



Микропроцессорные устройства обработки сигналов

Лекция L03
«Представление целых чисел»

<http://vykhovanets.ru/course67/>

Представление чисел

- Натуральные числа: N8, N16, N32, N64.
- Целые числа: Z8, Z16, Z32, Z64.
- Числа с фиксированной запятой: Q4.12, Q1.15, Q1.31.
- Числа с плавающей запятой: F32, F64, F80.
- Рациональные числа $\frac{\text{числитель}}{\text{знаменатель}}$: R8, R16, R32, R64.
- Логарифмические форматы (логарифм значения и знак).
- Символьные форматы.

Целые и натуральные числа

Числа без знака (формат N)

x_{15}	x_{14}	x_{13}	x_{12}	x_{11}	x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0
2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1

$$= (1 \times 2^{15}) + (0 \times 2^{14}) + (0 \times 2^{13}) + (0 \times 2^{12}) + (0 \times 2^{11}) + (0 \times 2^{10}) + (0 \times 2^9) + (1 \times 2^8) + (0 \times 2^7) + (1 \times 2^6) + (1 \times 2^5) + (0 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$$

$$= (1 \times 2^{15}) + (1 \times 2^8) + (1 \times 2^6) + (1 \times 2^5) + (1 \times 2^0)$$

$$= 32768 + 256 + 64 + 32 + 1 = 33121$$

$$X = \sum_{i=0}^{15} x_i \cdot 2^i$$

Числа со знаком (формат Z)

S	x_{14}	x_{13}	x_{12}	x_{11}	x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0
-2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1

$$= (1 \times (-2^{15})) + (0 \times 2^{14}) + (0 \times 2^{13}) + (0 \times 2^{12}) + (0 \times 2^{11}) + (0 \times 2^{10}) + (0 \times 2^9) + (1 \times 2^8) + (0 \times 2^7) + (1 \times 2^6) + (1 \times 2^5) + (0 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$$

$$= (1 \times (-2^{15})) + (1 \times 2^8) + (1 \times 2^6) + (1 \times 2^5) + (1 \times 2^0)$$

$$= -32768 + 256 + 64 + 32 + 1 = -32768 + 353 = -32415$$

$$X = -s \cdot 2^{15} + \sum_{i=0}^{14} x_i \cdot 2^i$$

Целочисленные форматы

N16 [0, 65 535], $\varepsilon = 1$

Вес	2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Разряд	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Бит	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Z16 [-32 768, 32 767], $\varepsilon = 1$

-2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

N32 [0, 4 929 967 295], $\varepsilon = 1$

2^{31}	2^{30}	2^{29}	2^{28}	2^{27}	2^{26}	2^{25}	2^{24}	2^{23}	2^{22}	2^{21}	2^{20}	2^{19}	2^{18}	2^{17}	2^{16}	2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Z32 [-2 147 483 648, 2 147 483 647], $\varepsilon = 1$

-2^{31}	2^{30}	2^{29}	2^{28}	2^{27}	2^{26}	2^{25}	2^{24}	2^{23}	2^{22}	2^{21}	2^{20}	2^{19}	2^{18}	2^{17}	2^{16}	2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

$$X_{N16} = \sum_{i=0}^{15} x_i \cdot 2^i$$

$$X_{N32} = \sum_{i=0}^{31} x_i \cdot 2^i$$

$$X_{Z16} = -s \cdot 2^{15} + \sum_{i=0}^{14} x_i \cdot 2^i$$

$$X_{Z32} = -s \cdot 2^{31} + \sum_{i=0}^{30} x_i \cdot 2^i$$

Форматы N16 и Z16

N16

2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

$$X_{N16} = \sum_{i=0}^{15} x_i \cdot 2^i$$

$$1000\ 0000\ 0000\ 1001b = 8009h = 2^{15} + 2^3 + 2^0 = 32777$$

Z16

-2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

$$X_{Z16} = -s \cdot 2^{15} + \sum_{i=0}^{14} x_i \cdot 2^i$$

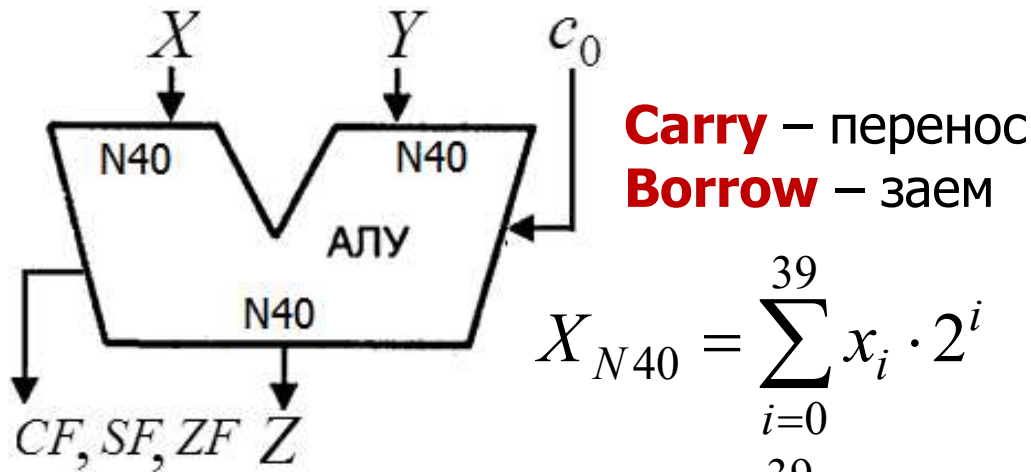
$$1000\ 0000\ 0000\ 1001b = 8009h = -2^{15} + 2^3 + 2^0 = -32757$$

00	0	0000	08	8	1000
01	1	0001	09	9	1001
02	2	0010	10	A	1010
03	3	0011	11	B	1011
04	4	0100	12	C	1100
05	5	0101	13	D	1101
06	6	0110	14	E	1110
07	7	0111	15	F	1111

Внутренний формат N40

N40 [0, 1 099 511 627 775], $\epsilon = 1$

39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	...	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	...	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	



$$X_{N40} = \sum_{i=0}^{39} x_i \cdot 2^i$$

$$CF = c_{40}, SF = z_{39}, ZF = \bigwedge_{i=0}^{39} \bar{z}_i$$

$$c_0 = 0, c_i + x_i + y_i = z_i + 2 \cdot c_{i+1}$$

$$b_0 = 0, -b_i + x_i - y_i = z_i - 2 \cdot b_{i+1}$$

$$X_{N40} + Y_{N40} = \sum_{i=0}^{39} x_i \cdot 2^i + \sum_{i=0}^{39} y_i \cdot 2^i = c_{40} \cdot 2^{40} + \sum_{i=0}^{39} z_i \cdot 2^i \mid CF = 0$$

$$X_{N40} - Y_{N40} = \sum_{i=0}^{39} x_i \cdot 2^i + \sum_{i=0}^{39} \bar{y}_i \cdot 2^i + 1 \mid CF = 1$$

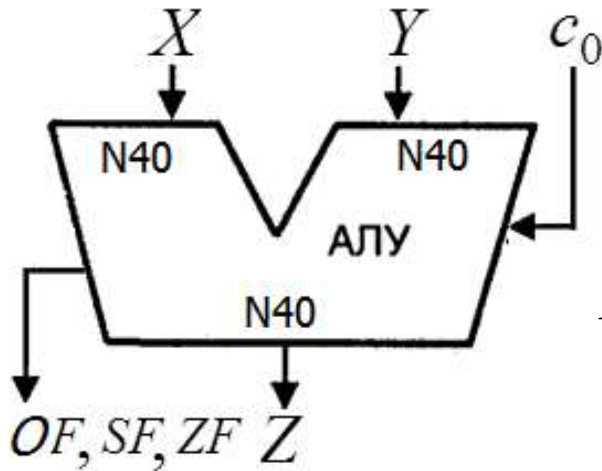
$z = x + y$					$z = x - y$					$z = x + \bar{y} + 1$				
$c_i x_i y_i$	z_i	c_{i+1}			$b_i x_i y_i$	z_i	b_{i+1}			$\bar{b}_i x_i \bar{y}_i$	z_i	\bar{b}_{i+1}		
0 0 0	0 0				0 0 0	0 0				0 0 0	0 0			
0 0 1	1 0				0 0 1	1 1				0 0 1	1 0			
0 1 0	1 0				0 1 0	1 0				0 1 0	1 0			
0 1 1	0 1				0 1 1	0 0				0 1 1	0 1			
1 0 0	1 0				1 0 0	1 1				1 0 0	1 0			
1 0 1	0 1				1 0 1	0 1				1 0 1	0 1			
1 1 0	0 1				1 1 0	0 0				1 1 0	0 1			
1 1 1	1 1				1 1 1	1 1				1 1 1	1 1			

$c_i = \bar{b}_i$

Внутренний формат Z40

Z40 [· - 549 755 813 888, 549 755 813 887], $\epsilon = 1$

39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	...	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
S	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	...	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	



Overflow – переполнение

$$X_{Z40} = -s_x \cdot 2^{39} + \sum_{i=0}^{38} x_i \cdot 2^i$$

$$Y_{Z40} = -s_y \cdot 2^{39} + \sum_{i=0}^{38} y_i \cdot 2^i$$

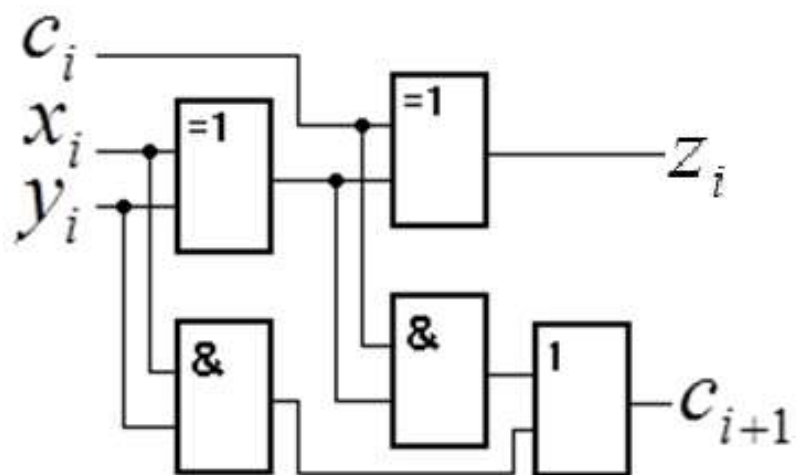
s_x	s_y	c_{39}	c_{40}	s_z	OF
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

$$OF = c_{40} \oplus c_{39}$$

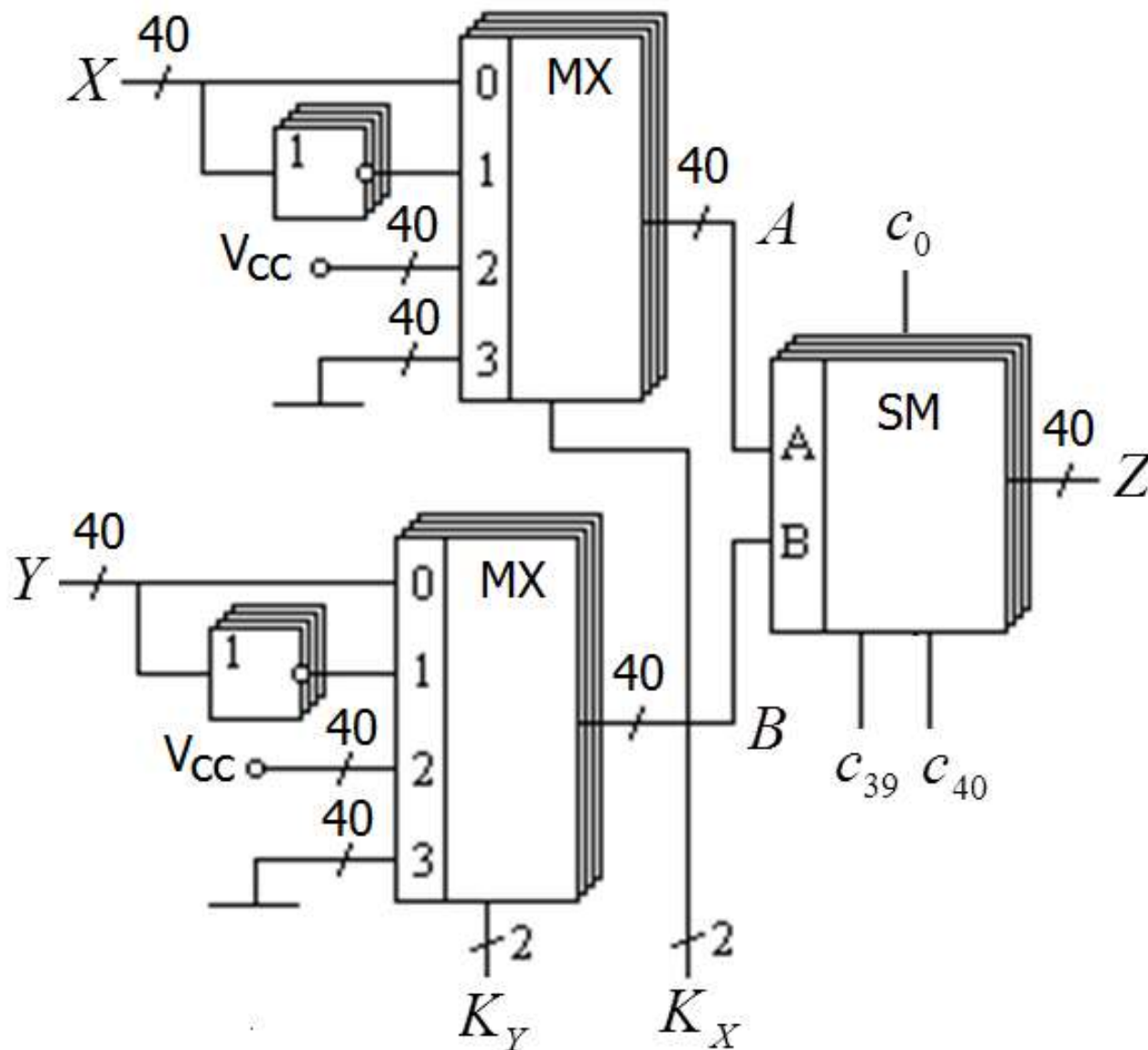
$$X_{Z40} + Y_{Z40} = -s_x \cdot 2^{39} + \sum_{i=0}^{38} x_i \cdot 2^i - s_y \cdot 2^{39} + \sum_{i=0}^{38} y_i \cdot 2^i =$$

$$= -(s_x + s_y + c_{39}) \cdot 2^{39} + \sum_{i=0}^{38} z_i \cdot 2^i = -s_z \cdot 2^{39} + \sum_{i=0}^{38} z_i \cdot 2^i \quad | \quad OF = 0$$

Арифметико-логический блок



$c_i x_i y_i$	$z_i c_{i+1}$	K_X	A
0 0 0	0 0	0	X
0 0 1	1 0	1	\bar{X}
0 1 0	1 0	2	-1
0 1 1	0 1	3	0
1 0 0	1 0		
1 0 1	0 1		
1 1 0	0 1		
1 1 1	1 1		



$$CF = c_{40}, \quad SF = z_{39}, \quad OF = c_{40} \oplus c_{39}, \quad ZF = \bigwedge_{i=0}^{39} \bar{z}_i$$

Двоичная арифметика

Z16	0000	0001	0110	0001
not	1111	1110	1001	1110
inc	0000	0000	0000	0001
neg	1111	1110	1001	1111
add	0000	0001	0110	0001
1	0000	0000	0000	0000

Флаги результата операции:

ZF – **Z**ero (флаг нуля) – равенство всех разрядов результата нулю;

CF – **C**arry (флаг переноса) – наличие переноса за пределы разрядной сетки;

OF – Overflow (флаг переполнения) – не равенство переноса из знакового разряда результата переносу в знаковый разряд;

SF – **S**ign (флаг знака) – наличие единицы в знаковом разряде результата.

<p>N4 [0, 15]</p> <table border="0" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">Вес</td> <td style="padding: 0 10px;">2^3</td> <td style="padding: 0 10px;">2^2</td> <td style="padding: 0 10px;">2^1</td> <td style="padding: 0 10px;">2^0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">Разряд</td> <td style="padding: 0 10px;">3</td> <td style="padding: 0 10px;">2</td> <td style="padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">Бит</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">x</td> </tr> </table>	Вес	2^3	2^2	2^1	2^0	Разряд	3	2	1	0	Бит	x	x	x	x	<p>Z4 [-8, 7]</p> <table border="0" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">Вес</td> <td style="padding: 0 10px;">-2^3</td> <td style="padding: 0 10px;">2^2</td> <td style="padding: 0 10px;">2^1</td> <td style="padding: 0 10px;">2^0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">Разряд</td> <td style="padding: 0 10px;">3</td> <td style="padding: 0 10px;">2</td> <td style="padding: 0 10px;">1</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">Бит</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">s</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">x</td> </tr> </table>	Вес	-2^3	2^2	2^1	2^0	Разряд	3	2	1	0	Бит	s	x	x	x
Вес	2^3	2^2	2^1	2^0																											
Разряд	3	2	1	0																											
Бит	x	x	x	x																											
Вес	-2^3	2^2	2^1	2^0																											
Разряд	3	2	1	0																											
Бит	s	x	x	x																											
<p>+</p> <table border="0" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">0010</td> <td style="padding: 0 10px;">2</td> <td style="padding: 0 10px;">2</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">0010</td> <td style="padding: 0 10px;">2</td> <td style="padding: 0 10px;">2</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 0 10px;">0100</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 0 10px;">4</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 0 10px;">4</td> </tr> </table>	0010	2	2	0010	2	2	0100	4	4	<p>+</p> <table border="0" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">0110</td> <td style="padding: 0 10px;">6</td> <td style="padding: 0 10px;">6</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">0010</td> <td style="padding: 0 10px;">2</td> <td style="padding: 0 10px;">2</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 0 10px;">1000</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 0 10px;">-8</td> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 0 10px;">8</td> </tr> </table>	0110	6	6	0010	2	2	1000	-8	8												
0010	2	2																													
0010	2	2																													
0100	4	4																													
0110	6	6																													
0010	2	2																													
1000	-8	8																													
<p>CF=0, OF=0</p>	<p>CF=0, OF=1</p>																														

```
static inline int CF() {
    int c = 1; // *SP(1)
    asm(
        "    BCC L1, CARRY\n"
        "    MOV #0, *SP(1)\n"
        "    L1: NOP " );
    return c; }

```

```
unsigned int x, y, z; int t;
x = 0xFDE3, y = 0x71A4;
t = -x; if( CF() == 0 ) error();
z = x+y; if( CF() == 1 ) error();
z = x-y; if( CF() == 0 ) error();
```

```
int x, y, z;  
x = 0xFDE3, y = 0x71A4;  
z = -x; if( OF() == 0 ) error();  
z = x+y; if( OF() == 1 ) error();  
z = x-y; if( OF() == 0 ) error();
```

Команды переходов

Код J*	Название	Условие
C	Carry (перенос)	$C = 1$
NC	No carry (не перенос)	$C = 0$
S	Sign (знак)	$S = 1$
NS	No sign (не знак)	$S = 0$
E, Z	Equal (равно), zero (нуль)	$Z = 1$
NE, NZ	No equal (не равно), no zero (не нуль)	$Z = 0$
O	Overflow (переполнение)	$V = 1$
NO	No overflow (не переполнение)	$V = 0$
L, NGE	Less (меньше), no great or equal (не больше или равно)	$S \wedge V = 1$
GE, NL	Great or equal (больше или равно), no less (не меньше)	$S \wedge V = 0$
LE, NG	Less or equal (меньше или равно)	$(S \wedge V) \mid Z = 1$
G, NL	Great (больше), no less (не меньше)	$(S \wedge V) \mid Z = 0$
B, NAE	Below (ниже), no above or equal (не выше или равно)	$C = 1$
AE, NB	Above or equal (выше или равно), no below (не ниже)	$C = 0$
BE, NA	Below or equal (ниже или равно), no above (не выше)	$C \mid Z = 1$
A, NBE	Above (выше), no below or equal (не ниже или равно)	$C \mid Z = 1$



Знаковый формат чисел



Формат чисел без знака

Z40

Z32
$$X_{Z40} = -s_x \cdot 2^{39} + \sum_{i=0}^{38} x_i \cdot 2^i$$

$$\begin{aligned} X_{Z32} &= -s \cdot 2^{31} + \sum_{i=0}^{30} x_i \cdot 2^i = \\ &= -s \left(2^{39} - \sum_{i=31}^{38} 2^i \right) + \sum_{i=0}^{30} x_i \cdot 2^i = \end{aligned}$$

$$= -s \cdot 2^{39} + \sum_{i=0}^{38} x_i \cdot 2^i \quad \left| \begin{array}{l} x_{38} = s \\ x_{37} = s \\ \dots \\ x_{31} = s \end{array} \right.$$

$$2^{39} - \sum_{i=31}^{38} 2^i = 2^{39} - 2^{31} \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 2^{31}$$

Умножение натуральных

$$X_{N16} = \sum_{i=0}^{15} x_i \cdot 2^i, \quad Y_{N16} = \sum_{i=0}^{15} y_i \cdot 2^i, \quad Z = X_{N16} \cdot Y_{N16}.$$

$$Z = \left(\sum_{i=0}^{15} x_i \cdot 2^i \right) \left(\sum_{i=0}^{15} y_i \cdot 2^i \right)$$

$$Z_{\max} = \sum_{i=0}^{15} 2^i \cdot \sum_{i=0}^{15} 2^i = (2^{16} - 1)(2^{16} - 1) = 2^{32} - 2^{17} + 1$$

$$Z_{\min} = 0$$

$$Z_{N32} = \sum_{i=0}^{31} z_i \cdot 2^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a q^i = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

unsigned int x, y;
unsigned long z;
x = 0xFDE3, y = 0x71A4;
z = (long)x*y;

Умножение целых

$$X_{Z16} = -s_x \cdot 2^{15} + \sum_{i=0}^{14} x_i \cdot 2^i, \quad Y_{Z16} = -s_y \cdot 2^{15} + \sum_{i=0}^{14} y_i \cdot 2^i, \quad Z = X_{Z16} \cdot Y_{Z16}.$$

$$Z = \left(-s_x \cdot 2^{15} + \sum_{i=0}^{14} x_i \cdot 2^i \right) \left(-s_y \cdot 2^{15} + \sum_{i=0}^{14} y_i \cdot 2^i \right)$$

$$Z_{\max} = (-2^{15})(-2^{15}) = 2^{30}$$

$$Z_{\min} = -2^{15} \sum_{i=0}^{14} 2^i = -2^{15} \cdot (2^{15} - 1) = -2^{30} + 2^{15}$$

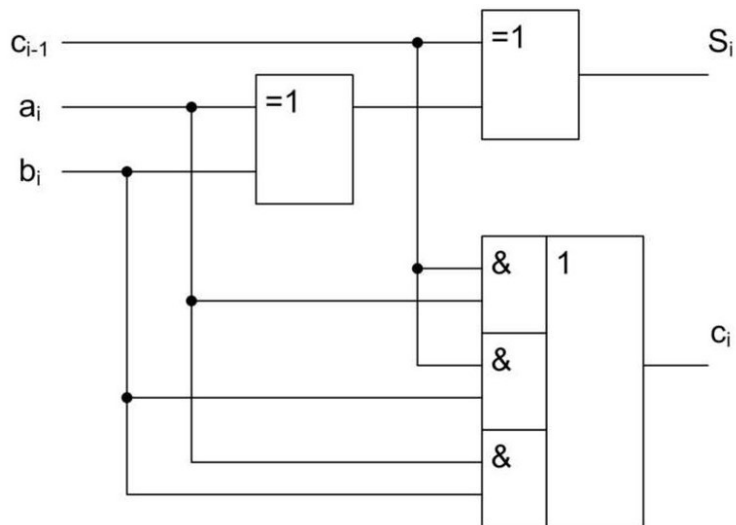
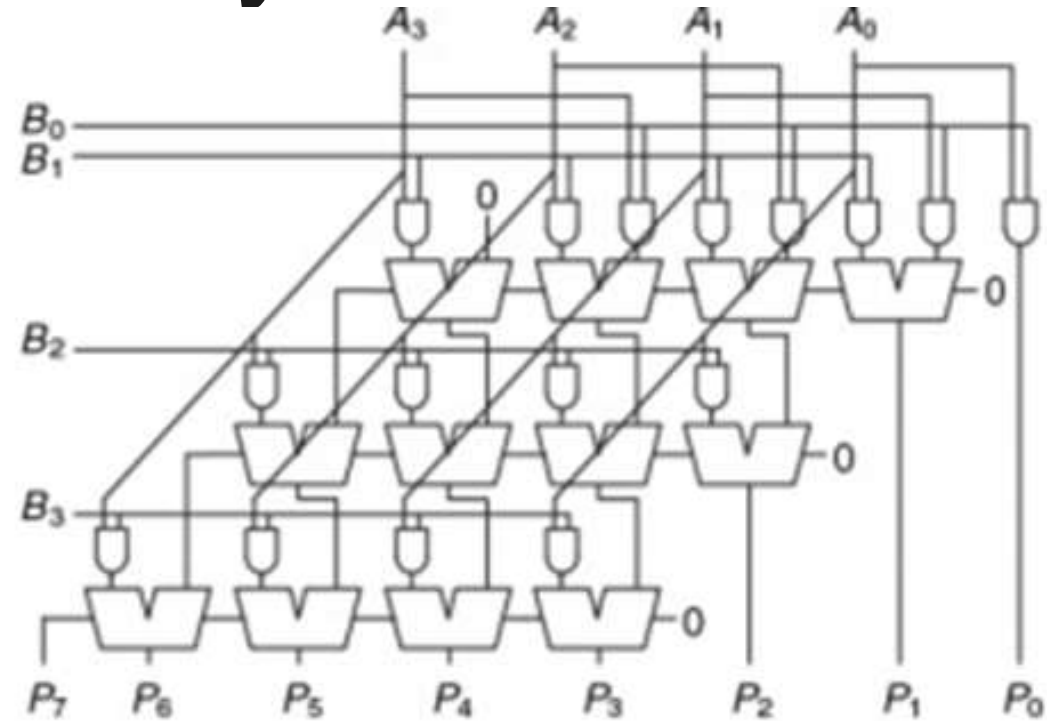
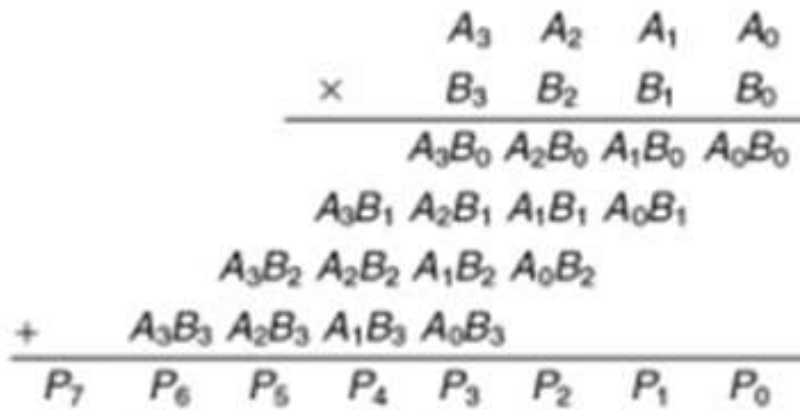
$$Z_{Z32} = -s_z \cdot 2^{31} + \sum_{i=0}^{30} z_i \cdot 2^i, \quad s_z = z_{30} \quad (\text{расширение знака})$$

Z32

31	30	29	28	...	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
S	S	X	X	...	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

```
int x, y; long z;
x = 0xFDE3, y = 0x71A4;
z = (long)x*y;
```


Аппаратурный умножитель



$$S_i = c_{i-1} \oplus a_i \oplus b_i$$

