Зміст

Ряд Фур'є

1. Ряди Фур'є.

1.1. Поява. Передмова.

Нехай $g(z)$ – аналітична в кільці $K = \left\{z \;\middle|\; 1-\varepsilon_1 < |z| < 1+\varepsilon_2\right\}$; $\left\{z \;\middle|\; |z| = 1\right\} \subset K$.

Розкладаємо $g(z)$ в ряд Лорана за степенями z в цьому кільці:

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot z^n \text{ , де } C_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z$$

$$z : |z| = 1 \implies z = e^{ix} \implies x \in [0, 2\pi] \implies g(z) = g(e^{ix}) = f(x)$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z = \left| \begin{array}{c} z = e^{ix} \\ \mathrm{d}z = ie^{ix}\mathrm{d}x \\ x \in [0, 2\pi] \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$$

Отримали *комплексну форму ряду Фур'є*:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{inx},\ C_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$$

1.2. Комплексна форма ряду Фур'є.

$f \in D[0, 2\pi]$ – періодична, інтегрова на $[0, 2\pi]$. За функцією $f(x)$ будуємо ряд Фур'є:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{inx},\ C_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$$

Питання:

1) Збіжність ряду.
2) Якщо збігається, то зв'язок між $S(x)$ та $f(x)$.

1.3. Випадок дійснозначної функції.

Розглянемо ряд Фур'є:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n \cdot e^{inx} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} = \left| \begin{matrix} \text{в I сумі:} \\ n=-k \end{matrix} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} \cdot e^{-ikx} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} =$$

Окремо розглянемо $C_{-k}e^{-ikx}$: $C_{-k}e^{-ikx} = \overline{C_k e^{ikx}}$:

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(C_n e^{inx} + \overline{C_n e^{inx}} \right)}_{=2\Re(C_n e^{inx}) \in \mathbb{R}} \boxed{=}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot (\cos(nx) - i \sin(nx))\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) \mathrm{d}x - i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \mathrm{d}x$$

$$\Re C_n e^{inx} = \Re \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \mathrm{d}x - i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x \right] \cdot (\cos(nx) + i \sin(nx)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cos(nx) \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) \mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \sin(nx) \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \mathrm{d}x$$

$$\boxed{=} C_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) \mathrm{d}x + \sin(nx) \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \mathrm{d}x$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

Отримали *дійсну форму ряда Фур'є.*

$$f(x) \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

де $a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \mathrm{d}x, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1.4. Не 2π-періодичні функції.

f – $2l$ періодична, або задана на $[0, 2l]$, інтегрована. Розглянемо відображення:

$$[0, 2\pi] \leftarrow [0, 2l] \qquad x \in [0, 2\pi] \qquad x = \frac{t}{l}\pi \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Тоді $f(x) = f(\frac{t}{l}\pi) = g(t)$. $g(t)$ - задана на $[0, 2l]$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} g(t)\cos\left(\frac{\pi n t}{l}\right)\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} g(t)\sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right)\mathrm{d}t$$

$$g(t) = f(x) \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{\pi n t}{l} + b_n\sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} g(t)\cos\left(\frac{\pi n t}{l}\right)\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} g(t)\sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right)\mathrm{d}t$$

Частіше всього, зручно обчислювати коефіцієнти ряду інакше:

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(t)\cos\left(\frac{\pi n t}{l}\right)\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(t)\sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right)\mathrm{d}t$$

1.5. Аналіз збіжності ряду.

Лема (Рімана)**.** f – інтегрована на $[a, b]$ навіть в невласному сенсі.

Тобто $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ – збігається. Тоді:

1) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$

2) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$

Надалі розглядаємо:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

Теорема 1.1. $f(x)$ – 2π-періодична, інтегрована. Тоді:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Часткова сума ряду Фур'є дорівнює:

$$S_k(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \cdot \frac{\sin\frac{2k+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

Підінтегральний множник $\dfrac{\sin\frac{2k+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}} = D_k(u)$ називається *ядром Діріхле*.

Властивості ядра Діріхле:

1) $D_k(u)$ — парна, 2π період функції;

2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_k(u)\mathrm{d}u = 1$;

1.6. Збіжність часткових сум.

Розглядаємо:

$$S_k(x) - C = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)]\cdot D_k(u)\mathrm{d}u - C\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_k(u)\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [f(x+u) + f(x-u) - 2C]\cdot D_k(u)\mathrm{d}u$$

Позначимо: $f(x+u) + f(x-u) - 2C = g_{C,x}(u)$. Отже:

$$S_k(x) - C = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi g_{C,x}(u)D_k(u)\mathrm{d}u$$

Теорема 1.2 (Ознака Діні для рядів Фур'є)**.** $f(x)$ – 2π-періодична, інтегрована. Якщо $\exists\delta > 0 : \int\limits_0^\delta \frac{|g_{C,x}(u)|}{u}\mathrm{d}u$ – збігається, то: $S_\delta(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} C$.

Наслідок. $f(x)$ – диференційована в т. x_0, тоді:

$$S_k(x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \quad\Longleftrightarrow\quad f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx_0) + b_n\sin(nx_0)$$

Наслідок. $f(x)$ – 2π-періодична, інтегрована. x_0 – точка розриву 1го роду ("стрибок"). $f(x)$ має в т. x_0 ліву та праву похідні. Тоді:

$$S_k(x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2}\left(f(x_0+) + f(x_0-)\right)$$

Означення. $f(x)$ задовольняє умові Ліпшиця в околі т. x_0, якщо:

$$\forall x_1, x_2 \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\, |f(x_1) - f(x_2)| \le L\,|x_1 - x_2|$$

Наслідок. $f(x)$ – 2π-період., інтегрована та задов. ум. Ліпшиця в околі т. x_0. Тоді:

$$S_k(x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$$

1.7. Рівномірна збіжність ряду Фур'є.

Теорема 1.3. $f(x)$ – 2π-періодична та кусково-неперервно диференційована. Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ *рівномірно збігається.*

Доведення. Дуже велике доведення – дивіться в конспекті:) ■

1.8. Середні по Чезаре

Означення. $f(x)$ – 2π-періодична, інтегрована.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \text{ – ряд Фур'є для } f(x);$$

$$S_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \text{ – часткові суми;}$$

$$\mathcal{G}_n(x) = \frac{1}{n}(S_1(x), S_2(x), \ldots, S_{n-1}(x)) \text{ — \textit{середні по Чезаро.}}$$

Отримаємо інтегральний вид середніх по Чезаро. Отримали:)

Лема. $f(x)$ – 2π-періодична, інтегрована.

$$S_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \text{ – часткові суми;}$$

$$\mathcal{G}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) \text{ — середні по Чезаре;}$$

Тоді $\mathcal{G}_n(x)$ має інтегральний вигляд:

$$\mathcal{G}_n(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x+2v) + f(x-2v)\right] F_n(v)\mathrm{d}v,$$

де $F_n(v) = \dfrac{\sin^2(nv)}{\pi n \sin^2 v}$ — *ядро Фейера.*

Властивості ядра Фейера:

1) $F_n(-v) = F_n(v)$;
2) $F_n(v)$ – π-періодична;
3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} F_n(v)\mathrm{d}v = \frac{1}{2}$.

Властивості коефіцієнтів ряда Фур'є.

1) $f(x)$ – непарна, задана на $(-l;l)$. Тоді:

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{\pi n x}{l})\mathrm{d}x = 0;$$

2) $f(x)$ – парна, задана на $(-l;l)$. Тоді:

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{\pi n x}{l})\mathrm{d}x = 0.$$

3) $f(x)$ – парна, з періодом $2l$.

   Якщо функція неперервна на $(-l,l)$, то вона неперервна на $\mathbb{R}$.
4) $f(x)$ – непарна. Тоді:

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{\pi n x}{l})\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin(\frac{\pi n x}{l})\mathrm{d}x$$

5) $f(x)$ – парна. Тоді:

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{\pi n x}{l})\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos(\frac{\pi n x}{l})\mathrm{d}x$$

6) $f(x)$ – 2π період. $f(x+\pi) = -f(x)$, тоді: $a_n = b_n = 0$ при $n = 2k, k \in \mathbb{N}$.

1.9. Теорема Фейера.

Теорема 1.4 (Фейера)**.** Задана функція $f \in C[0, 2\pi]$. Тоді:

$$\mathcal{G}_n(f) \rightrightarrows f \text{ на } [0, 2\pi] \quad n \to \infty$$

Наслідок (1)**.** $f \in C[0, 2\pi]$ тоді $\forall \varepsilon > 0$ існує тригонометричний многочлен:

$$T_\varepsilon(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

такий, що $||f - T_\varepsilon|| = \max\limits_{[0,2\pi]} |f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon$.

Наслідок. 2 $f \in C[a, b]$ тоді $\forall \varepsilon > 0\ \exists P_\varepsilon(x)$ – многочлен, такий що:

$$||f - P_\varepsilon|| = \max_{[a,b]} |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon$$

1.10. Рівність Ларсеваля.

Теорема 1.5 (Рівність Ларсеваля)**.** f – 2π-періодична, інтегрована.

Тоді виконується рівність:

$$\int\limits_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Приклад (застосування)**.**

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi] \text{ – \textit{непарна, тому} } a_n = 0\ \forall n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin nx \mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x \cos nx}{n} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx \mathrm{d}x}{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left(-\pi(-1)^n - \pi(-1)^n\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3\pi} \qquad \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^3}{3\pi} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2. Перетворення Фур'є.

Означення. $f(x)$ задана на $\mathbb{R}$ така, що інтеграл: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ збігається.

Перетворенням Фур'є функції $f(x)$ називають:

$$\widehat{f}(\lambda) = \mathrm{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x$$

Властивості:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ збігається $\Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x$ — збігається рівномірно на $\mathbb{R}$.
2) $\widehat{f}(\lambda)$ — неперервна на $\mathbb{R}$.
3) $f(x)$ така, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|x|^k)\,|f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$, тоді:

$$\exists \left(\widehat{f}(\lambda)\right)^k = [\widehat{(ix)^k \cdot f}(x)](\lambda)$$

4) $f(x) \in C^{(k-1)}(\mathbb{R})$ $\exists f^{(k)}(x)$ – інтегрована на $\mathbb{R}$ та $f^{(k)}(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$. Тоді:

$$\widehat{\left[f^{(k)}\right]}(\lambda) = (-i\lambda)^k \widehat{f}(\lambda)$$

cos та sin-перетворення Фур'є.

- cos-перетворення: $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t$
- sin-перетворення: $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t$

3. Зворотнє перетворення Фур'є.

$$g(\lambda): \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda < \infty$$

$$\tilde{g}(x) = \mathrm{F}^{-1}[g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} \mathrm{d}\lambda$$

При цьому маємо:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-A}^{A} \widehat{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} [f(x+t) + f(x-t) - 2i] \frac{\sin At}{t} \mathrm{d}t$$

Позначимо: $h(t) = f(x-t) + f(x+t) - 2i$

Теорема 3.1 (Ознака Діні для пертворення Фур'є)**.**

$$f(x) \quad \longrightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$$

Якщо $\exists \delta > 0 : \int\limits_{0}^{\delta} \left| \frac{h(t)}{t} \right| \mathrm{d}t < \infty :$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} h(t) \frac{\sin At}{t} \mathrm{d}t \xrightarrow[A \to \infty]{} 0$$

Наслідок (1)**.** $f(x)$ – неперервно-дифференційована в т. x_0, тоді:

$$\overset{\times}{f}(\lambda) = f(x_0)$$

Наслідок (1)**.** $f(x)$ – дифференційована в лівому та правому околі т. x_0, тоді:

$$\overset{\times}{f}(\lambda) = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$$

4. Операційне числення. Перетворення Лапласа.

Означення. Функція $f(t)$ називається **оригіналом**, якщо задовільняє умовам:

- $f(t) = 0$ для $t < 0$.
- $f(t)$ – кусково-неперервна.
- $\exists M \ \exists \alpha : |f(t)| < Me^{\alpha t}$

Означення. Функція Хевісайда: $\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Означення. $f(t)$ – оригінал. Степенню зростання $f(x)$ називається число:

$$\sigma(f) = \inf \left\{ \alpha : \exists M \ \ |f(t)| < Me^{\alpha t} \right\}$$