

# ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ

За лекціями Горбань Н.

Редактори: Терещенко Д.

Людомирський Ю.

# Зміст

<b>1. Лекція 1</b>	<b>3</b>
1.1. Нормальні системи диференціальних рівнянь . . . . .	3
1.2. Основні поняття теорії стійкості. . . . .	5
1.3. Прилади дослідження на стійкість за означенням. . . . .	6

# 1. Лекція 1

## 1.1. Нормальні системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x'_2(t) = f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (1)$$

Системою диф. рівнянь  $n$ -го порядку в нормальній формі називається система вигляду (1), де  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

**Позначення.**

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} - \text{невідома вектор-функція,} \quad \bar{f}(t, \bar{x}(t)) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}, \text{ що}$$

$D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , тоді (1) :  $\bar{x}'(t) = \bar{f}(t, \bar{x}(t))$ .

**Означення. Розв'язком системи** (1) **на**  $(\alpha, \beta)$  **називається така вектор-**  
**функція**  $\bar{x}(t) \in C(\alpha, \beta)$ , **що:**

- 1)  $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$ ;
- 2)  $\bar{x}(t)$  перетворює (1) на тотожність на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .

**Загальним розв'язком системи** (1) **називається**  $n$ -параметрична сім'я розв'язків (1), що охоплює всі розв'язки системи.

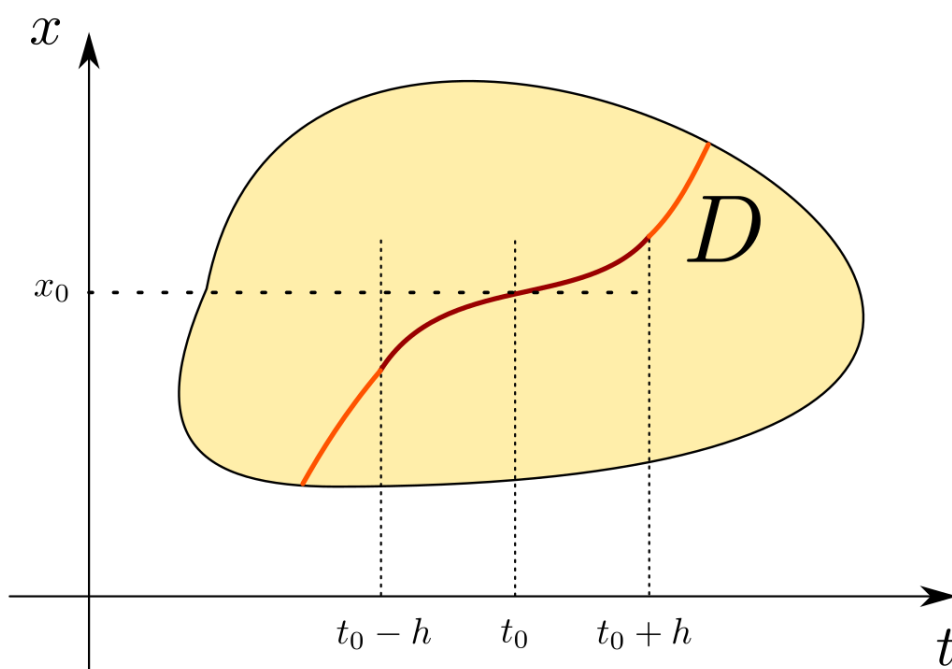
**Задача Коші.** Для заданих  $t_0, \bar{x}^0 \in D$  знайти такий розв'язок (1), що  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$ .

**Теорема 1.1** (Теорема Пеано). Нехай  $\Pi = \{(t, \bar{x}) \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq a, \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq b\}$  та  $\bar{f} \in C(\Pi)$ . Тоді розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}) \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

існує принаймні на проміжку  $I_h = (t_0 - h, t_0 + h)$ , де  $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ ,  
 $M = \max_{(t, x) \in \Pi} \|\bar{f}(t, \bar{x})\|$ .

**Теорема 1.2** (про продовження). Нехай для системи (1) виконується, що  $\vec{f} \in C(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  – обмежена область. Тоді  $\forall t : (t_0, \vec{x}_0) \in D$  існують такі  $t^-, t^+ : t^- < t_0 < t^+$ , що розв'язок системи (1) ???  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$  існує на інтервалі  $(t^-, t^+)$ , причому  $(t^-, x(t^-))$  та  $(t^+, x(t^+))$  належать межі області  $D$ .



**Теорема 1.3** (Теорема Пікара). Нехай

1)  $\vec{f} \in C(\Pi)$ ;

2)  $\exists L > 0 : \forall (t_1, \vec{x}_1), (t_2, \vec{x}_2) \in \Pi$  справедливо, що  $\|f(t_1, \vec{x}_1) - f(t_2, \vec{x}_2)\| \leq$   
 $\leq L \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|$  (умова Ліпшиця).

Тоді  $\exists!$  розв'язок задачі Коші з п. ри?  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0(t)$ , визначений принаймні на  $I_h = (t_0 - h, t_0 + h)$ ,  $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ ,  $M = \max_{\Pi} \|f(t, \vec{x})\|$ .

## 1.2. Основні поняття теорії стійкості.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь  $\vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x})$ :

$$f \in \mathbb{C}(D) \quad D = [a, +\infty] \times G \quad G \in \mathbb{R}^n \quad \forall (t_0, \vec{x}^0) \in D \exists! \text{ розв. З.К.}$$

**Означення.** Розв'язок системи (1) називається стійким за Ляпуновим, якщо:

1)  $\vec{x} = \vec{\varphi}(t) \quad \exists$  на  $[a, +\infty]$ .

2)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0$ , таке, що  $\|\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)\| < \delta$  справедливо, що  $\|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$ .

**Означення.** Розв'язок  $\vec{x} = \varphi(t)$  називається асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо: 1.  $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$  - стійкий.

2.  $\forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \vec{x}(t)$  такого, що  $\|\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)\| < \delta$  справедливо, що:  
 $\|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$

**Означення.** Роз'язок називається **нестійким**, якщо він не є стійким.

### 1.3. Прилади дослідження на стійкість за означенням.

**Приклад.** Дослідити на стійкість розв'язок З.К.:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Знайдемо розв'язок заданої З.К.:  $x = 1 \Rightarrow x = t + C$  - заг. розв.

Підставимо:  $0 = 0 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$  - будемо досліджувати.

Зазначений розв'язок не має вертикальних асимптот та існує на всьому  $\mathbb{R}$ . 2.

Знайдемо розв'язок довільної З.К.  $x(t_0) = x_0$ .

$$x_0 = t_0 + C \Rightarrow C = x_0 - t_0 \Rightarrow x(t) = t + x_0 - t_0$$

3. Нехай  $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$  ;

Тоді  $|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - t_0| < \varepsilon = \delta$ .

Таким чином, розв'язок є стійким, але не є асимптотично стійким.

**Приклад.** Дослідити на стійкість розв'язок З.К.:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + t - x \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Знайдемо розв'язок даної задачі Коші:

$$\dot{x} = -x + 1 + t = | \text{методом Бернуллі} | = t + Ae^{-t}$$

Знайшли загальний розв'язок. Підставимо умову із з. К.:  $A = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$

2. Знайдемо розв'язок довільної З.К.:

$$x(t_0) = x_0 \quad x_0 = t_0 + Ae^{-t_0} \quad A = (x_0 - t_0)e^{t_0}$$

$$x(t) = t + (x_0 - t_0)e^{t_0-t} - \text{загальний розв'язок з. К.}$$

3. Нехай  $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$ . Розглядаємо:  $\forall t \geq t_0$  :

$$|x(t) - \varphi(t)| = |t + (x_0 - t_0) \cdot e^{t_0-t} - t| = |x_0 - t_0| < \delta \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$$

Отримали, що знайдений розв'язок є асимптотично стійким.

Перейдемо знов до систем диф. рівнянь:  $\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}) \quad (1)$ .

$\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$  - розв'язок, який ми маємо дослідити на стійкість.

Заміна  $\bar{z}(t) = \bar{x}(t) - \bar{\varphi}(t)$ . Отримаємо систему:

$$\bar{z}' + \bar{\varphi}' = \bar{f}(t, \bar{z} + \bar{\varphi})(t)$$

$$\bar{f}'(t) = \bar{f}(t, \bar{\varphi}) \implies \boxed{\bar{z}' = \bar{\varphi}(t, \bar{z} + \bar{\varphi}(t)) - \bar{f}(t, \varphi(t))}$$

Sample