзалата t има параметрични уравнения

$$t : x = 1 + w,\ y = -w, z = 1. \tag{2.39}$$

III начин. Тъй като трансверзалата t минава пред точката A, тя има параметрични уравнения от вида

$$t : x = 1 + \lambda.w,\ y = \mu.w,\ z = 1 + \nu.w, \tag{2.40}$$

където векторът $\overrightarrow{p}(\lambda, \mu, \nu)$ е колинеарен с t.

Трансверзалата t пресича l и следователно

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \text{или}\ \lambda + \mu = 0. \tag{2.41}$$

Аналогично от пресичането на t и m следва

$$(2.42)\qquad \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } \nu = 0.$$

От (2.41) и (2.42) намираме $\lambda = \rho$, $\mu = -\rho$, $\nu = 0$, $\rho \neq 0$, и като заместим в (2.40), получаваме (2.39).

б) **I начин.** Понеже трансверзалата t е успоредна на правата n, векторът $\overrightarrow{p}(2,4,3)$ е колинеарен с t (Фигура 2.14.). Тогава t лежи в равнината α_1, която съдържа l и е компланарна с $\overrightarrow{p}$. Имаме

$$\alpha_1 : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \ \textit{или}\ \alpha_1 : 13x - 11y + 6z - 13 = 0.$$

Трансверзалата t лежи и в равнината α_2, която съдържа m и е компланарна с $\overrightarrow{p}$ и следователно

$$\alpha_2 : \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \ \textit{или}\ \alpha_2 : 6x + 3y - 8z - 16 = 0.$$

Тогава t, като пресечница на α_1 и α_2, има уравненията

$$t : 13x - 11y + 6z - 13 = 0,\ 6x + 3y - 8z - 16 = 0.$$

II начин. Тъй като трансверзалата t е успоредна на правата n, тя има параметрични уравнения от вида

$$(2.43)\qquad t : x = x_0 + 2w,\ y = y_0 + 4w,\ z = z_0 + 3w,$$

където (x_0, y_0, z_0) са координатите на някаква точка върху t. Можем да изберем тази точка да съвпада с пресечната точка на t и m и тогава координатите ѝ ще удовлетворяват уравненията на m, т.е. $x_0 = 2 - u_0,\ y_0 = 4 + 2u_0,\ z_0 = 1$. От условието t да пресича l, следва

$$\begin{vmatrix} -1+u_0 & -4-2u_0 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Оттук намираме $u_0 = -\dfrac{5}{7}$ и следователно $x_0 = \dfrac{19}{7}$, $y_0 = \dfrac{18}{7}$, $z_0 = 1$. Заместваме тези стойности в (2.43) и получаваме $t : x = \dfrac{19}{7} + 2w,\ y = \dfrac{18}{7} + 4w,\ z = 1 + 3w$.

в) Трансверзалата t е определена от прободните точки $L(1, 0, 1)$ и $M(5, -2, 1)$ съответно на правите l и m с равнината α (Фигура 2.14.). Тогава $t : x = 1 + 4w,\ y = -2w,\ z = w$.

Задача 2.13.42 Да се намерят уравнения на трансверзалата t на кръстосаните прави p и q, която минава през точката M, ако относно афинна координатна система имаме:

а) $M(-4, -5, 3)$, $p : x = -1 + 3s,\ y = -3 - 2s,\ z = 2 + s$,
$q : x = 2 + 2u,\ y = -1 + 3u,\ z = 1 - 5u$;
б) $M(-4, 9, 1)$, $p : x = 1 + s,\ y = 2 - s,\ z = 3 + 2s$,
$q : x = 2 + u,\ y = -1 - u,\ z = 5 - 2u$;
в) $M(4, 0, 1)$, $p : 2x - y - 5 = 0,\ 3x - 2z + 7 = 0$,
$q : x + 5y - 10 = 0,\ 2y + z - 3 = 0$.

Отговор. а) $t : x = -4 + 3v,\ y = -5 + 2v,\ z = 3 - v$;
б) $t : x = -4 + 2v,\ y = 9 - 3v,\ z = 1$;
в) $t : 25x - 17y + 6z - 106 = 0,\ 3x + y - 7z - 9 = 0$.

Задача 2.13.43 Да се намерят уравнения на трансверзалата t на кръстосаните прави $l : x = 3 + s,\ y = -1 + 2s,\ z = 4s$ и $m : x = -2 + 3u,\ y = -1,\ z = 4 - 5u$, в случаите, когато:

а) минава през точката $A(1, 1, 1)$;
б) е успоредва на правата $n : x - 3y + z = 0,\ x + y - z + 4 = 0$;
в) лежи в равнината $\alpha : x - 3y + z - 5 = 0$.
(Координатната система е афинна).

Отговор. а) $t : 7x + z - 8 = 0,\ 16x + 3y - 19 = 0$;
б) $t : 5x - 5y - 49 = 0,\ 10x - 5z - 4 = 0$;
в) $t : x = 4 + 3w,\ y = 1 + w,\ z = 4$.

Задача 2.13.44 Да се намерят уравнения на трансверзалата t на кръстосаните прави $l : x = 1 + s,\ y = -3 + 2s,\ z = s$ и $m : x = 4 - 2u,\ y = 3u,\ z = -3 + 8u$, която е перпендикулярна на равнината $\alpha : 3x - y - 4z - 24 = 0$.

Упътване. Трансверзалата t е колинеарна с вектора $\overrightarrow{N_\alpha}(3, -1, -4)$.
Отговор. $t : x = 2 + 3v,\ y = 3 - v,\ z = 5 - 4v$.

Забележка 2.13.3 **Ос на две кръстосани прави** се нарича трансверзалата, която е перпендикулярна и на двете прави.

Задача 2.13.45 Да се намерят уравнения на оста на кръстосаните прави l и m, ако:

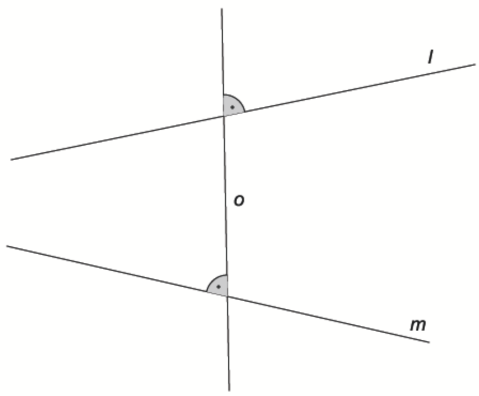
а) $l: x = 1+8s,\ y = 2+4s,\ z = 3+s,\ m: x = 1+2t,\ y = -2t,\ z = -1+t;$

б) $l: x + 4z + 1 = 0,\ x - 4y + 9 = 0,\ m: y = 0,\ x + 2z + 4 = 0.$

Решение. а) **I начин.** Нека $L(1+8s, 2+4s, 3+s)$ и $M(1+2t, -2t, -1+t)$ са точки съответно върху правите l и m. Търсим онези стойности на параметрите s и t, при които $LM \perp l$ и $LM \perp m$. Оттук следва системата

$$\left| \begin{array}{l} 27s - 3t + 4 = 0 \\ s - t = 0, \end{array} \right.$$

която има решението $s = t = -\dfrac{1}{6}$. При тези стойности на параметри-



Фигура 2.15.

те намираме $L(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{17}{6})$, $M(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{7}{6})$ и следователно параметричните уравнения на оста o са $x = \dfrac{2}{3} + u,\ y = \dfrac{1}{3} - u,\ z = -\dfrac{7}{6} - 4u$ (Фигура 2.15.).

II начин. Векторите $\overrightarrow{p}(8, 4, 1)$ и $\overrightarrow{q}(2, -2, 1)$ са колинеарни съответно с правите l и m. Тъй като оста o е перпендикулярна на l и m, то векторът $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ е колинеарен с o. По-нататък задачата се рашава, както задача 2.13.41 б).

Отговор. б) $o: y + z - 2 = 0,\ 2x + 5y + 4z + 8 = 0.$

Забележка 2.13.4 Ос-отсечка на две кръстосани прави се нарича отсечката върху оста, ограничена от кръстосаните прави.

Задача 2.13.46 Да се намери дължината d на оста-отсечка на кръстосаните прави $l: x = 9 + 4s,\ y = -2 - 3s,\ z = s$ и $m: x = -2t,\ y = -7 + 9t,\ z = 2 + 2t$.

Решение. I начин. Ако L е произволна точка от правата l, а μ – равнината, която съдържа m и е успоредна на l, то дължината d на оста-отсечка е равна на разстоянието от L до μ. Да изберем за L точката върху l, която се получава при $s = 0$, т.е. $L(9, -2, 0)$. Равнината μ има уравнение

$$\begin{vmatrix} x & y+7 & z-2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } 3x + 2y - 6z + 26 = 0$$

и следователно $d = |\dfrac{3.9 + 2.(-2) - 6.0 + 26}{\sqrt{49}}| = 7$.

II начин. До същия резултат достигаме и ако използваме идеята в I начин на решението на задача 2.13.45 а). Ако L и M са пресечните точки на оста с l и m, то $d = |LM|$.

Задача 2.13.47 Да се намерят уравнения на оста o и дължината d на оста-отсечка на кръстосаните прави p и q, ако:

а) $p: x = 5+s,\ y = 3-s,\ z = 13+s$, $q: x = 6+t,\ y = 1+2t,\ z = 10-t$;

б) $p: 2x-7y-13 = 0,\ 3y-2z-1 = 0$, $q: x+y-8 = 0,\ 2x+y-z = 0$;

в) $p: x = 6+s,\ y = 1+2s,\ z = 10-s$, $q: 2x+7y-13 = 0,\ 3x+2z-16 = 0$.

Отговор. а) $o: 5x + 4y - z - 24 = 0,\ 4x - y + 2z - 43 = 0$, $d = \sqrt{14}$;
б) $o: 2x - 5y + 8z - 9 = 0,\ x - z + 8 = 0$, $d = 3\sqrt{6}$;
в) $o: 3x - 2y - z - 6 = 0,\ 5x + 34y - 11z - 38 = 0$, $d = 2\sqrt{21}$.

Задача 2.13.48 Дадени са правите $g_1: x = 9 + 6t,\ y = -2t,\ z = 2 - t$ и $g_2: x = -5 + 3u,\ y = -5 + 2u,\ z = 1 - 2u$.

а) Да се намери уравнение на равнината α, съдържаща правата g_1 и успоредна на g_2;

б) Да се намери дължината на ос-отсечката на правите g_1 и g_2.

Отговор. а) $\alpha: 2x + 3y + 6z + 19 = 0$; б) $\sqrt{46}$.

Задача 2.13.49 Дадени са правите $l : x = 7 + s,\ y = 3 + 2s,\ z = 9 - s$ и $m : x = 3 - 7t,\ y = 1 + 2t,\ z = 1 + 3t$.

а) Да се докаже, че правите l и m са кръстосани;

б) Да се намери уравнение на оста на кръстосаните прави l и m;

в) Да се напишат уравнения на успоредните равнини, съдържащи правите l и m;

г) Да се намери разстоянието между равнините от в);

д) Да се намери права, която минава през точката $A(2, -2, 1)$ и пресича правите l и m.

Отговор. б) $o : x = 3 + 2u,\ y = 1 + u,\ z = 1 + 4u$;
в) $l \in \alpha : 2x + y + 4z - 53 = 0,\ m \in \beta : 2x + y + 4z - 11 = 0$;
г) $d = 2\sqrt{21}$;
д) $g : 21x - 13y - 5z - 63 = 0,\ 9x - 3y + 23z - 47 = 0$.

Задача 2.13.50 Даден е $\triangle ABC$ $A(1, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$, $C(1, 1, 1)$. Да се намерят:

а) общо уравнение на равнината α на триъгълника;

б) координатите на медицентъра;

в) координатите на ортоцентъра;

г) координатите на центъра на вписаната окръжност;

д) координатите на центъра на описаната окръжност;

е) вътрешният ъгъл при върха A на триъгълника;

ж) лицето S на триъгълника.

Решение. а) Равнината α на $\triangle ABC$ е определена от точките A, B и C и следователно има общо уравнение

$$\alpha : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad т.е. \quad \alpha : x + z - 2 = 0.$$

б) Координатите на медицентъра M на $\triangle ABC$ са средно аритметични от съответните координати на върховете му. Получаваме $M(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

в) Да означим с β равнината, която минава през A и е перпендикулярна на BC, а с γ – равнината през B, перпендикулярна на AC. Тогава равнините α, β и γ се пресичат в ортоцентъра H на $\triangle ABC$ (Защо?). Тъй като $\overrightarrow{BC}(-1, 1, 1)$ и $\overrightarrow{AC}(0, 1, 0)$, то $\beta : x - y - z = 0$ и $\gamma : y = 0$. Системата от уравнения на α, β и γ има решение $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$ и следователно $H(1, 0, 1)$.

г) Координатите на центъра L на вписаната окръжност намираме като приложим формулата

$$\overrightarrow{OL} = \frac{|BC|.\overrightarrow{OA} + |CA|.\overrightarrow{OB} + |AB|.\overrightarrow{OC}}{|BC| + |CA| + |AB|}$$

получаваме

$$L\left(\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right).$$

д) Центърът Z на описаната окръжност около $\triangle ABC$ е пресечната точка на равнината α на триъгълника и симетралните равнини σ_1 и σ_2 съответно на страните CA и BC. Намираме $\sigma_1 : 2y - 1 = 0$, $\sigma_2 : -2x + 2y + 2z + 1 = 0$ и от системата уравнения на α, σ_1 и σ_2 получаваме $Z(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

е) От равенството $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})_e = \dfrac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{|AB||AC|} = 0$ следва, че $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})_e = \dfrac{\pi}{2}$.

ж) От $S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ и $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})(1, 0, 1)$ намираме $S = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 2.13.51 Точките $A(5, 0, 3)$ и $B(3, 3, 1)$ са върхове при основата на равнобедрения $\triangle ABC$, а равнината на триъгълника е успоредна на правата $g : x = 3s,\ y = s,\ z = 3s$. Да се намери лицето на триъгълника, ако се знае, че върхът C лежи в равнината Oxz.

Упътване. Върхът C е общата точка на равнината на $\triangle ABC$, равнината Oxz и симетралната равнина на отсечката AB.

Отговор. $C(2, -\dfrac{7}{6}, 0),\ S = \dfrac{17\sqrt{2}}{3}$.

Задача 2.13.52 Дадени са точките $A(3, 3, 1)$, $M(0, 2, -1)$ и правата $h_C : x = -2,\ y = 1 + s,\ z = -2 - s$. Да се намерят координатите на върховете B и C на $\triangle ABC$, за който точката M е медицентърът, а правата h_C – височината през върха C.

Решение. Правата AB е пресечницата на равнината α на $\triangle ABC$ с равнината β, която минава през върха A и е перпендикулярна на правата

h_C. Равнината α е определена от точките $A(3,3,1)$, $M(0,2,-1)$ и произволно избрана точка от h_C, например $L(-2,1,-2)$. Следователно α има уравнение $x-y-z+1=0$. Равнината β минава през A и има нормален вектор $\overrightarrow{N_\beta}(0,1,-1)$. Оттук следва, че β има уравнение $y-z-2=0$. Тогава правата AB е определена с двойката уравнения $x-y-z+1=0$, $y-z-2=0$ и следователно има параметрични уравнения $AB: x=3+2u,\ y=3+u,\ z=1+u$. Понеже точката B лежи на правата AB, тя има координати от вида $(3+2u_0, 3+u_0, 1+u_0)$. Аналогично, върхът C е точка от h_C и следователно и неговите координати са от вида $(-2, 1+s_0, -2-s_0)$. Тъй като координатите на медицентъра $M(0,2,-1)$ са средно аритметични от съответните координати на трите върха A, B и C, то имаме системата

$$\left|\begin{array}{l} 3+3+2u_0-2=0 \\ 3+3+u_0+1+s_0=6 \\ 1+1+u_0-2-s_0=-3, \end{array}\right.$$

от която намираме $s_0=1$, $u_0=-2$. С тези стойности получаваме $B(-1,1,-1)$ и $C(-2,2,3)$.

Задача 2.13.53 Правите $h_A: x=2-s,\ y=1,\ z=-3+2s$ и $b_A: x=1-t,\ y=2+t,\ z=-1+2t$ са съответно височината и ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A на $\triangle ABC$. Да се намерят уравнения на страните на триъгълника, ако $B(1,0,z)$.

Решение. Най-напред намираме върха $A(2,1,-3)$ като пресечна точка на h_A и b_A. Равнината α на $\triangle ABC$ има общо уравнение

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т.е.} \quad 2x+z-1=0.$$

Понеже върхът B лежи в равнината α, за третата му координата намираме $z=-1$ и следователно $B(1,0,-1)$. Тогава имаме

$$AB: x=1+u,\ y=u,\ z=-1-2u.$$

Правата AC е определена от точката A и ортогонално симетричната точка B' на B относно ъглополовящата b_A. Намираме $B'(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{7}{3})$ и тогава

$$AC: x=2+v,\ y=1-7v,\ z=-3-2v.$$

Правата BC е пресечница на равнината α на $\triangle ABC$ с равнината β, която минава през B и е перпендикулярна на височината h_A. Тъй като за β намираме уравнението $x - 2z - 3 = 0$, то

$$BC : 2x + z - 1 = 0,\ x - 2z - 3 = 0.$$

Задача 2.13.54 Даден е $\triangle ABC$, в който правите $b_A : x - y = 0,\ z - 2 = 0$, $b_B : x = 3 + 2t,\ y = 3 - t,\ z = 2$ и $b_C : x = 2 - u,\ y = 6 + 3u,\ z = 2$ са ъглополовящите на вътрешните ъгли при върховете A, B и C, а центърът P на вписаната окръжност се намира на разстояние $d = \sqrt{2}$ от върха A. Да се намерят координатите на върховете на триъгълника.

Решение. Центърът P на вписаната окръжност е пресечната точка на ъглополовящите, откъдето намираме $P(3, 3, 2)$. Ъглополовящата b_A има параметрични уравнения $x = s,\ y = s,\ z = 2$ и понеже A лежи на b_A, то $A(s_0, s_0, 2)$. От $d = |PA| = \sqrt{2}$ получаваме уравнението $(s_0 - 3)^2 = 1$, от което определяме $s_0' = 4$ и $s_0'' = 2$. Следователно за върха A намираме две положения: $A'(4, 4, 2)$ и $A''(2, 2, 2)$. По-нататък продължаваме решението само с $A'(4, 4, 2)$.

Правата BC минава през точките A_1' и A_2', които са ортогонално симетричните точки на върха A' съответно спрямо ъглополовящите b_B и b_C (Защо?). Намираме $A_1'(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}, 2)$ и $A_2'(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}, 2)$ и тогава $BC : x = \frac{14}{5} - 3v,\ y = \frac{8}{5} + 4v,\ z = 2$.

Върховете B и C са пресечните точки на BC съответно с b_B и b_C. Оттук получаваме $B(1, 4, 2)$ и $C(4, 0, 2)$. Ако работим с $A''(2, 2, 2)$ по аналогичен начин намираме $B(5, 2, 2)$ и $C(2, 6, 2)$.

Задача 2.13.55 Правите $b_A : x = s,\ y = 1 + s,\ z = 1$, $b_B : x + 2y + z - 9 = 0,\ x + 2y - 8 = 0$ и $b_C : 3x + y - 9 = 0,\ 6x + 2y - 3z - 15 = 0$ са ъглополовящите на вътрешните ъгли при върховете A, B и C на $\triangle ABC$. Да се намерят координатите на върховете A, B и C, ако центърът P на вписаната окръжност се намира на разстояние $d = \sqrt{5}$ от върха B.

Отговор. $A'(3, 4, 1)$, $B'(0, 4, 1)$, $C'(3, 0, 1)$;
$A''(1, 2, 1)$, $B''(4, 2, 1)$, $C''(1, 6, 1)$.

Задача 2.13.56 Дадени са правите $b_A : x = 2s,\ y = -s,\ z = \sqrt{5}s$, $c : x = 0,\ y = 0$ и точката $H(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{6})$. Да се намерят координатите на върховете на $\triangle ABC$, ако b_A и c са съответно вътрешната ъглополовяща и страна през върха A, а H е петата на височината през същия връх.

Отговор. $A(0, 0, 0)$, $B(0, 0, 1)$, $C(2, -1, 0)$ или $A(0, 0, 0)$, $B(2, -1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Библиография

[1] **Борисов, А., Г. Станилов**, Ръководство по аналитична геометрия, *Университетско издателство „Св. Кл. Охридски“, София*, 1991.

[2] **Гаврилов, М., Г. Станилов**, Линейна алгебра и аналитична геометрия, *Наука и изкуство, София*, 1991.

[3] **Апатенок, Р. Ф., А. М. Маркина, В. Б. Хейнман**, Сборник задач по линейной алгебре и аналитичной геомитрии, *Вышейшая школа, Минск*, 1990.

[4] **Гьонов, А., Н. Стоев**, Сборник от задачи по аналитична геометрия, *Наука и изкуство, София*, 1988.