ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ
ТА ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

За лекціями Горбань Н.

Редактори: Терещенко Д.

Людомирський Ю.

2021

Зміст

Лекція 1

1.1 Нормальні системи диференційних рівнянь

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \end{cases} \tag{1}$$

Системою диф. рівнянь n-го порядку в нормальній формі називається система вигляду (1), де $f_i : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad i = \overline{1, n}$.

Позначення.

$$\overrightarrow{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{– невідома вектор-функція,} \quad \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{x}(t)) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}, \text{ що}$$

$D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тоді (1) : $\overrightarrow{x}'(t) = \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{x}(t))$.

Означення. Розв'язком системи (1) на (α, β) називається така вектор-функція $\overrightarrow{x}(t) \in C^1(\alpha, \beta)$, що:

1) $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$;

2) $\overrightarrow{x}(t)$ перетворює (1) на тотожність на інтервалі (α, β).

Загальним розв'язком системи (1) називається n-параметрична сім'я розв'язків (1), що охоплює всі розв'язки системи.

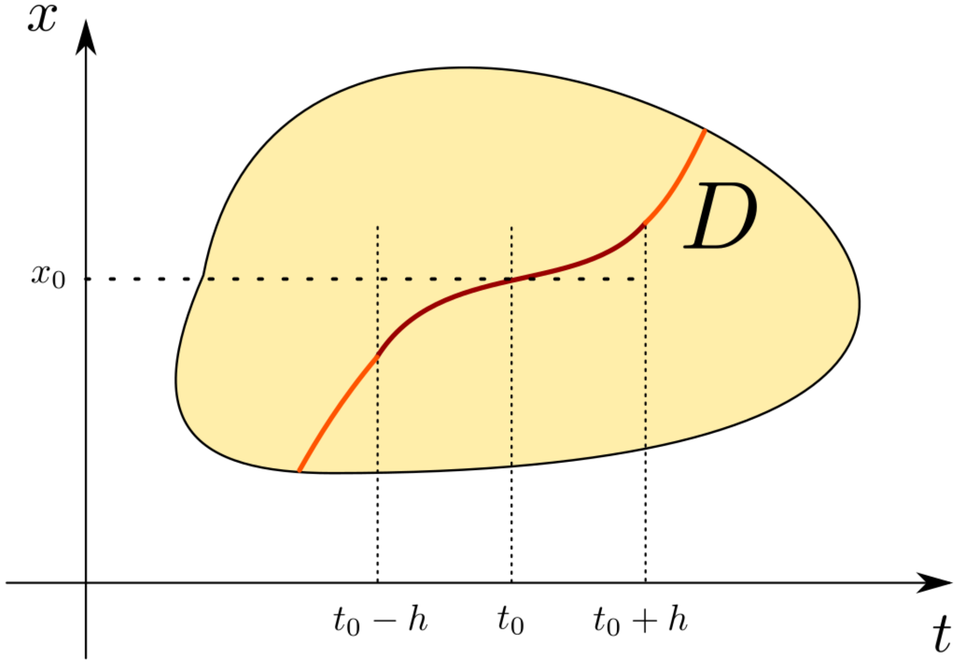
Задача Коші. Для заданих $t_0, \overrightarrow{x}^0 \in D$ знайти такий розв'язок (1), що $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}^0$. Нехай $\Pi = \{(t, \overrightarrow{x}) \in \mathbb{R} \quad | \quad |t - t_0| \le a, \quad ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0|| \le b\}$.

Теорема 1.1 (Теорема Пеано)**.** Нехай $\overrightarrow{f} \in C(\Pi)$. Тоді розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \overrightarrow{x}' = \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{x}) \\ \overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}_0 \end{cases}$$

існує принаймні на проміжку $I_h = (t_0 - h, t_0 + h)$, де $h = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}$, $M = \max\limits_{(t,x)\in\Pi} ||\overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{x})||$.

Теорема 1.2 (про продовження)**.** Нехай для системи (1) виконується, що $\overrightarrow{f} \in C(D)$, $\quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область. Тоді $\forall t : (t_0, \overrightarrow{x}_0) \in D$ існують такі $t^-, t^+ : t^- < t_0 < t^+$, що розв'язок системи (1) з початкової умови $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}_0$ існує на інтервалі (t^-, t^+), причому $(t^-, \overrightarrow{x}(t^-))$ та $(t^+, \overrightarrow{x}(t^+))$ належать межі області D.



Теорема 1.3 (Теорема Пікара)**.** Нехай

1) $\overrightarrow{f} \in C(\Pi)$;
2) $\exists! L > 0 : \forall (t_1, \overrightarrow{x}_1), (t_2, \overrightarrow{x}_2) \in \Pi$ справедливо $||f(t_1, \overrightarrow{x}_1) - f(t_2, \overrightarrow{x}_2)|| \leq$ $\leq L||\overrightarrow{x}_1 - \overrightarrow{x}_2||$ (умова Ліпшиця).

Тоді $\exists!$ розв'язок задачі Коші з початкової умови $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}_0(t)$, визначений принаймні на $I_h = (t_0 - h, t_0 + h),\ h = \min\{a, \frac{b}{M}\},\ M = \max\limits_{\Pi} ||f(t, \overrightarrow{x})||$.

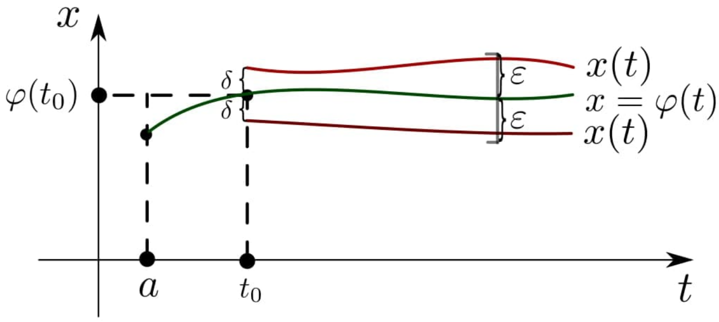
1.2 Основні поняття теорії стійкості.

Розглянемо систему диференційних рівнянь $\overrightarrow{x}' = \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{x})$ (1), де $f : D \to \mathbb{R}^n$ та $D = [a, +\infty) \times G, \quad G \subset \mathbb{R}^n$. Нехай при цьому $\overrightarrow{f}$ задавольняє умовам існування та єдиності розв'язку задачі Коші в будь-якій точці $(t_0, \overrightarrow{x}_0) \in D$

Означення. Розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\varphi}(t)$ системи (1) називається **стійким** за Ляпуновим, якщо

1) $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\varphi}(t) \quad \exists$ на $[a, +\infty)$ (відсутніть вертикальних асимптот)

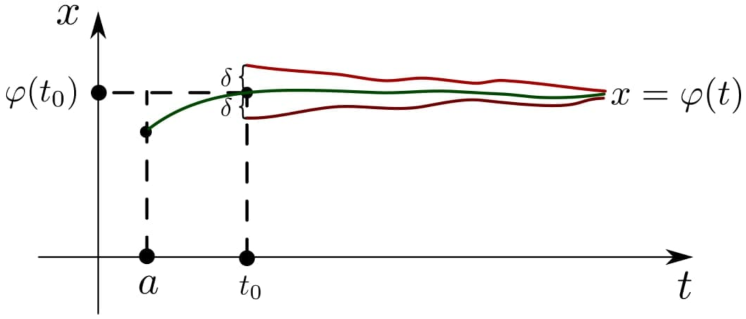
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$ розв'язку $\overrightarrow{x}(t)$ системи (1) такого, що $||\overrightarrow{x}(t_0) - \overrightarrow{\varphi}(t_0)|| < \delta$ виконується наступне, що $\overrightarrow{x}(t)$ існує на $[t_0, +\infty)$ та $||\overrightarrow{x}(t) - \overrightarrow{\varphi}(t)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$.



Означення. Розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\varphi}(t)$ системи (1) називається **асимптотично стійким** за Ляпуновим, якщо

1) $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\varphi}(t)$ стійкий;

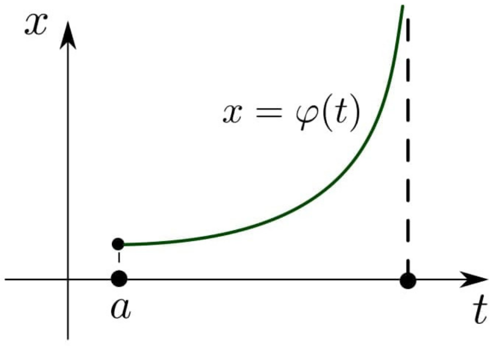
2) $\forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$ розв'язку $\overrightarrow{x}(t)$ с-ми (1) такого, що $||\overrightarrow{x}(t_0) - \overrightarrow{\varphi}(t_0)|| < \delta$ справедливо, що $||\overrightarrow{x}(t_0) - \overrightarrow{\varphi}(t_0)|| \to 0$ при $t \to +\infty$.

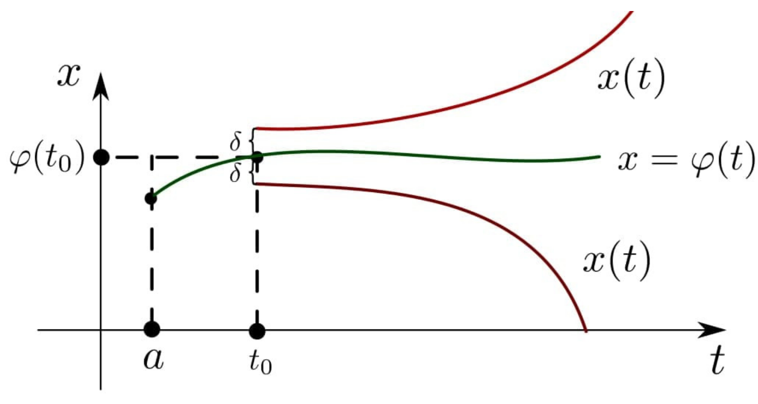


Роз'язок $\overrightarrow{\varphi}(t)$ називається **нестійким за Ляпуновим**, якщо він не є стійким, тобто:

1) Або $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\varphi}(t) \quad \nexists$ на $[a, +\infty)$ (вертикальні асимптоти);

2) Або $\exists \varepsilon > 0 : \exists t_0 \geq a : \forall \delta > 0$ існує розв'язок $\overrightarrow{x}(t)$ системи (1) такий, що $||\overrightarrow{x}(t_0) - \overrightarrow{\varphi}(t_0)|| < \delta$, але $||\overrightarrow{x}(t_0) - \overrightarrow{\varphi}(t_0)|| > \varepsilon$





1.3 Приклади дослідження на стійкість за означенням.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} x' = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1) Знайдемо розв'язок заданої задачі Коші: $x = 1 \Rightarrow x = t + C$ - загальний розв'язок. Підставимо: $x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow$ $\boxed{\varphi(t) = t}$ – розв'язок, який будемо досліджувати. Зазначений розв'язок не має вертикальних асимптот та $\exists$ на $\mathbb{R}$.

2) Знайдемо розв'язок довільної задачі Коші $x(t_0) = x_0$.

$$x_0 = t_0 + C \quad \Rightarrow \quad C = x_0 - t_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = t + x_0 - t_0$$

3) Нехай $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$, тоді $|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - t_0| < \varepsilon = \delta$. Таким чином, розв'язок є стійким, але не є асимптотично стійким.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} x' = 1 + t - x \text{ – лінійне неоднорідне рівняння першого порядку} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1) Знайдемо розв'язок даної задачі Коші:

$$x' = -x + 1 + t = \left| \begin{matrix} \text{метод Бернуллі:} \\ \\ x = uv \end{matrix} \right| = t + Ae^{-t}$$

Знайшли загальний розв'язок. Із умови задачі Коші: $A = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$

2) Знайдемо розв'язок довільної задачі Коші:

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 = t_0 + Ae^{-t_0} \quad \Rightarrow \quad A = (x_0 - t_0)e^{t_0}$$

Отримали: $x(t) = t + (x_0 - t_0)e^{t_0 - t}$ – загальний розв'язок задачі Коші

3) Беремо $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |t_0 - x_0| < \delta$ і розглянемо:

$$|x(t) - \varphi(t)| = |t - t - (x_0 - t_0)e^{t_0 - t}| < \delta e^{t_0 - t} \to 0, \text{ при } t \to +\infty$$

Отже, $\forall t_0 \quad \exists \delta > 0$: для будь-якого розв'язку $x(t)$: $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$ справедливо, що $|x(t) - \varphi(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$. Отримали, що розв'язок даної задачі Коші $\varphi(t) = t$ є асимптотично стійким.

Зауваження. Очевидно, що простіше досліджувати на стійкість розв'язок типу $\varphi(t) = 0$. Нехай (1) $\overrightarrow{x}'(t) = \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{x})$, а $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\varphi(t)}$ – розв'язок, який потрібно дослідити на стійкість. Застосуємо заміну: $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{\varphi}(t)$, де $\overrightarrow{z}$ – нова невідома вектор-функція. Отримаємо систему:

$$\overrightarrow{z}'(t) + \overrightarrow{\varphi}'(t) = \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{z} + \overrightarrow{\varphi}(t)) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{z}'(t) = \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{z} + \overrightarrow{\varphi}(t)) - \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{\varphi})(t) \quad (*)$$

Можно довести, що розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\varphi}(t)$ системи (1) – стійкий (асимптотично стійкий або нестійкий) $\Longleftrightarrow$ розв'язок $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$ системи $(*)$ – стійкий (асимптотично стійкий або нестійкий).

1.4 Стійкість розв'язків лінійних систем

Лінійна неоднорідна система рівнянь n-ого порядку має вигляд (далі ЛНС):

$$\overrightarrow{x}' = A(t)\overrightarrow{x} + \overrightarrow{f}(t). \tag{2}$$

Де $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A(t) \in C[a, +\infty), \quad \overrightarrow{f} \in C[a, +\infty)$

Тоді $\forall t_0 \geq a, \quad \forall \overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний розв'язок ЛНС (2) з початковими умовми $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}_0$, визначений на $[a, +\infty)$.

Нехай $\overrightarrow{\varphi}(t)$ – розв'язок (2), який потрібно дослідити на стійкість. Застосуємо заміну: $\overrightarrow{z}(t) = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{\varphi}(t)$, де $\overrightarrow{z}(t)$ - нова невідома вектор-функція, а $\overrightarrow{\varphi}(t)$ - розв'язок, який ми маємо дослідити на стійкість.

Отримали лінійну однорідну систему першого порядку (далі ЛОС):

$$\overrightarrow{z}'(t) + \overrightarrow{\varphi}'(t) = A(t)\overrightarrow{z}(t) + A(t)\overrightarrow{\varphi}(t) + \overrightarrow{f}(t)$$

$$\overrightarrow{z}' = A(t)\overrightarrow{z} \text{ – ЛОС n-ого порядку} \tag{3}$$

Заміною ми звели дослідження довільного розв'язку лінійної неоднорідної системи до дослідження нульового розв'язку відповідної ЛОС. Таким чином, приходимо до висновку, що усі розв'язки є одночасно стійкими, асимптотично стійкими або не стійкими. А отже, розглядаючи будь-яку лінійну систему, можемо говорити про стійкість не окремого розв'язку, а системи в цілому. Дослідкуючи при цьому розв'язок $\overrightarrow{x}(t) = \overrightarrow{0}$

Розв'яжемо ЛОС (3) (перейдемо до змінної x): $\quad \overrightarrow{x}' = A(t)\overrightarrow{x}$ – ЛОС (3).

$X(t)$ – її фундаментальна матриця (далі позначаємо ФМ). Тоді загальний розв'язок: $\overrightarrow{x}(t) = X(t) \cdot \overrightarrow{C}$, де $\overrightarrow{C} \in \mathbb{R}^n$. Розв'язок задачі Коші з початковими умовами $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x_0}$:

$$\overrightarrow{x}_0 = X(t_0) \cdot \overrightarrow{C} \Rightarrow \overrightarrow{C} = X^{-1}(t_0) \cdot \overrightarrow{x_0} \Rightarrow \boxed{x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\overrightarrow{x}_0}$$

Теорема 1.4 (Про стійкість ЛОС)**.**

а) (3) - стійка $\Longleftrightarrow \exists K > 0 : \sup\limits_{t \geq a} ||X(t)|| \leq K$.

б) (3) - асимптотично стійка $\Longleftrightarrow ||X(t)|| \to 0$, при $t \to +\infty$.

в) (3) - нестійка. $\Longleftrightarrow \exists \{t_n\}_{n=1}^{\infty} : ||X(t_n)|| \to +\infty$, при $n \to \infty$

Доведення. а) $\boxed{\Longleftarrow}$

Нехай $\exists K > 0 : \sup\limits_{t \geq a} ||X(t)|| \leq K$.

Доведемо стійкість розв'язку $\overrightarrow{x}(t) = \overrightarrow{0}$. За означенням, візьмемо розв'язок довільної задачі Коші з початковими умовами $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}_0$. Нехай $||\overrightarrow{x}_0|| < \delta$ і розглянемо $||\overrightarrow{x}(t)|| = ||X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot \overrightarrow{x}_0|| \leq ||X(t)|| \cdot ||X^{-1}(t_0)|| \cdot ||\overrightarrow{x}_0|| \leq K \cdot ||X^{-1}(t_0)|| \cdot ||\overrightarrow{x}_0|| < K||X^{-1}(t_0)||\delta < \varepsilon$ при $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K||X^{-1}(t_0)|| + 1}$. Отже,

$\forall t_0 \geq a \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left(\delta = \dfrac{\varepsilon}{K||X^{-1}(t_0)|| + 1}\right)$ для довільного розв'язку

з $||\overrightarrow{x}_0|| < \delta$ справедливо $||\overrightarrow{x}(t)|| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad$ стійкість розв'язку. ■

Доведення. а) $\boxed{\Longrightarrow}$

Нехай (3) - стійка. Припустимо від супротивного, що

$$\exists \{t_n\}_{n\geq 1}^{\infty} : t_n \to +\infty : ||X(t_n)|| \to +\infty \text{ при } n \to \infty$$

Тоді $\exists j = \overrightarrow{1, n} : ||\overrightarrow{x}^j(t_n)|| \to \infty$, де $\overrightarrow{x}^j$ - це j-тий стовпчик ФМ.

Покладемо $\forall \delta > 0 :$

$$\overrightarrow{x}_0^{\delta} = \frac{\delta X(t_0) \overrightarrow{e}_j}{2||X(t_0)||} \text{ , де } \overrightarrow{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - j$$

Тоді $||\overrightarrow{x}_0^{\delta}|| = \dfrac{1}{2||X(t_0)||} \cdot \delta ||X(t_0) \cdot \overrightarrow{e}_j|| < \delta$.

Розглядаємо розв'язок задачі Коші з початковими умовами $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}_0^{\delta}$. Маємо:

$$\overrightarrow{x}(t) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot \overrightarrow{x}_0^{\delta} = X(t) X^{-1}(t_0) \cdot \frac{\delta X(t_0) \overrightarrow{e}_j}{2||X(t_0)||} = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{X(t) \overrightarrow{e}_j}{||X(t_0)||} = \frac{\delta}{2||X(t_0)||} \cdot \overrightarrow{x}^j(t)$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \forall n \geq n_0$$

$$||\overrightarrow{x}(t_n)|| = \frac{\delta}{2||X(t_0)||} \cdot ||\overrightarrow{x}^j(t_n)|| \to \infty > \varepsilon$$

Отримали нестійкість системи $\Rightarrow$ суперечність початковій побудові $\Rightarrow$ а).

Пункт б) доводиться аналогічно а). Пункт в) випливає із пукнта а). ■

1.5 Стійкість ЛОС зі сталою матрицею.

$$\overrightarrow{x}'(t) = A\overrightarrow{x}(t), \text{ де } A \text{ - стала матриця } n \times n \tag{4}$$

Теорема 1.5.

а) (4) - стійка $\Longleftrightarrow \forall\lambda$ - власне число матриці A:

$\Re\lambda \le 0$, причому якщо $\Re\lambda = 0$, то йому відповідають лише одновимірні клітини Жордана.

б) (4) - асимптотично стійка $\Longleftrightarrow \forall\lambda$ - власні числа матриці $A : \Re\lambda < 0$.

в) (4) - нестійка $\Longleftrightarrow$ не є стійкою.

Доведення. Нехай $\lambda = \alpha + i\beta$ - власне число матриці $A \Rightarrow$ у ФМ цьому власному числу відповідає розв'язок:

- якщо λ відповідають лише одновимірні клітини Жордана:

$$\overrightarrow{x}(t) = e^{\alpha t}(\overrightarrow{Q}_0 \cos(\beta t) + \overrightarrow{R}_0 \sin(\beta t))$$

- якщо клітина Жордана розміру l:

$$\overrightarrow{x}(t) = e^{\alpha t}(\overrightarrow{Q}_{l-1} \cos(\beta t) + \overrightarrow{R}_{l-1} \sin(\beta t))$$

Тоді:

якщо $\Re\lambda = \alpha < 0 \Rightarrow ||\overrightarrow{x}(t)|| \to 0$ за $t \to \infty$.

якщо $\Re\lambda = \alpha > 0 \Rightarrow ||\overrightarrow{x}(t)|| \to +\infty$ за $t \to \infty$.

якщо $\Re\lambda = 0$, то:

- якщо лише одновимірні клітини Жордана: $||\overrightarrow{x}(t)||$ - обмежена.
- якщо клітини Жордана розмірності $l \geq 2 : ||\overrightarrow{x}(t)|| \to +\infty$ за $t \to \infty$. ■

Приклад.

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = y - x \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 2)^2$$

Отримали дійсне власне число $\lambda = 2$, кратності 2. $\Re\lambda = 2 > 0 \Rightarrow$ Система нестійка.

Зауваження. Перевірку умов теореми в частині, що стосується стійкості, можна здійснювати нне знаходячи власних чисел матриці A.

Теорема 1.6 (Критерій Рауса-Гурвіца)**.**

$$\det(A - \lambda I) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n; \quad a_1 \in \mathbb{R}, a_0 > 0;$$

$\Re\lambda < 0 \quad \forall\lambda \iff$ всі головні мінори матриці Гурвіца H додатні, де $H = (h_{ij})_{ij=1}^n$

$$h_{ij} = \begin{cases} a_{2i-j}, & 0 \leq 2i - j \leq n; \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases}$$

Лекція 2

2.1 Приклади дослідження на стійкість диф. рівнянь, що описують поведінку екологічних процесів.

2.1.1 Модель одновимірної популяції.

Однією з важливих проблем екології є динаміка чисельності популяції. Нехай маємо популяцію, що складається з особин одного виду, знайдемо закон зміни її чисельності.

Припустимо, що існують лише процеси розмноження та смерті, швидкості яких пропорційні кількості особин в даний момент часу; не враховується внутрішньовидова боротьба; розглядаємо лише одну популяцію (відсутність хижаків).

$x(t)-$ кількість особин в момент t, $\quad R$ – швидкість розмноження.
$\gamma-$ коефіцієнт розмноження, $\quad R = \gamma x$.
$S-$ швидкість природньої загибелі, $\sigma-$ коефіцієнт смертності (природньої).
$S = -\sigma x$, тоді: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \gamma x - \sigma x = (\gamma - \sigma)x$.

Позначення: $\gamma - \sigma = a$.

$$\text{Тоді:} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax} \text{ – закон Мальтуса.}$$

Томас Мальтус (1766-1834), – англійский вчений, демограф, економіст, священик; робота 1798 року: "Все про принципи народонаселення".

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax \Longrightarrow x(t) = C \cdot e^{at} \text{ – загальний розв'язок.}$$

Нехай в початковий момент часу $t_0 = 0$ кількість особин складає x_0 особин:

$$x(0) = x_0$$

Тоді: $x(t) = x_0 \cdot e^{at}$ – розв'язок даної задачі Коші. Розглянемо випадки:

1) $a < 0$ (помирають більше, ніж народжується). Оскільки дане рівняння є лінійним, то всі розв'язки водночас стійкі (нестійкі, асимптотично стійкі). Тому дослідимо на стійкість розв'язок $\varphi(t) = 0$ (умова 1. стійкості

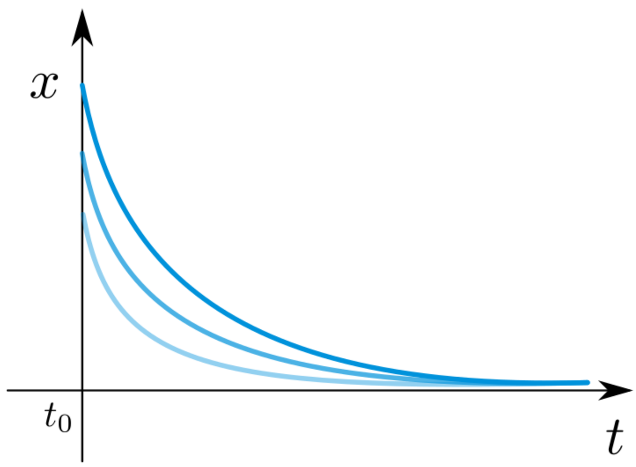
виконується); розв'язок довільної задачі Коші:

$$x(t_0) = x_0 \quad : \quad x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$$

Нехай $|x_0| < \delta$. Розглянемо:

$$\forall t \geq t_0 \quad |x(t)| = \underbrace{e^{a(t-t_0)}}_{<1, \text{ при } t \geq t_0} |x_0| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 < \varepsilon \text{ при } \varepsilon = \delta$$

$\Rightarrow$ всі розв'язки рівняння асимптотично стійкі та прямують до нуля.

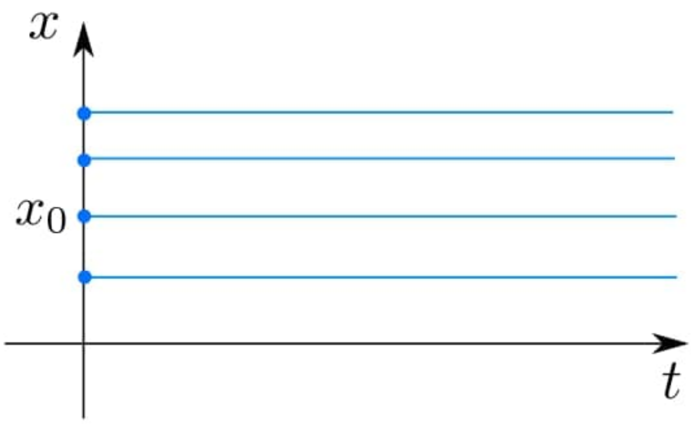


Це означає, що якою б великою не була кількість особин в початковий момент часу, якщо смертність перевищує народжуваність, кількість особин з часом прямує до 0 ($t \to +\infty$).

2) a = 0 (смертність = народжуваність). В цьому випадку розв'язок задачі Коші:

$$x(t_0) = x_0 \quad : \quad x(t) = x_0$$

Відповідно при $|x_0| < \delta$ маємо $|x(t)| = |x_0| < \varepsilon = \delta$. Отримали стійкість, але не асимптотичну.



Чисельність особин є сталою в кожний момент часу, коли смертність співпадає з народжуваністю.

3) a $>$ 0 (смертність $<$ народжуваність). Візьмемо $\varphi(t) = 0$, розв'язок для будбудь-якої задачі Коші:

$$x(t_0) = x_0 e^{a(t-t_0)}$$

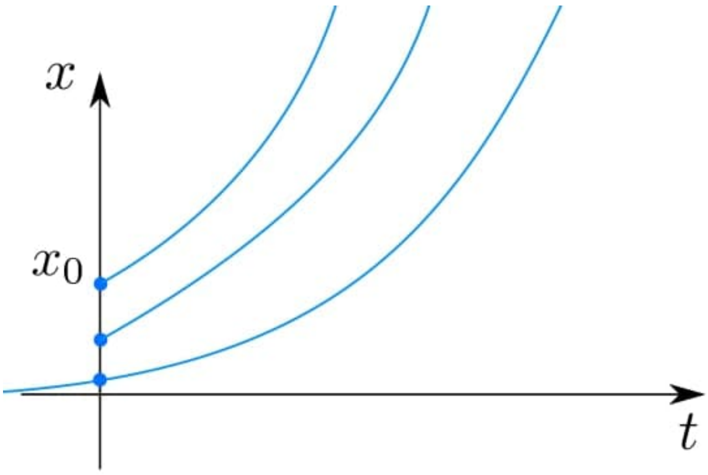
Нехай $|x_0| < \delta$

$$\forall t \geq t_0 \quad |x(t)| = e^{a(t-t_0)}|x_0| \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

Отже,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists t_0 \geq 0 : \forall \delta > 0$$

для розв'язку $x(t)$ з початковими умовами $x(t_0) = x_0 : |x(t_0)| < \delta$, але $|x(t)| > \varepsilon$, починаючи з деякого моменту (нестійкість)



В даному випадку чисельність особин необмежено, експоненційно зростає з часом і $\to +\infty$ при $t \to +\infty$, розв'язки рівняння нестійкі.

2.1.2 Модель Ферхюльста (логістична модель)

Нехай між особинами є внутрішньовидова боротьба, що додає додаткове джерело загибелі. Отже смертність:

1) природна: $-\sigma x$;

2) внутрішньовидова боротьба: $-\mu x^2$.

Швидкість народжуваності: $R = \gamma x$. Швидкість смертності: $S = -\sigma x - \mu x^2$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \gamma x - \sigma x - \mu x^2 = \underbrace{(\gamma - \sigma)}_{=a} x - \mu x^2$$

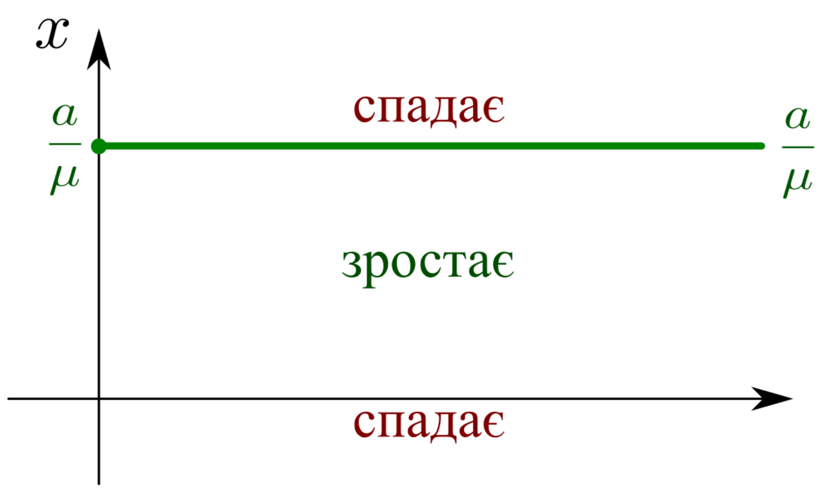
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - \mu x^2} \text{ – закон Ферхюльста.}$$

Розглянемо $a > 0$, тобто народжуваність більше смертності.

Зауважимо, що $ax - \mu x^2 = x(a - \mu x)$.

Проаналізувавши праву частину, бачимо, що:

- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} > 0(\uparrow)$ при $x \in (0, \frac{a}{\mu})$
- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < 0(\downarrow)$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{a}{\mu}, +\infty)$
- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ при $x = 0 \vee x = \frac{a}{\mu}$



Розв'яжемо рівняння: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - \mu x^2$ – рівняння Бернуллі.

$$x = u \cdot v, \quad u'v + v'u - auv = -\mu u^2 v^2, \quad u'v + u(v' - av) = -\mu u^2 v^2$$

$$v' = av, \quad \frac{\mathrm{d}v}{v} = a\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad v = e^{at}, \quad u' = -\mu u^2 v, \quad \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\mu e^{at}\mathrm{d}t$$

Тоді: $-\dfrac{1}{u} = -\dfrac{\mu}{a}e^{at} - C$, звідси отримуємо:

$$u = \frac{1}{\frac{u}{a}e^{at} + c} = \frac{a}{\mu e^{at} + aC} \quad \Longrightarrow \quad x = uv = \frac{ae^{at}}{\mu e^{at} + aC} = \frac{a}{\mu + aCe^{-at}}$$

Загальний розв'язок: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{a}{\mu + aCe^{-at}} \\ \\ \quad\quad x = 0 \end{array}\right.$

Знайдемо довільний розв'язок задачі Коші: $x(t_0) = x_0 :\quad x_0 = \dfrac{a}{\mu + aCe^{-at_0}}$

$$\mu + aC \cdot e^{-at_0} = \frac{a}{x_0}, \quad C = \frac{\left(\dfrac{a}{x_0} - \mu\right) \cdot e^{at_0}}{a} = \frac{a - \mu x_0}{ax_0} \cdot e^{at_0} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x(t) = \frac{a}{\mu + \frac{a - \mu x_0}{x_0} \cdot e^{a(t_0 - t)}} = \frac{ax_0}{\mu x_0 - (a - \mu x_0) \cdot e^{a(t_0 - t)}}$$

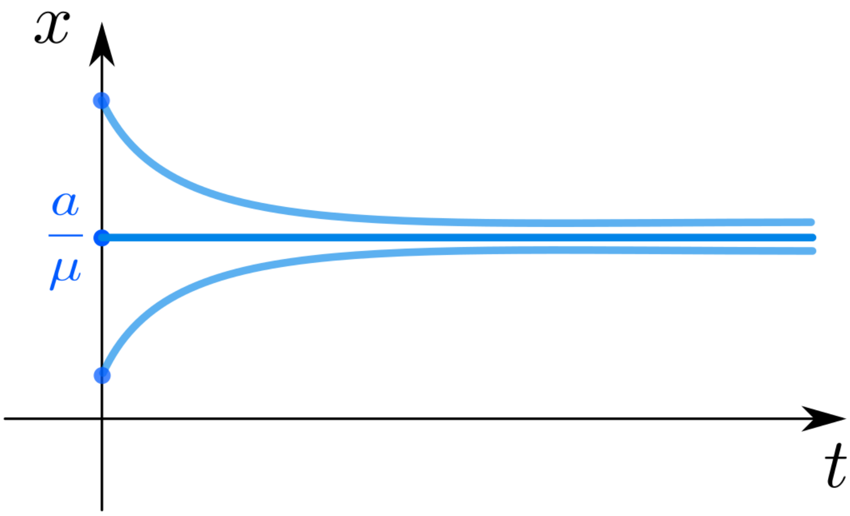
Отримали розв'язок $\varphi(t) = \dfrac{a}{\mu} \quad \exists$ на $[0, +\infty)$.

Перевіримо другу умову стійкості. Візьмемо $\left|x - \dfrac{a}{\mu}\right| = \left|\dfrac{\mu x_0 - a}{\mu}\right| < \delta$

і розглянемо: $|x(t) - \varphi(t)| = \left|\dfrac{ax_0}{\mu x_0 - (a - \mu x_0) \cdot e^{a(t_0 - t)}} - \dfrac{a}{\mu}\right| =$

$$\left|\frac{a\mu x_0 - a\mu x_0 + a(a - \mu x_0) \cdot e^{a(t_0 - t)}}{\mu(\mu x_0 - (a - \mu x_0) \cdot e^{a(t_0 - t)})}\right| = \frac{a(a - \mu x_0) \cdot e^{a(t_0 - t)}}{\mu^2 x_0 - \mu(a - \mu x_0) \cdot e^{a(t_0 - t)}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Таким чином, розв'язок $\varphi(t) = \frac{a}{\mu}$ - асимптотично стійкий.



Зауваження. 1. Аналогічно можна показати, що $\varphi(t) = 0$ - нестійкий. Таким чином, внутрішньовидова боротба виступає "природнім стабілізатором" моделі одновимірної популяції. На відміну від моделі Мальтуса, де у випадку $a > 0$ маємо нестійкість і нескінчений ріст популяції, в моделі Ферхюльста розв'язки стабілізуються в околі стлого розв'язку $\varphi(t) = \dfrac{a}{\mu}$. Відзначимо також, що чим меньше значення μ, тим швидше зростає чисельність особин.

Зауваження. 2. При $a \leq 0$ (смертність $\geq$ народжуваність) легко встановити, що $x = 0$ – асимптотично стійкий розв'язок.

2.2 Класифікація фазових портретів в околі положень рівноваги ЛОС 2-го порядку.

Означення. Положенням рівноваги нормальної системи диф. рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1, ..., x_n) \\ \qquad \cdots \\ \dot{x_n} = f_n(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

називається т. $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ така, що:

$$f_1(\overrightarrow{x}) = f_2(\overrightarrow{x}) = \cdots = f_n(\overrightarrow{x}) = 0$$

Розглянемо ЛОС (1): $\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$, де a, b, c, d $\in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Нехай $\det A \neq 0$. Тоді єдине положення рівноваги системи (1) – це точка (0,0).

Означення. Фазовою траєкторією ЛОС (1) називається проекція її інтегральних кривих на площину xOy. Зображення фазових траєкторій на площині xOy називають фазовим портретом.

Завдання. Дослідити фазовий портрет ЛОС (1) в околі т. $(0, 0)$, яка є її положенням рівноваги. Виявляється, що фазовий портрет ЛОС (1) в околі точки $(0, 0)$ повністю визначається власними числами матриці A. Нехай $J(A)$ – ЖНФ матриці A; H - матриця переходу.

1. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$.

Для зручності здійснимо в системі (1):

$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ заміну: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, де $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ – нова невідома вектор-функція

$H \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = AH \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ домножимо зліва на H^{-1}, тоді: $H^{-1}H \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = H^{-1}AH \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

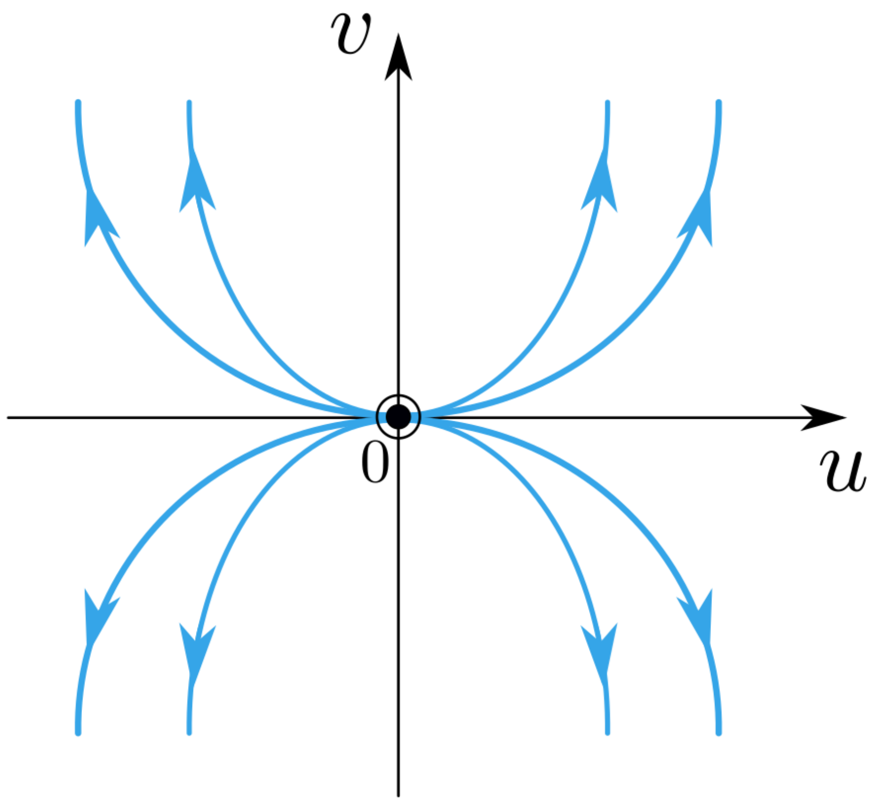
Таким чином, ми перейшли до Жарданового базису: $\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = J(A) \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

Маємо: $\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \left[\begin{array}{l} \dfrac{dv}{du} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \dfrac{u}{v} \\ u = 0 \end{array} \right. \Longleftarrow \begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u \\ \dot{v} = \lambda_2 v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \\ v = c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

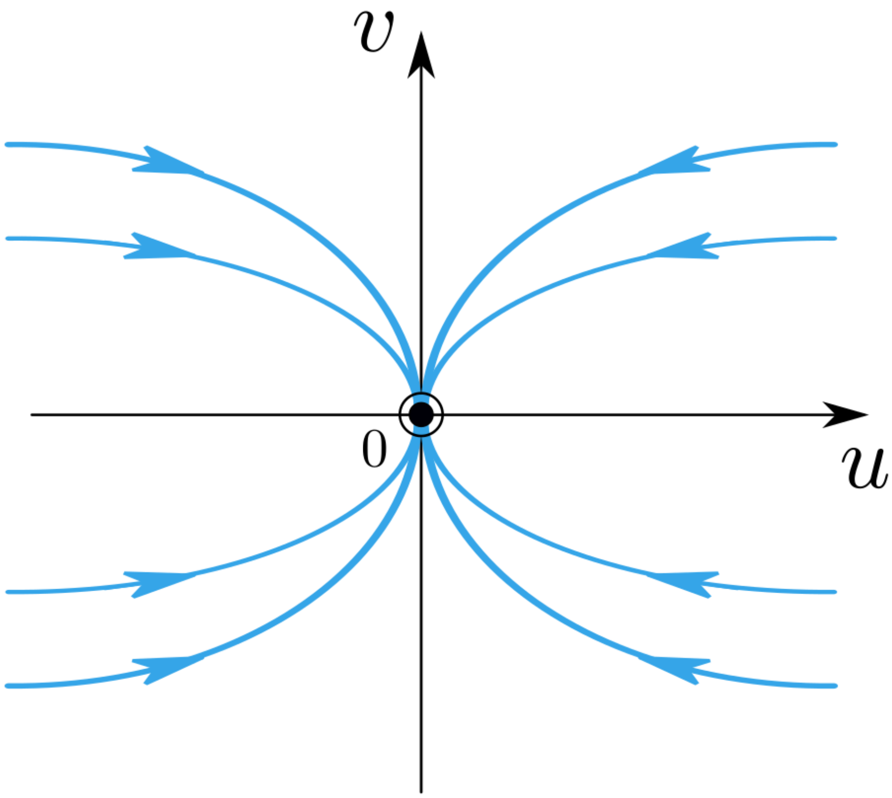
Поділили двуге рівняння на перше, щоб вилучити t.

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dv}{du} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \dfrac{u}{v} \\ u = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln|v| = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln|u| + \ln|c| \\ u = 0, v = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} v = c \cdot u^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \\ u = 0, v = 0 \end{array} \right.$$

Якщо $\lambda_1 \cdot \lambda_1 > 0$ та $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ (стрілки від нуля за умови $\lambda_1, \lambda_2 > 0$):



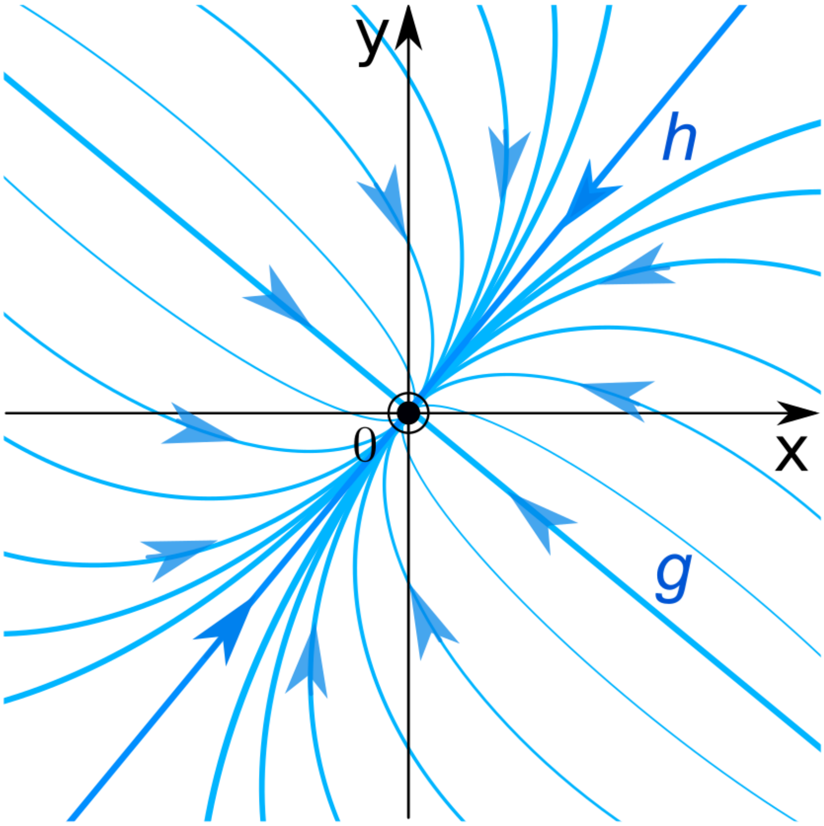
Якщо $\lambda_2 \cdot \lambda_1 > 0$ та $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ (стрілки до нуля за умови $\lambda_1, \lambda_2 < 0$):



Відмітимо, що якщо $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, то напрям руху (по t) вздовж траєкторій відбувається до нуля. Якщо ж $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, то рух спрямовано від нуля.

Залишається перейти до початкових змінних $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Таким чином, якщо $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ (власні числа одного знаку), то фазовий портрет має вигляд:



На малюнку h - пряма на якій лежить власний вектор, який відповідає меншому за модулем власному числу.

Такий фазовий портрет **вузол.**

- Якщо $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ - нестійкий вузол (стрілки від нуля).

- Якщо $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ - асимптотично стійкий вузол (стрілки до нуля).

Приклад.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det A - \lambda I = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-4-\lambda) - 2 = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = -5 \quad \Longrightarrow \quad \text{асимптотично стійкий вузол.}$$

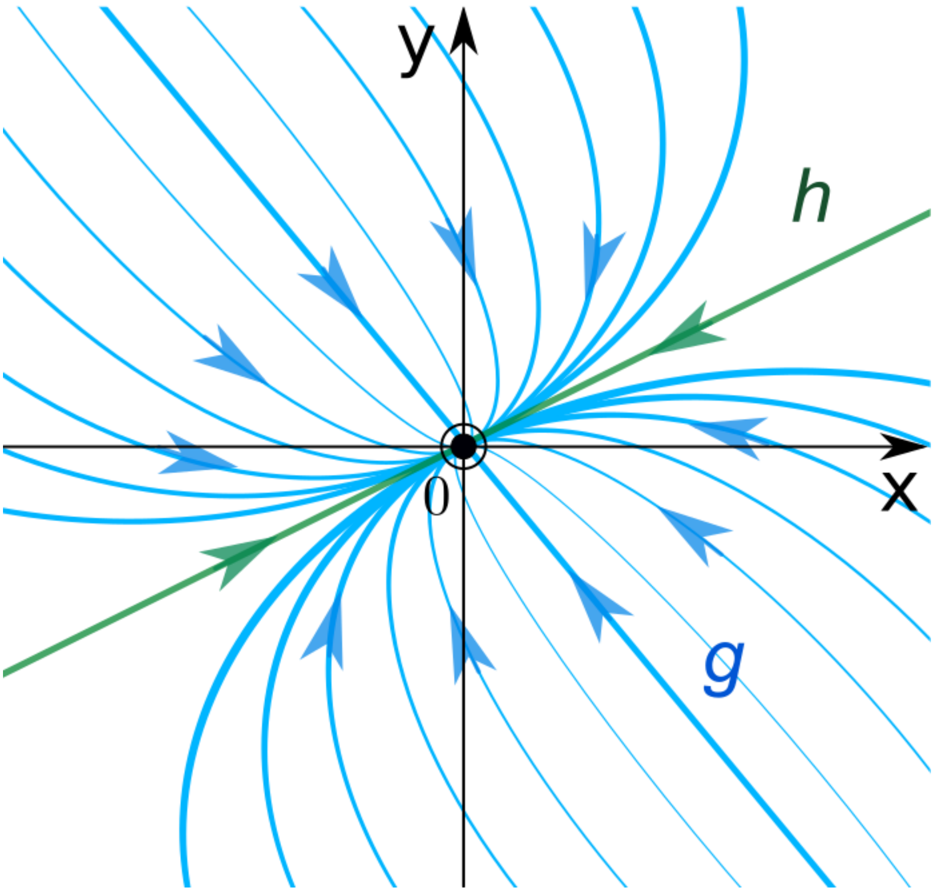
Знаходимо власні вектори:

$\lambda_1 = -2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} -h_1 + 2h_2 = 0 \\ h_1 = 2h_2 \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{h} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -5$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} g_1 + g_2 = 0 \\ g_1 = -g_2 \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

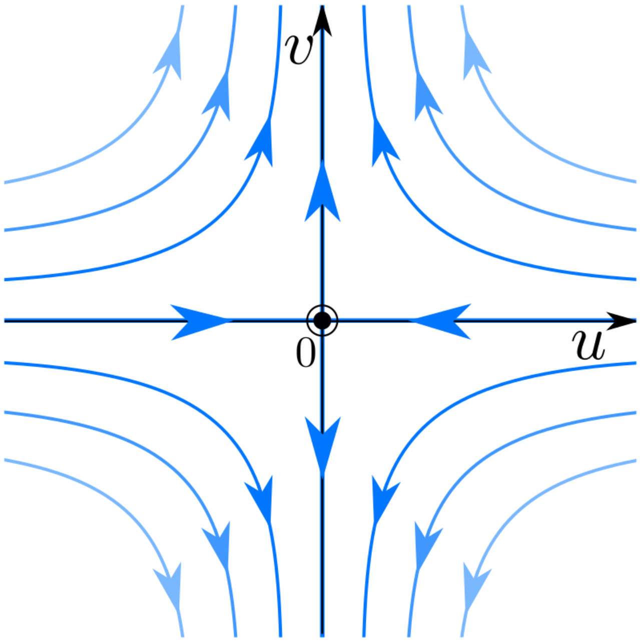


2. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ (Власні числа різних знаків). Тоді, аналогічно, перейшовши до Жорданового базису, маємо:

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u \\ \dot{v} = \lambda_2 v \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \\ v = c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

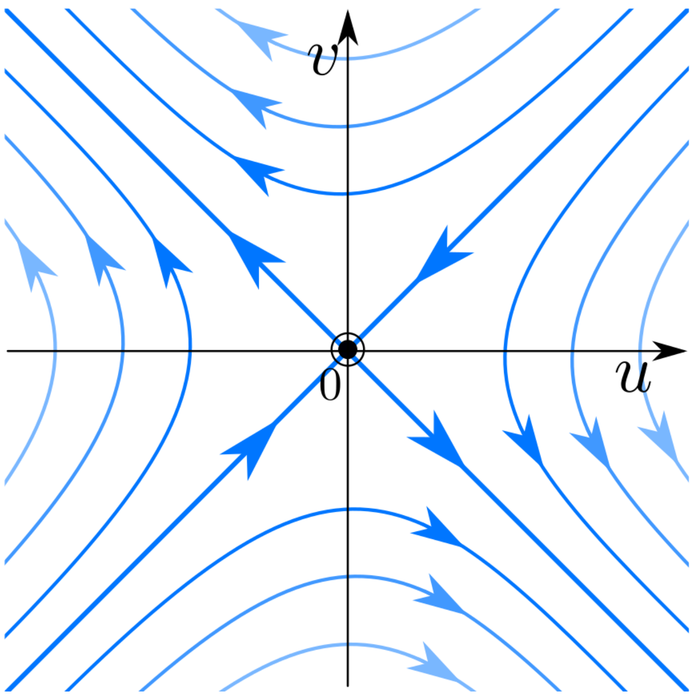
$$\left[\begin{array}{l} v = C \cdot u^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \\ u = 0, v = 0 \end{array}\right.$$



Якщо $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, то $\begin{array}{l} u(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \\ v(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty \end{array}$. Якщо $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, то $\begin{array}{l} u(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty \\ v(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \end{array}$.

У другому випадку напрям руху траекторій відбуватиметься в інший бік.

Отже, перейшовши до початкових змінних, отримаємо, що за умови $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ фазовий портрет має вигляд:



Зауваження. Стрілки до нуля вздовж прямої, на якій лежить власний вектор, що відповідає $\lambda_1 < 0$.

Стрілки від нуля вздовж прямої, на якій лежить власний вектор, що відповідає $\lambda_2 > 0$.

Такий фазовий портрет називається **сідло**. Це завжди нестійке положення рівноваги.

Приклад.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = 2x \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 6 = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -2 \Longrightarrow \text{сідло (нестійке)}$$

Знаходимо власні вектори:

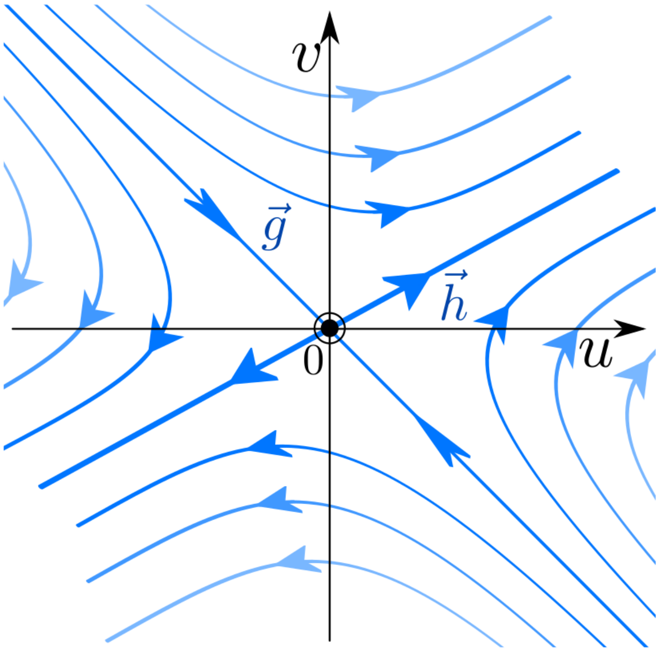
$\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 2h_1 = 3h_2 \Rightarrow \overrightarrow{h} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 2g_1 = -2g_2 \Rightarrow \overrightarrow{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Отримали такий фазовий портрет:

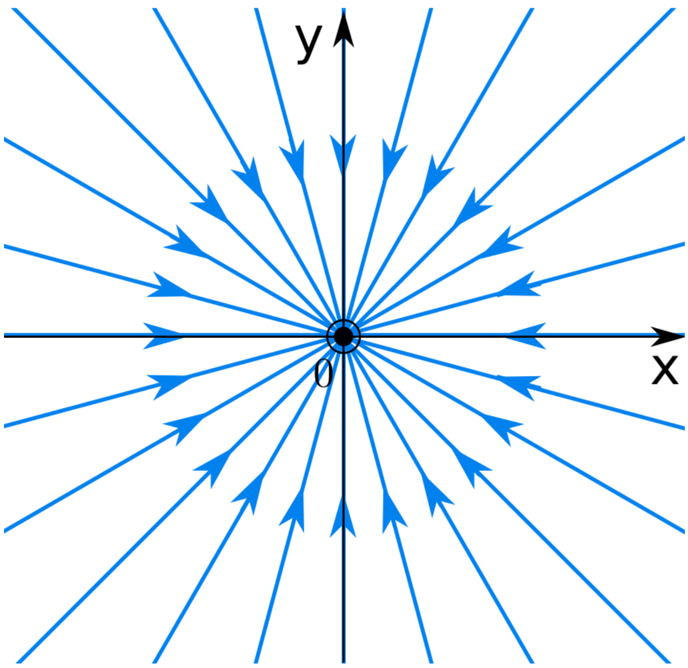


3. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.

а) Матриця A - діагональна.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$$

В такому випадку, фазовий портрет називають **диктричний вузол.**



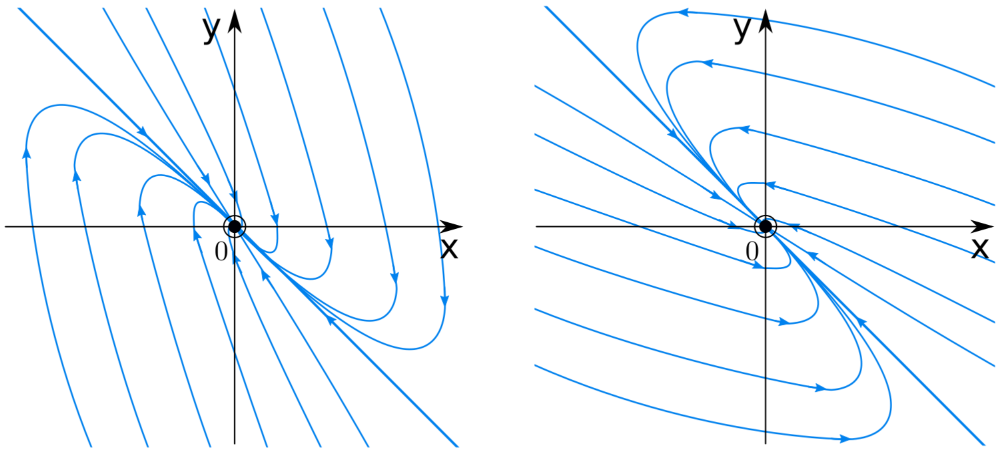
Якщо $\lambda < 0$ - ас. стійкий (стрілки до нуля).

Якщо $\lambda > 0$ - нейстійкий (стрілки від нуля).

б) Матриця A - недіагональна. В такому разі, фазовий портрет називають **вироджений вузол.**

- якщо $\lambda < 0$ - ас. стійкий (стрілки до нуля).
- якщо $\lambda > 0$ - нестійкий (стрілки від нуля).

Вироджений вузол може бути двох видів:



Для визначення типу виродженого вузла потрібно визнгачити напрям вектора фазової швидкості $\begin{bmatrix} \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{y} \end{bmatrix}$ в довільній точці, що не дорівнює нулю системи координат. Цей напрям має співпадати із напрямами руху по фазовій траєкторії (до нуля або від нуля).

Приклад.

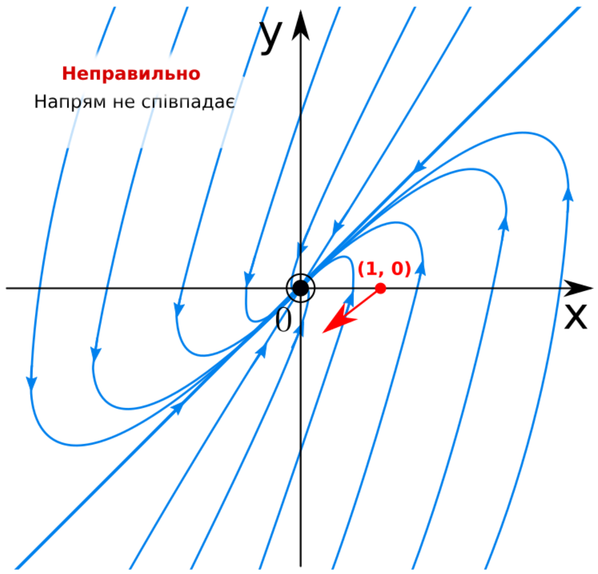
$$\begin{cases} \overrightarrow{x} = 2y - 3x \\ \overrightarrow{y} = y - 2x \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

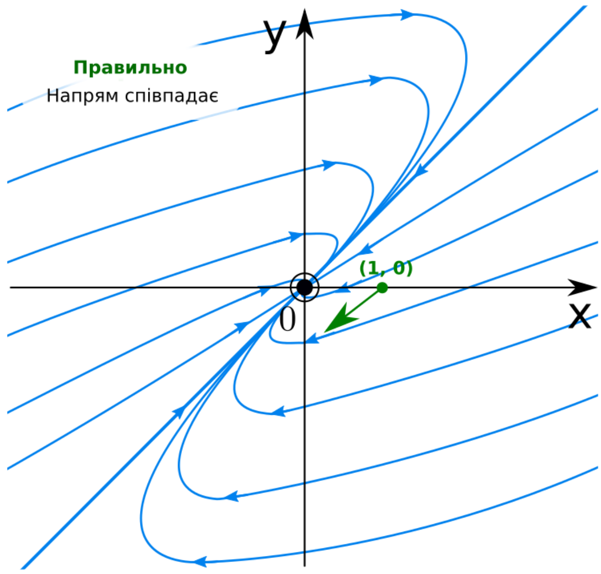
$$\det{(A - \lambda I)} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(1-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 =$$

$$= (\lambda+1)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 - \text{кратності } 2.$$

З попереднього випливає, що фазовим портретом буде асимптотично стійкий вироджений вузол (стрілки до нуля). Знайдемо власний вектор:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad h_1 = h_2 \Rightarrow \overrightarrow{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

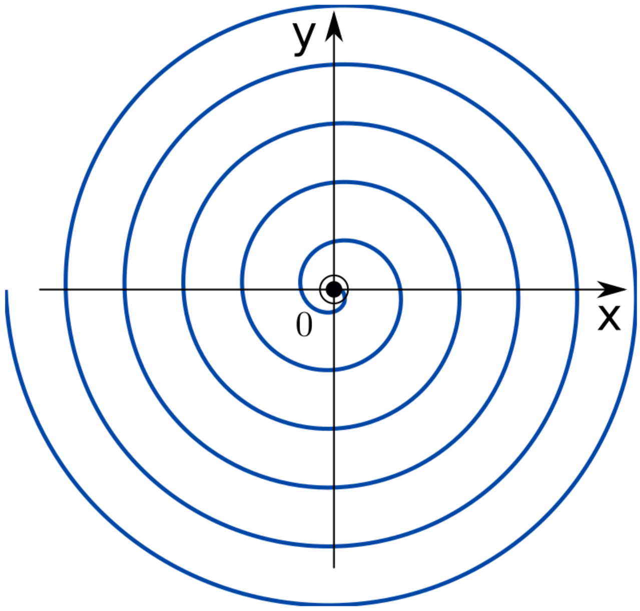


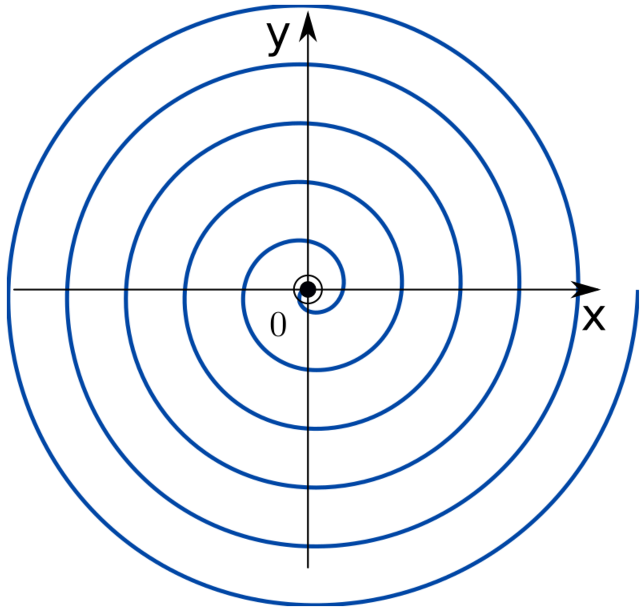


Візьмемо т. (1, 0):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \Bigg|_{(1,0)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} x_k = -3 \\ y_k = -2 \end{matrix}$$

4. $\lambda_{1,2} - \alpha \pm i\beta, \alpha \neq 0$. В такому випадку, фазовий портрет називається **фокус**. Якщо $\alpha > 0$ - нестійкий. Якщо $\alpha < 0$ – ас. стійкий. Фазовий портрет "фокус" може бути двох видів:





Для визначення типу фокуса визначаємо напрям вектора фазової швидкості в довільній точці, що не дорівнює нулю.

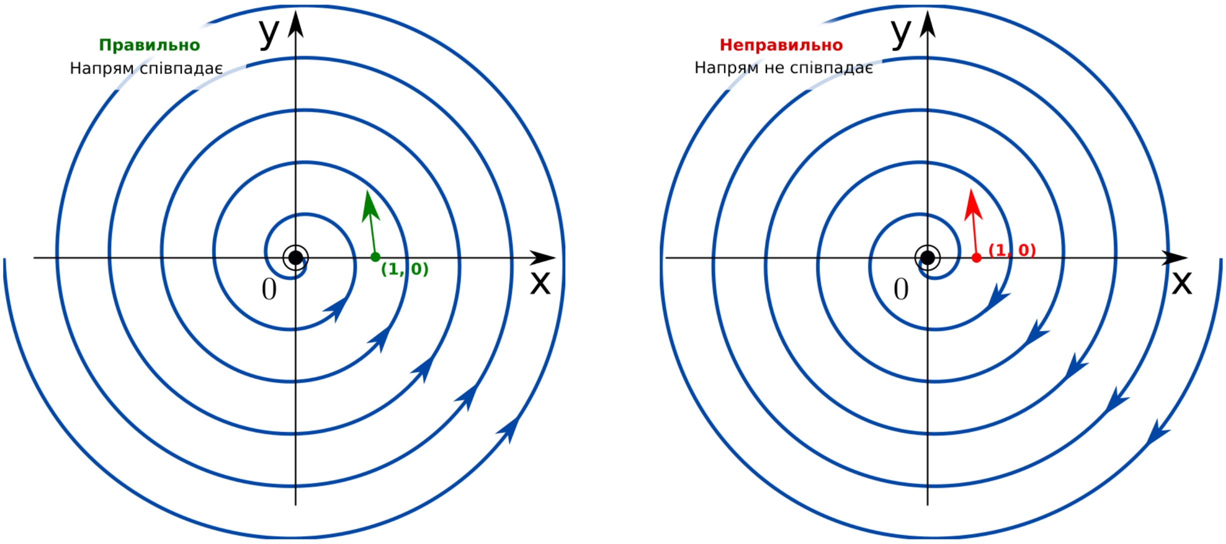
Приклад.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 4x - 3y \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) + 8 = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$D = -16 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

Асимптотично стійкий фокус (стрілки до нуля).

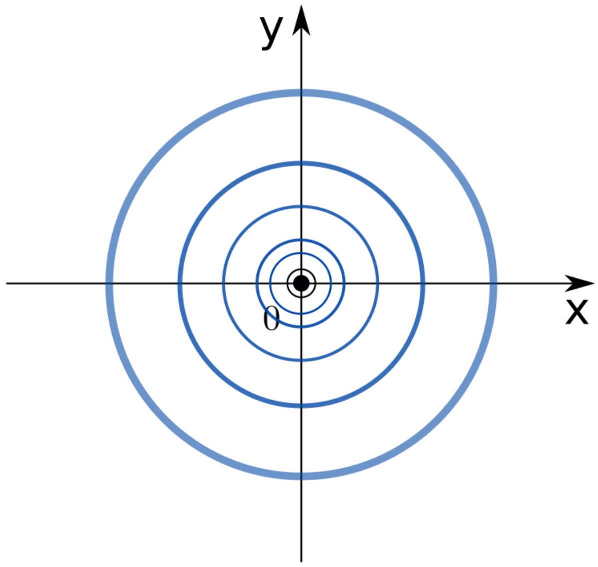


Візьмемо точку (1, 0) для перевірки:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \Bigg|_{(1,0)} - \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x_k - 1 = 1 \\ y_k - 0 = 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_k = 2 \\ y_k = 4 \end{matrix}$$

Отримали: $(1, 0) \to (2, 4)$. Перевіримо за виглядом фазового портрета вище.

5.$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$. За таких власних чисел, фазовий портрет називається **центр.** (стійкий, але не асимптотично стійкий)



Приклад.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

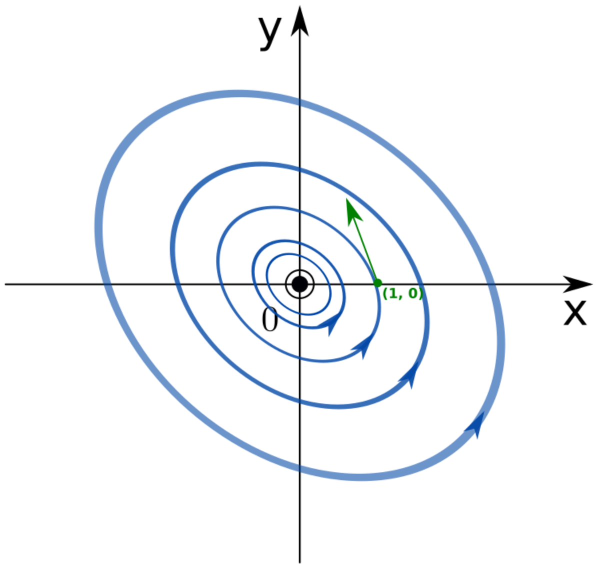
$$\det{(A - \lambda I)} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{6} \Rightarrow \text{центр}$$

Візьмемо т. (1, 0):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \Bigg|_{(1,0)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_k - 1 = -2 \\ y_k - 0 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_k = -1 \\ y_k = 2 \end{cases}$$



6. Нехай $\det A = 0$ (вирджений випадок).

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0 \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = 0 \qquad \begin{matrix} a = kc \\ b = kd \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = k(ax + by) \end{cases} \qquad \Rightarrow ax + by = 0 \text{ - пряма положень рівноваги.}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ ka & kb - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda) * (kb - \lambda) - kab =$$

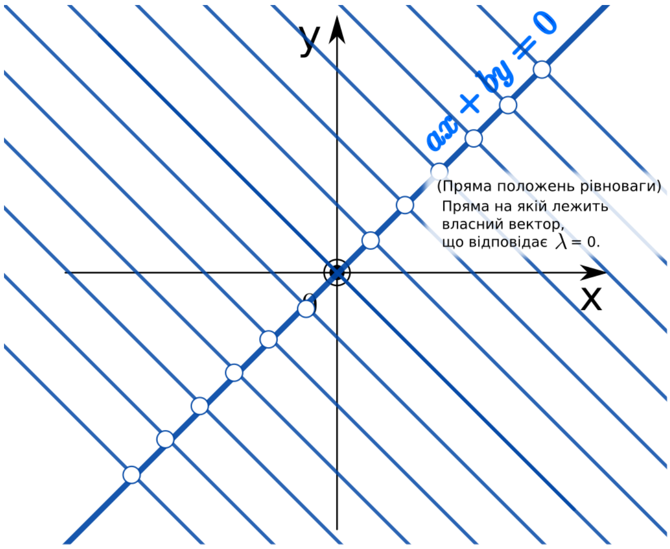
$$= akb - a\lambda - kb\lambda + \lambda^2 - kab = \lambda^2 - (a + kb)\lambda = 0$$

$$\lambda = 0 \qquad \lambda = a + bk$$

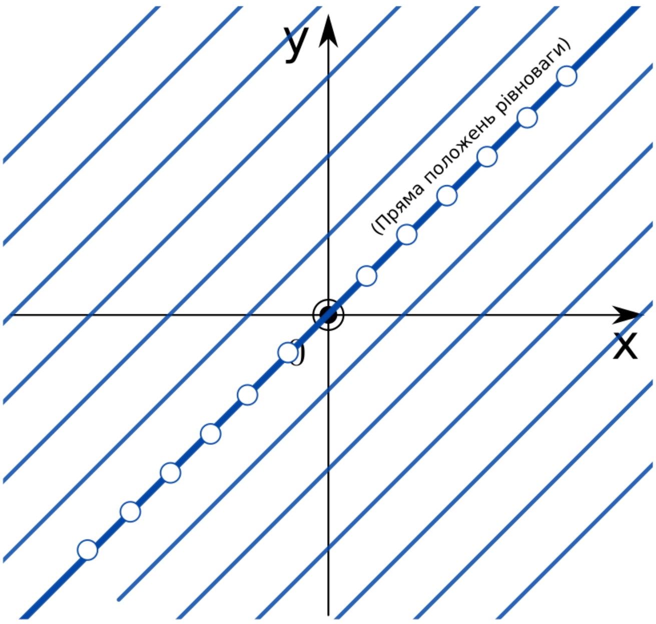
a) Прямі паралельні власному вектору, що відповідає власному числу $\lambda = a + bk$

$\lambda > 0$ - стрілки від нуля.

$\lambda < 0$ - стрілки до нуля.



b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (a = -bk)$



Лекція 3

3.1 Стійкість за першим наближенням

Розглянемо систему:

$$\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}(t)), \quad \overrightarrow{f} : D \to \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^n \tag{5}$$

Функція f один раз неперервно диференційована ($f \in C^1(D)$), це гарантує існування та єдиність довільної задачі Коші: $\forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x_0 \in D$.
Система (5) – автономна система n-ого порядку, $\overrightarrow{f}$ не залежить явно від t.
Нехай $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, тобто $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ – положення рівноваги системи (5), якщо це не так і $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^*$ – положення рівноваги, то заміна $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}^*$ зведе задачу до положення рівноваги $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$.
Завдання: дослідити на стійкість розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ системи (5). Оскільки $\overrightarrow{f} \in C^1(D)$, то в деякому околі $B_r(\overrightarrow{0})$ функцію $\overrightarrow{f}$ можна подати у вигляді:

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial \overrightarrow{x}}(\overrightarrow{0}) \cdot \overrightarrow{x} + f_1(\overrightarrow{x}), \text{ де } f_1(\overrightarrow{x}) = o(||\overrightarrow{x}||), \quad \overrightarrow{x} \to \overrightarrow{0} \qquad \text{(формула Тейлора)}$$

Позначимо: $\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial \overrightarrow{x}}(\overrightarrow{0}) = A$ – стала $n \times n$ матриця Якобі. Тоді в околі точки $\overrightarrow{0}$ система (5) набуває вигляду:

$$\boxed{\overrightarrow{x}'(t) = A\overrightarrow{x}(t) + o(||\overrightarrow{x}||)}$$

Означення. ЛОС:

$$\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x}, \text{ де } \quad A = \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial \overrightarrow{x}}(\overrightarrow{0})$$

називається с-мою 1-ого наближення (або лінеаризованою с-мою) для (5).

Теорема 3.1 (про стійкість за першим наближенням). Розглянемо два випадки:

1) Якщо $\forall\lambda$ – власні матриці A справедливо, що $\Re\lambda < 0$, то розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ системи (5) асимптотично стійкий.

2) Якщо існує таке власне число матриці , що $\Re\lambda > 0$, то розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ системи (5) нестійкий.

Приклад 1.

$$\begin{cases} \dot{x} = -\ln(1+y) + 2x + \sin x \quad (= f_1(x,y)) \\ \dot{y} = e^x + \sin(x+y) - \cos^2 y \quad (= f_2(x,y)) \end{cases}$$

Завдання: дослідити на стійкість розв'язок: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ системи.

$$A = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}\right|_{(0,0)} = \left.\begin{bmatrix} 2+\cos x & -\dfrac{1}{1+y} \\ e^x + \cos(x+y) & \cos(x+y) + 2\cos y \sin y \end{bmatrix}\right|_{(0,0)}$$

Отримуємо, що $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, тоді $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$.

Маємо: $(3-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, D = 16 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$, звідси $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$, $\Re\lambda > 0$, тоді розв'язок $(x,y)^T = (0,0)^T$ нестійкий.

Приклад 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = \tan(x+y) - y \quad (= f_1(x,y)) \\ \dot{y} = 3\sin x + 2e^y - 2 \quad (= f_2(x,y)) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\cos^2(x+y)} & \dfrac{1}{\cos^2(x+y)-1} \\ 3\cos x & 2e^y \end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Тоді $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0.$

Отримуємо: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \Re\lambda > 0$, тоді розв'язок $(x,y)^T = (0,0)^T$ нестійкий.

Зауваження. Випадок, коли $\forall\lambda : \Re\lambda \leq 0$ та $\exists\lambda : \Re\lambda = 0$ є критичним.

В цьому випадку за системою першого наближення нічого сказати не можна.

Доведення теореми 3.1. Пункт 1. Нехай для будь-якого власного числа матриці A справедливо, що $\Re < 0$. Доведемо, що розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ асимптотично стійкий. За означенням: $\forall\varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \quad \exists\delta > 0 : \forall$ розв'язку $\overrightarrow{x}(t)$ з початковими умовами $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}_0$ такого, що $||\overrightarrow{x}_0|| < \delta$ справедливо, що:

1) $||\overrightarrow{x}(t)|| < \varepsilon$ (стійкість).

2) $||\overrightarrow{x}(t)|| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ (асимптотична стійкість).

Таким чином, щоб довести твердження потрібно оцінити норму $||x(t)||$. Подальше доведення теореми потребує двох лем.

Лема 3.1 (Гронуолла-Беллмана)**.** Нехай $a(t), u(t) \in C([t_0, t_1]), a(t) \geq 0$ $\forall t \in [t_0, t_1]$ і числа $c \geq 0$ та $b \geq 0$ такі, що:

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad u(t) \leq c + b(t - t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} a(s)u(s)\mathrm{d}s$$

Тоді $\forall t \in [t_0, t_1]$:

$$u(t) \leq (c + b(t - t_0)) \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right\}$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію: $v(t) = c+b(t-t_0)+\int\limits_{t_0}^{t} a(s)u(s)\mathrm{d}s$

Тоді:

$$v(t_0) = c; \quad u(t) \leq v(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1]; \quad v'(t) = b + a(t)u(t) \leq b + a(t)v(t)$$

Отже, $v'(t) \leq b+a(t)v(t)$, домножимо ліву і праву частину на $\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right\}$:

$$v'(t)\cdot\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right\} \leq b\cdot\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right\}+a(t)\cdot\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right\}\cdot v(t)$$

Перенесемо один з множників наліво:

$$v'(t)\cdot\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right\}-a(t)\cdot\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right\}\cdot v(t) \leq b\cdot\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right\}$$

Використаємо властивість похідної:

$$\left(v(t) \cdot \exp\left\{ -\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s \right\} \right)' \leq b \cdot \exp\left\{ -\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s \right\}$$

Проінтегруємо ліву і праву частини від t до t_0:

$$v(t) \cdot \exp\left\{ -\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s \right\} - \underbrace{v(t_0)}_{const} \leq \int\limits_{t_0}^{t} b \cdot \underbrace{\exp\left\{ -\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s \right\}}_{1} \mathrm{d}t$$

Звідси отримуємо наступне:

$$v(t) \cdot \exp\left\{ -\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s \right\} \leq c + b(t - t_0)$$

Остаточно:

$$u(t) \leq v(t) \leq (c + b(t - t_0)) \cdot \exp\left\{ \int\limits_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s \right\}$$

$\blacksquare$

Лема 3.2. Нехай $\exists \gamma > 0 : \forall \lambda$ – власного числа матриці $A : \Re\lambda < -\gamma$, тоді

$$\exists K > 0 : ||e^{At}|| \quad \leq \quad K \cdot e^{-\gamma t} \quad \forall t \geq 0$$

Без доведення. $\blacksquare$

Повернемось до доведення теореми.

Візьмемо $\forall \varepsilon > 0$ та $\forall \delta : 0 < \delta < \varepsilon$ (поки що довільне δ). Також візьмемо довільну початкову умову $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}_0$, де $||\overrightarrow{x}_0|| < \delta$ (зауважимо, що $||\overrightarrow{x}_0|| <$

$\delta < \varepsilon$) і розглянемо $\overrightarrow{x}(t)$ – розв'язоу системи з початковими умовами $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}_0$. За теоремою про продовження розв'язок $\overrightarrow{x}(t)$ можна продовжити до межі області: $B_\varepsilon(\overrightarrow{0}) = \{\overrightarrow{x} \quad | \quad ||\overrightarrow{x}|| < \varepsilon\}$. Тоді можливими є два варіанти:

1) $\exists t* > t_0 : ||\overrightarrow{x}(t)|| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t*)$ та $\overrightarrow{x}(t*) = \varepsilon$ (межа області досягнута).

2) $\forall t \geq t_0 : ||\overrightarrow{x}|| < \varepsilon$ (межа області не досягається за скінченний час. Отже, розв'язок існує $\forall t \geq t_0$ та $||\overrightarrow{x}(t)|| < \varepsilon$, що автоматично означає стійкість).

У першому випадку покладемо: $I = [t_0, t_1]$, а у другому: $I = [t_0, +\infty)$ та розглянемо на I наступну задачу Коші:

$$\begin{cases} u'(t) = A\overrightarrow{u}(t) + \overrightarrow{f}_1(\overrightarrow{x}(t)) \\ \overrightarrow{u}(t_0) = \overrightarrow{x}_0 \end{cases}$$

Це ЛНС, задача Коші має єдиний розв'язок. Підставивши $\overrightarrow{x}(t) = \overrightarrow{u}(t)$, переконуємось, що $\overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{x}(t)$ – єдиний розв'язок задачі Коші. Можемо знайти його методом варіації довільної сталої. Загальний розв'язок ЛНС = загальний розв'язок ЛОС + частинний розв'язок ЛНС. Частинний розв'язок ЛНС будемо шукати у вигляді $e^{At} \cdot \overrightarrow{C}(t)$.

$$e^{At} \cdot \overrightarrow{C}'(t) + Ae^{At} \cdot \overrightarrow{C}(t) = Ae^{At} \cdot \overrightarrow{C}(t) + \overrightarrow{f}_1(\overrightarrow{x}(t))$$

Звідси отримуємо:

$$\overrightarrow{C}'(t) = e^{-At}\overrightarrow{f}_1(\overrightarrow{x}(t)) \Longrightarrow \overrightarrow{u}_r(t) = e^{At}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-As}\overrightarrow{f}_1(\overrightarrow{x}(s))\mathrm{d}s = \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\overrightarrow{f}_1(\overrightarrow{x}(s))\mathrm{d}s$$

Загальний розв'язок ЛНС: $\overrightarrow{u}(t) = e^{At}\overrightarrow{C} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\overrightarrow{f}_1(\overrightarrow{x}(s))\mathrm{d}s$, звідси знаходимо розв'язок даної задачі Коші $\quad \overrightarrow{u}(t_0) = \overrightarrow{x}_0 : \overrightarrow{x}_0 = e^{At_0} \cdot \overrightarrow{C} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{C} = e^{-At_0} \cdot \overrightarrow{x}_0$

Отже,

$$\overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\overrightarrow{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\overrightarrow{f}_1(\overrightarrow{x}(s))\mathrm{d}s$$

Таким чином, знайшли розв'язок $\overrightarrow{x}(t)$, який маємо оцінити.

Використаємо лему 2. Оскільки $\forall\lambda : \Re\lambda < 0$, то $\exists\gamma > 0 : \Re\lambda < -\gamma$. Тоді:

$$\exists K > 0 : ||e^{At}|| \leq K \cdot e^{-\gamma t}$$

Маємо:

$$||\overrightarrow{x}(t)|| \leq K \cdot e^{-\gamma(t-t_0)} \cdot ||\overrightarrow{x}_0|| + \int\limits_{t_0}^{t} K \cdot e^{-\gamma(t-s)}||\overrightarrow{f}_1(\overrightarrow{x}(s))||\mathrm{d}s$$

Звідси отримуємо:

$$||\overrightarrow{x}(t)|| \cdot e^{\gamma(t-t_0)} \leq K||\overrightarrow{x}_0|| + K\int\limits_{t_0}^{t} e^{\gamma(s-t_0)}||\overrightarrow{f}_1(\overrightarrow{x}(s))||\mathrm{d}s$$

Оцінимо $||\overrightarrow{f_1}(\overrightarrow{x}(s))||$. Зауважимо, що $\overrightarrow{f}_1(\overrightarrow{x}(s)) = \overrightarrow{\overline{0}}(||\overrightarrow{x}||)$ при $||\overrightarrow{x}|| \longrightarrow 0$. Отже, $\forall\delta_1 > 0 \quad \exists\delta_2 > 0 : \forall x : ||\overrightarrow{x}|| < \delta_2$ справедливо, що $||\overrightarrow{f}_1(\overrightarrow{x})|| < \delta_1||\overrightarrow{x}||$.

З попередніх міркувань:

$$||\overrightarrow{x}(t)|| \cdot e^{\gamma(t-t_0)} \leq K \cdot \delta + K \cdot \delta_1 \int\limits_{t_0}^{t} e^{\gamma(s-t_0)} \cdot ||\overrightarrow{x}(s)|| \mathrm{d}s$$

Застосуємо лему Гронуолла-Беллмана:

$$u(t) = ||\overrightarrow{x}(t)|| \cdot e^{\gamma(t-t_0)}, \quad c = K \cdot \delta, \quad b = 0, \quad a = K \cdot \delta_1$$

Отримуємо:

$$||\overrightarrow{x}(t)|| e^{\gamma(t-t_0)} \leq K\delta \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} K\delta_1 \mathrm{d}s\right\} = K\delta e^{K\cdot\delta(t-t_0)} \Rightarrow ||\overrightarrow{x}(t)|| \leq K\delta e^{(-\gamma+K\cdot\delta_1)(t-t_0)}$$

Оберемо δ_1 так, щоб $-\gamma + K \cdot \delta_1 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta_1 < \dfrac{\gamma}{K}$, тоді $||\overrightarrow{x}(t)|| \leq K \cdot \delta < \varepsilon$ при $\delta < \dfrac{\varepsilon}{K}$ і, крім того, $||\overrightarrow{x}(t)|| \leq K \cdot \delta \cdot e^{(-\gamma+K\cdot\delta_1)(t-t_0)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, що означає стійкість та асимптотичну стійкість розв'язку $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ за означенням (в означенні в якості δ можемо взяти найменше з $\delta, \quad \delta_1, \quad \delta_2$).

Випадок 2. поки ще залишається без доведення. ■

Зауваження. (про фазові портрети автономної системи другого порядку). Тип фазового портрету в околі положень рівноваги автономної системи другого порядку у випадку $\Re\lambda \neq 0$ визначається типом фазового портрету лінеаризованої системи (вузол, сідло, фокус, вироджений вузол залишається вузлом, сідлом, фокусом, виродженим вузлом відповідно).

Лекція 4

4.1 Метод функцій Ляпунова

Розглянемо систему:

$$\overrightarrow{x}' = f(\overrightarrow{x}) \tag{6}$$

де $f : D \to \mathbb{R}^n, f \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^n$ та $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{0}) = 0$. **Задача.** Дослідити на стійкість розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ системи (6).

Означення. Функція $V : D \to \mathbb{R}, V \in C(D)$ називається додатньо(від'ємно)-визначеною в D, якщо:

1) $V(0) = 0$.

2) $V(x) > 0\ (< 0)\ \forall x \in D(\{0\})$.

Означення. Похідною функції $V : D \to \mathbb{R}$ в силу системи (6) називають функцію:

$$\dot{V}_f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\overrightarrow{x}) =< \nabla V \overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}) >$$

Означення. Нехай $B_R(\overrightarrow{0})$ – деякий окіл точки $\overrightarrow{0}$. Функція $V \in C^1(B_R(\overrightarrow{0}))$ називається функцією Ляпунова системи (6), якщо:

1) V – додатно визначена.

2) $\dot{V}_f(\overrightarrow{x}) \leq 0 \quad \forall x \in B_R(\overrightarrow{0})$.

Зауваження. Якщо V - від'ємно визначена і $\dot{V}_f(\overrightarrow{x}) \geq 0$, то:

$$-V(\overrightarrow{x}) - \text{ функція Ляпунова.}$$

Теорема 4.1 (Ляпунова про стійкість)**.** Якщо в деякій кулі $B_R(\overrightarrow{0})$ існує функція Ляпунова для системи (6), то розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ системи (6) стійкий.

Доведення. Нехай $V \in C^1(B_R(\overrightarrow{0}))$ – функція Ляпунова. Доведемо, що розв'язок стійкий за означенням. Візьмемо $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon < \mathbb{R}$. Покладемо $c(\varepsilon) \min\limits_{\overrightarrow{x}:||\overrightarrow{x}||=\varepsilon} V(\overrightarrow{x})$. Тоді $c(\varepsilon) > 0$, бо $V(\overrightarrow{x})$ - додатно визначена. Виберемо $\delta > 0 : 0 < \delta < \varepsilon$ таким чином, щоб: $\forall \overrightarrow{x} : ||\overrightarrow{x}|| < \delta$ справдовується: $V(\overrightarrow{x}) < C(\varepsilon)$ (таке δ існує в силу неперервності $V(\overrightarrow{x})$ та $V(\overrightarrow{x}) = 0$). Візьмемо $\forall \overrightarrow{x}_0 : ||\overrightarrow{x}_0|| < \delta$ і розглянемо розв'язок $\overrightarrow{x}(t)$ з початковими умовами $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}_0$. Потрібно показати за означенням, що:

$$||\overrightarrow{x}(t)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Припустимо протилежне. Нехай $\exists t_1 > t_0$ таке, що $||\overrightarrow{x}(t)|| < \varepsilon \; \forall t \in [t_0, t_1]$:

$$||\overrightarrow{x}(t_1)|| = \varepsilon$$

Тоді за вибором $c(\varepsilon)$ справедливо, що:

$$V(\overrightarrow{x}(t_1)) \geq c(\varepsilon)$$

З іншого боку:

$$\frac{d}{dt}V(\overrightarrow{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\overrightarrow{x}(t)) = \dot{V}_f(\overrightarrow{x}) \leq 0 \text{ (за умовою теореми)}$$

Отже, $V(\overrightarrow{x}(t)) \downarrow \Rightarrow c'(\varepsilon) \leq V(\overrightarrow{x}(t_1)) \leq V(\overrightarrow{x}(t_0)) = V(\overrightarrow{x}_0) < c(\varepsilon) \Rightarrow$ протиріччя.

■

Теорема 4.2 (Ляпунова про асимптотичну стійкість).
Нехай в деякому околі $B_R(\overrightarrow{0})$ існує функція Ляпунова для системи (6), причому $\dot{V}_f(\overrightarrow{x})$ – від'ємно визначена. Тоді розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ системи (6) є **асимптотично стійким.**

Доведення. По-перше, зауважимо, що існує функція Ляпунова. Отже, за попередньою теоремою розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ принаймі стійкий, тобто:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall t_0 \ \exists \delta > 0 : \forall \overrightarrow{x}_0 : ||\overrightarrow{x}_0|| < \delta \text{ справедливо, що:}$$

$$\text{для розв'язку з початковою умовою } \overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}_0 : ||\overrightarrow{x}(t)|| < \varepsilon \ \ \forall t \geq t_0$$

По-друге, відзначимо, що:

$$\frac{d}{dt}V(\overrightarrow{x}(t)) = \dot{V}_f(\overrightarrow{x}(t)) \ \text{ – від'ємно визначена.}$$

Отже, $V(\overrightarrow{x}(t))$ спадає і $V(\overrightarrow{x}(t))$ – додатно визначена. Потрібно довести, що:

$$||\overrightarrow{x}(t)|| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0, \text{ припустимо протилежне.}$$

Нехай $||\overrightarrow{x}(t)|| \xrightarrow[t \to +\infty]{} a$, де $a > 0$. Тоді: $\forall t \geq t_0 \ ||\overrightarrow{x})t|| > 0$

Якщо ж $\exists t_1 : ||\overrightarrow{x}(t_1)|| = 0 \Rightarrow V(\overrightarrow{x}(t_1)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} V(\overrightarrow{x}(t)) \downarrow \\ V(\overrightarrow{x}(t)) \text{ – дод.-визнач.} \end{cases}$, то:

$$V(\overrightarrow{x}(t)) = 0 \ \ \forall t \geq t_1 \ \Rightarrow \ \overrightarrow{x}(t) = 0 \ \ \forall t \geq t_1 \ \Rightarrow \ ||\overrightarrow{x}(t)|| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Але, за припущенням $||\overrightarrow{x}(t)||$ не збігається до 0 при $t \to +\infty$.

Отже, $\forall t \geq t_0 : ||\overrightarrow{x}(t)|| > 0$. Отримали:

$$\exists \varepsilon_1 > 0 : \varepsilon_1 \leq ||\overrightarrow{x}(t)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Покладемо: $m = \max\limits_{\overrightarrow{x}:\varepsilon_1 \leq ||\overrightarrow{x}|| \leq \varepsilon} \dot{V}_f(\overrightarrow{x}) < 0 \quad \Longleftarrow \quad \dot{V}_f(\overrightarrow{x})$ – від'ємно визначена

Тоді:

$$\frac{d}{dt}V(\overrightarrow{t}) = \dot{V}_f(\overrightarrow{x}(t)) \leq m$$

Проінтегруємо від t_0 до t нерівність:

$$\frac{d}{dt}V(\overrightarrow{x}(t)) \leq m \implies V(\overrightarrow{x}(t)) - V(\overrightarrow{x}(t_0)) \leq m(t - t_0)$$

$$V(\overrightarrow{x}(t)) \leq \underbrace{mt}_{<0} - mt_0 + V(\overrightarrow{x}_0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty \implies V(\overrightarrow{x}(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$$

А оскільки $V(\overrightarrow{x})$ – додатно визначена, то отримаємо протиріччя. ■

Теорема 4.3 (Ляпунова про нестійкість)**.**

Нехай $\exists V \in C^1(B_R(\overrightarrow{0}))$ така, що:

1) $V(\overrightarrow{0}) = 0$.

2) $\dot{V}_f$ - додатно визначена в $B_R(\overrightarrow{0})$.

3) Для як завгодно малого $\delta > 0$ знайдеться $\overrightarrow{x}_0 : ||\overrightarrow{x}_0|| < \delta$ і $V(\overrightarrow{x}_0) > 0$.

(тобто $\dot{V}_f$ та V одного знаку для $\overrightarrow{x}_0$)

Тоді, розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ системи (6) нестійкий.

Доведення. За означенням потрібно, щоб $\exists \varepsilon : \forall > 0$ знайдеться $\overrightarrow{x}_0 : ||\overrightarrow{x}_0|| < \delta$, але для розв'язку з початковою умовою $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}_0 \quad \exists t_1 > t_0$ таке, що

$||\overrightarrow{x}(t_1)|| > \varepsilon$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ $\varepsilon < R$ та довільне $\delta > 0$. Тоді за умовою теореми $\exists \overrightarrow{x}_0 : ||\overrightarrow{x}_0|| < \delta$ і $V(\overrightarrow{x}_0) > 0$. Розглянемо $\overrightarrow{x}(t)$ - розв'язок з початковими умовами $\overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}_0$. Покажемо, що $\exists t_1 : ||\overrightarrow{x}(t_1)|| > \varepsilon$. Припустимо, що це не так. Нехай $\forall t \geq t_0 : ||\overrightarrow{x}(t)|| \leq \varepsilon$ та:

$$\forall t \geq t_0 : ||\overrightarrow{x}(t)|| \leq \varepsilon$$

Зауважимо, що:

$$\frac{d}{dt}V(\overrightarrow{x}(t)) = \dot{V}_f(\overrightarrow{x}(t)) > 0 \Longrightarrow V(\overrightarrow{x}(t))\uparrow \Longrightarrow \forall t \geq t_0 : V(\overrightarrow{x}(t)) \geq V(\overrightarrow{x}_0) =: \alpha > 0$$

Тоді:

$$(\text{оскільки } V(\overrightarrow{0}) = 0) \Longrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall t \geq t_0 : \varepsilon_0 \leq ||\overrightarrow{x}(t)|| \leq \varepsilon$$

Покладемо:

$$m = \min_{\overrightarrow{x} : \varepsilon_1 \leq ||\overrightarrow{x}|| \leq \varepsilon} \dot{V}_f(\overrightarrow{x}) > 0$$

Отже, $\frac{d}{dt}V(\overrightarrow{x}(t)) = \dot{V}_f(\overrightarrow{x}(t)) \geq m$. Проінтегруємо від t_0 до t:

$$V(\overrightarrow{x}(t)) - V(\overrightarrow{x}(t_0)) \geq m(t - t_0), \quad V(\overrightarrow{x}(t)) \geq mt - mt_0 + V(\overrightarrow{x}_0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$$

$$V(\overrightarrow{x}(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$$

Отже, $V(\overrightarrow{x}(t))$ є необмеженою на обмеженій множині $\left\{ \overrightarrow{x} \middle| ||\overrightarrow{x}|| \leq \varepsilon \right\}$ і V – неперервна в цій множині. Отримали протиріччя. ■

Теорема 4.4 (Четаєва про нестійкість)**.** Нехай $V \in C^1(D)$:

1) $V(\overrightarrow{0}) = 0.$

2) $\exists D_+ \subset D$:

   а) $V(\overrightarrow{x}) > 0 \quad \forall \overrightarrow{x} \in D_+$

   б) $\overrightarrow{0} \in \partial D_+$

   в) $V(\overrightarrow{x}) = 0 \quad \forall \overrightarrow{x} \in \partial D_+ \cap D$

   г) $\dot{V}_f(\overrightarrow{x}) > 0 \quad \forall \overrightarrow{x} \in D_+$

Тоді розв'язок $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ нестійкий.

Зауваження. На жаль, не існує жодних методів та схем для пошуку функції Ляпунова в загальному випадку. Але іноді, в дуже частинних випадках може допомогти метод розділення змінних. Розглянемо його на прикладах.

Приклад.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y \\ \dot{y} = x + y^3 \end{cases}$$

Дослідити на стійкість розв'язок $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Спробуємо за 1-м наближенням:

$$A = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}\right|_{(0,0)} = \left.\begin{bmatrix} 3x^2 & -1 \\ 1 & 3y^2 \end{bmatrix}\right|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm i} \Rightarrow \Re\lambda = 0 \Rightarrow$ критичний випадок.

Спробуємо метод функцій Ляпунова. Спробуємо знайти $V(x,y) = A(x)+B(y)$. Функції $A(x)$ та $B(y)$ підберемо так, щоб $V(x,y)$ та $\dot{V}_f(x,y)$ були знаковизначеними. Маємо:

$$\dot{V}_f(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} f_1(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y} f_2(x,y)$$

Тоді:

$$\dot{V}_f(x,y) = A'(x)(x^3 - y) + B'(y)(x + y^3) = A'(x)x^3 - A'(x)y + B'(y)x + B'(y)y^3$$

Підберемо $A(x)$ та $B(x)$ так, щоб $A'(x)y = B'(y)x$:

$$\begin{cases} B'(y) = y \\ A'(x) = x \end{cases}$$

Візьмемо $B(y) = \dfrac{y^2}{2}$ $A(x) = \dfrac{x^2}{2}$. Тоді: $V(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ – додатно визначена. $\dot{V}_f(x,y) = x^4 + y^4$ – додатно визначена. З цього отримуємо, що розв'язок нестійкий (бо V та $\dot{V}_f$ одного знаку).

Приклад.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy \\ \dot{y} = x - y - y^3 - x^2 \end{cases}$$

Спробуємо за першим наближенням:

$$A = \begin{vmatrix} -1 + y & 1 + x \\ 1 - 2x & -1 - 3y^2 \end{vmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix}$$

$\exists \lambda : \Re\lambda = 0 \implies$ маємо критичний випадок. Спробуємо метод функцій Ляпунова. Знайдемо $V(x,y) = A(x) + B(y)$:

$$\dot{V}_f(x,y) = A'(x)(y - x + xy) + B'(y)(x - y - y^3 - x^2) =$$

$$= A'(x)y - A'(x)x + A'(x)xy + B'(y)x - B'(y)y - B'(y)y^3 - B'(y)x^2$$

Підберемо $A(x)$ та $B(y)$ так, щоб $A'(x)y = B'(y)x$:

$$\begin{cases} A'(x) = x \\ B'(y) = y \end{cases}$$

Візьмемо $A(x) = \dfrac{x^2}{2}$ $B(y) = \dfrac{y^2}{2}$ Тоді: $V(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ – додатно визначена.

$\dot{V}_f(x,y) = xy - x^2 + x^2y + xy - y^2 - y^4 - x^2y = -(x-y)^2 - y^4$ – від'ємно визначена.

З наведених вище міркувань отримуємо, що розв'язок асимптотично стійкий.

Приклад.

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 \\ \dot{y} = 3yx^2 \end{cases}$$

Спробуємо метод функцій Ляпунова:

$$V(x,y) = A(x) + B(y), \quad \dot{V}_f(x,y) = A'(x) \cdot (-xy^2) + B'(y)3yx^2$$

Виберемо $A(x)$ та $B(y)$:

$$A'(x) \cdot xy^2 = 3B'(y)yx^2 \Longrightarrow \begin{cases} A'(x) = 3x \\ B'(y) = y \end{cases}$$

Візьмемо $A(x) = \dfrac{3x^2}{2}$ $B(y) = \frac{y^2}{2}$. Тоді:

$$V(x,y) = \frac{3x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \text{ – додатно визначена,} \quad \dot{V}_f(x,y) = 0 \leq 0$$

З наведених вище міркувань отримуємо, що розв'язок стійкий.

Лекція 5

5.1 Перші інтеграли систем диференційних рівнянь.

Приклад. Розглянемо рівняння $y' = y \implies y = C \cdot e^x$ - заг. розв.

Легко побачити, що функція:

$$\psi(x, y) = y \cdot e^{-x}$$

Має таку властивість:

$$\forall y(x) \text{ - розв'язок } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x, y(x)) = (y(x) \cdot e^{-x})' = y' \cdot e^{-x} = y \cdot e^{-x} = 0$$

Таким чином, $\forall y(x)$ – розв'язок $\psi(x, y(x)) = const$. Інакше кажучи, функція $\psi(x, y)$ є сталою вздовж довільного розв'язку рівняння. Такі функції називають **першими інтегралами**.

Означення. Розглянемо систему:

$$\overrightarrow{x}' = \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{x}), \tag{7}$$

де $f : D \to \mathbb{R}^n; D \subset \mathbb{R}^{n+1}; f \in C(D)$.

Функція $U(t, \overrightarrow{x}) \in C^1(D)$ називається **першим інтегралом** системи (7), якщо для кожного розв'язку системи (7) $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(t), t \in I$ виконується:

$$\frac{d}{dt}U(t, \overrightarrow{x}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

(тобто U є сталою вздовж довільного розв'язку системи (7)).

Приклад.

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 + z^2 \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -y \end{cases}$$

Розглядаємо функцію $U(t, x, y, z) = y^2 + z^2$.

Тоді для кожного розв'язку системи $\begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix}^T$ маємо:

$$\frac{d}{dt}U(t, x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = 2yz - 2zy = 0$$

Таким чином, $U(t, x, y, z) = y^2 + z^2$ – I інтеграл системи.

Зауваження. Похідною функції $U \in C^1(D)$ є функція:

$$\dot{U}_f(t, \overrightarrow{x}) = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot f_i(t, \overrightarrow{x})$$

Теорема 5.1 (Аналітичний критерій першого інтегралу)**.** $U \in C^1(D)$ є першим інтегралом системи (7) т.т.т.к.:

$$\forall (t, x) \in D \ \ \dot{U}_f(t, x) = 0$$

Доведення. $\boxed{\Longleftarrow}$ $\dot{U}_f(t, x) \Rightarrow$ Для довільного розв'язку $\overrightarrow{x}(t), t \in I$.

$$0 = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot f_i(t, \overrightarrow{x}) = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt}U(t, \overrightarrow{x}(t)) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{d}{dt}U(t, \overrightarrow{x}(t)) = 0 \ \Rightarrow \ U \text{ - перший інтеграл.}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Нехай U - I інтеграл. Тоді для кожного розв'язку виконується:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot f_i = \dot{U}_f(t, \overrightarrow{x}(t))$$

Отже, $\forall \overrightarrow{x}(t)$ - розв'язку: $\dot{U}_f(t, \overrightarrow{x}(t)) = 0$.

І оскільки $\overrightarrow{f} \in C(D)$, то за т. Пеано $\forall (t, \overrightarrow{x}) \in D$ знайдеться розв'язок, що проходить через цю точку, а отже: $\forall (t, \overrightarrow{x}) \in D \;\; \dot{U}_f(t, \overrightarrow{x}) = 0$. $\blacksquare$

Зауваження. З прикладу бачимо, що для диф. рівняння першого порядку пошук першого інтегралу, фактично, завершує розв'язання цього рівняння.

Питання. скільки потрібно знайти перших інтегралів системи (7), щоб вважати її розв'язаною?

Зауваження. Якщо U - перший інтеграл системи, то $\forall \varphi \in C(D)$:

$$\varphi(U) \text{ - також перший інтеграл.}$$

Означення. Перші інтегралии назвемо функціонально незалежними, якщо ранг матриці Якобі для цих перших інтегралів $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ дорівнює їх кількості.

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial U_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial U_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial U_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial U_k}{\partial x_n} \end{bmatrix} = k$$

Означення. Набір з n функціонально незалежних перших інтегралів називається повним набором перших інтегралів.

Теорема 5.2 (про існування повного набору перших інтегралів)**.**
Нехай $\overrightarrow{f} \in C^1(D)$. Тоді $\forall (t, \overrightarrow{t}) \in D$ знайдеться окіл цієї точки, в якому існує повний набір.

Теорема 5.3 (про загальний розв'язок системи (7))**.** Нехай $\overrightarrow{f} \in C^1(D)$; $\{U_i\}_{i=1}^n$ - повний набір перших інтегралів системи (7). Тоді співвідношення:

$$\{U_i(x, y) = c_i\}_{i=1}^n$$

задають загальний розв'язок системи (7).

5.2 Методи розв'язання систем n-го порядку.

5.2.1 Метод виключення.

(Метод зведення до рівняння n-го порядку відносно однієї зі змінних)

Приклад.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z-x} \\ \dfrac{dz}{dx} = y+1 \end{cases}$$

Продиференціюємо перше рівняння:

$$y'' = \frac{2yy'(z-x) - (z'-1)y^2}{(z-x)^2}$$

З першого рівняння: $z - x = \dfrac{y^2}{y'}$.
З другого рівняння: $z' - 1 = y$.

Підставимо:

$$y'' = \frac{2yy' \cdot \frac{y^2}{y'} - y^3}{\frac{y^4}{(y')^2}}$$

$$y'' = \frac{y^3}{y^4} \cdot (y')^2 \implies y'' = \frac{(y')^2}{y}$$

Зауважимо, що ми втратили розв'язок $y = 0$, поділивши на y. Отримали:

$y'' = \frac{(y')^2}{y}$ - рівняння , що не залежить від x.

Заміна: y - нова незалежна змінна:

$$y' = p, p = p(y) \text{ - нова невід'ємна функція.}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p$$

$$p'p = \frac{p}{y} \quad p' = \frac{p}{y} \quad \frac{dp}{dy} = \frac{p}{y} \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln|c_1| \implies p = c_1 \cdot y$$

$$y' = c_1 y \implies \frac{dy}{y} = c_1 \implies \ln|y| = c_1 x + \ln|c_2| \implies \boxed{y = c_2 \cdot e^{c_1 x}}$$

Знайдемо z:

$$z - x = \frac{y^2}{y'} = \frac{c_2^2 e^{2c_1 x}}{c_1 c_2 e^{c_1 x}} = \frac{c_2}{c_1} e^{c_1 x}$$

$$z = \frac{c_2}{c_1} e^{c_1 x} + x$$

Остаточна відповідь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = c_2 e^{c_1 x} \\ z = \frac{c_2}{c_1} e^{c_1 x} + x \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ z = x + c \end{cases} \end{array}\right.$$

5.2.2 Метод інтегрованих комбінацій.

Розглянемо систему (7) в нормальній формі:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \dot{x_2} = f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \qquad \ldots \\ \dot{x_n} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Записують у симетричній формі:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{f_2} = \quad \ldots \quad = \frac{\mathrm{d}x_n}{f_n} = \frac{\mathrm{d}t}{1}$$

Після цього застосовують наступну властивість:

$$\text{Якщо } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \quad \ldots \quad = \frac{a_n}{b_n}$$

То $\forall \{c_i\}_{i=1}^n$ справедливо, що:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \quad \ldots \quad = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^n c_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^n c_i b_i}$$

Цей факт легко довести методом мат. індукції.

Мета: підібрати $\{c_i\}_{i=1}^n$ так, щоб отримати інтегровані рівняння в рівностях.

Приклад.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{z-1}{z} \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{y-x} \end{cases}$$

Запишемо систему у симетричній формі:

$$\frac{z\mathrm{d}y}{z-1} = \frac{(y-x)\mathrm{d}z}{1} = \frac{\mathrm{d}x}{1}$$

Візьмемо $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -z$, тоді:

$$\frac{z\mathrm{d}y}{z-1} = \underline{\underline{\frac{(y-x)\mathrm{d}z}{1}}} = \frac{\mathrm{d}x}{1} = \frac{z\mathrm{d}y - z\mathrm{d}x}{z-1-z} = \underline{\underline{-\frac{z(\mathrm{d}y-\mathrm{d}x)}{1}}}$$

Отримуємо: $(y-x)\mathrm{d}z = -z\mathrm{d}(y-x)$, тоді: $\dfrac{\mathrm{d}z}{z} = -\dfrac{\mathrm{d}(y-x)}{y-x}$, з цього маємо:

$$\ln z = -\ln|y-x| + \ln c_1 \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{c_1}{y-x} \quad \Longrightarrow \quad z(y-x) = c_1$$

Далі:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{z-1}{z} = 1 - \frac{1}{z} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{y-x}{c_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{c_1} = 1 + \frac{x}{c_1}$$

Остання рівність це лінійне неоднорідне рівняння першого порядку, застосуємо метод Бернуллі: $y = uv$, тоді:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{c_1} = 1 + \frac{x}{c_1} \quad \Longrightarrow \quad u'v + u(v' + \frac{v}{c_1}) = 1 + \frac{x}{c_1}$$

З цього тримуємо:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{v}{c_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{1}{c_1}\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad v = e^{-\dfrac{x}{c_1}}$$

Тоді:

$$u' \cdot e^{-\dfrac{x}{c_1}} = 1 + \frac{x}{c_1} \quad \Longrightarrow \quad u' = e^{\dfrac{x}{c_1}} + \frac{x}{c_1} \cdot e^{\dfrac{x}{c_1}} \quad \Longrightarrow \quad u = x \cdot e^{\dfrac{x}{c_1}} + c_2$$

Остаточно отримуємо:

$$y = (x \cdot e^{\dfrac{x}{c_1}} + c_2) \cdot e^{-\dfrac{x}{c_1}} \quad \Longrightarrow \quad y = x + c_2 e^{-\dfrac{x}{c_1}} \quad \Longrightarrow \quad c_2 = (y-x)e^{\dfrac{x}{c_1}}$$

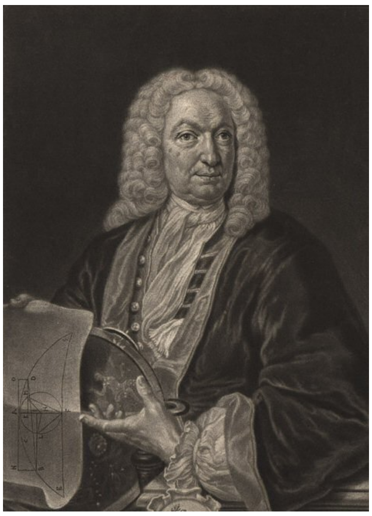
Тоді: $c_2 = (y-x)e^{\dfrac{x}{z(y-x)}}$, відповідь: $\begin{cases} z(y-x) = c_1 \\ (y-x)e^{\dfrac{x}{z(y-x)}} = c_2 \end{cases}$.

Лекція 6

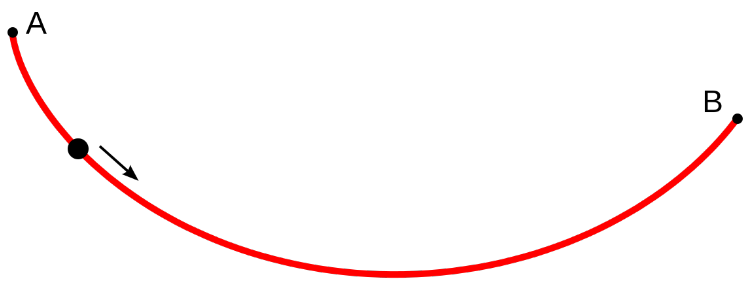
6.1 Варіаційне числення

Історія екстремальних задач (задач на знаходження найменших та найбільших величин) — це, фактично, історія математики. Найдревнішою з таких задач прийнято вважати класичну *задачу Дідони* (серед гладких замкнутих кривих заданої довжини знайти криву, що охоплює найбільшу полощу).

Однак до певного моменту розв'язання екстремальних задач потребувало індивідуального підходу до кожної задачі і більш походило на мистецтво, ніж на науку. Систематичний розвиток класичного варіаційного числення розпочався в 1696 році, коли Йоганн Бернуллі опублікував в німецькому науковому часописі "Acta Eruditorum" задачу, відому сьогодні як *"задача про брахісторону"*, з закликом до найвідоміших науковців того часу розв'язати її.



Йоганн Бернуллі



Ілюстрація задачі "задачі про брахісторону"

Задача: задано дві точки A та B на полощині, які не лежать на вертикальній прямій. Знайти гладку криву, по якій матераільна точка лише під дією сили тяжніння скотиться з точки A в точку B за найкоротший проміжок часу.

Протягом року Йоганн Бернуллі розв'язав задачу сам і отримав ще чотири різних ров'язки від Ісаака Ньютона, Якоба Бернуллі, Готфріда Вільгельма Лейбніца, Гійома де Лопіталя. І саме розв'язання задачі про брахісторону, запропоноване Ісааком Ньютона, дало початок розвитку варіаційного числення як окремої матетматичної теорії. В подальшому варіаціїне числення завдячує своєму розвитку таким вченим як Леонард Ейлер, Жозеф Луі Лагрнаж, Карл Якобі, Адрієн-Марі Лежандр, Карл Вейєрштрасс та інші.
Нехай Y – дійсний нормований простір з нормою $||y||$ елементів $y \in Y$

Приклад. $C[a, b]$ – дійсний нормований простір з нормою:

$$||\varphi(x)||_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |\varphi(x)|$$

Нехай $M \subset Y$ – деяка підмножина. Відображення $F : M \to \mathbb{R}; M \subset Y$ називається функціоналом з областю визначення M. Тобто на множині $M \subset Y$ задана функціонал $F(y)$, якщо кожному елементу $y \in M$ однозначно поставлено у відповідність дійсне число.

Приклад. $J(y) = \int\limits_a^b y(x)\mathrm{d}x, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$, що розглядаютсья на множині функцій $M = \{y \in C[a, b] \mid y(a) = A,\ y(B) = B\}$ є функціоналом, який кожній функції з множини M ставить у відповідність значення інтеграла.

Класичне варіаційне числення вивчає загальні методи знаходження екстремумів функціоналів, заданих в певних функціональних просторах.

6.2 Найпростіша задача варіаційного числення

Розглянемо $C^1[a,b]$ – дійсний нормований простір з нормою:

$$||\varphi(x)||_{C^1[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |\varphi(x)| + \max_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)|$$

Нехай $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ – задані числа. $F(x, y, p) \in C^1([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ – задана функція. Розглянемо інтеграл:

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x \tag{8}$$

На множині функцій:

$$M = \{y \in C^1[a,b] \mid y(a) = A,\ y(b) = B\}$$

де числа $A, B \in \mathbb{R}$ – задані. Функції $y \in M$ називаються допустимими.

Тоді $J(y)$ — **функціонал** на M.

Означення. Допустима функція $\tilde{y}(x) \in M$ дає слабкий локальний мінімум (максимум) функціоналу $J(y)$ на M, якщо $\exists\delta > 0 : \forall y \in M : ||y - \tilde{y}||_{C^1[a,b]} < b$ справедливо, що: $J(y) \geq (\leq) J(\tilde{y})$.

Означення. Допустима функція $\tilde{y}(x) \in M$ дає слабкий глобальний мінімум (максимум) функціоналу $J(y)$ на M, якщо $J(y) \geq (\leq) J(\tilde{y})$.

Означення. Задача пошуку слабкого локального (глобального) екстремуму (min, max) функціоналу $J(y)$ на M називається найпростішою задачею варіаційного числення.

Відомо, що при дослідженні функцій на екстремум вирішальну роль відіграє похідна функції. При дослідженні екстремумів функціоналів схожу роль відіграє поняття варіації функціоналу. Введемо його.

Для довільної функції $y \in M : \forall h(x) \in C^1[a, b]$ такої, що $h(a) = h(b) = 0$ та $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ розглянемо сімейство функцій:

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha h(x)$$

Тоді $\forall \alpha \in \mathbb{R} y(x, \alpha) \in M$ розглянемо:

$$J(y + \alpha h) = \int_a^b F(x, y(x) + \alpha h(x), y'(x) + \alpha h'(x))\mathrm{d}x$$

Тоді функція $\Phi(\alpha) := J(y+\alpha h)$ є неперервно-диференційовную по α в деякому околі точки $\alpha = 0$.

$$\Phi'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(y + \alpha h)\Big|_{\alpha=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \cdot h(x) + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \cdot h'(x) \right) \mathrm{d}x$$

Означення. Допустимим приростом (варіацією) функції $y \in M$ називають довільну функцію $h(x) \in C^1[a, b] : h(a) = h(b) = 0$.

Вираз $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(y + \alpha h)\Big|_{\alpha=0}$, де $h(x)$ – допустимий приріст, називають першою варіацією функціоналу $J(y)$ на функції $y(x)$ в напрямку $h(x)$, позначення:

$$\delta J(h, y) = \frac{d}{d\alpha} J(y + \alpha h)\Big|_{\alpha=0}$$

Теорема 6.1. Нехай $\tilde{y}(x) \in M$ – розв'язок найпростішої задачі варіаційного числення. Тоді: $\delta J(\tilde{y}, h) = 0 \ \ \forall h \in C^1[a,b] : h(a) = h(b) = 0$.

Доведення. Нехай $\tilde{y}(x) \in M$ дає слабкий локальний мінімум задачі, тобто

$$\exists \delta > 0 : \forall \eta \in C^1[a,b] : \eta(a) = \eta(b) = 0 : ||\eta||_{C^1[a,b]} < \delta$$

справедливо, що $J(\tilde{y} + \eta) \geq J(\tilde{y})$. Покладемо:

$$\eta(x) = \alpha h(x), \text{ де } h(x) \text{ — допустимий приріст.}$$

Тоді $\tilde{y} = \eta \in M$ та для достатньо малих α:

$$||\eta|| = |\alpha| \left(\max_{x \in [a,b]} |h(x)| + \max_{x \in [a,b]} |h'(x)| \right) = |\alpha| \cdot ||h||_{C^1[a,b]} < \delta$$

Таким чином: $\Phi(\alpha) = J(\tilde{y} + \alpha h) \geq J(\tilde{y}) = \Phi(0) \implies$ точка $\alpha = 0$ — точка локального мінімуму $\Phi(\alpha)$. Тому: $0 = \Phi'(0) = \delta J(\tilde{y}, h)$ ■

Зауваження. Дана теорема є незручною для розв'язання задач. Для того, щоб встановити більш зручну теорему, потрібна *Лема Лагранжа.*

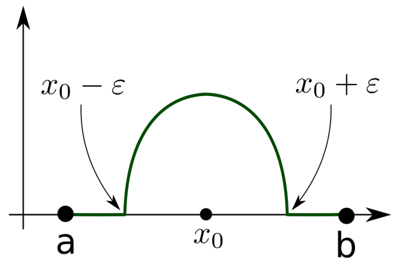
Лема 6.1. Якщо $f \in C[a,b]$ і $\int\limits_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = 0 \ : \ \forall h \in C^1[a,b] : h(a) = h(b) = 0$, тоді: $f(x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b]$.

Доведення. Припустимо від супротивного, що $\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) \neq 0$. Візьмемо $f(x_0) > 0$. Оскільки $f \in C[a,b]$, то існує окіл цієї точки:

$$O_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \text{ такий, що: } f(x) > 0 \ \forall x \in O_\varepsilon(x_0)$$

Візьмемо:

$$h(x) = \begin{cases} (x-(x_0-\varepsilon))^2(x-(x_0+\varepsilon))^2, & x \in O_\varepsilon; \\ 0, & x \notin O_\varepsilon. \end{cases}$$



Тоді $h(x) \in C^1[a,b], h(a) = h(b) = 0$. При цьому:

$$0 = \int\limits_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{x_0+\varepsilon}^{x_0-\varepsilon} \underbrace{f(x)h(x)}_{>0 \text{ за прип.}} \mathrm{d}x > 0$$

Отримали протиріччя $0 > 0$. ■

Теорема 6.2. Нехай $F(x,y,p) \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ – задана функція. Нехай допустима функція $\tilde{y} \in C^2[a,b]$ є розв'язком найпростішої задачі варіаційного числення. Тоді $\tilde{y}(x)$ задовільняє рівняння Ейлера на $[a,b]$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Доведення. Нехай $\tilde{y} \in C^2[a,b]$ є розв'язком найпростішої з.в.ч. Тоді:

$$\delta J(\tilde{y}, h) = 0 \qquad \forall h \in C^1[a,b] : h(a) = h(b) = 0$$

$$0 = \delta J(\tilde{y}, h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(\tilde{y} + \alpha h)\bigg|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') \cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') \cdot h'(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') & dv = h'(x)\mathrm{d}x \\ du = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\right) & v = h(x) \end{vmatrix} = \int\limits_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') \cdot h(x)\mathrm{d}x +$$

$$+\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}(x,\tilde{y},\tilde{y}')\cdot h(x)\bigg|_a^b}_{=0\ \Leftarrow\ h(b)=h(a)=0} - \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(x,\tilde{y},\tilde{y}')\right)\cdot h(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x,\tilde{y},\tilde{y}') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(x,\tilde{y},\tilde{y}')\right)\right]\cdot h(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\forall h \in C^1[a,b] : h(a)=h(b)=0 \xRightarrow{\text{лема Лагранжа}} \text{ рівняння Ейлера.}$$

$\blacksquare$

Означення. Розв'язки рівняння Ейлера називаються **екстремалями** функціоналу $J(y)$. Екстремалі, які є допустимими функціями, називаются *допустимими екстремалями.* Саме серед допустимих екстремалей слід шукати розв'язок НЗВЧ.

Зауваження. Умови $\tilde{y} \in C^2[a,b], F \in C^2\left([a,b]\times\mathbb{R}^2\right)$ накладені з метою спростити доведення (щоб "узаконити" інтегрування частинами). Насправді, твердження теореми буде вірним і для неперервно-диференційованих функцій.

Приклад.

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 (y'(x))^2\mathrm{d}x \to \mathrm{extr}; \\ y(0)=0 \qquad y(1)=1. \end{cases}$$

1) Складаємо і розв'язуємо рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$F(x,y,y') = (y')^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y') = 2y'' \implies 0 - 2y'' = 0 \implies \boxed{y'' = 0}$$

Отримали рівняння Ейлера. Двічі інтегруємо:

$$y = C_1 x + C_2 \text{ — сімейство екстремалей.}$$

2) Знаходимо допустимі екстремалі.

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 0$$

$$y(1) = 1 \;\Rightarrow\; 1 = C_1 \cdot 1 \;\Rightarrow\; C_1 = 1$$

$$\tilde{y}(x) = x \text{ — допустима екстремаль.}$$

3) Перевіряємо, чи досягаєтся в $\tilde{y}(x)$ extr функціоналу $J(y)$:

$\forall h \in C^1[0,1] : h(0) = h(1) = 0$ розглядаємо $J(\tilde{y} + h) - J(\tilde{y})$.

- Якщо $J(\tilde{y} + h) - J(\tilde{y}) \geq 0 \quad \forall h \in C^1[0,1] : h(0) = h(1) = 0$ принаймі з деякого околу $||h||_{C^1[0,1]} < \delta$, то $\tilde{y}(x)$ забезпечує слабкий локальний мінімум функціоналу.
- Якщо $J(\tilde{y} + h) - J(\tilde{y}) \geq 0 \quad \forall h \in C^1[0,1] : h(0) = h(1) = 0$, то $\tilde{y}(x)$ забезпечує слабкий глобальний мінімум функціоналу.
- Якщо нерівність виконується з протилежним знаком (≤ 0), то досягається максимум (локальний або глобальний).
- Якщо різниця функціоналів знакозмінна, то extr не досягається.

Маємо:

$$J(\tilde{y}+h)-J(\tilde{y})=\int\limits_0^1(\tilde{y}'+h')^2\mathrm{d}x-\int\limits_0^1(\tilde{y}')^2\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_0^1(\tilde{y}')^2+2\tilde{y}'h'+h'^2-(\tilde{y}')^2\mathrm{d}x \ominus$$

$$\left(\int\limits_0^1\tilde{y}'h'=\begin{vmatrix}\tilde{y}'=u & h'=v'\\ \tilde{y}''=\mathrm{d}u & h=v\end{vmatrix}=\tilde{y}'h\Big|_0^1-\int\limits_0^1\tilde{y}''h\mathrm{d}x=0\right)$$

$$\ominus\int\limits_0^1(h')^2\mathrm{d}x\geq 0\quad\forall h\in C^1[0,1]:h(0)=h(1)=0\Longrightarrow\boxed{\text{сл. глобальний мінімум.}}$$

Приклад.

$$\begin{cases}J(y)=\int\limits_0^1(y+y')^2\mathrm{d}x\to\mathrm{extr}\\ y(0)=1\qquad y(1)=0\end{cases}$$

1) Складаємо і розв'язуємо рівняння Ейлера:

$$F=(y+y')^2\qquad\frac{\partial F}{\partial y}=2(y+y')\qquad\frac{\partial F}{\partial y'}=2(y+y')$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0,\quad y+y'-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y+y')=0$$

$$y+y'-y'-y''=0\implies y''-y=0\text{ — \textit{рівняння Ейлера.}}$$

Отримали ЛОР 2-го порядку. Складемо характеристичне рівняння:

$\lambda^2-1=0\implies\lambda=\pm1\implies y(x)=C_1+e^x+C_2e^{-x}$– сімейство екстремалей.

2) Знаходимо допустові екстремалі:

$$\begin{matrix} y(0)=1: & 1=C_1e^0+C_2e^0 & \Longrightarrow & C_1+C_2=1 \\ y(1)=0: & 0=C_1e^1+C_2e^{-1} & \Longrightarrow & C_1+C_2e^{-2}=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=1 \\ C_1+C_2e^{-2}=0 \end{cases}$$

$$C_2(e-e^{-1})=e \quad \Longrightarrow \quad C_2=\frac{e}{e-e^{-1}} \quad \Longrightarrow \quad C_1=-\frac{1}{e(e-e^{-1})}$$

$$\tilde{y}(x)=-\frac{1}{e(e-e^{-1})}e^x+\frac{e}{e-e^{-1}}e^{-x}=\frac{1}{e-e^{-1}}\left(-e^{x-1}+e^{-x+1}\right)=-\frac{\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}(1)}$$

Отримали $-\frac{\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}(1)}$ — допустима екстремаль.

3) Перевірка. Перевіряємо, чи забезпечує $\tilde{y}(x)$ екстремум задачі.

$\forall h \in C^1[0,1] : h(0)=h(1)=0 :$

$$J(\tilde{y}+h)-J(\tilde{y})=\int_0^1((\tilde{y}+h)+(\tilde{y}'+h'))^2\mathrm{d}x-\int_0^1(\tilde{y}+\tilde{y}')^2\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^1(\tilde{y}+h)^2+2(\tilde{y}+h)(\tilde{y}'+h')+(\tilde{y}'+h')^2\mathrm{d}x-\int_0^1\tilde{y}^2+2\tilde{y}\tilde{y}'+(\tilde{y}')^2\mathrm{d}x=$$

$$=|\textit{розкриваючи дужки}|=\int_0^1 h^2+(h')^2+2(\tilde{y}+\tilde{y}')h+2(\tilde{y}+\tilde{y}')h'\mathrm{d}x \ominus$$

$$\left(\begin{matrix} \text{Візьмемо частинами:} \\ \displaystyle\int_0^1(\tilde{y}+\tilde{y}')h'\mathrm{d}x=\begin{vmatrix} (\tilde{y}+\tilde{y}')=u & h'=v' \\ (\tilde{y}'+\tilde{y}'')=\mathrm{d}u & h=v \end{vmatrix}= \\ =\underbrace{(\tilde{y}+\tilde{y}')h\Big|_0^1}_{=0\ \Leftarrow\ h(0)=h(1)=0}-\displaystyle\int_0^1(\tilde{y}'+\tilde{y}'')h\mathrm{d}x \end{matrix}\right)$$

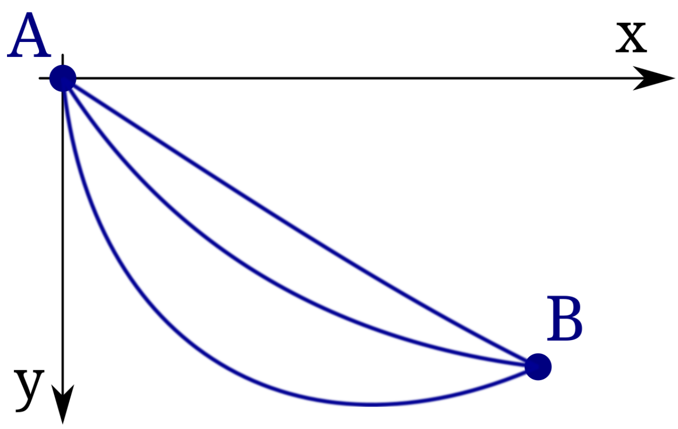
$$\ominus \int\limits_0^1 h^2 + (h')^2 + \underbrace{2(\tilde{y} + \tilde{y}' - \tilde{y}' - \tilde{y}'')}_{=0 \ \Leftarrow\ \tilde{y}=\tilde{y}''(\text{з р-ня Ейлера})h} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 (h^2 + (h')^2)\mathrm{d}x \geq 0 \qquad \forall h \in C^1[a,b] : h(0) = h(1) = 0$$

Отримали: $\boxed{\tilde{y}(x) = -\frac{\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}(1)} \text{ — слабкий глобальний мінімум функціоналу.}}$

6.3 Задача про брахісторону

Знайти криву, по якій матеріальна точка скотиться найшвидше, нехтуюч тертям та опорою середовища. Нехай A - точка початку координат, т. $B(x_1, y_1)$.



$$U(x) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \implies \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{U(x)}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x$$

Закон збереження енергії:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy \implies v = \sqrt{2gy}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{2gy}}$$

Отримали математичну постановку задачі:

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{2g} \displaystyle\int\limits_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}}\mathrm{d}x \to \mathrm{extr} \\ y(0) = 0 \qquad\qquad y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

Класичне рівняння Ейлера надто складне для даної задачі.

Лема 6.2. Якщо $F(x,y,y') = F(y,y')$, то рівняння Ейлера набуває наступного вигляду:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

Доведення. Розглядаємо рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(y,y') - y'\frac{\partial F}{\partial y}\right) &= \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y' + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'' - y''\frac{\partial F}{\partial y} - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \\
&= 0 + y'\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)}_{=0} = 0
\end{aligned}$$

■

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C \quad\Longrightarrow\quad F = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y')^2}}$$

Маємо:

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y(1+y')^2}} = C$$

Домножимо ліву та праву і праву частину на $\sqrt{y(1+(y')^2)}$:

$$1+(y')^2-(y')^2 = C\sqrt{y(1+(y')^2)}, \quad y(1+(y')^2) = C_1,\text{ де } C_1 = \frac{1}{C^2}$$

Отримали рівняння, нерозв'язне відносно похідної:

$$y = \frac{C_1}{1 + (y')^2}$$

Параметризація:

$$x = x \qquad y' = \operatorname{ctg} p \qquad p - \text{параметр},\ y = \frac{C_1}{1 + \operatorname{ctg}^2 p} = C_1 \cdot \sin^2 p,\ dy = y'dx$$

$$2C_1 \sin p \cos p \mathrm{d}p = \frac{\cos p}{\sin p}\mathrm{d}x, \quad 2C_1 \sin^2 p \mathrm{d}p = \mathrm{d}x, \quad C_1(1 - \cos(2p))\mathrm{d}p = \mathrm{d}x$$

$$\begin{cases} x = C_1(p - \dfrac{\sin(2p)}{2}) + C_2 \\ y = C_1 \sin^2 p \end{cases} \implies \begin{cases} \text{Параметризоване рівняння циклоїди:} \\ x = \dfrac{C_1}{2}(2p - \sin(2p)) + C_2 \\ y = \dfrac{C_1}{2}(1 - \cos(2p)) \end{cases}$$

Оскільки $y(0) = 0 \implies C_2 = 0$. C_1 знаходимо з умови $y(x_1) = y_1$.

Лекція 7

7.1 Задача з вільним кінцем

Нехай $a, b \in \mathrm{R}, a < b$ – задачі числа, $F(x, y, p) \in C^2([a, b] \times \mathrm{R}^2)$ – задана функція. Розглянемо інтеграл:

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x$$

На множині функцій:

$$M = \{y \in C^1[a, b] \mid y(a = A)\},\ \text{де } A \in \mathrm{R} \text{ – задане число}$$

Функції $y \in M$ – допустимі функції.

Означення. Допустима фунція $\tilde{y}(x) \in M$ забезпечує слабкий локальний min(max) функціоналу $J(y)$ на M, якщо $\exists \delta > 0 : \forall y \in M ||y - \tilde{y}||_{C^1[a,b]} < \delta$ справедливо, що $J(y) \geq (\leq) J(\tilde{y})$. Якщо нерівність виконується для $\forall y \in M$, то допустима функція $\tilde{y} \in M$ забезпечує глобальний min(max) функціоналу $J(y)$ на M.

Означення. Задач пошуку слабкого локального (глобального) екстремуму функціоналу $J(y)$ на M називається *задачею з вільним кінцем.*

Теорема 7.1. *Якщо допустима функція:*

$$\tilde{y} \in C^2[a,b]$$

є розв'язком задачі з вільним кінцем, то $\tilde{y}(x)$ задовільняє рівнянню Ейлера на $[a,b]$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

та граничній умові при $x = b$:

$$\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y(x), y'(x))\bigg|_{x=b} = 0$$

Доведення. Для довільного $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall h\ inC^1[a,b] : h(a) = 0$ розглянемо функцію $\Phi(\alpha) = J(\tilde{y} = \alpha h)$.

Тоді для $\Phi(\alpha)$ справедливо, що:

$$\Phi(\alpha) = J(\tilde{y} + \alpha h) \geq J(\tilde{y}) = \Phi(0)$$

в деякому околі т. $\alpha = 0$ (якщо $\tilde{y}(x)$ – забезпечує слабкий локальний мінімум).

Отже, т. $\alpha = 0$ - точка локального екстремуму функції $\Phi(\alpha) \Rightarrow \Phi'(0) = 0$.

$$0 = \Phi'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}J(\tilde{y} - \alpha h)\bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\int\limits_a^b F(x, \tilde{y}(x) + \alpha h(x), \tilde{y}'(x) + \alpha h'(x))\mathrm{d}x\right)\bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{\partial F(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{\partial y} \cdot h + \frac{\partial F(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{\partial y'} \cdot h' \mathrm{d}x \ominus$$

Візьмемо другий додаток частинами:

$$\ominus \frac{\partial F(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{\partial y'} \cdot h(x)\Big|_a^b + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial F(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{\partial y'} \right) \right) \cdot h(x) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y'}(b, \tilde{y}(b), \tilde{y}'(b)) \cdot h(b) + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) h \mathrm{d}x = 0 \quad (*)$$

$$\forall h \in C^1[a,b] : h(a) = 0$$

Дана рівність виконується в тому числі і при:

$$\forall h \in C^1[a,b] : h(a) = h(b) = 0.$$

Тоді $\forall h \in C^1[a,b] : h(a) = h(b) = 0$:

$$\int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) h \mathrm{d}x = 0$$

$\Longrightarrow$ внаслідок леми Лагранжа отримуємо рівняння Ейлера.

Доведемо граничну умову. Повернемося до рівності $(*)$:

$$\forall h \in C^1[a,b] : h(a) = 0 :$$

$$(*) \implies \frac{\partial F}{\partial y'}(b, \tilde{y}(b), \tilde{y}'(b)) \cdot h(b) = 0 \implies$$

$\implies$ (з довільного вибору $h(b)$) $\Longrightarrow$ гранична умова. ■

Зауваження. Розв'язки рівняння Ейлера називаються екстремалями. Розв'язки, які задовольняють умові $x(a) = A$ та граничній умові:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0$$

називаються *допустимими екстремалями.*

Зауваження. Аналогічно можна розглянути задачу з закріпленим верхнім кінцем та вільним нижнім кінцем ($x(b) = B$). Тоді гранчна умова має виконуватись в т. $x = a$.

Аналогічно можна розглянути задачу з двома вільними кінцями (тоді має виконуватись дві граничні умови).

Приклад.

$$\begin{cases} J(y) = \int\limits_0^1 (y'(x))^2 \mathrm{d}x; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1) Складаємо і розв'язуємо рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$F = (y')^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y') = 0 \Longrightarrow y' = C_1 \Longrightarrow \boxed{y = C_1 x + C_2 \text{ – сімейство екстремалей.}}$$

2) Знаходимо допустимі екстремалі:

$$y(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 0 + C_2 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 1$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=1} = 0 \qquad 2y'(1) = 0 \qquad (y' = C_1)$$

$$2C_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tilde{y}(x) = 1 \text{ – єдина допустима екстремаль.}}$$

3) Перевірка.

$$\forall h \in C^1[0,1] : h(0) = 0$$

$$J(\tilde{y}+h) - J(\tilde{y}) = \int\limits_0^1 (\tilde{y}' + h')^2 \mathrm{d}x - \int\limits_0^1 (\tilde{y}')^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (2\tilde{y}'h' + (h')^2)\mathrm{d}x \ominus$$

1-ий доданок беремо частинами: $2\tilde{y}' = y; h' = v'$.

$$\ominus\, 2\tilde{y}'h\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 -2\tilde{y}''h + (h')^2 \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} h(0) = 0 \Rightarrow 2\tilde{y}'h(0) = 0; \\ \tilde{y}(x) = C_1 \Rightarrow y' = y'' = 0 \end{array} \right| = \int\limits_0^1 (h')^2 \mathrm{d}x \geq 0$$

$$\forall h \in C^1[0,1] : h(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Маємо глобальний мінімум.}$$

7.2 Задача Больца.

Нехай $a, b \in \mathbb{R}, a < b$:

- $F(x,y,p) \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ – задана функція.
- $f(u,v) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ – задана функція.

В просторі $C^1[a,b]$ розглянемо інтеграл:

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x + f(y(a), y(b))$$

Означення слабкого локального (глобального) мінімуму (максимуму) аналогічні попереднім задачам.

Означення. Задача пошуку слабкого локального (глобального) екстремуму функцаоналу $J(y)$ в просторі $C^1[a,b]$ називається **задачею Больца**.

Теорема 7.2. Нехай $\tilde{y}(x) \in C^2[a,b]$ – розв'язок задачі Больца. Тоді $\tilde{y}(x)$ задовольняэ рівнянню Ейлера на $[a,b]$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

та умови трансверсальності:

$$\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x))\bigg|_{x=a} = \frac{\partial f}{\partial u}(y(a), y(b))$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x))\bigg|_{x=b} = -\frac{\partial f}{\partial v}(y(a), y(b))$$

Доведення. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall h \in C^1[a,b]$ розглянемо функцію:

$$\Phi(\alpha) = J(\tilde{y} - \alpha h)$$

Оскільки $\tilde{y}$ - слабкий локальний (глобальний) екстремум функціоналу $J(\tilde{y})$, то точка $\alpha = 0$ – т. локального екстремуму функції:

$$\Phi(\alpha) \Longrightarrow 0 = \Phi'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(\tilde{y} + \alpha h)\bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\int\limits_a^b F(x, \tilde{y} + \alpha h, \tilde{y}' + \alpha h')\right)\mathrm{d}x + f(\underbrace{\tilde{y}(a) + \alpha h(a)}_{u}, \underbrace{\tilde{y}(b) + \alpha h(b)}_{v})\bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') \cdot h + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') \cdot h' \right) \mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{y}(a), \tilde{y}(b)) \cdot h(a) + \frac{\partial f}{\partial v}(\tilde{y}(a), \tilde{y}(b)) \cdot h(b) \ominus$$

Візьмемо 2-гий доданок під інтегралом частинами:

$$\ominus \frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') \cdot h \Big|_a^b + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') \right) \cdot h \mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{y}(a), \tilde{y}(b)) \cdot h(a) + \frac{\partial f}{\partial v}(\tilde{y}(a), \tilde{y}(b)) \cdot h(b) = 0 \qquad (*)$$

Дана рівність (*) виконується $\forall h \in C^1[a, b]$, в тому числі:

$$\forall h \in C^1[a, b] : h(a) = h(b) = 0$$

Розглянемо саме цей випадок. Маємо:

$$\int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') \right) \cdot h(x) \mathrm{d}x = 0$$

З леми Лагранжа отримуємо рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \;\text{ для }\; \tilde{y}(x) \text{ на } [a, b]$$

Повернемося до рівності (*) $\forall h \in C^1[a, b]$. Маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(b, \tilde{y}(b), \tilde{y}'(b)) \cdot h(b) - \frac{\partial F}{\partial y'}(a, \tilde{y}(a), \tilde{y}'(a)) \cdot h(a) +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{y}(a),\tilde{y}(b))\cdot h(a)+\frac{\partial f}{\partial n}(\tilde{y}(a),\tilde{y}(b))\cdot h(b)=0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\left[\frac{\partial F}{\partial y'}(b,\tilde{y}(b),\tilde{y}'(b))+\frac{\partial f}{\partial n}(\tilde{y}(a),\tilde{y}(b))\right]\cdot h(b)+$$

$$+\left[-\frac{\partial F}{\partial y'}(a,\tilde{y}(a),\tilde{y}'(a))+\frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{y}(a),\tilde{y}(b))\right]\cdot h(a)=0$$

З довільності вибору $h(x)\in C^1[a,b]$ отримуємо умови трансверсальності. ■

Зауваження. Аналогічно всі розв'язки рівняння Ейлера називаютсья *екстремалями.* Розв'язи, які задовольняють умовам трансверсальності — *допустимими екстремалями.*

Приклад.

$$\int\limits_0^1 (y')^2-y\mathrm{d}x+\frac{y^2(1)}{2}\longrightarrow \text{extr}$$

1) Складаємо і розв'язуємо рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

$$-1-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y')=0$$

$$-1-2y''=0\quad\Longrightarrow\quad y''=\frac{1}{2}$$

$$y'=-\frac{1}{2}x+C_1$$

$$y=-\frac{1}{4}x^2+C_1x+C_2 \text{ — сімейство екстремалей.}$$

2) Знаходимо допустимі екстремалі з умов трансверсальності:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=0}=\frac{\partial f}{\partial u}(y(0),y(1))$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=1}=-\frac{\partial f}{\partial v}(y(0),y(1))$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' = 2\left(-\frac{1}{2}x + C_1\right) = -x + 2C_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(0) = 2C_1 \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}(1) = -1 + 2C_1$$

$$f(u,v) = \frac{v^2}{2} \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = v$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(y(0), y(1)) = y(1) = -\frac{1}{4} + C_1 + C_2$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=0} = \frac{\partial f}{\partial u}(y(0), y(1)) \implies 2C_1 = 0 \implies C_1 = 0$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=1} = \frac{\partial f}{\partial u}(y(0), y(1)) \implies -1 + 2C_1 = \frac{1}{4} - C_1 - C_2$$

$$-1 = \frac{1}{4} - C_2 \implies C_2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

Остаточно, $\tilde{y}(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}$ — єдина допустима екстремаль.

3) Перевірка $\forall h \in C^1[0,1]$:

$$J(\tilde{y}+h) - J(\tilde{y}) = \int\limits_0^1 (\tilde{y}'+h')^2 - (\tilde{y}-h)\,\mathrm{d}x + \frac{(\tilde{y}(1)+h(1))^2}{2} - \int\limits_0^1 (\tilde{y}')^2 - \tilde{y}\,\mathrm{d}x - \frac{(\tilde{y}(1))^2}{2} =$$

$$= \int\limits_0^1 \underbrace{2\tilde{y}'}_{u}\underbrace{h'}_{v'} + (h')^2 - h\mathrm{d}x + \tilde{y}(1)h(1) + \frac{h^2(1)}{2} =$$

$$= 2\tilde{y}'h\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 -2\tilde{y}''h + (h')^2 - h\mathrm{d}x + \tilde{y}(1)h(1) + \frac{h^2}{2} \circleddash$$

$$\left|\begin{array}{c} \tilde{y}(1) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1 \quad \tilde{y}'(x) = -\frac{1}{4}\cdot 2x = -\frac{x}{2} \\ \tilde{y}'(0) = 0 \quad \tilde{y}'(1) = -\frac{1}{2} \quad \tilde{y}''(x) = -\frac{1}{2} \end{array}\right|$$

$$\circleddash\; -h(1) + \int\limits_0^1 h + (h')^2 - h\,\mathrm{d}x + h(1) + \frac{h^2(1)}{2} = \int\limits_0^1 (h')^2\mathrm{d}x + \frac{h^2(1)}{2} \geq 0$$

$\forall h \in C^1[0,1] \implies$ маємо **глобальний мінімум.**

7.3 Векторні задачі.

Розглянемо простір:

$$C_n^1[a,b] = \left\{ \overrightarrow{y}(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x)) \;\middle|\; y_i(x) \in C^1[a,b] \; \forall i = \overline{1,n} \right\}$$

$C_n^1[a,b]$ — нормований простір з нормою:

$$||\overrightarrow{y}||_{C_n^1[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} ||\overrightarrow{y}(x)||_{\mathbb{R}^n} + \max_{x\in[a,b]} ||\overrightarrow{y}'(x)||_{\mathbb{R}^n}$$

7.3.1 Найпростіша векторна задача.

Нехай $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ – задані числа.

$$F(x, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{p}) = F(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n) \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^{2n}) \text{ – задана функція.}$$

Розглянемо інтеграл:

$$J(\overrightarrow{y}) = J(y_1, \ldots, y_n) = \int_a^b F(x, \overrightarrow{y}(x), \overrightarrow{y}'(x))\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b F(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))\, \mathrm{d}x$$

де $\overrightarrow{A} = (A_1, \ldots, A_n)$; $\overrightarrow{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ – задані, функції $\overrightarrow{y} \in M$ — допустимі. Означення сабкого локального (глобального) мінімуму (максимуму) аналогічні попереднім задачам (тільки норма береться в просторі $C_n^1[a,b]$).

Означення. Задача пошуку екстремуму функціоналу $J(y)$ на M називається *векторною найпростішою задачею.*

Теорема 7.3. Нехай функція $\vec{y}(x) \in C_n^2[a,b]$ є розв'язком найпростішої векторної задачі. Тоді $\vec{y}(x)$ задовільняє *систему рівнянь Ейлера* на $[a,b]$:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0 \qquad i = \overline{1,n}$$

Доведення. Нехай $\vec{y}(x) = \tilde{y}_1(x), \ldots, \tilde{y}_n(x)$ – розв'язок. Зафіксуємо в $J(\overrightarrow{y})$:

$$y_2(x) = \tilde{y}_2(x), y_3(x) = \tilde{y}_3(x), \ldots, y_n(x) = \tilde{y}_n(x)$$

Таким чином, отимуємо найпростішу задачу відносно y_1:

$$\begin{cases} J(y_1) = \int\limits_a^b F(x, y_1(x), \tilde{y}_2(x), \ldots, \tilde{y}_n(x), y_1'(x), \tilde{y}_2'(x), \ldots, \tilde{y}_n'(x))\mathrm{d}x \to \text{exrt}; \\ y_1(a) = A_1 \qquad y_1(b) = B_1 \end{cases}$$

Тоді $\tilde{y}_1(x)$ – розв'язок даної задачі, тож $\tilde{y}_1(x)$ задовольняє р-ня Ейлера на $[a,b]$:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0$$

Аналогічно зафіксувавши $y_1(x) = \tilde{y}_1(x), y_3(x) = \tilde{y}_3(x), \ldots, y_n(x) = \tilde{y}_n(x)$, отримаємо найпростішу задачу для $y_2(x)$ та виконяння рівняння Ейлера для $\tilde{y}_2(x)$. Продовживши аналогічні міркування, отримаємо систему рівнянь Ейлера. ■

7.3.2 Векторна задача Больца.

Нехай $a, b \in \mathbb{R}; a < b$ – задані числа.

$$F(x, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{p}) \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^{2n}) \text{ – задана функція.}$$

$$f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in C^1(\mathbb{R}^{2n}) \text{ – задана функція.}$$

В просторі $C_n^1[a, b]$ розглянемо функціонал:

$$J(\overrightarrow{y}) = J(y_1, \ldots, y_n) = \int\limits_a^b F(x, \overrightarrow{y}(x), \overrightarrow{y}'(x))\mathrm{d}x + f(\overrightarrow{y}(a), \overrightarrow{y}(b))$$

Означення. Задача пошуку слабкого лок. (глобального) екстремуму функціоналу $J(\overrightarrow{y})$ в просторі $C_n^1[a, b]$ називається **векторною задачею Больца**.

Теорема 7.4. Нехай вектор-функція $\vec{\bar{y}}(x) \in C_n^2[a, b]$ є розв'язком задачі Больца. Тоді $\vec{\bar{y}}(x)$ задовольняє систему рівнянь Ейлера на $[a, b]$:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0 \qquad \forall i = \overline{1, n}$$

та умови *трансверсальності*:

$$\frac{\partial}{\partial y_i'}F(x, \overrightarrow{y}(x), \overrightarrow{y}'(x))\bigg|_{x=a} = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{y}(b)) \qquad i = \overline{1, n}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i'}F(x, \overrightarrow{y}(x), \overrightarrow{y}'(x))\bigg|_{x=b} = -\frac{\partial f}{\partial v_i}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{y}(b)) \qquad i = \overline{1, n}$$

Доведення. Аналогічно попередній теоремі. ■

Лекція 8

8.1 Задача зі старшими похідними.

Нехай $C^k[a,b]$ — простір k-раз неперервно-диференційованих на $[a,b]$ функцій. $C^k[a,b]$ — нормований простір з нормою:

$$||\varphi(x)||_{C^k[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |\varphi(x)| + \max_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| + \ldots \max_{x\in[a,b]} |\varphi^{(k)}(x)|$$

Нехай $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ – задані числа.

$$F(x, y, p_1, \ldots, p_k) \in C^{k+1}\left([a,b] \times \mathbb{R}^{k+1}\right) \text{ – задана функція.}$$

Розглядаємо інтеграл:

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(k)})\mathrm{d}x \text{ на множині функцій:}$$

$$M = \left\{ y \in C^k[a,b] \;\middle|\; y^{(j)}(a) = A_j, y^{(j)}(b) = B_j, j = \overline{0, k-1} \right\} \qquad A_j, B_j \in \mathbb{R}$$

Функції $y \in M$ називаються *допустимими.*

Означення. Означення слабкого локального(глобального) мінімуму (максимуму) інтегралу $J(y)$ на M аналогічні попереднім задачам.

Означення. Задача пошуку слабкого локального(глобального) мінімуму (максимуму) інтегралу $J(y)$ називається **задачею зі старшими похідними.**

Для довільної функції $y \in M$, для довільної функції:

$$h \in C^k[a,b] : h^{(j)}(a) = h^{(j)}(b) = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

розглянемо сімейство функцій:

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha h(x)$$

Тоді $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $y(x, \alpha) \in M$. Розглядаємо:

$$J(y + \alpha h) = \int\limits_a^b F(x, y + \alpha h(x), y' + \alpha h'(x), \ldots, y^{(k)} + \alpha h^{(k)}) \mathrm{d}x$$

Тоді функція: $\Phi(\alpha) = J(y + \alpha h)$ є неперервно-диференційованою по α в деякому околі т.$\alpha = 0$:

$$\Phi'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(y + \alpha h) \bigg|_{\alpha=0}$$

Означення. Допустимим приростом функції $y \in M$ називають довільну функцію $h(x) \in C^k[a,b]$:

$$h^{(j)}(a) = h^{(j)}(b) = 0 \qquad \forall j = \overline{0, k-1}$$

Вираз $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(y + \alpha h) \bigg|_{\alpha=0}$, де $h(x)$ – допустимий приріст, називається *першою варіацією* функціоналу $J(y)$ на функції $y(x)$ в напрямку $h(x)$. Позначення:

$$\delta J(y, h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(y + \alpha h) \bigg|_{\alpha=0}$$

Нехай $\tilde{y}(x)$ – розв‘язок задачі зі старшими похідними. Тоді т.$\alpha = 0$ є точкою локального екстремуму функції $\Phi(\alpha)$. Отже $\Phi'(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{\delta J(\tilde{y}, h) = 0}$ для кожного допустимого приросту h. Таким чином, отримали необхідну умову розв'язку в термінах першої варіації функціоналу.

Лема (Узагальнена лема Лагранжа)**.** Якщо $f \in C[a, b]$ і $\int\limits_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = 0$:

$$\forall h(x) \in C^k[a, b] : h^{(j)}(a) = h^{(j)}(b) = 0, j = \overline{0, k-1}$$

то $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Доведення. Припустимо від супротивного: $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) \neq 0$. Нехай $f(x_0) > 0$.

Оскільки $f \in C[a, b]$, то знайдеться окіл т. $x_0 : \Theta_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ такий, що:

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in \Theta_\varepsilon(x_0)$$

Візьмемо:

$$h(x) = \begin{cases} (x - (x_0 - \varepsilon))^{2k}(x - (x_0 + \varepsilon))^{2k}, & x \in \Theta_\varepsilon; \\ 0, & x \notin \Theta_\varepsilon; \end{cases}$$

Тоді $h \in C^k[a, b]; h^{(j)}(a) = h^{(j)}(b) = 0, j = \overline{0, k-1}$. При цьому:

$$0 = \int\limits_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)h(x) > 0,$$

оскільки $f(x)h(x) > 0$ на Θ_ε. Отримали **протиріччя**. ∎

Теорема 8.1. Нехай допустима функція $\tilde{y}(x) \in C^{2k}[a,b]$ є розв'язком задачі зі старшими похідними. Тоді $\tilde{y}(x)$ задовольняє рівняння *Ейлера-Пуассона* на $[a,b]$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\partial F}{\partial y''} - \dots + (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} = 0$$

Доведення. Нехай допустима функція $\tilde{y}(x) \in C^{2k}[a,b]$ є розв'язком задачі зі старшими похідними. Тоді:

$$\forall h(x) \in C^k[a,b] : h^{(j)}(a) = h^{(j)}(b) = 0$$

$$0 = \delta J(\tilde{y}, h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(\tilde{y} + \alpha h)\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\int_a^b F(x, \tilde{y} + \alpha h(x), \tilde{y}' + \alpha h'(x), \dots, \tilde{y}^{(k)} + \alpha h^{(k)}(x))\mathrm{d}x\right)\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F(x, \tilde{y}, \tilde{y}', \dots, \tilde{y}^{(k)})}{\partial y} \cdot h(x) + \frac{\partial F(x, \tilde{y}, \tilde{y}', \dots, \tilde{y}^{(k)})}{\partial y'} \cdot h'(x) +$$

$$+ \frac{\partial F(x, \tilde{y}, \tilde{y}', \dots, \tilde{y}^{(k)})}{\partial y''} \cdot h''(x) + \dots + \frac{\partial F(x, \tilde{y}, \tilde{y}', \dots, \tilde{y}^{(k)})}{\partial y^{(k)}} \cdot h^{(k)}(x)\ \mathrm{d}x$$

Проінтегрувавши частинами кожен доданок, починаючи з дрогого, стільки разів, скільки потрібно, зоб позбутися похідних $h(x)$ (2-гий доданок – 1 раз, 3-тій додаок – 2 рази і т.д.) та враховуючи, що $h^{(j)} = a = h^{(j)}(b) = 0, j = \overline{0, k-1}$. Далі з узагальненої леми Лагранжа отримаємо рівняння Ейлера-Пуассона. ■

Будь-який розв'язок рівняння Ейлера-Пуассона називається **екстремаллю**. Будь-яка екстремаль, що є допустимою функцією, називається *допустимою екстремаллю* функціоналу $J(y)$.

Приклад.

$$\begin{cases} J(y) = \int\limits_0^1 (y'')^2 + (y')^2 - 2y\mathrm{d}x \to \text{extr}; \\ y(0) = y'(0) = 0 \quad y(1) = -\dfrac{1}{2} \quad y'(1) = -1. \end{cases}$$

1) Складаємо і розв'язуємо рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$$

За умовою: $F(x, y, y', y'') = (y'')^2 + (y')^2 - 2y$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2; \ \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'; \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''; \ \frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''; \ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 2y^{(4)}.$$

Маємо:

$$-2 - 2y'' + 2y^{(4)} = 0$$

$$y^{(4)} - y'' = 1 \text{ – рівняння Ейлера-Пуассона.}$$

Розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння:

$$y^{(4)} - y'' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^4 - \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0 \text{ кр. } 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

$$y_o = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x}$$

Розглянемо праву частину початкового ЛНР:

$$1 = e^{\lambda} = e^0 \Longrightarrow \lambda = 0 \text{ – корінь кратності 2.}$$

$$y_{\text{ч}}(x) = Ax^2$$

$$y'_{\text{ч}} = 2Ax; \qquad y''_{\text{ч}} = 2A; \qquad y^{(3)}_{\text{ч}} = y^{(4)}_{\text{ч}} = 0$$

Підставимо: $-2A = 1 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y_{\text{ч}}(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$. Загальний розв'язок:

$$y(x) = C_1 + {}_2x + C_3e^x + C_4e^{-x} - \frac{1}{2}x^2$$ – *сімейство екстремалей.*

2) Знайдемо допустимі екстремалі:

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0 \qquad y(1) = -\frac{1}{2} \qquad y'(1) = -1$$

$$y'(x) = C_2 + C_3e^x - C_4e^{-x} - x$$

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &: \ C_1 + C_3 + C_4 = 0 \\ y'(0) = 0 &: \ C_2 + C_3 - C_4 = 0 \\ y(1) = -\tfrac{1}{2} &: \ C_1 + C_2 + C_3e + C_4e^{-1} - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2} \\ y'(1) = -1 &: \ C_2 + C_3e - C_4e^{-1} - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_3 + C_4 = 0 \\ C_2 + C_3 - C_4 = 0 \\ C_1 + C_2 + C_3e + C_4e^{-1} = 0 \\ C_2 + C_3 - C_4e^{-1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = -C_3 - C_4 \\ C_2 = C_4 - C_3 \\ -2C_3 + C_3e + C_4e^{-1} = 0 \\ C_4 - C_3 + C_3e - C_4e^{-1} = 0 \end{cases}$$

$$C_4 = 2C_3e - C_3e^2 \qquad 2C_3e - C_3e^2 - C_3 + C_3e - 2C_3 + C_3e = 0 \Longrightarrow$$

$$C_3 = 0 \Longrightarrow C_4 = 0 \Longrightarrow C_1 = 0, C_2 = 0$$

Отримали: $\boxed{\tilde{y}(x) = -\frac{1}{2}x^2}$ — *допустима екстремаль.*

3) Перевірка. $\forall h \in C^2[a,b] : h(0) = h(1) = h'(0) = h'(1) = 0 :$

$$J(\tilde{y}+h) - J(\tilde{y}) = \int\limits_0^1 (\tilde{y}'' + h'')^2 + (\tilde{y}' + h')^2 - 2(\tilde{y}+h)\ \mathrm{d}x -$$

$$-\int\limits_0^1 (\tilde{y}'')^2 + (\tilde{y}')^2 - 2\tilde{y}\ \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2\tilde{y}''h'' + (h'')^2 + 2\tilde{y}'h' + (h')^2 - 2h\ \mathrm{d}x \ \text{⊜}$$

$$\int\limits_0^1 2\tilde{y}''h''\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{Візьмемо частинами:}} \\ v' = h'' & u = 2\tilde{y}'' \\ v = h' & u' = 2\tilde{y}''' \end{array} \right| = \underbrace{2\tilde{y}''h'\Big|_0^1}_{=0} - \int\limits_0^1 \tilde{y}'''h'\ \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{Візьмемо частинами:}} \\ v' = h' & u = 2\tilde{y}^{(3)} \\ v = h & u' = 2\tilde{y}^{(4)} \end{array} \right| = \underbrace{-2\tilde{y}'''h\Big|_0^1}_{=0} + \int\limits_0^1 2\tilde{y}^{(4)}h\ \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \tilde{y} = -\frac{1}{2}x^2 \\ \tilde{y}' = -x \\ \tilde{y}'' = -1 \\ \tilde{y}''' = \tilde{y}^{(4)} = 0 \end{array} \right] = 0$$

$$\int\limits_0^1 2\tilde{y}'h'\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{Візьмемо частинами:}} \\ v' = h' & u = 2\tilde{y}' \\ v = h & u' = 2\tilde{y}'' \end{array} \right| = \underbrace{2\tilde{y}'h'\Big|_0^1}_{=0} - \int\limits_0^1 2\tilde{y}''h\ \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2h\ \mathrm{d}x$$

$$\text{⊜} \int\limits_0^1 (h'')^2 + 2h + (h')^2 - 2h\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (h'')^2 + (h')^2\mathrm{d}x \geq 0$$

Отримали **глобальний мінімум.**

8.2 Класична ізопериметрична задача.

Нехай $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ – задані числа.

$$F(x, y, p), \mathcal{C}(x, y, p) \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2) \text{ – задані.}$$

Розглядаємо інтеграл: $J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x$ на множині:

$$M = \left\{ y \in C^1[a, b] \;\middle|\; y(a) = A, y(b) = B, K(y) = \int\limits_a^b \mathcal{C}(x, y, y')\mathrm{d}x = l \right\},$$

де $A, B, l \in \mathbb{R}$ – задані числа.

- Функції $y \in M$ називаються *допустимими.*
- Умова $K(y) = l$ називається *умовою зв'язку.*
- Означення слабкого локального/глобального min/max аналогічні.

Означення. Задача пошуку слабкого локального/глобального екстремуму функціоналу $J(y)$ на M називається **класичною ізопериметричною задачею.**

Окрім $\delta J(y, h)$ розглянемо також:

$$\delta K(y, h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} K(y + \alpha h)\bigg|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} h(x) + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y'} h'(x)\mathrm{d}x$$

$$\forall h \in C^1[a, b] : h(a) = h(b) = 0$$

Означення. Функцією Лагранжа називають (λ_0, λ–множники Лагранжа):

$$L(x, y(x), y'(x), \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 F(x, y, y') + \lambda \mathcal{C}(x, y, y')$$

Теорема 8.2. Нехай $\tilde{y}(x) \in C^2[a,b]$ – розв'язок класичної ізопериметричною задачі. Нехай при цьому $\delta K(\tilde{y}, h) \neq 0$. Тоді знайдеться такий множник Лагранжа λ, що $\forall \lambda_0 > 0$ $\tilde{y}(x)$ задовольняє рівняння Ейлера на $[a,b]$:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

Доведення. Нехай $\tilde{y}(x)$ – слабкий локальний мінімум задачі. Зауважимо, що з умови теореми:

$$\exists h_0 \in C^1[a,b] : h_0(a) = h_0(b) = 0 \Rightarrow \delta K(\tilde{y}, h_0) \neq 0$$

Для довільного $h \in C^1[a,b] : h(a) = h(b) = 0$ розглянемо функції:

$$\begin{array}{l} \varphi(\alpha,\beta) = J(\tilde{y} + \alpha h + \beta h_0) \\ \psi(\alpha,\beta) = K(\tilde{y} + \alpha h + \beta h_0) \end{array} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Тоді $\varphi(0,0) = J(\tilde{y})$; $\psi(0,0) = K(\tilde{y})$.

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\beta=0} = \delta J(\tilde{y}, h); \qquad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right|_{\alpha=\beta=0} = \delta J(\tilde{y}, h_0);$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\beta=0} = \delta K(\tilde{y}, h); \qquad \left.\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right|_{\alpha=\beta=0} = \delta K(\tilde{y}, h_0);$$

Припустимо, що Якобіан:

$$\left.\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\alpha,\beta)}\right|_{\alpha=\beta=0} \equiv 0 \quad \forall h \in C^1[a,b] : h(a) = h(b) = 0$$

Якщо це так, то:

$$0 = \left.\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\alpha, \beta)}\right|_{\alpha=\beta=0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\mathrm{d}\alpha} & \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \psi}{\mathrm{d}\alpha} & \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta J(\tilde{y}, h) & \delta J(\tilde{y}, h_0) \\ \delta K(\tilde{y}, h) & \delta K(\tilde{y}, h_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \delta J(\tilde{y}, h) \cdot \delta K(\tilde{y}, h_0) - \delta J(\tilde{y}, h_0) \cdot \delta K(\tilde{y}, h) = 0$$

Оскільки $\delta K(\tilde{y}, h_0) \neq 0$, то поділимо на $\delta K(\tilde{y}, h_0)$:

$$\delta J(\tilde{y}, h) - \frac{\delta J(\tilde{y}, h_0)}{\delta K(\tilde{y}, h_0)} \delta K(\tilde{y}, h) = 0$$

Покладемо $\lambda_0 = 1, \lambda = -\frac{\delta J(\tilde{y}, h_0)}{\delta K(\tilde{y}, h_0)}$. Якщо $\lambda_0 \neq 1, \lambda_0 > 0$, то $\lambda = -\lambda_0 \frac{\delta J(\tilde{y}, h_0)}{\delta K(\tilde{y}, h_0)}$:

$$\lambda_0 \delta J(\tilde{y}, h) + \lambda \delta K(\tilde{y}, h) = 0 \qquad \forall h \in C^1[a, b] : h(a) = h(b) = 0$$

$$0 = \lambda_0 \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \cdot h + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'} \cdot h'}_{\text{частинами}} \, \mathrm{d}x + \lambda \int_a^b \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} \cdot h + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y'} \cdot h'}_{\text{частинами}} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \lambda_0 \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) h \mathrm{d}x + \lambda \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y'} \right) h \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \left[\left(\lambda_0 \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} \right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\lambda_0 \frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y'} \right) \right] \cdot h \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \cdot h \, \mathrm{d}x = 0 \xRightarrow{\text{Лема Лагранжа}} \text{ рівняння Ейлера для } L.$$

Залишилося довести, що якобіан:

$$\left.\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\alpha, \beta)}\right|_{\alpha=\beta=0} \equiv 0 \qquad \forall h \in C^1[a, b] : h(a) = h(b) = 0$$

Припустимо від супротивного, що:

$$\exists h^* \in C^1[a,b] : h^*(a) = h^*(b) = 0 \ \text{ та } \ \left.\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\alpha,\beta)}\right|_{\alpha=\beta=0} \neq 0 \ \text{ при } \ h = h^*$$

Тобто для:

$$\varphi(\alpha,\beta) = J(\tilde{y} + \alpha h^* + \beta h_0)$$

$$\psi(\alpha,\beta) = K(\tilde{y} + \alpha h^* + \beta h_0)$$

Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(\alpha,\beta) = \varphi(0,0) - \varepsilon; \\ \psi(\alpha,\beta) = \psi(0,0), \ \text{де } \varepsilon > 0 \text{ – довільне фіксоване.} \end{cases}$$

Оскільки $\left.\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\alpha,\beta)}\right|_{\alpha=\beta=0} \neq 0$, то за теоремою про неявну функцію існує розв'язок системи (α^*, β^*) в околі нуля:

$$\begin{cases} \varphi(\alpha^*,\beta^*) = \varphi(0,0) - \varepsilon; \\ \psi(\alpha^*,\beta^*) = \psi(0,0). \end{cases}$$

Покладемо: $y^* = \tilde{y} + \alpha^* h^* + \beta^* h_0$. Тоді:

$\varphi(\alpha^*,\beta^*) = K(y^*) = K(\tilde{y}) = l \Rightarrow K(y^*) = \alpha \Rightarrow y^*$ – допустима.

$J(y^*) < J(\tilde{y}) \Rightarrow \tilde{y}$ – не слабкий локальний мінімум $\Rightarrow$ протиріччя. ■

Зауваження. Умова теореми $\delta K(\tilde{y}, h) \neq 0$ рівносильна тому, що $\tilde{y}(x)$ не є екстремаллю найпростішої задачі для $K(y)$. Насправді, дана умова – для спрощення доведення. Теорема справедлива і без неї, однак в цьому випадку можливою є ситуація $\lambda_0 = 0 (\lambda \neq 0)$.

Зауваження. Класична ізопериметрична задача допускає узагальнення на векторний випадок та на випадок багатьох умов зв'язку.

Означення. Будь-який розв'язок рівняння Ейлера називається екстремаллю ізопериметричної задачі. Екстремаль, що є допустимою функцією, називається допустимою екстремаллю.

Приклад.

$$\begin{cases} J(y) = \int\limits_0^1 (y')^2 \mathrm{d}x \to \mathrm{extr}; \\ y(0) = 0 \quad y(1) = 1 \quad \int\limits_0^1 y(x)\mathrm{d}x = 1. \end{cases}$$

1) Складемо функцію Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \lambda_0 (y')^2 + \lambda y$$

2) Складаємо рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \lambda \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 2\lambda_0 y' \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'} = 2\lambda_0 y''$$

$\lambda - 2\lambda_0 y'' = 0$ – рівняння Ейлера.

Якщо $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$ цей випадок неможливий. Нехай $\lambda_0 = 1$:

$$\lambda - 2y' = 0 \qquad y'' = \frac{\lambda}{2} \qquad y' = \frac{\lambda}{2}x + C_1$$

$\boxed{y = \frac{\lambda}{4}x^2 + C_1 x + C_2}$ — сімейство екстремалей.

3) Знаходимо допустимі екстремалі.

$$y(0) = 0 \ \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(1) = 1 \ \Rightarrow \tfrac{\lambda}{4} + C_1 = 1$$

$$\int\limits_0^1 y(x)\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{\lambda}{4}x^2 + C_1 x\mathrm{d}x = 1$$

$$1 = \frac{\lambda}{4}\cdot\frac{x^3}{3} + C_1\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2}$$

$$C_1 = 1 - \frac{\lambda}{4} \Longrightarrow \frac{\lambda}{12} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{8} = 1$$

$$-\frac{\lambda}{24} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lambda = -12 \Longrightarrow C_1 = 1 + \frac{12}{4} = 4$$

$\boxed{\tilde{y}(x) = -3x^2 + 4x}$ – допустима екстремаль.

4) Перевірка. $\forall h \in C^1[a,b]$: $h(0) = h(1) = 0 \quad \int\limits_0^1 \tilde{y} + h\mathrm{d}x = 1 \ \Rightarrow \ \int\limits_0^1 h\mathrm{d}x = 0$

$$J(\tilde{y}+h) - J(\tilde{y}) = \int\limits_0^1 (\tilde{y}' + h')^2\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 (\tilde{y}')^2\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \underbrace{2\tilde{y}'}_{u}\underbrace{h'}_{v'} + (h')^2\mathrm{d}x = \underbrace{2\tilde{y}'h\bigg|_0^1}_{=0} + \int\limits_0^1 -2\tilde{y}''h + (h')^2\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \tilde{y} = -3x^2 + 4x \\ \tilde{y}' = -6x + 4; \tilde{y}'' = -6 \end{array} \right| = \underbrace{\int\limits_0^1 12h + (h')^2\mathrm{d}x}_{\int\limits_0^1 h dx = 0} =$$

$$= \int\limits_0^1 (h')^2 \geq 0 \Longrightarrow \ \textbf{слабкий глобальний мінімум.}$$

Лекція 9

9.1 Необхідні умови другого порядку та достатні умови слабкого локального екстремуму найпростішої задачі варіаційного числення

Нехай $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ – задані числа.

$$F(x, y, p) \in C^3([a, b] \times \mathbb{R}^2)$$

Розглянемо інтеграл:

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')\mathrm{d}x$$

На множині:

$$M = \{y(x) \in C^1[a, b] \ \mid \ y(a) = A,\ y(b) = B\},\ A, B \in \mathbb{R} \text{ – задані числа}$$

Введемо поняття другої варіації функціоналу $J(y)$. Для довільної функції $y(x) \in M$, для довільної функції $h(x) \in C^1[a, b] : h(a) = h(b) = 0$. Для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$ розглянемо сімейство функцій:

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \cdot h(x) \in M$$

Розглянемо функцію:

$$\Phi(\alpha) = J(y + \alpha h) = \int\limits_a^b F(x, y + \alpha h, y' + \alpha h')\mathrm{d}x$$

Нагадуємо, що першою варіацією функціоналу $J(y)$ на функції $y(x)$ в напрямку h називається:

$$\delta J(y,h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(y+\alpha h)\Big|_{\alpha=0} \ (= \Phi'(0))$$

Означення. Другою варіацією функціоналу J(y) на функції $y(x) \in M$ в нарямку h, де $h(x) \in C^[a,b] : h(a) = h(b) = 0$, називається:

$$\delta^2 J(y,h) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2} J(y+\alpha h)\Big|_{\alpha=0} \ (= \Phi''(0))$$

Теорема 9.1. Якщо $\tilde{y}(x) \in M$ забезпечує слабкий локальний мінімум (максимум) функціоналу $J(y)$ на M, то $\forall h(x) \in C^1[a,b], \ h(a) = h(b) = 0$:

$$\delta^2 J(\tilde{y},h) \geq 0 \text{ – для мінімуму}$$

$$\delta^2 J(\tilde{y},h) \leq 0 \text{ – для максимуму}$$

$$\forall h(x) \in C^1[a,b], h(a) = h(b) = 0$$

Розглянемо $\delta^2 J(y,h)$:

$$\delta^2 J(y,h) = \frac{\mathrm{d}^2 J(y+\alpha h)}{\mathrm{d}\alpha^2}\Bigg|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2} \int\limits_a^b F(x, y+\alpha h, y'+\alpha h')\mathrm{d}x\Bigg|_{\alpha} = 0 =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y+\alpha h, y'+\alpha h')h + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y+\alpha h, y'+\alpha h')h' \right) \mathrm{d}x \Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y,\tilde{y}) \cdot h^2 + 2\frac{\partial F}{\partial y \partial \tilde{y}} hh' + \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \cdot (h')^2 \right) \mathrm{d}x \ominus$$

Проінтегруємо другий доданок частинами:

$$\int\limits_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} 2hh' \mathrm{d}x = [2hh' = (h^2)'] = \int\limits_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot (h^2)' \mathrm{d}x =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} & v' = (h^2)' \\ u' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right) & v = h^2 \end{vmatrix} = \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot h^2 \Big|_a^b}_{=0} - \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right) \cdot h^2 \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \delta^2 J(y, h) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \cdot (h')^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right) \cdot h^2\right] \mathrm{d}x$$

Позначимо для зручності:

$$P(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \qquad Q(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}$$

Тоді:

$$\delta^2 J(y, h) = \int\limits_a^b P(x) \cdot (h')^2 + Q(x) \cdot h^2 \mathrm{d}x$$

Теорема 9.2. Якщо $\tilde{y}(x) \in M$ забезпечує слабкий локальний мінімум (максимум) функціоналу $J(y)$ на M, то виконується *умова Лежандра:*

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \geq 0 \text{ – для мінімума.} \\ P(x) &= \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \leq 0 \text{ – для максимума.} \end{aligned}\right. \qquad \forall x \in [a, b]$$

Маємо: $\delta^2 J(y, h) = \int\limits_a^b \underbrace{P(x) \cdot (h')^2 + Q(x) \cdot h^2}_{=\mathcal{C}} \mathrm{d}x$.

Запишемо рівняння Ейлера для $\delta^2 J(y,h)$ відносно h:

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{h} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial h'} = 0$$

$$2hQ(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2P'(x)\cdot h'\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\cdot h'\right) = h\cdot Q(x)} \text{ — \textbf{рівняння Якобі.}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2}\cdot h'\right) = h\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - h\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2}\cdot h'\right) = h\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - h\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'} + h'\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'} - h'\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2}\cdot h'\right) = h\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot h\right) + h'\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2}\cdot h' + \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot h\right) = h\frac{\partial^2}{\partial y^2} + h'\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}}$$

Означення. Назвемо т. $\mathcal{C}\in(a,b]$ *спряженою* з точкою a, якщо існує розв'язок рівняння Якобі: $h(x)\neq 0$ такий, що $h(a)=h(\mathcal{C})=0$.

Теорема 9.3. Якщо $\tilde{y}(x)\in M$ забезпечує слабкий локальний екстремум функціоналу $J(y)$ на M, то виконується **умова Якобі**: на (a,b) немає точок, спряжених з точкою a.

Без доведення. ■

Теорема 9.4 (про достатні умови)**.** Нехай для $\tilde{y}(x) \in M$ виконується:

1) Рівняння Ейлера на $[a, b]$.

2) Посилена умова Лежандра:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} > 0 \quad (< 0)$$

3) Посилена умова Якобі: на $(a, b]$ немає точок спряжених з точкою a.

   Тоді $\tilde{y}(x)$ забезпечує слабкий локальний мінімум (максимум) функціоналу $J(y)$ на M.

   Без доведення. ■

9.2 Сильний локальний екстремум.

Нехай $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ – задані числа.

$$F(x, y, p) \in C^2\left([a, b] \times \mathbb{R}^2\right)$$

Розглянемо простір $KC^1[a, b]$ – простір кусково-гладких функцій на $[a, b]$ (неперервних функцій на $[a, b]$, похідна яких має не більш, ніж скінчену кількість особливих точок I-го роду).

$KC^1[a, b]$ – нормований простір з нормою:

$$||y(x)||_{KC^1[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y(x)|$$

Розглянемо інтеграл:

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x$$

на множині $M = \Big\{y(x) \in KC^1[a,b] \;\Big|\; y(a) = A, y(b) = B\Big\}$

Означення. Функція $\tilde{y}(x) \in M$ забезпечує *сильний локальний екстремум* функціоналу $J(y)$ на M, якщо:

$$\exists\delta > 0 : \forall y \in M \;\; ||y - \tilde{y}||_{KC^1[a,b]} < \delta \text{ справдовується, що:}$$

$$J(y) \geq J(\tilde{y}) \text{ (для мінімуму)}$$

$$J(y) \leq J(\tilde{y}) \text{ (для максимуму)}$$

— *сильний глобальний* екстремум, якщо нерівність виконується $\forall y \in M$.

Лема (про зглажування кутів)**.**

$$\inf_{\substack{y \in KC^1[a,b] \\ y(a)=A \\ y(b)=B}} J(y) = \inf_{\substack{y \in C^1[a,b] \\ y(a)=A \\ y(b)=B}} J(y)$$

$$\sup_{\substack{y \in KC^1[a,b] \\ y(a)=A \\ y(b)=B}} J(y) = \sup_{\substack{y \in C^1[a,b] \\ y(a)=A \\ y(b)=B}} J(y)$$

Наслідок. Якщо слабкий глобальний мінімум (максимум) досягається, то він дорівнює сильному глобальному мінімуму (максимуму) і функція, яка забезпечує слабкий глобальний екстремум, забезпечує водночас і сильний глобальний екстремум.

Теорема 9.5 (Вейєрштрасса)**.** Нехай допустима функція:

$$\tilde{y}(x) \in C^1[a,b] \ \text{ задовольняє:}$$

1) Рівняння Ейлера.

2) Посилену умову Лежандра:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} > 0 \text{ -- для мінімума.} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} < 0 \text{ -- для максимума.}$$

3) Посилену умову Якобі.

4) Умову Вейєрштрасса: $\forall (x,y,u), (x,y,v)$ функція Вейєрштрасса:

$$E(x,y,u,v) = F(x,y,v) - F(x,y,u) - (v-u)\frac{\partial F}{\partial u}(x,y,u) \underset{\text{для min}}{\geq} 0$$

$$E(x,y,u,v) \leq 0 \text{ — для максимума.}$$

Тоді $\tilde{y}(x)$ забезпечує водночас і слабкий, і сильний локальний мінімум (максимум) функціоналу $J(y)$ на M.

Приклад.

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 (y'(x))^2 + xy(x)\mathrm{d}x \to \text{extr}; \\ y(0) = 0 \qquad y(1) = 0. \end{cases}$$

1) Складемо і розв'яжемо рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$x - 2y'' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'' = \frac{x}{2} \qquad y' = \frac{x^2}{4} + C_1$$

$$y(x) = \frac{x^3}{12} + C_1 x + C_2 \text{ – сімейство екстремалей.}$$

2) Знайдемо допустимі екстремалі:

$$y(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(1) = 0$$

$$\frac{1}{12} + C_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{12}$$

$$\tilde{y}(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{12} \text{ — єдина допустима екстремаль.}$$

3) Запишемо умову Лежандра:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} = \frac{\partial}{\partial y'}(2y') = 2 > 0 \Longrightarrow \text{виконується.}$$

Посилена умова Лежандра для мінімума.

4) Запишемо умову Якобі. Рівняння Якобі:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} h' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} h\right) = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + h'\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \qquad F = (y')^2 + xy$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2h') = 0 \quad \Longrightarrow \quad h'' = 0 \text{ – рівняння Якобі} \quad \Longrightarrow \quad h(x) = C_1 x + C_2$$

$h(0) = 0 \Longrightarrow h(x) = C_1 x$ — не перетворюється в нуль в жодній точці або є тотожним нулем, тобто виконується посилена умова Якобі.

5) Запишемо умову Вейєрштрасса:

$$E(x,y,u,v) = F(x,y,v) - F(x,y,u) - (v-u)\frac{\partial F}{\partial u}(x,y,u) =$$

$$= \left| F(x,y,u) = u^2 + xy \qquad \frac{\partial F}{\partial u} = 2u \right| = v^2 + xy - u^2 - xy - (v-u)\cdot 2u =$$

$$v^2 - u^2 - 2uv + 2u^2 = v^2 - 2uv + u^2 = (v-u)^2 \geq 0$$

Тобто, виконується умова Вейєрштрасса для мінімума.

$\tilde{y}(x) = \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x}{12}$ забезпечує водночас і сильний і слабкий лок. мінімум.

Приклад.

$$\begin{cases} \int\limits_1^e x(y')^2 + yy'\mathrm{d}x \to \mathrm{extr}; \\ y(1) = 0 \qquad y(e) = 1. \end{cases}$$

1) Складемо і розв'яжемо рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$y' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2xy' + y) = 0$$

$$y' - 2y' - 2xy'' - y' = 0$$

$$xy'' + y' = 0 \qquad y' = z, y'' = z' \qquad xz' + z = 0$$

$$z' = -\frac{z}{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|z| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + \ln|C_1| \qquad z = \frac{C_1}{x} \qquad y' = \frac{C_1}{x}$$

$$y = C_1 \ln x + C_2 \text{ — сімейство екстремалей.}$$

2) Знайдемо допустимі екстремалі:

$$y(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 0$$

$$y(e) = 1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 1$$

$\tilde{y} = \ln x$ – єдина допустима екстремаль.

3) Запишемо умову Лежандра:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} = \frac{\partial}{\partial y'}(2xy' + y) = 2x > 0 \qquad \forall x \in [1, e]$$

виконується посилена умова Лежандра для мінімума.

4) Запишемо умову Якобі:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} h' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} h\right) = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + h' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}$$

$$F = x(y')^2 + yy'$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} = 2x \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy' + y) = 1 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2xy' + h) = h' \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2xy' + h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(h)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2xh' + h - h) = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2xh') \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xh') = 0$$

$$xh' = C_1 \quad \Longrightarrow \quad h' = \frac{C_1}{x} \quad \Longrightarrow \quad h(x) = C_1 \ln x + C_2$$

Якщо $h(1) = 0 \implies C_2 = 0 \implies f(x) = C_1 \ln x$ — не перетворюється в нуль в жодній точці $x \in (1, e]$ або є тотожним нулем, тобто виконується посилена умова Якобі.

5) Запишемо умову Вейєрштрасса:

$$E = F(x, y, v) - F(x, y, u) - (v - u)\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u) =$$

$$= \left| F(x, y, u) = xu^2 + yu; \frac{\partial F}{\partial u} = 2xu + y \right| =$$

$$= xv^2 + yv - xu^2 - yu - (v - u)(2xu + y) =$$

$$= xv^2 + yv - xu^2 - yu - 2xuv - yv + 2xu^2 + yu =$$

$$= xv^2 - 2xuv + xu^2 = x(u - v)^2 \geq 0 \qquad \forall x \in [1, e]$$

Таким чином, умова Вейєрштрасса виконується для мінімума.

Отже, $\tilde{y}(x) = \ln x$ забезпечує і сильний, і слабкий лок. мінімум.

Приклад.

$$\begin{cases} \int\limits_1^e (2y - x^2(y')^2)\mathrm{d}x \to \text{extr}; \\ y(1) = e \qquad y(e) = 0. \end{cases}$$

1) Запишемо та розв'яжемо рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 \cdot 2y') = 0$$

$$2 + 2x \cdot 2y' + x^2 \cdot 2y'' = 0$$

$$1 + 2xy' + x^2y'' = 0$$

$$x^2y'' + 2xy' = -1 \text{ — рівняння Ейлера.} \qquad x = e^t$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y'_t \cdot e^{-t}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \bigg/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} =$$

$$= (y_t'' \cdot e^{-t} - y_t' \cdot e^{-t}) \cdot e^{-t} = (y_t'' - y_t') \cdot e^{-2t}$$

$$(y_t'' - y_t') \cdot e^{-2t} \cdot e^{2t} + 2y_t' e^t e^{-t} = -1$$

$$y_t'' + y_t' = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{gathered} \lambda^2 + \lambda = 0 \\ \lambda(\lambda+1) = 0 \\ \lambda = 0 \quad \lambda = -1 \end{gathered}$$

$$y_o = C_1 + C_2 e^{-t} \qquad y_p = Ax, y_p' = A, y_p'' = 0, A = 1:$$

$$y_p = -t \quad \Longrightarrow \quad y(t) = C_1 + C_2 e^{-t} - t$$

$$y(x) = C_1 + \frac{C_2}{x} - \ln x \text{ — \textit{сімейство екстремалей.}}$$

2) Знайдемо допустимі екстремалі:

$$\begin{aligned} y(1) &= e \qquad & C_1 + C_2 &= e \\ y(e) &= 0 \qquad & C_1 + \frac{C_2}{e} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$C_2 - \frac{C_2}{e} + 1 = e \qquad C_2\left(\frac{e-1}{e}\right) = e - 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} C_2 = e \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

$\tilde{y}(x) = \frac{e}{x} - \ln x$ — єдина допустима екстремаль.

3) Запишемо умови Лежандра:

$$F = 2y - x^2(y')^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = -2y'x^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} = -2x^2 < 0 \qquad \forall x \in [1, e]$$

Тобто, посилена умова Лежандра виконується.

4) Запишемо умову Якобі:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2}h' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}h\right) = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + h'\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} = -2x^2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-2x^2 h') = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 h') = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 h' = C_1$$

$$h' = \frac{C_1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad h = -\frac{C_1}{x} + C_2$$

$$h(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{-C_1}{1} + C_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = C_1 \quad \Longrightarrow \quad h = C_1 \cdot (1 - \frac{1}{x})$$

Вираз не перетворюється на нуль $\forall x \in [1, e]$ або є тотожним нулем, тому виконується посилена умова Якобі.

5) Запишемо умову Вейєрштрасса:

$$E = F(x, y, v) - F(x, y, u) - (v - u)\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u) =$$

$$= \left| F(x, y, u) = 2y - x^2 u^2 \quad \frac{\partial F}{\partial u} = -2ux^2 \right| =$$

$$= 2y - x^2 v^2 - 2y + x^2 u^2 - (v - u) \cdot (-2ux^2) = -x^2 v^2 + x^2 u^2 + 2uvx^2 - 2u^2 x^2 =$$

$$= -x^2(v^2 - 2uv + u^2) = -x^2(v - u)^2 \leq 0$$

Тобто, виконується умова Вейєрштрасса для максимума.

Отже, $\tilde{y}(x) = \frac{e}{x} - \ln x$ забезпечує водночас і сильний, і слабкий лок. max.