

# Собственно, теорвер...

## Зміст

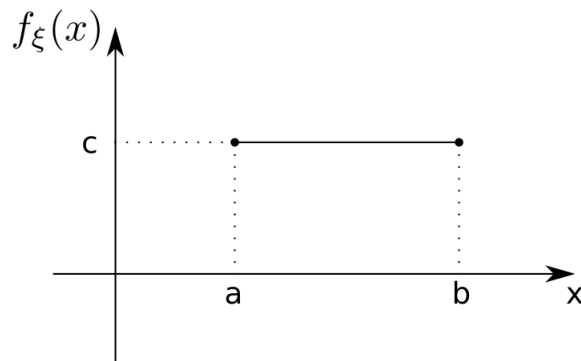
|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Абсолютно неперервні розподіли.</b>                                | <b>3</b>  |
| 1.1. Рівномірний розподіл. . . . .                                       | 3         |
| 1.2. Експоненціальний розподіл. . . . .                                  | 4         |
| 1.3. Гаусівський (нормальний) розподіл. . . . .                          | 6         |
| <b>2. Випадкові вектори</b>  | <b>8</b>  |
| 2.1. Властивості функції розподілу. . . . .                              | 9         |
| 2.2. Дискретні та неперервні випадкові вектори. . . . .                  | 11        |
| 2.2.1. Дискретні випадкові вектори. . . . .                              | 11        |
| 2.2.2. Неперервні випадкові вектори. . . . .                             | 11        |
| 2.2.3. Властивості щільності розподілу: . . . . .                        | 12        |
| 2.3. Рівномірний розподіл на площині. . . . .                            | 12        |
| 2.4. Маргінальна щільність . . . . .                                     | 13        |
| 2.5. Числові характеристики випадкових векторів. . . . .                 | 14        |
| 2.6. Коваріація та її властивості. . . . .                               | 14        |
| 2.7. Коваріаційна матриця вектора та її властивості . . . . .            | 15        |
| 2.8. Незалежність випадкових величин . . . . .                           | 17        |
| 2.9. Умовні розподіли та умовні математичні сподівання. . . . .          | 19        |
| 2.9.1. Дискретний вектор. . . . .  | 19        |
| 2.9.2. Абсолютно неперервний вектор. . . . .                             | 20        |
| <b>3. Характеристичні функції.</b>                                       | <b>21</b> |
| 3.1. Властивості характеристичних функцій. . . . .                       | 21        |
| 3.2. Основні "проблеми" характеристичних функцій. . . . .                | 23        |
| 3.3. Характеристичні функції головних ймовірнісних розподілів. . .       | 23        |
| 3.3.1. Дискретні розподіли. . . . .                                      | 23        |
| 3.3.2. Абсолютно неперервні розподіли. . . . .                           | 24        |
| 3.4. Ймовірнісні розподіли, стійкі відносно додавання. . . . .           | 25        |
| 3.5. Характеристичні функції випадкових векторів. . . . .                | 26        |
| 3.5.1. Означення. . . . .  | 26        |
| 3.5.2. Властивості характеристичної функції випадкового вектора. . . . . | 26        |
| 3.6. Гаусівські випадкові вектори. . . . .                               | 27        |
| 3.6.1. Характеристики стандартного гаусівського розподілу. . .           | 27        |
| 3.6.2. Характеристика загального гаусівського розподілу. . . .           | 27        |
| 3.6.3. Властивості гаусівських векторів. . . . .                         | 29        |
| 3.6.4. Гаусівський вектор на площині. . . . .                            | 30        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4. Функції від випадкових величин (векторів)</b>                                    | <b>31</b> |
| 4.1. Функції від випадкових векторів. . . . .  | 32        |
| 4.2. Загальний алгоритм знаходження щільності функції від випадкових векторів. . . . . | 33        |
| 4.3. Щільності розподілу максимуму, мінімуму та інших порядкових статистик. . . . .    | 35        |
| 4.3.1. Максимум. . . . .   | 35        |
| 4.3.2. Мінімум. . . . .  | 35        |
| 4.3.3. Порядкові статистики. . . . .   | 36        |
| 4.4. Знаходження числових характеристик функцій від випадкових величин. . . . .        | 37        |
| <b>5. Деякі ймовірнісні розподіли, що зустрічаються у математичній статистиці.</b>     | <b>39</b> |
| 5.1. Гамма-розподіл. . . . .   | 39        |
| 5.1.1. PDF. . . . .  | 39        |
| 5.1.2. Числові характеристики. . . . .   | 39        |
| 5.1.3. Стійкість відносно додавання. . . . .   | 40        |
| 5.2. Chi-square distribution with n degrees of freedom. . . . .                        | 41        |
| 5.2.1. PDF. . . . .  | 41        |
| 5.2.2. Числові характеристики. . . . .   | 42        |
| 5.3. t-розподіл Стюдента з n степенями вільності. . . . .                              | 42        |
| 5.4. Розподіл Фішера(-Снедекора) . . . . .   | 43        |
| <b>6. Граничні теореми теорії ймовірностей</b>   | <b>44</b> |
| 6.1. Нерівність Чебишова. . . . .  | 44        |

# 1. Абсолютно неперервні розподіли.

## 1.1. Рівномірний розподіл.

Рівномірний розподіл на  $[a, b]$ . Графік функції щільності розподілу:



Позначення:  $\xi \sim U(a, b)$ . Функція щільності має наступний вигляд:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} c, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}, \text{ де } c = \frac{1}{b-a}$$

Визначимо функцію розподілу:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; a] \\ \int_a^x f_{\xi}(t) dt = \frac{1}{b-a}x - \frac{a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b] \\ 1, & x \in (b; +\infty) \end{cases}$$

Числові характеристики:

$$\mathbb{E}\xi = \int_a^b x f_{\xi}(x) dx = \frac{b^2-a^2}{2b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_a^b x^2 f_{\xi}(x) dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\mathbb{D}\xi = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Величини залежать лише від довжини проміжку.

Нехай  $[c, d] \subset [a, b]$ , тоді знайдемо:

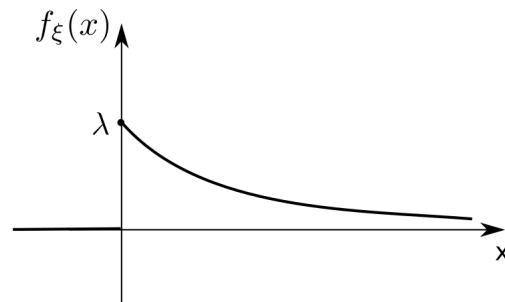
$$\mathbb{P}\{\xi \in [c, d]\} = F_{\xi}(d) - F_{\xi}(c) = \frac{d-c}{b-a}$$

## 1.2. Експоненціальний розподіл.

Розглядаємо  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ .

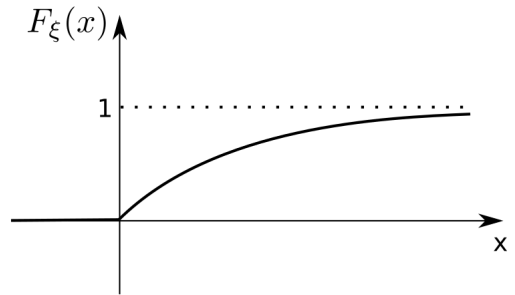
Щільність розподілу:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Запишемо функцію розподілу:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dt = 0, & x < 0 \\ F(0) + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



Знайдемо:  $\mathbb{P}\{\xi \in [x, d]\} = (1 - e^{-\lambda x}) \Big|_c^d = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$ .

Виведемо числові характеристики. Спочатку виведемо формулу  $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{E}\xi^k$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k * f_{\xi}(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^k} * \Gamma(k+1) = \frac{k!}{\lambda^k}$$

Користуючись цією формулою, отримаємо числові характеристики розподілу:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi &= (k=1) = \frac{1}{\lambda} \\ \mathbb{E}\xi^2 &= (k=2) = \frac{2}{\lambda^2} \\ \mathbb{D}\xi &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

**Властивості Гамма-функції:**

$$\begin{aligned} 1. \Gamma(\alpha) &= \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ 2. \Gamma(n) &= (n-1)! \\ 3. \Gamma(\alpha+1) &= \alpha * \Gamma(\alpha) \\ 4. \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Експоненціальна величина описує час безвідмовної роботи приладу до моменту першої відмови. Це твердження не є повністю вірним. Чому?

## Властивості експоненціального розподілу.

### 1. Відсутність післядії.

$$\xi \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow \forall t, h > 0 \quad \mathbb{P}\{\xi > t + h | \xi > t\} = \mathbb{P}\{\xi > h\}$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi > t + h | \xi > t\} &= \frac{\mathbb{P}\{\xi > t + h, \xi > t\}}{\mathbb{P}\{\xi > t\}} = \frac{\mathbb{P}\{\xi > t + h\}}{\mathbb{P}\{\xi > t\}} = \frac{e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda\infty}}{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda\infty}} = \\ &= e^{-\lambda h} - e^{-\lambda\infty} = \mathbb{P}\{\xi > h\} \end{aligned}$$

■

### 2. Стійкість відносно min.

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n - \text{незалежні.} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1) \\ \xi_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2) \\ \dots \\ \xi_n \sim \text{Exp}(\lambda_n) \end{pmatrix} \Rightarrow \min\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \sim \text{Exp}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} F_{\min(\xi_1, \dots, \xi_n)}(x) &= \mathbb{P}\{\min(\xi_1, \dots, \xi_n) < x\} = 1 - \mathbb{P}\{\min(\xi_1, \dots, \xi_n) \geq x\} = \\ &= 1 - \mathbb{P}\{\xi_1 \geq x, \dots, \xi_n \geq x\} = 1 - \mathbb{P}\{\xi_1 \geq x\} \cdot \dots \cdot \mathbb{P}\{\xi_n \geq x\} = 1 - e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda_n x} = \\ &= F_{\text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}(x), \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

■

Використання: нехай є прилад, що складається з  $n$  блоків. Для коректної роботи приладу необхідно коректна робота всіх блоків.

Позначимо:  $\xi_i$  - час роботи блоку  $i, i = 1, \dots, n$ .

Час роботи всього приладу:  $\xi = \min\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ .

**Приклад.** Прилад - 10 блоків. Кожний з них з ймовірністю 0.99 може пропрацювати 1000 годин. Знайти середній час роботи всього приладу та ймовірність того, що він пропрацює 500 год.

Розглянемо блок  $i$ -тий:

$$\xi_i \sim \text{Exp}(\lambda_i).$$

$$\mathbb{P}\{\xi_i \geq 1000\} = 0.99 = e^{-1000\lambda} \implies \lambda = \frac{\ln 0.99}{-1000} \approx 10^{-5}$$

$$\mathbb{E}\xi_i = \frac{1}{\lambda} = 10^5$$

Для всього приладу:

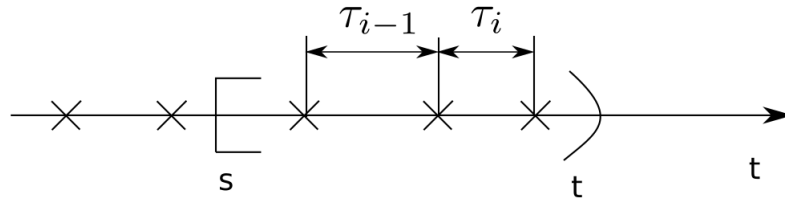
$$\xi = \min\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \sim \text{Exp}\left(\sum_{i=1}^{10} \lambda_i\right) = \text{Exp}(10^{-4})$$

$$\mathbb{E}\xi = 10^4 \quad \mathbb{P}\{\xi \geq 500\} = e^{-500 \cdot 10^{-4}} = e^{-0.005} \approx 0.95$$

### 3. Inter-arrival times dependency.

**Теорема 1.1.** Розглянемо потік Пуассона з інтенсивністю

$$\lambda \Rightarrow N(s, t) \sim Pois(\lambda(t - s))$$



$\tau_i$  — inter-arrival times.  $\Rightarrow (\tau_i, i \in \mathbb{Z})$  — незалежні, та  $Exp(\lambda)$ .

### 1.3. Гаусівський (нормальний) розподіл.

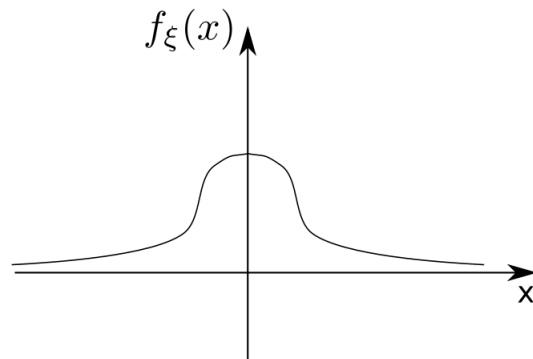
Стандартний Гаусівський розподіл. Позначення:

$$\xi \sim N(0, 1^2)$$

Щільність розподілу:  $f_\xi(x) = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ . З умови нормування та властивостей Гамма-функції:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = 2C \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x^2}{2} = t \\ x = \sqrt{2t} \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{2t}} \end{array} \right| = 2C \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{t}} = \\ &= \sqrt{2}C \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \sqrt{2}C \Gamma(1/2) = \sqrt{2\pi}C \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Остаточно,  
щільність розподілу:  
$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Знайдемо числові характеристики розподілу:

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \quad (\text{Функція щільності парна})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\xi &= \mathbb{E}\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} 2te^{-t} \frac{dt}{\sqrt{2t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{1/2} e^{-t} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(3/2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Для гаусівського розподілу:  $N(a, \sigma^2)$ , де  $a = \mathbb{E}\xi$   $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi(x)$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  - функція Лапласа aka **CDF** (cumulative distr. function).

$\xi \sim N(0, 1)$ . Знайдемо  $\mathbb{P}\{\xi \in [b, c]\}$ ,  $\mathbb{E}\xi^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\mathbb{P}\{\xi \in [b, c]\} = F_{\xi}(c) - F_{\xi}(b) = \Phi(c) - \Phi(b)$$

$$\begin{aligned} k = 2n, n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}\xi^k &= \int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2/2} dx = \frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{k-1}{2}} e^{-t} dt = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{(\pi)}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \\ &= \frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{k-1}{2} \cdot \frac{k-3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(k-1)!!}{2^{\frac{k}{2}}} \cdot \sqrt{\pi} = (k-1)!! \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\xi^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} (k-1)!!, & k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2n+1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Перейдемо до загального гаусівського розподілу.

**Загальний гаусівський розподіл.**

**Означення.** Візьмемо, що  $\xi_0 \sim N(0, 1)$  - стандартна гаусівська величина.

$\xi$  називається гаусівською величиною:  $\xi \sim N(a, \sigma^2)$ , якщо  $\xi = a + \sigma\xi_0$  - існує та справедливе перетворення стандартної гаусівської величини.

Числові характеристики гаусівського розподілу:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(a + \sigma\xi_0) = a$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}(a + \sigma\xi) = \sigma^2 \mathbb{D}\xi = \sigma^2$$

$$F_{\xi}(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\} = \mathbb{P}\{a + \sigma\xi < x\} = \mathbb{P}\{\xi_0 < \frac{x-a}{\sigma}\} = F_{\xi_0}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}\{\xi \in [b, c]\} = F_{\xi}(c) - F_{\xi}(b) = \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b-a}{\sigma}\right)$$

Знаючи  $F_\xi(x)$  знайдемо вираз для щільності розподілу:

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E_{N(a,\sigma^2)} = \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^4}{(\mathbb{D}\xi)^2} - 3 = \left| \begin{matrix} \xi = a\sigma\xi_0 \\ \mathbb{E}\xi = a \end{matrix} \right| = \frac{\sigma^4 \mathbb{E}\xi_0^4}{\sigma^4} - 3 = \mathbb{E}\xi_0^4 - 3 = 0$$

**Правило “3σ”.**  $\xi \sim (a, \sigma^2)$  Знайдемо:  $\mathbb{P}\{|\xi - a| < 3\sigma\} = \mathbb{P}\{\xi \in (a - 3\sigma; a + 3\sigma)\} = \Phi\left(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) \approx 0.9974$

Тобто, у багатьох практичних випадках, гаусівська величина відповідає нерівності  $|\xi - a| < 3\sigma$  з великою вірогідністю.

**Теорема 1.2** (Центральна гранична теорема). Розглянемо  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  - незалежні, мають однаковий розподіл. Якщо  $\mathbb{E}\xi_i = 0$  та  $\mathbb{D}\xi_1 = 1$  :

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 1)$$

Гаусівська випадкова величина добре описує результат дії великої кількості випадкових факторів, дія кожного з яких окремо є досить малою.

## 2. Випадкові вектори

Розглядаємо:

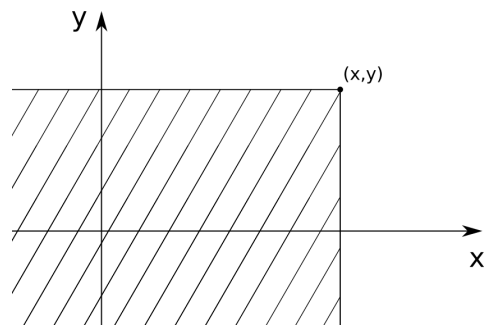
$$\vec{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

**Означення.** Випадковий вектор - система випадкових величин  $\xi_1 \dots \xi_n$ , що задані на спільному ймовірністному просторі  $(\Omega, F, \mathbb{P})$ .

Функція розподілу:  $F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n\}$ .

$$\vec{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$$





## 2.1. Властивості функції розподілу.

1.  $F_{\bar{\xi}}(x, y) \in [0, 1] \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

2.  $F_{\bar{\xi}}$  - неспадна для кожного аргументу. Тобто:

$$\begin{aligned} F_{\bar{\xi}}(x_1, y) &\leq F_{\bar{\xi}}(x_2, y) \text{ при } x_1 \leq x_2; \\ F_{\bar{\xi}}(x, y_1) &\leq F_{\bar{\xi}}(x, y_2) \text{ при } y_1 \leq y_2. \end{aligned}$$

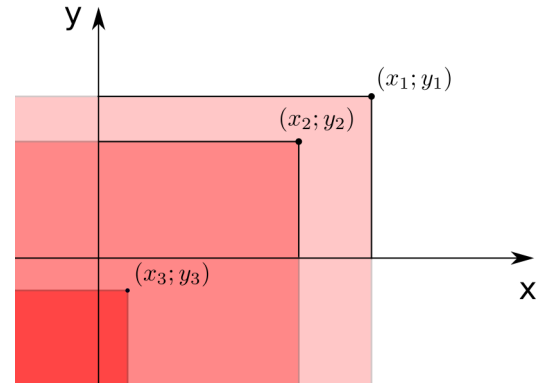
$$\mathbb{P}\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < y\} \leq \mathbb{P}\{\xi_1 < x_2, \xi_2 < y\}$$

3,  $F_{\bar{\xi}}$  - неперервна зліва за кожним аргументом.

4а.

В одновимірному:      В багатовимірному:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi} &= 0 & \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\bar{\xi}}(x, y) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi} &= 1 & & \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{\bar{\xi}}(x, y) = 0 \end{aligned}$$

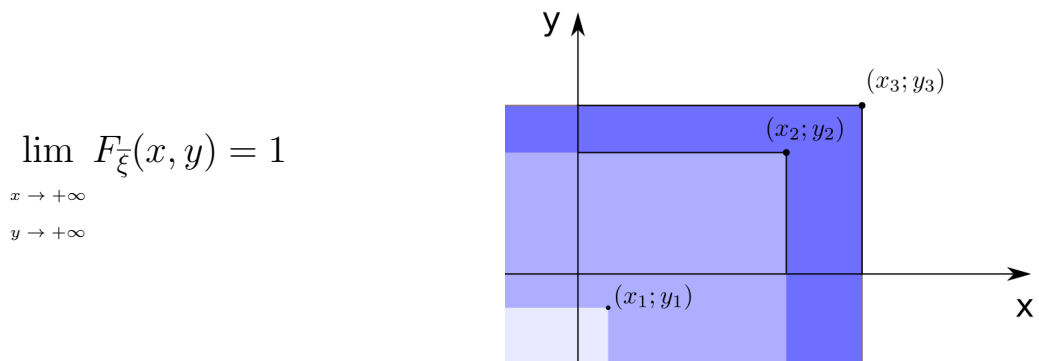


*Доведення.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\bar{\xi}}(x_n, y_n) = 0$ , якщо  $x_n \rightarrow \infty$  або  $y_n \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\bar{\xi}}(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n\} = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{n \geq 1} (\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n)\right\} = \mathbb{P}\{\emptyset\} = 0$$

■

4b.



$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F_{\bar{\xi}}(x, y) = 1$$

*Доведення.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\bar{\xi}}(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{n \geq 1} (\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n)\right\} = \mathbb{P}\{\Omega\} = 1$$

■

4с.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \in \mathbb{R}}} F_{\bar{\xi}}(x, y) = \mathbb{P} \{ \xi_2 < y \} = F_{\xi_2}(y)$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ x \in \mathbb{R}}} F_{\bar{\xi}}(x, y) = \mathbb{P} \{ \xi_1 < x \} = F_{\xi_1}(x)$$

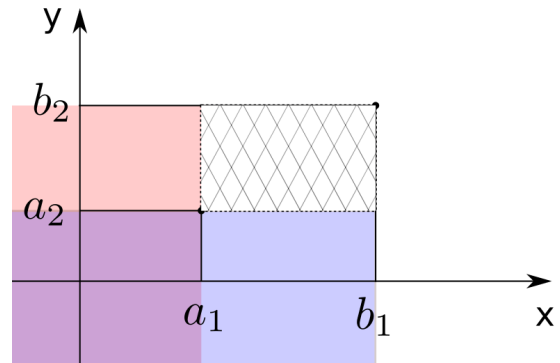
**Означення.**  $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$   $F_{\bar{\xi}}(x, y)$  – сумісна функція розподілу.

$\xi_1$  - випадкова величина.  $F_{\xi_1}$  - маргінальна функція розподілу  $\xi_1$ .

Щоб отримати маргінальну функцію розподілу, потрібно відправили "зайві" аргументи до  $+\infty$ .

5. В одновимірному випадку:

$$\mathbb{P} \{ \xi \in [a, b) \} = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)$$

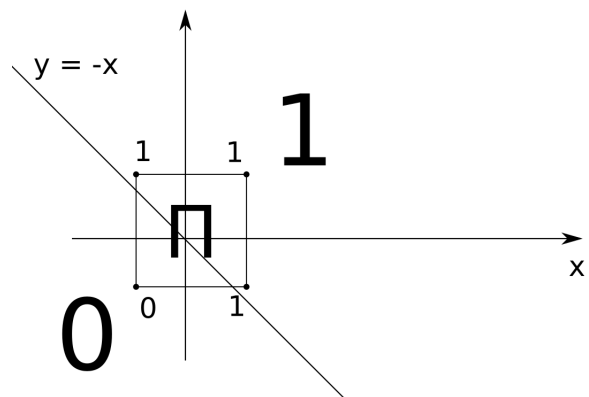


У багатовимірному випадку нас цікавить вірогідність  $\mathbb{P} \{ \xi_1 \in [a_1, b_1), \xi_2 \in [a_2, b_2) \}$  (користуємося правилом знаходження приросту функції 2-ох змінних):

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{ \xi_1 \in [a_1, b_1), \xi_2 \in [a_2, b_2) \} &= \mathbb{P} \{ \bar{\xi} \in \Pi \} = \\ &= F_{\bar{\xi}}(b_1, b_2) - F_{\bar{\xi}}(b_1, a_2) - F_{\bar{\xi}}(a_1, b_2) + F_{\bar{\xi}}(a_1, a_2) \end{aligned}$$

**Приклад.**

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 0 \\ 1, & x + y > 0 \end{cases}$$



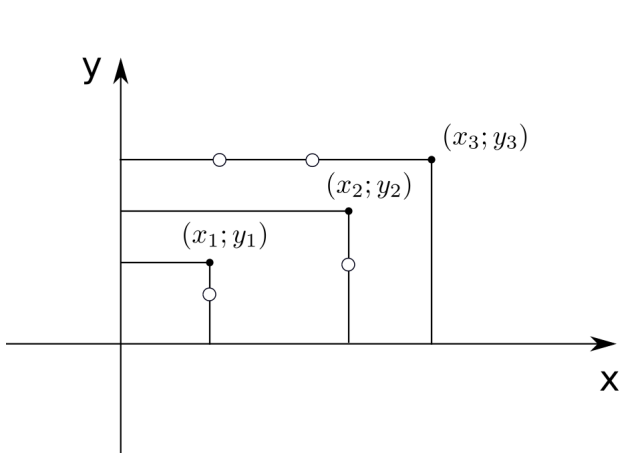
Задана функція не є функцією розподілу. Розглянемо прямокутник П.

## 2.2. Дискретні та неперервні випадкові вектори.

### 2.2.1. Дискретні випадкові вектори.

**Означення.**  $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix}$  називають дискретним(неперервним), якщо усі його координати - дискретні(неперервні) випадкові величини.

$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix}$  - дискретний вектор.  $p_{ij} = \mathbb{P} \{ \xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j \}$



| $\xi_1 \backslash \xi_2$ | $y_1$    | $\dots$ | $y_j$    | $\dots$ | $y_n$    |
|--------------------------|----------|---------|----------|---------|----------|
| $x_1$                    | $p_{11}$ | $\dots$ | $p_{1j}$ | $\dots$ | $p_{1n}$ |
| $\dots$                  | $\dots$  | $\dots$ | $\dots$  | $\dots$ | $\dots$  |
| $x_i$                    | $p_{i1}$ | $\dots$ | $p_{ij}$ | $\dots$ | $p_{in}$ |
| $\dots$                  | $\dots$  | $\dots$ | $\dots$  | $\dots$ | $\dots$  |
| $x_m$                    | $p_{m1}$ | $\dots$ | $p_{mj}$ | $\dots$ | $p_{mn}$ |

### 2.2.2. Неперервні випадкові вектори.

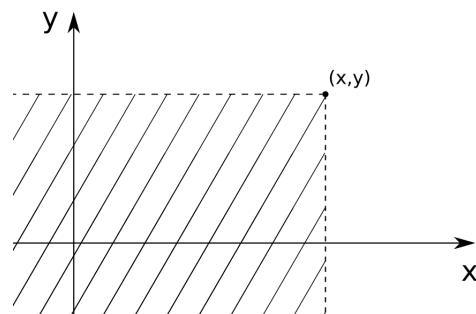
$\xi$  - неперервна  $\Leftrightarrow F_\xi$  - неп. функція  $\Leftrightarrow \mathbb{P} \{ \xi = x \} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Означення.**  $\bar{\xi}$  - неперервний вектор, якщо  $\mathbb{P} \{ \xi = \bar{x} \} = 0 \quad \forall \bar{x}$

**Означення.**  $\bar{\xi}$  - абсолютно неперервний вектор, якщо

$$\exists f : F_\xi = \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \mathbb{P} \{ \xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n \}$$

$$F_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi_1, \xi_2}(s, t) ds dt$$



### 2.2.3. Властивості щільності розподілу:

1.  $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi_1, \xi_2}(x, y)}{\partial x \partial y}$  - в точках, де похідна існує.
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) dx dy = 1$

Доведення.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow -\infty}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) dx dy = 1$$

$$F_{\xi_1, \xi_2}(x, y) \longrightarrow 1 \\ x, y \rightarrow \infty$$

■

3.  $\mathbb{P}\{\bar{\xi} \in B\} = \iint_B f_{\bar{\xi}} dx dy$ , якщо  $B$  - квадрована множина.

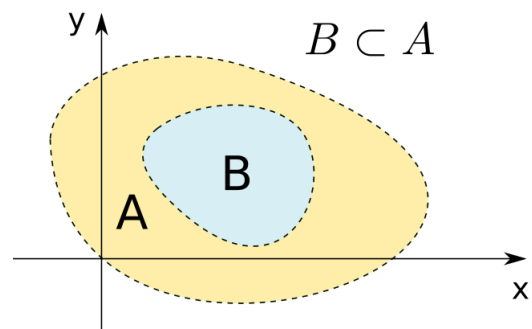
Доведення. Доведемо спочатку для прямокутників  $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ .

$$\mathbb{P}\{\bar{\xi} \in B\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = \iint_B f_{\bar{\xi}} dx dy$$

■

### 2.3. Рівномірний розподіл на площині.

$$\bar{\xi} \sim U(A) \Leftrightarrow f_{\bar{\xi}} = \begin{cases} c, (x, y) \in A \\ 0, (x, y) \notin A \end{cases}$$



$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy = c \cdot S(A) \Rightarrow c = \frac{1}{S(A)}$$

$$f_{\bar{\xi}} = \begin{cases} \frac{1}{S(A)}, (x, y) \in A \\ 0, (x, y) \notin A \end{cases}$$

$$\mathbb{P}\{\bar{\xi} \in B\} = \iint_B f_{\bar{\xi}(x,y)} dx dy = \iint_B \frac{1}{S(A)} dx dy = \frac{S(B)}{S(A)}$$

## 2.4. Маргінальна щільність

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad f_{\bar{\xi}} - \text{щільність} \quad f_{\bar{\xi}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy$$

Доведення.

$$\int_C f_{\xi_1} dx = \mathbb{P}\{\xi_1 \in C\} = \mathbb{P}\{(\xi_1, \xi_2) \in C \times \mathbb{R}\} = \int_C \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy$$

■

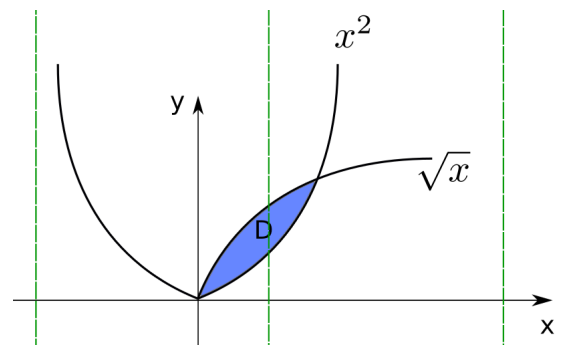
Приклад.

$$f_{\bar{\xi}}(x, y) = \begin{cases} 3, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

За умовою нормування:

$$S(D) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}} dy$$



$$1. \quad \begin{aligned} x &\in (-\infty; 0) \\ x &\in (1; +\infty) \end{aligned} \quad f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy = 0$$

$$2. \quad x \in [0, 1] \quad f_{\xi_1}(x) = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3 dy = 3(\sqrt{x} - x^2)$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ 3(\sqrt{x} - x^2), & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Перевірка:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1} dx = 3 \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = 1.$

Аналогічно для  $f_{\xi_2}(y)$ .

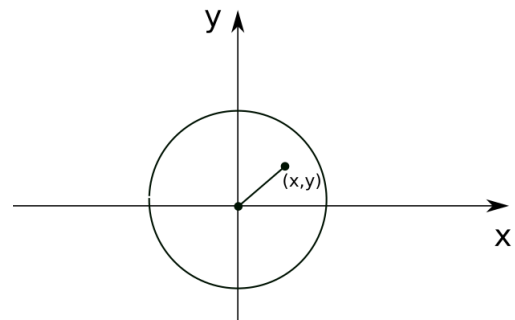
## 2.5. Числові характеристики випадкових векторів.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy \\ \mathbb{E}\xi_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\bar{\xi}}(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\bar{\xi}}(x, y) dy\end{aligned}$$

Таким чином, за подвійним інтегралом рахувати числові характеристики зручніше, адже ми можемо вибрати найпростіший вигляд.

**Приклад.** Точка розподілена в одиничному крузі, для якого  $f_{\bar{\xi}}(x, y)$  пропорційна відстані до границі круга. Знайти  $\mathbb{D}\xi_1, \mathbb{D}\xi_2$ .

$$f_{\bar{\xi}}(x, y) = \begin{cases} (1 - \sqrt{x^2 + y^2})k, & (x, y) \in \bigcirc \\ 0, & (x, y) \notin \bigcirc \end{cases}$$



$$1 = k \iint_{\bigcirc} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - \rho) \rho d\rho = \frac{\pi k}{3} \implies k = \frac{3}{\pi}$$

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}\xi)^2 = \iint_{\bigcirc} x^2 \frac{3}{\pi} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

## 2.6. Коваріація та її властивості.

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad \mathbb{E}\xi_1, \mathbb{E}\xi_2, \mathbb{D}\xi_1, \mathbb{D}\xi_2$$



Маэстро, что с Вами?

**Означення.** Коваріація (кореляційний момент) -  $cov(\xi_1, \xi_2)$ .

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2$$

**Коваріація дискретного випадкового вектора.**

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} - \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i p_{ij} \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_j p_{ij} \right\}$$

**Коваріація неперервного випадкового вектора.**

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy \cdot f_{\bar{\xi}} dx dy - \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot f_{\bar{\xi}} dx dy \cdot \iint_{\mathbb{R}^2} y \cdot f_{\bar{\xi}} dx dy$$

**Властивості коваріації.**

1.  $cov(\xi, \xi) = \mathbb{D}\xi$ .
2. Якщо  $\xi_1, \xi_2$  - незалежні, то  $cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) = 0$

**Означення.**  $\xi_1$  та  $\xi_2$  наз. некорельованими, якщо  $cov(\xi_1, \xi_2) = 0$ .

3.  $cov(\xi_1, \xi_2) = cov(\xi_2, \xi_1)$  (симетричність).
4.  $cov(\xi, c) = 0$
5.  $cov(\alpha\xi_1' + \beta\xi_1'', \xi_2) = \mathbb{E}(\alpha\xi_1' + \beta\xi_1'' - \mathbb{E}(\alpha\xi_1' + \beta\xi_1''))(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) = \alpha cov(\xi_1', \xi_2) + \beta cov(\xi_1'', \xi_2)$

**Отримали:** Коваріація є білінійним симетричним функціоналом.

6. Якщо  $\xi_1, \xi_2$  - незалежні, то  $\mathbb{D}(\xi_1 \pm \xi_2) = \mathbb{D}\xi_1 \pm \mathbb{D}\xi_2$ .  
Якщо існує залежність:  $\mathbb{D}(\xi_1 \pm \xi_2) = \mathbb{E}((\xi_1 \pm \xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1 \pm \xi_2))^2 = \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1) \pm (\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2))^2 = \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)^2 + (\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)^2 \pm 2(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)) = \mathbb{D}\xi_1 + \mathbb{D}\xi_2 \pm 2cov(\xi_1, \xi_2)$
7.  $cov(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) - (\mathbb{E}\mathbb{I}_A)(\mathbb{E}\mathbb{I}_B) = \mathbb{P}\{A \cap B\} - \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}$
8. Нерівність Коші-Буняковського.

$$|cov(\xi_1, \xi_2)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2}$$

## 2.7. Коваріаційна матриця вектора та її властивості

$\xi$  : дисперсія  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{R}\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$

$\bar{\xi}$  : коваріаційна матриця  $C_{\bar{\xi}} = \mathbb{E}(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T$

$$C_{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) & \cdots & cov(\xi_1, \xi_n) \\ cov(\xi_2, \xi_1) & \mathbb{D}\xi_2 & \cdots & cov(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\xi_n, \xi_1) & cov(\xi_n, \xi_1) & \cdots & \mathbb{D}\xi_n \end{bmatrix}$$

1.  $C_{\bar{\xi}}$  - симетрична матриця.

2.  $A$  - квадратна матриця  $n \times n$ , симетрична.

$A$  - невід'ємно визначена  $\Leftrightarrow (A\bar{x}, \bar{x}) \geq \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$   $C_{\bar{\xi}}$  - невід'ємно визначена.

$$(C_{\bar{\xi}}, \bar{\xi}) = (\mathbb{E}(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})(\mathbb{E}(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T \bar{x}, \bar{x}) = \mathbb{E} \|(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T \bar{x}\|^2 \geq 0.$$

Застосування невід'ємної визначеності.

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad C_{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) \\ cov(\xi_1, \xi_2) & \mathbb{D}\xi_2 \end{bmatrix} - \text{невід'ємно визначена}$$

Застосуємо критерій Сільвестра:

$$\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2 - cov^2(\xi_1, \xi_2) \geq 0 \implies |cov(\xi_1, \xi_2)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2}$$

**Що означає виродженість коваріаційної матриці?**  $\Leftrightarrow \det C_{\bar{\xi}} = 0$ :

$$\det C_{\bar{\xi}} = 0 \Leftrightarrow \exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n : (C_{\bar{\xi}}, \bar{\xi}) = 0 \Leftrightarrow C_{\bar{\xi}} - \text{не додатня, невід'ємно визначена}$$

*Доведення.*

$$\det C_{\bar{\xi}} = 0 \Rightarrow Ker C_{\bar{\xi}} \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow \exists \bar{x} \neq 0 : C_{\bar{\xi}} \bar{x} = 0 \Rightarrow (C_{\bar{\xi}} \bar{x}, \bar{x}) = 0$$

$$\exists \bar{x} \neq 0 : (C_{\bar{\xi}} \bar{x}, \bar{x}) = 0 \Rightarrow \exists \bar{y} \neq 0 : \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

$$(C_{\bar{\xi}} \bar{x}, \bar{x}) = 0 = (\Omega \bar{y}, \bar{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \Leftrightarrow \exists \lambda_i = 0 \Rightarrow \det C_{\bar{\xi}} = 0$$

■

**Теорема 2.1.**  $C_{\bar{\xi}}$  є виродженою т.т.т.к між  $\xi_1, \dots, \xi_n$  є афінна залежність. Тобто:

$$\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n \xi_n = c$$

*Доведення.*

$$\exists \bar{x} \neq 0 : (C_{\bar{\xi}} \bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \exists \bar{\xi} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n : (\mathbb{E}(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T \cdot \bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathbb{E}(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi}) \cdot \bar{x}, (\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi}) \cdot \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E} \|(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T \bar{x}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T \bar{x}\|^2 = 0 \quad \text{м.н.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T \bar{x} = 0 \Leftrightarrow (\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1) x_1 + \dots + (\xi_n - \mathbb{E}\xi_n) x_n = 0 \Leftrightarrow$$

$\exists x_1, \dots, x_n$  не всі з яких дорівнюють нулю:

$$\Leftrightarrow x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_n \xi_n = x_1 \mathbb{E}\xi_1 + \dots + x_n \mathbb{E}\xi_n = c \Leftrightarrow$$

Візьмемо  $x_i = \lambda_i$ :  $\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n = c \Leftrightarrow$  афінна залежність.

■



Розглянемо  $cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)$ .

Застосуємо нерівність Коші-Буняковського:  $|cov(\xi, \eta)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}$

$$r_{\xi, \eta} = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}} - \text{коефіцієнт кореляції між } \xi \text{ та } \eta.$$

$$-1 \leq r_{\xi, \eta} \leq 1$$

Коефіцієнт показує "силу" лінійної залежності між  $\xi$  та  $\eta$ .

$$r_{\xi, \eta} = 0 \Leftrightarrow cov(\xi, \eta) = 0 \Leftrightarrow \xi \text{ та } \eta - \text{некорельовані.}$$

$$\begin{aligned} r_{\xi, \eta} = \pm 1 &\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi & cov(\xi, \eta) \\ cov(\xi, \eta) & \mathbb{D}\eta \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det C_{\xi, \eta} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta - cov^2(\xi, \eta) = 0 \Leftrightarrow |r_{\xi, \eta}| = 1 \end{aligned}$$

**Теорема 2.2.**  $r_{\xi, \eta} = \pm 1$  т.т.т.к.  $\eta = k\xi + b$ , де  $k, b \in R$

При цьому  $r_{\xi, \eta} + 1 \Rightarrow k > 0$   
 $r_{\xi, \eta} - 1 \Rightarrow k < 0$

*Доведення.*

$$r_{\xi, \eta} = \frac{cov(\xi, k\xi + b)}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}(k\xi + b)} = \frac{k\mathbb{D}\xi}{\sqrt{k^2 \cdot \mathbb{D}^2\xi}} = \frac{k}{|k|} = \begin{cases} 1, k > 0 \\ -1, k < 0 \end{cases}$$

■

## 2.8. Незалежність випадкових величин

**Означення.** Випадкові величини  $\xi, \eta$  називають незалежними, якщо події  $\{\xi \in [a, b]\}, \{\eta \in [a, b]\}$  є незалежними  $\forall a \leq b, c \leq d$

Зокрема, якщо  $\xi, \eta$  - дискретні:

$$\begin{aligned} \xi \in \{x_1, \dots, x_n\} & \quad \{\xi = x_i\} \perp \{\eta = y_j\} & \forall i = \overline{1, m} \\ \eta \in \{y_1, \dots, y_n\} & & \forall j = \overline{1, n} \end{aligned}$$

**Теорема 2.3.**  $\xi, \eta$  - незалежні  $\Leftrightarrow F_{\xi, \eta} = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)$

*Доведення.* Нехай  $\xi, \eta$  - незалежні  $\Leftrightarrow \forall a \leq b, c \leq d : \mathbb{P} \{ \xi \in [a, b], \eta \in [c, d] \} = \mathbb{P} \{ \xi \in [a, b] \} \cdot \mathbb{P} \{ \eta \in [c, d] \} \Rightarrow \mathbb{P} \{ \xi \in [a, b), \eta \in [c, d] \} = \mathbb{P} \{ \xi \in [a, b) \} \cdot \mathbb{P} \{ \eta \in [c, d] \}$   
 $\mathbb{P} \{ \xi < b, \eta < d \} = \mathbb{P} \{ \xi < b \} \cdot \mathbb{P} \{ \eta < d \} \Leftrightarrow F_{\xi, \eta}(b, d) = F_{\xi}(b) \cdot F_{\eta}(d)$

Нехай навпаки:  $F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{ \xi \in [a, b), \eta \in [c, d] \} &= F_{\xi, \eta}(d, b) - F_{\xi, \eta}(b, c) - F_{\xi, \eta}(a, d) + F_{\xi, \eta}(a, c) = \\ &= F_{\xi}(b)F_{\eta}(d) - F_{\xi}(b)F_{\eta}(c) - F_{\xi}(a)F_{\eta}(d) + F_{\xi}(a)F_{\eta}(c) = \\ &= (F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a))(F_{\eta}(d) - F_{\eta}(c)) = \mathbb{P} \{ \xi \in [a, b) \} \cdot \mathbb{P} \{ \eta \in [c, b) \} \end{aligned}$$

■

**Теорема 2.4.** Для абсолютно неперервного вектора  $[\xi \quad \eta]^T$

$$\xi \perp \eta \Leftrightarrow f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x)f_{\eta}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

*Доведення.*

1.  $F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y) \Rightarrow f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
2.  $f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y) \Rightarrow F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)$

2.

$$\begin{aligned} F_{\xi, \eta}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi, \eta}(s, t) ds dt = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi}(s) \cdot f_{\eta}(t) ds dt = \\ &= \int_{-\infty}^x f_{\xi}(s) ds \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\eta}(t) dt = F_{\xi}(s) \cdot F_{\eta}(t) \end{aligned}$$

1.

$$f_{\xi, \eta}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)) = \frac{\partial}{\partial x}(F_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y)) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y)$$

■

## 2.9. Умовні розподіли та умовні математичні сподівання.

### 2.9.1. Дискретний вектор.

| $\xi_1 \backslash \xi_2$ | $y_1$    | $\dots$ | $y_j$    | $\dots$ | $y_n$    |
|--------------------------|----------|---------|----------|---------|----------|
| $x_1$                    | $p_{11}$ | $\dots$ | $p_{1j}$ | $\dots$ | $p_{1n}$ |
| $\dots$                  | $\dots$  | $\dots$ | $\dots$  | $\dots$ | $\dots$  |
| $x_i$                    | $p_{i1}$ | $\dots$ | $p_{ij}$ | $\dots$ | $p_{in}$ |
| $\dots$                  | $\dots$  | $\dots$ | $\dots$  | $\dots$ | $\dots$  |
| $x_m$                    | $p_{m1}$ | $\dots$ | $p_{mj}$ | $\dots$ | $p_{mn}$ |

Розподіли  $\xi_2$  за  $\xi_1$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = x_i\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}}{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}}$$

| $\xi_1 \backslash \xi_2$   | $y_1$                                | $\dots$ | $y_j$                                | $\dots$ | $y_n$                                |
|----------------------------|--------------------------------------|---------|--------------------------------------|---------|--------------------------------------|
| $P\{\xi_2   \xi_1 = x_1\}$ | $\frac{p_{11}}{\sum_{j=1}^n p_{1j}}$ | $\dots$ | $\frac{p_{1j}}{\sum_{j=1}^n p_{1j}}$ | $\dots$ | $\frac{p_{1n}}{\sum_{j=1}^n p_{1j}}$ |
| $\dots$                    | $\dots$                              | $\dots$ | $\dots$                              | $\dots$ | $\dots$                              |
| $P\{\xi_2   \xi_1 = x_m\}$ | $\frac{p_{m1}}{\sum_{j=1}^n p_{mj}}$ | $\dots$ | $\frac{p_{mj}}{\sum_{j=1}^n p_{mj}}$ | $\dots$ | $\frac{p_{mn}}{\sum_{j=1}^n p_{mj}}$ |
| $\dots$                    | $\dots$                              | $\dots$ | $\dots$                              | $\dots$ | $\dots$                              |
| $P\{\xi_2   \xi_1 = x_i\}$ | $\frac{p_{i1}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}}$ | $\dots$ | $\frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}}$ | $\dots$ | $\frac{p_{in}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}}$ |

-----> ряд розподілу  $\xi_2$  за  $\xi_1 = x_1$

-----> ряд розподілу  $\xi_2$  за  $\xi_1 = x_i$

-----> ряд розподілу  $\xi_2$  за  $\xi_1 = x_n$

$$\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x_i) = \sum_{j=1}^n y_j \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = x_i\} = \sum_{j=1}^n y_j \cdot \frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^n p_{ik}} = \frac{\sum_{j=1}^n y_j p_{ij}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}}$$

$$\mathbb{E}_{\xi_2 | \xi_1 = x_k} \begin{matrix} \xi_1 & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_m \\ \frac{\sum_{j=1}^n y_j p_{1j}}{\sum_{j=1}^n p_{1j}} & \dots & \frac{\sum_{j=1}^n y_j p_{ij}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}} & \dots & \frac{\sum_{j=1}^n y_j p_{mj}}{\sum_{j=1}^n p_{mj}} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{ряд розподілу} \\ \mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1) \end{matrix}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k\} \begin{matrix} \sum_{j=1}^n p_{1j} & \dots & \sum_{j=1}^n p_{ij} & \dots & \sum_{j=1}^n p_{mj} \end{matrix}$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)] = \frac{\sum_{j=1}^n y_j \cdot p_{1j}}{\sum_{j=1}^n p_{1j}} \cdot \sum_{j=1}^n p_{1j} + \dots + \frac{\sum_{j=1}^n y_j \cdot p_{mj}}{\sum_{j=1}^n p_{mj}} \cdot \sum_{j=1}^n p_{mj} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_j p_{ij} = \mathbb{E}\xi_2$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)] = \mathbb{E}\xi_2$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2)] = \mathbb{E}\xi_1$$

### 2.9.2. Абсолютно неперервний вектор.

$\bar{\xi} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$   $f_{\bar{\xi}}(x, y)$  – сумісна щільність розподілу.

$f_{\xi_2|\xi_1}(y|x) = f_{\xi_2|\xi_1=x}(y)$  – умовна щільність другої координати за першою.

$F_{\xi_2|\xi_1=x}(y)$  – умовна функція розподілу  $\xi_2$  за умови  $\xi_1 = x$ .

$$F_{\xi_2|\xi_1=x}(y) = \mathbb{P}\{\xi_2 < y | \xi_1 = x\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1=x, \xi_2 < y\}}{\mathbb{P}\{\xi_1=x\}} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} F_{\xi_2|\xi_1=x}(y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}\{\xi_2 | \xi_1 \in [x, x + \varepsilon)\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1 \in [x, x + \varepsilon), \xi_2 \in (-\infty, y)\}}{\mathbb{P}\{\xi_1 \in [x, x + \varepsilon)\}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\varepsilon} ds \int_{-\infty}^y f_{\bar{\xi}}(s, t) dt}{\int_x^{x+\varepsilon} f_{\xi_1}(s) ds} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \cdot \int_x^{x+\varepsilon} ds \int_{-\infty}^y f_{\bar{\xi}}(s, t) dt}{\varepsilon \cdot \int_x^{x+\varepsilon} f_{\xi_1}(s) ds} = \boxed{\frac{\int_{-\infty}^y f_{\bar{\xi}}(x, t) dt}{f_{\xi_1}(x)}} = F_{\xi_2|\xi_1=x}(y) \end{aligned}$$

Знаючи умовну функцію розподілу, можемо знайти умовну щільність:

$$f_{\xi_2|\xi_1=x} = F'_{\xi_2|\xi_1=x}(y) = \frac{f_{\bar{\xi}}(x, y)}{f_{\xi_1}(x)}$$

Знайдемо умовне математичне сподівання  $\xi_2$  за  $\xi_1$

$$\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_{\xi_2|\xi_1=x} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{f_{\bar{\xi}}(x, y)}{f_{\xi_1}(x)} dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_{\bar{\xi}}(x, y) dy}{f_{\xi_1}(x)}$$

$\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)$  – випадкова величина, яка спочатку визначає, куди попала умова (чому дорівнює  $x \leftarrow \xi_1$ ), а далі визначає  $\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x)$ .

$\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)$  – набуває значення  $\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x)$ , коли  $\xi_1$  набула значення  $x$ .

$$\xi_1 \longrightarrow x \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1) \longrightarrow \mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x)$$

$\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)$  є функцією від  $\xi_1$ . Якою?  $\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x)$

$$\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1) = \Psi(\xi_1), \text{ де } \Psi(x) = \mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x)$$

Формула повного математичного сподівання ( $?\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)] = \mathbb{E}\xi_2?$ )

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)] = \mathbb{E}\Psi(\xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) \cdot f_{\xi_1}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_{\bar{\xi}}(x, y) dy}{f_{\xi_1}(x)} \cdot f_{\xi_1}(x) dx = \mathbb{E}\xi_2$$

### 3. Характеристичні функції.

$\xi$  - випадкова величина. Загальна характеристика такої величини - функція розподілу. Існує для кожної величини. Також є характеристики, такі як ряд розподілу та щільність розподілу - існують не завжди. Введемо ще одну характеристику, яка буде існувати для будь-якої випадкової величини.

**Означення. Характеристична функція випадкової величини.**

$$\chi_\xi(t) = \mathbb{E}(\cos(t\xi) + i \sin(t\xi)) = \mathbb{E}(e^{it\xi})$$

$$X_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

Як шукати? Дискретний випадок:  $\sum_{i=1}^{n(\infty)} e^{itx_i} p_i$

Для абсолютно неперервної величини:  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx$

#### 3.1. Властивості характеристичних функцій.

$\xi$  - випадкова величина.  $\chi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx$

1. Характеристична функція є унікальною характеристикою ймовірнісного розподілу.

2.  $\chi_\xi(0) = 1 \quad \chi_\xi(0) = \mathbb{E}e^0 = 1.$

3.  $|\chi_\xi(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$|\mathbb{E}e^{it\xi}| = |\mathbb{E} \cos(t\xi) + i \mathbb{E} \sin(t\xi)| = \sqrt{\mathbb{E} \cos^2(t\xi) + \mathbb{E} \sin^2(t\xi)} = 1$$

4.  $\chi_\xi$  - неперервна за  $t$  для  $\xi$  - абсолютно неперервна випадкова величина.

$$\chi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx \quad \longleftarrow \quad \chi_\xi(t+h) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t+h)x} f_\xi(x) dx$$

$$(\chi_\xi - \text{неперервна в т. } t) \iff \lim_{h \rightarrow 0} \chi_\xi(t+h) = \chi_\xi(t)$$

Для  $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t+h)x} f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx$ , треба щоб  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx$  збігався

рівномірно на  $t \in \mathbb{R}$ .  $|e^{itx} \cdot f_\xi(x)| = |f_\xi(x)| = f_\xi(x) = M(x)$ - мажорантний ряд.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = 1 < \infty$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_{\xi}(x) dx$  - збігається рівномірно за озн. Вейерштрасса.

5.  $\xi_1 \perp \xi_2 \implies \chi_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \chi_{\xi_1}(t) \cdot \chi_{\xi_2}(t)$

6. Якщо  $\exists \mathbb{E}\xi^n$ , то  $\mathbb{E}\xi^n = \frac{1}{i^n} \cdot \chi_{\xi}^{(n)}(0)$ .

*Доведення.* В неперервному випадку.

$$\mathbb{E}\xi^n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_{\xi}(x) dx$$

$$\chi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_{\xi}(x) dx$$

$$\chi^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^n e^{itx} f_{\xi}(x) dx$$

Але потрібна рівномірна збіжність. Скористаємося озн. Вейерштрасса:

$$|(ix)^n e^{itx} f_{\xi}(x)| = |x|^n \cdot f_{\xi}(x) = M(x) :$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n \cdot f_{\xi}(x) dx < \infty$$

$$\chi^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_{\xi}(x) dx = i^n \cdot \mathbb{E}(\xi^n)$$

■

6\*. Якщо існує  $\exists \chi(t)^{(n)}$ , то виконується попередня властивість. ( $n$  — парне.)

7.  $\chi_{a\xi+b}(t) = \mathbb{E}e^{i(a\xi+b)t} = \mathbb{E}(e^{ia\xi t} \cdot e^{ibt}) = e^{ibt} \cdot \mathbb{E}e^{ai\xi t} = e^{ibt} \chi_{\xi}(at)$

8.  $\chi_{-\xi}(t) = \chi_{\xi}(-t) = \mathbb{E}e^{i(-\xi)t} = \overline{\mathbb{E}e^{i\xi t}} = \overline{\chi_{\xi}(t)}$

9. Нехай випадкова величина  $\xi$  має симетричний розподіл.

$$\mathbb{P}\{\xi \in B\} = \mathbb{P}\{\xi \in -B\} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi - \text{ДВВ: Ряд розподілу симетричний відносно } 0. \\ \xi - \text{АНВВ: } f_{\xi}(x) = f_{\xi}(-x) \end{cases}$$

Тоді:  $-\xi \equiv \xi \implies \overline{\chi_{\xi}(t)} = \chi_{\xi}(t) = \chi_{\xi}(-t)$ .

Це означає, що  $\chi_{\xi}(t)$  - парна, дійсного значення.

10. Нехай  $\xi$  не є обов'язково симетричною. Тоді  $\overline{\chi_{\xi}(t)} = \chi_{-\xi}(t) = \chi_{\xi}(-t)$ .

Інакше, парність  $\chi_{\xi}(t)$  означає її дійснозначність.

## 3.2. Основні "проблеми" характеристичних функцій.

1. За функцією  $\chi$  досить важко визначити, чи є вона характеристичною функцією деякої випадкової величини.
2. Якщо  $\chi$  - дійсно характеристична функція деякої випадкової величини, то важко зрозуміти, чи буде  $\xi$  ДВВ або АНВВ.

Задача: Чи є функція характеристичною? Якщо є, то для якого розподілу? Основні критерії, яким має відповідати характеристична функція - це 4 властивості наведені нижче. Якщо одна з властивостей не виконується, то функція не є характеристичною. Інакше, потрібно навести конкретний розподіл, який описує задана функція.

1.  $\chi(0) = 1$
2.  $|\chi(t)| \leq 1$
3. Неперервна і визначена  $\forall t \in \mathbb{R}$ .
4.  $\chi(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff \chi(-t) = \chi(t)$

## 3.3. Характеристичні функції головних ймовірнісних розподілів.

### 3.3.1. Дискретні розподіли.

З дискретними розподілами працювати легше. В загальному випадку, величина приймає невід'ємні цілі значення. Раніше вводили поняття генератрисси:

$$G_{\xi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot z^k$$

В данному розділі розглядаємо пов'язану функцію функцію:

$$\chi_{\xi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot (e^{it})^k = G_{\xi}(e^{it})$$

$$\begin{aligned} \xi \sim Bin(n, p) &\implies G_{\xi}(z) = (pz + q)^n \implies \chi_{\xi}(t) = (pe^{it} + q)^n \\ \xi \sim Geom_0(p) &\implies G_{\xi}(z) = \frac{p}{1-qz} \implies \chi_{\xi}(t) = \frac{p}{1-qe^{it}} \\ \xi \sim Geom_1(p) &\implies G_{\xi}(z) = \frac{pz}{1-qz} \implies \chi_{\xi}(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}} \\ \xi \sim Pois(\lambda) &\implies G_{\xi}(z) = e^{\lambda(z-1)} \implies \chi_{\xi}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} \end{aligned}$$

Таким чином, ми бачимо, що характеристичні функції напряму пов'язані з генератриссами. При роботі з ДВВ зручніше працювати з генератриссами, але на відміну від генератрисс, характеристична функція визначена для всіх видів випадкових величин. Перейдемо до абсолютно неперервного випадку.

### 3.3.2. Абсолютно неперервні розподіли.

Згадаємо:  $\chi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx$

$$\xi \sim \mathbf{U}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad \chi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases} = \frac{1}{a-b} \int_a^b e^{itx} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

$$\chi_{U(-a,a)}(t) = \begin{cases} \frac{e^{ita} - e^{-ita}}{2iat}, & t \neq 0; \\ 1, & t = 0; \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sin(at)}{at}, & t \neq 0; \\ 1, & t = 0; \end{cases}$$

$$\xi \sim \mathbf{Exp}(\lambda). \quad \chi_\xi(t) = \int_0^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x} e^{itx} dx = \frac{\lambda}{it - \lambda} e^{x(it-\lambda)} \Big|_{x=0}^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Для гаусівського розподілу: спочатку розглянемо  $\xi_0 \sim N(0, 1)$ . Потім скористаємося властивістю  $\xi = a + \sigma \xi_0$ , де  $\xi \sim N(a, \sigma^2)$ .

$$\xi \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1}). \quad \chi_{\xi_0}(t) = \mathbb{E} e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^{-\frac{x^2}{2}} & du = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\ dv = e^{itx} dx & v = \frac{1}{it} e^{itx} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{it} \cdot e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{it} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{it} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \chi_{\xi_0}(t)$$

$$\chi'_{\xi_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i x e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \implies \chi'_{\xi_0}(t) = -t \chi_{\xi_0}(t)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -t\chi \quad \int \frac{d\chi}{\chi} = - \int t dt \quad \ln |\chi| = -\frac{t^2}{2} + C \quad \chi(t) = K \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\chi(0) = 1 = K \implies \boxed{\chi_{\xi_0}(t) = \chi_{N(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

$$\boxed{\chi_{N(a,\sigma^2)}(t) = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}$$



### 3.4. Ймовірнісні розподіли, стійкі відносно додавання.

**Означення.** Розподіл називають стійким відносно додавання, якщо сума двох незалежних випадкових величин, що мають цей розподіл (можливо, з різними параметрами), також має цей розподіл.

$Pois(\lambda)$  - стійкий розподіл. Це означає, що:

$$\mathbb{I} \begin{cases} \xi_1 \sim Pois(\lambda_1) \\ \xi_2 \sim Pois(\lambda_2) \end{cases} \implies \xi_1 + \xi_2 \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Доведемо за допомогою характеристичної функції розподілу:

$$\begin{cases} \chi_{\xi_1}(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)} \\ \chi_{\xi_2}(t) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)} \end{cases} \implies \chi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \chi_{\xi_1}(t) \cdot \chi_{\xi_2}(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$$

Остаточно:  $\boxed{\xi_1 + \xi_2 \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)}$

$N(a, \sigma^2)$  - стійкий розподіл.

$$\mathbb{I} \begin{cases} \xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2) \\ \xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2) \end{cases} \quad \begin{cases} \chi_{\xi_1} = e^{ia_1t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \\ \chi_{\xi_2} = e^{ia_2t - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} \end{cases}$$

$$\chi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \chi_{\xi_1} \cdot \chi_{\xi_2}(t) = e^{i(a_1+a_2)t - \frac{(\sigma_1+\sigma_2)^2 t^2}{2}} = \chi_{N(a_1+a_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)}(t)$$

Остаточно:  $\boxed{\xi_1 + \xi_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$

Розглянемо біноміальний розподіл:  $Bin(n, p)$

$$\mathbb{I} \begin{cases} \xi_1 \sim Bin(n_1, p) \\ \xi_2 \sim Bin(n_2, p) \end{cases} \quad \begin{cases} \chi_{\xi_1}(t) = (pe^{it} + q)^{n_1} \\ \chi_{\xi_2}(t) = (pe^{it} + q)^{n_2} \end{cases}$$

$$\chi_{\xi_1+\xi_2}(t) = (pe^{it} + q)^{n_1} \cdot (pe^{it} + q)^{n_2} = (pe^{it} + q)^{n_1+n_2}$$

Остаточно:  $\boxed{\xi_1 + \xi_2 \sim Bin(n_1 + n_2, p)}$

Задача: знайти щільність розподілу  $f_\xi(x)$  за харатеристичною функцією.

$$\begin{aligned} \chi_\xi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx - \text{перетворення Фур'є} & f &\xrightarrow{F} \chi \\ f_\xi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \chi_\xi(x) dx - \text{обернене перетворення} & \chi &\xrightarrow{F^{-1}} f \end{aligned}$$

### 3.5. Характеристичні функції випадкових векторів.

#### 3.5.1. Означення.

Розглядаємо випадковий вектор  $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ . Характеристична функція:

$$\chi_{\bar{\xi}}(\bar{t}) = \chi_{\bar{\xi}}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbb{E} e^{i\langle \bar{\xi}, \bar{t} \rangle} = \mathbb{E} e^{i(t_1 \xi_1 + \dots + t_n \xi_n)}$$

Для дискретного випадкового вектора  $\bar{\xi}$ :

$$\chi_{\bar{\xi}}(\bar{t}) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_n=1}^{m_n} e^{i(t_1 x_1^{(i_1)} + \dots + t_n x_n^{(i_n)})} \cdot \mathbb{P} \left\{ \xi_1 = x_1^{(i_1)}, \dots, \xi_n = x_n^{(i_n)} \right\}$$

Для абсолютно неперервного випадкового вектора  $\bar{\xi}$ :

$$\chi_{\bar{\xi}}(\bar{t}) = \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} f_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

#### 3.5.2. Властивості характеристичної функції випадкового вектора.

1.  $\chi_{\bar{\xi}}$  - унікальна характеристика випадкового вектора. Проте, за однакової характеристичної функції неможна вважати, що вектори однакові. Можна вважати, що вони мають однакові розподіли. Наведемо приклад:

$$\xi \sim U(-1, 1) \quad -\xi \sim U(-1, 1) \quad \xi \neq -\xi \quad \xi \stackrel{\circ}{=} -\xi$$

$$2. \chi_{\bar{\xi}}(\vec{0}) = 1$$

$$3. |\chi_{\bar{\xi}}(\bar{t})| \leq 1$$

$$4. \chi_{\bar{\xi}} \in C(\mathbb{R}^n)$$

$$5. \text{Якщо } \bar{\xi}_1 \perp \bar{\xi}_2 \implies \chi_{\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2}(t) = \chi_{\bar{\xi}_1}(t) \cdot \chi_{\bar{\xi}_2}(t)$$

$$6. \exists \mathbb{E} \left( \xi_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{k_n} \right) \implies \mathbb{E} \left( \xi_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{k_n} \right) = \frac{1}{i^{k_1 + \dots + k_n}} \cdot \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial t_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \partial t_n^{k_n}} \chi_{\bar{\xi}}(\vec{0})$$

$$7. \chi_{A\bar{\xi} + \bar{b}}(\bar{t}) = \mathbb{E} e^{i\langle A\bar{\xi} + \bar{b}, \bar{t} \rangle} = \mathbb{E} \left( e^{i\langle A\bar{\xi}, \bar{t} \rangle} \cdot e^{i\langle \bar{b}, \bar{t} \rangle} \right) = e^{i\langle \bar{b}, \bar{t} \rangle} \mathbb{E} e^{i\langle \bar{\xi}, A^T \bar{t} \rangle} = e^{i\langle \bar{b}, \bar{t} \rangle} \chi_{\bar{\xi}}(A^T \bar{t})$$

$$8. \text{Якщо координати вектора } \bar{\xi} \text{ - незалежні, Тоді: } \chi_{\bar{\xi}}(\bar{t}) = \mathbb{E} e^{i(t_1 \xi_1 + \dots + t_n \xi_n)} = \mathbb{E} (e^{it_1 \xi_1} \cdot \dots \cdot e^{it_n \xi_n}) = (\mathbb{E} e^{it_1 \xi_1}) \cdot \dots \cdot (\mathbb{E} e^{it_n \xi_n}) = \chi_{\xi_1}(t_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\xi_n}(t_n)$$

Якщо координати незалежні, то характеристична функція розпадається на добуток маргінальних характеристичних функцій. До речі, справедливе і обернене твердження. Звідси, отримали критерій незалежності координат.

### 3.6. Гаусівські випадкові вектори.

$$n = 1 \quad \xi \sim N(a, \sigma^2) \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

$$\sigma^2 = \mathbb{D}\xi \quad a = \mathbb{E}\xi \quad \chi_\xi(t) = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

#### 3.6.1. Характеристики стандартного гаусівського розподілу.

Нехай маємо стандартний гаусівський  $n$ -вимірний випадковий вектор:

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \text{ де } \xi_1, \dots, \xi_n - \text{ незалежні } N(0, 1) \implies \bar{\xi} \sim N(\vec{0}, I).$$

$$\mathbb{E}\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}\xi_n \end{bmatrix} = \vec{0} \quad C_{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) & \cdots & cov(\xi_1, \xi_n) \\ cov(\xi_2, \xi_1) & \mathbb{D}\xi_2 & \cdots & cov(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\xi_n, \xi_1) & cov(\xi_n, \xi_2) & \cdots & \mathbb{D}\xi_n \end{bmatrix} = I^{n \times n}$$

Для одновимірної стандартної величини  $\xi \sim N(0, 1)$ :

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x) \quad \chi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\text{Для стандартного вектора } \bar{\xi} \sim N(\vec{0}, I) \quad \bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

$$f_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdots f_{\xi_n}(x_n) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_j^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}{2}}$$

$$F_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdots F_{\xi_n}(x_n) = \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} + \Phi(x_j) \right)$$

$$\chi_{t_1, \dots, t_n} = \chi_{\xi_1}(t_1) \cdots \chi_{\xi_n}(t_n) = e^{-\frac{t_1^2}{2} \cdots -\frac{t_n^2}{2}} = e^{-\frac{t_1^2 + \dots + t_n^2}{2}} = e^{-\frac{\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle}{2}}$$

#### 3.6.2. Характеристика загального гаусівського розподілу.

Якщо  $C$  - симетрична невід'ємно визначена матриця, то в неї існує квадратний корінь: така матриця  $A$  :  $A^2 = C$ .

Розглянемо загальний гаусівський вектор:  $\bar{\xi} \sim N(\vec{0}, I)$ .

$\boxed{\bar{\eta} = \bar{a} + A\bar{\xi}}$  - за означенням будемо називати гаусівським, тобто  $\bar{\eta} \sim N(\bar{a}, C)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\bar{\eta} &= \mathbb{E}(\bar{a} + A\bar{\xi}) = \mathbb{E}\bar{a} + \mathbb{E}(A\bar{\xi}) = \bar{a} + A \cdot \mathbb{E}\bar{\xi} = \bar{a} \\ C_{\bar{\eta}} &= \mathbb{E}(\bar{\eta} - \mathbb{E}\bar{\eta})(\bar{\eta} - \mathbb{E}\bar{\eta})^T = \mathbb{E}(\bar{a} + A\bar{\xi} - \bar{a})(\bar{a} + A\bar{\xi} - \bar{a})^T = \\ &= \mathbb{E}(A\bar{\xi}\bar{\xi}^T A^T) = A \cdot \mathbb{E}(\bar{\xi}\bar{\xi}^T) \cdot A^T = A \cdot C_{\bar{\xi}} \cdot A^T = A \cdot I \cdot A^T = A^2 = C\end{aligned}$$

Характеристична функція загального гаусівського вектора:

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= \bar{a} + A\bar{\xi}, \text{ де } A^2 = AA^T = C, \bar{\xi} \sim N(\vec{0}, I) \\ \chi_{\bar{\eta}}(\bar{t}) &= \chi_{A\bar{\xi} + \bar{a}}(\bar{t}) = e^{i\langle \bar{a}, \bar{t} \rangle} \cdot \chi_{\bar{\xi}}(A^T \bar{t}) = e^{i\langle \bar{a}, \bar{t} \rangle} \cdot e^{-\frac{\langle A^T \bar{t}, A^T \bar{t} \rangle}{2}} = e^{i\langle \bar{a}, \bar{t} \rangle - \frac{\langle C \bar{t}, \bar{t} \rangle}{2}}\end{aligned}$$

Щільність розподілу вектора  $\bar{\eta} \sim N(\bar{a}, C)$ :

**Лема.** Щільність розподілу афінного перетворення.

Нехай маємо  $\bar{\xi}$  - абсолютно неперервний випадковий вектор зі щільністю  $f_{\bar{\xi}}(\bar{x})$ .

Маємо його афінне перетворення:  $\bar{\eta} = A\bar{\xi} + \bar{a}$  ( $A$  - невироджена матриця). Тоді,  $\bar{\eta}$  - абсолютно неперервний випадковий вектор зі щільністю  $f_{\bar{\eta}}(\bar{y})$ :

$$f_{\bar{\eta}}(\bar{y}) = \frac{1}{|\det(A)|} f_{\bar{\xi}}(A^{-1}(\bar{y} - \bar{a}))$$

*Доведення.* Нехай  $B \subset \mathbb{R}^n$ . (Позначимо  $n$ -кратний інтеграл за множ.  $B$  -  $\iint_B$ ):

$$\begin{aligned}\iint_B f_{\bar{\eta}}(\bar{y}) d\bar{y} &= \mathbb{P}\{\bar{\eta} \in B\} = \mathbb{P}\{A\bar{\xi} + \bar{a} \in B\} = \mathbb{P}\{A\bar{\xi} \in B - \bar{a}\} = \\ &= \mathbb{P}\{\bar{\xi} \in A^{-1}(B - \bar{a})\} = \iint_{A^{-1}(B - \bar{a})} f_{\bar{\xi}}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} = \left| \begin{array}{l} \bar{y} = A\bar{x} + \bar{a} \\ \bar{x} = A^{-1}(\bar{y} - \bar{a}) \\ J = |\det(A^{-1})| \end{array} \right| = \\ &= \int_B f_{\bar{\xi}}(A^{-1}(\bar{y} - \bar{a})) |\det(A^{-1})| d\bar{y} = \int_B \frac{1}{|\det(A)|} f_{\bar{\xi}}(A^{-1}(\bar{y} - \bar{a})) d\bar{y}\end{aligned}$$

Інакше кажучи, інтеграли за будь-якою множиною збігаються т.т.т.к. збігаються підінтегральні функції. Приходимо до:

$$\iint_B f_{\bar{\eta}}(\bar{y}) d\bar{y} = \int_B \frac{1}{|\det(A)|} f_{\bar{\xi}}(A^{-1}(\bar{y} - \bar{a})) d\bar{y} \iff \boxed{f_{\bar{\eta}}(\bar{y}) = \frac{1}{|\det(A)|} f_{\bar{\xi}}(A^{-1}(\bar{y} - \bar{a}))}$$

■

Повернемося до щільності розподілу загального вектора:

$$\begin{aligned} f_{\bar{\eta}}(\bar{x}) &= \frac{1}{|\det A|} f_{\bar{\xi}}(A^{-1}(\bar{x} - \bar{a})) = \frac{1}{|\det A|} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\langle A^{-1}(\bar{x}-\bar{a}), A^{-1}(\bar{x}-\bar{a}) \rangle}{2}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det C}} \cdot e^{-\frac{\langle C^{-1}(\bar{x}-\bar{a}), (\bar{x}-\bar{a}) \rangle}{2}} \end{aligned}$$

Якщо  $C$  - вироджена матриця ( $\det C = 0 \Leftrightarrow \nexists C^{-1}$ ), то щільності немає.

### 3.6.3. Властивості гаусівських векторів.

1. Клас гаусівських векторів замкнений відносно афінних перетворень.

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &\sim N(\bar{a}, C) \quad \bar{a} = \mathbb{E}\bar{\eta} \quad C = C_{\bar{\eta}} \\ \bar{\theta} &= D \cdot \bar{\eta} + \bar{b} \implies \bar{\theta} \sim N(D\bar{a} + \bar{b}; DC_{\bar{\eta}}D^T) \end{aligned}$$

*Доведення.*  $\bar{\eta} = \bar{a} + A\bar{\xi}$ , де  $\bar{\xi}$  - загальний гаусівський вектор,  $AA^T = C$ .

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= D\bar{\eta} + \bar{b} = D(\bar{a} + A\bar{\xi}) + \bar{b} = DA\bar{\xi} + (D\bar{a} + \bar{b}) \\ \mathbb{E}\bar{\theta} &= D\bar{a} + \bar{b} \quad C_{\bar{\theta}} = (DA)(DA)^T = D(AA^T)D^T = DC_{\bar{\eta}}D^T \end{aligned}$$

■

2. Нехай  $\bar{\xi}$  - стандартний гаусівський вектор.

$\bar{\eta} = U\bar{\xi}$ , де  $U$  - ортогональна матриця ( $U \cdot U^T = I$ ). Тоді  $\bar{\eta} \sim N(\vec{0}, I)$ .

$$\mathbb{E}\bar{\eta} = U \cdot \mathbb{E}\bar{\xi} = \vec{0} \quad C_{\bar{\eta}} = U \cdot C_{\bar{\xi}} \cdot U^T = UU^T = I$$

3. Розглянемо довільний гаусівський вектор  $\bar{\xi} = [\xi_1 \ \cdots \ \xi_n]$ :

$$\boxed{\xi_1, \dots, \xi_n \text{ - незалежні} \iff \xi_1, \dots, \xi_n \text{ - некорельовані}}$$

Тобто, для координат ГВВ незалежність еквівалентна некорельованості.

*Доведення.* Нехай величини  $\xi_1, \dots, \xi_n$  є некорельованими.

$$C_{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) & \cdots & cov(\xi_1, \xi_n) \\ cov(\xi_2, \xi_1) & \mathbb{D}\xi_2 & \cdots & cov(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\xi_n, \xi_1) & cov(\xi_n, \xi_2) & \cdots & \mathbb{D}\xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_{\bar{\xi}}(\bar{t}) &= e^{i\langle \bar{a}, \bar{t} \rangle - \frac{\langle C_{\bar{\xi}}^{-1} \bar{t}, \bar{t} \rangle}{2}} = e^{i(a_1 t_1 + \dots + a_n t_n) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + \dots + \sigma_n^2 t_n^2)} = \\ &= e^{\left(ia_1 t_1 - \frac{\sigma_1^2 t_1^2}{2}\right) + \left(ia_n t_n - \frac{\sigma_n^2 t_n^2}{2}\right)} = \chi_{N(a_1, \sigma_1^2)}(t_1) \cdot \dots \cdot \chi_{N(a_n, \sigma_n^2)}(t_n) \\ (\chi_{\bar{\xi}}(\bar{t}) &= \chi_{N(a_1, \sigma_1^2)}(t_1) \cdot \dots \cdot \chi_{N(a_n, \sigma_n^2)}(t_n)) \iff (\xi_1, \dots, \xi_n \text{ - незалежні.}) \end{aligned}$$

■

Наслідок 1. Якщо  $\bar{\xi} = [\xi_1 \ \cdots \ \xi_n]$  - гаусівський вектор, то  $\xi_1, \dots, \xi_n$  - гаусівські величини. Візьмемо таку матрицю перетворення, що:

$$\xi_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_i \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} - \text{афінне перетворення.}$$

У гаусівському векторі всі координати - гаусівські величини, але обернений факт може бути хибним. Тобто, гаусівські величини можуть об'єднуватися в негаусівський вектор. Якщо координати гаусівські та незалежні, то вектор, складений із них, точно буде гаусівським.

### 3.6.4. Гаусівський вектор на площині.

$$\text{Нехай, маємо вектор } \bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2) \\ \xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2) \end{array} \quad r_{\xi_1, \xi_2} = r = \frac{\text{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}}$$

$$\chi_{\bar{\xi}}(t_1, t_2) = e^{i\langle \bar{a}, \bar{t} \rangle - \frac{1}{2} \langle C \bar{t}, \bar{t} \rangle} = e^{i(a_1 t_1 + a_2 t_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2)}$$

$$\text{Щільність розподілу: } f_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{2}} \sqrt{\det C}} e^{-\frac{1}{2} \langle C^{-1}(\bar{x} - \bar{a}), \bar{x} - \bar{a} \rangle}$$

$$\det C = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - (r\sigma_1\sigma_2)^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - r^2)$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - r^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -r\sigma_1\sigma_2 \\ -r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{r}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{r}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

$$\langle C^{-1}(\bar{x} - \bar{a}), \bar{x} - \bar{a} \rangle = \frac{1}{1 - r^2} \left( \frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2r}{\sigma_1\sigma_2} (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \right)$$

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1 - r^2)}} e^{-\frac{1}{2(1 - r^2)} \left( \frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2r}{\sigma_1\sigma_2} (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \right)}$$

Маємо такі обмеження:  $(\sigma_1, \sigma_2 \neq 0, |r| \neq 1)$ .

Зокрема, якщо  $r = 0 \Leftrightarrow \xi_1, \xi_2$  - некорельовані:

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} \right)} = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1}{2\pi\sigma_2} e^{-\frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

— Happy End —

# Собственно, матстат...

## 4. Функції від випадкових величин (векторів)

Для дискретної випадкової величини  $\xi$ :  $\eta = \phi(\xi) \Rightarrow \eta$  - ДВВ.

Припустимо, що  $\varphi$  - неперервно диференційована.  $\xi$  - абсолютно неперервна зі щільністю  $f_\xi(x)$ . Розглядаємо  $\eta = \varphi(\xi)$ :

**Теорема 4.1.** Нехай  $\varphi$  - взаємно-однозначна (бієкція на області значень), та її обернена  $\psi$  є неперервно диференційована. (Дифеоморфізм). Тоді:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} |\psi'(y)| \cdot f_\xi(\psi(y)), & y \in E_\varphi \\ 0 & y \notin E_\varphi \end{cases} = f_\xi(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)| \cdot \mathbb{I}_{E_\varphi}(y)$$

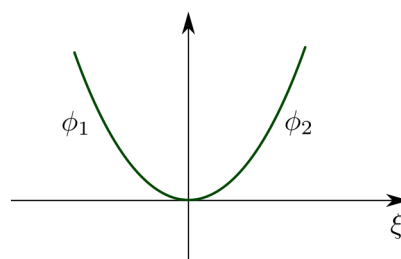
*Доведення.* Розглядаємо множину  $B$ .

$$\begin{aligned} \int_B f_\eta(y) dy &= \mathbb{P}\{\eta \in B\} = \mathbb{P}\{\varphi(\xi) \in B\} = \mathbb{P}\{\xi \in \phi^{-1}(B)\} = \int_{\phi^{-1}(B)} f_\xi(x) dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = y \\ x = \psi(y) \\ J = \psi'(y) = J_\psi \end{array} \right| = \int_{B \cap E_\varphi} f_\xi(\psi(y)) \cdot |J_\psi(y)| dy = \int_B f_\xi(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)| \cdot \mathbb{I}_{E_\varphi}(y) dy \end{aligned}$$

■

**Теорема 4.2.** Нехай  $\phi$  не є ін'єкцією, але "розпадається" на декілька таких.

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x^2, x \in (-\infty, 0) \\ \varphi_2(x) &= x^2, x \in [0, +\infty) \\ E_{\varphi_1} &= (0, +\infty) \quad E_{\varphi_2} = (0, +\infty) \\ \psi(x) = y \quad x^2 = y \quad x &= \pm\sqrt{y} \\ \psi_1(y) &= -\sqrt{y} \quad \psi_2(y) = \sqrt{y} \end{aligned}$$



Тоді: 
$$f_\eta(y) = \sum_{i=1}^n f_\xi(\psi_i(y)) \cdot |\psi'_i(y)| \cdot \mathbb{I}_{E_{\varphi_i}}(y).$$

Доведення. Розглядаємо множину  $B$ .

$$\begin{aligned} \int_B f_\eta(y) dy &= \mathbb{P} \{ \eta \in B \} = \mathbb{P} \{ \xi \in \phi_1^{-1}(B) \cup \dots \cup \xi \in \phi_n^{-1}(B) \} = \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \{ \xi \in \phi_i^{-1}(B) \} - \text{надалі доведення зводиться до попередньої теореми.} \end{aligned}$$

■

#### 4.1. Функції від випадкових векторів.

Розглядаємо  $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad \eta = \varphi(\xi_1, \xi_2)$ .

1. Для дискретного випадку обчислення тривіальні.
2.  $\bar{\xi}$  - абсолютно неперервний випадковий вектор.

$$f_{\bar{\xi}}(\bar{x}) \Rightarrow \eta = \varphi(\bar{\xi}) \quad f_\eta(y) = ? \quad \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

**Теорема 4.3.**  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\varphi$  - взаємно-однозначна  $\Rightarrow \psi = \varphi^{-1}$ .  
 $\varphi, \psi$  - дифеоморфізми  $\Rightarrow \exists J_\psi(\bar{y})$  - якобіан. Тоді:

$$f_{\bar{\eta}}(\bar{y}) = f_{\bar{\xi}}(\psi(\bar{y})) \cdot |J_\psi(\bar{y})| \cdot \mathbb{I}_{E_\varphi}(\bar{y})$$

**Теорема 4.4.**  $\varphi$  розпадається на суму ін'єктивних функцій  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ .  
 $\varphi_i^{-1} = \psi_i$ .  $E_i$  - область значень  $\varphi_i$ .  $J_{\psi_i}$  - якобіан  $\psi_i$ . Тоді:

$$f_{\bar{\eta}}(\bar{y}) = \sum_{i=1}^k f_{\bar{\xi}}(\psi_i(\bar{y})) \cdot |J_{\varphi_i}(\bar{y})| \cdot \mathbb{I}_{E_{\varphi_i}}(\bar{y})$$

Часто будемо використовувати:

$$f_{\xi_1 + \xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y - x) dx.$$

Якщо  $\xi_1 \perp \xi_2$  :

$$f_{\xi_1 + \xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y - x) dx.$$

Також:  $f_{\xi_1 + \xi_2}(y) = (f_{\xi_1} \otimes f_{\xi_2})(y)$  - згортка.



## 4.2. Загальний алгоритм знаходження щільності функції від випадкових векторів.

Розглядаємо  $\eta = \varphi(\bar{\xi}) \quad f_\eta(z) = ?$ .

$$F_\eta = \mathbb{P} \{ \eta < z \} = \mathbb{P} \{ \varphi(\xi_1, \xi_2) < z \} = \left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid \varphi(x, y) < z \right\} = D_z \right| =$$

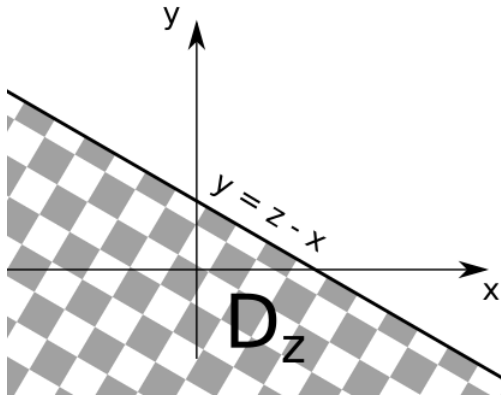
$$= \iint_{D_z} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy \implies f_\eta(z) = F'_\eta(z)$$

Знайдемо щільності розподілу суми, добутку та частки випадкових величин.

$$\xi_1, \xi_2, f_{\bar{\xi}}(x, y) \implies f_{\xi_1 + \xi_2}(z), f_{\xi_1 \cdot \xi_2}(x, y), f_{\xi_1 / \xi_2}(x, y) - ?$$

**Сума:**  $F_{\xi_1 + \xi_2}(z) = \mathbb{P} \{ \xi_1 + \xi_2 < z \} = \mathbb{P} \{ \bar{\xi} \in D_z \} = \iint_{D_z} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy =$

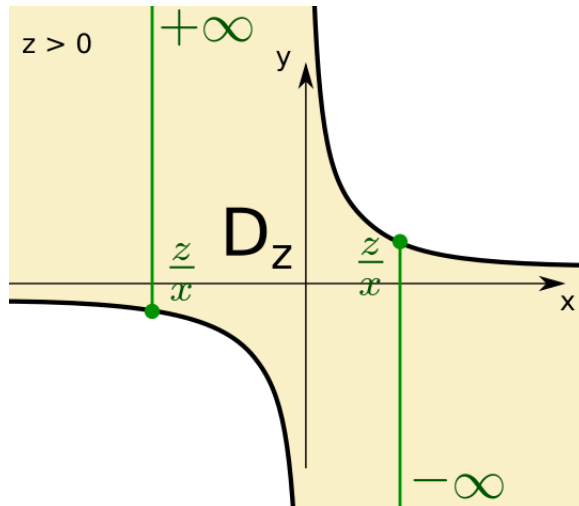
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy$$

$$f_{\xi_1 + \xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, z-x) dx$$


$$f_{\xi_1 + \xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, z-x) dx = |\xi_1 \perp \xi_2| = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(z-x) dx$$

**Добуток:** Шукаємо  $f_{\xi_1 \cdot \xi_2} \quad F_{\xi_1 \cdot \xi_2} = \mathbb{P} \{ \xi_1 \cdot \xi_2 < z \}$ .

$$x * y < z \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y < \frac{z}{x} \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y > \frac{z}{x} \\ x < 0 \end{cases} \end{cases}$$



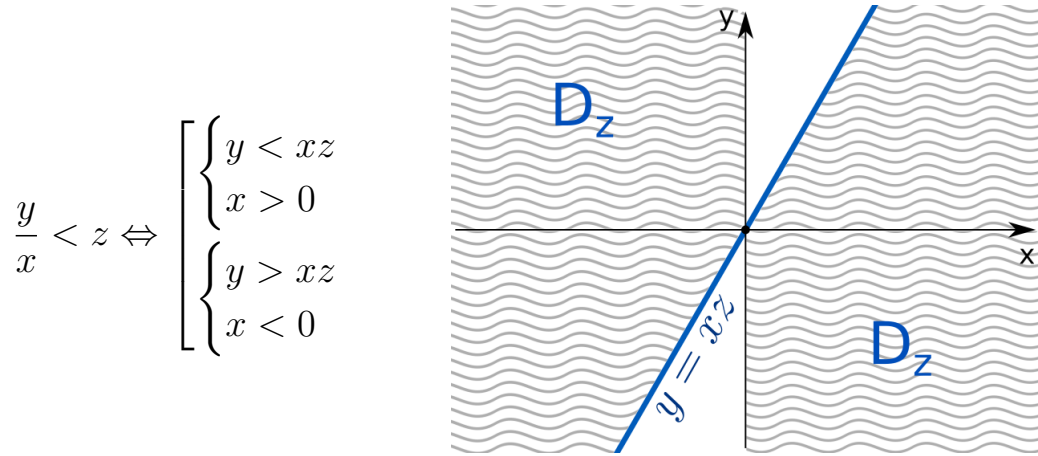
$$F_{\xi_1, \xi_2}(z) = \iint_{D_z} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^0 dx \int_{\frac{z}{x}}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy$$

$$f_{\xi_1, \xi_2}(z) = - \int_{-\infty}^0 f_{\bar{\xi}}\left(x, \frac{z}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} dx + \int_0^{+\infty} f_{\bar{\xi}}\left(x, \frac{z}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} dx$$

**Відношення.** Розглядаємо:  $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$   $f_{\bar{\xi}}(x, y)$   $\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1}$ . За алгоритмом:

$$F_{\eta}(z) = \mathbb{P} \left\{ \frac{\xi_2}{\xi_1} < z \right\} = \mathbb{P} \{ \bar{\xi} \in D_z \} = \iint_{D_z} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy$$

де,  $D_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y}{x} < z \right\}$  Якщо  $z > 0$  :



Повертаємося до інтегралу, що записано вище:

$$F_{\eta}(z) = \int_{-\infty}^0 dx \int_{zx}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{zx} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy$$

$$f_{\eta}(z) = F'_{\eta}(z) = \int_{-\infty}^0 f_{\bar{\xi}}(x, zx) x dx + \int_0^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, zx) x dx$$

**Приклад.**  $\xi_1, \xi_2 \sim N(0, 1)$   $\xi_1 \perp \xi_2$   $\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1}$

Величини  $\xi_1, \xi_2$  розподілені нормально:  $f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = f_{\xi_2}(x)$ .

Скористаємося знайденою формулою:

$$f_{\eta}(z) = - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2 x^2}{2}} x dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2 x^2}{2}} x dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} \underbrace{xdx}_{=d(\frac{x^2}{2})} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} \underbrace{xdx}_{=d(\frac{x^2}{2})} = \\
&= -\frac{1}{2\pi(1+z^2)} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} d\left(\frac{x^2}{2}(1+z^2)\right) + \frac{1}{2\pi(1+z^2)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} d\left(\frac{x^2}{2}(1+z^2)\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi(1+z^2)} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} \Big|_{x=-\infty}^0 - \frac{1}{2\pi(1+z^2)} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} \Big|_{x=0}^{+\infty} = \\
&= \frac{1}{2\pi(1+z^2)} + \frac{1}{2\pi(1+z^2)} = \frac{1}{\pi(1+z^2)}, z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Отримали, що:  $\frac{N(0,1)}{N(0,1)} \sim \text{Cauchy Distribution}$

### 4.3. Щільності розподілу максимуму, мінімуму та інших порядкових статистик.

#### 4.3.1. Максимум.

Розглянемо максимум з деяких незалежних випадкових величин:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

$$M = \max \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$$

$$\begin{aligned}
F_M(x) &= \mathbb{P} \{M < x\} = \mathbb{P} \{\max \{\xi_1, \dots, \xi_n\} < x\} = \mathbb{P} \{\xi_1 < x, \dots, \xi_n < x\} = \\
&= \mathbb{P} \{\xi_1 < x\} \cdot \dots \cdot \mathbb{P} \{\xi_n < x\} = F_{\xi_1}(x) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x)
\end{aligned}$$

$$F_M(x) = \prod_{i=1}^n F_{\xi_i}(x)$$

Якщо  $\xi_1, \dots, \xi_n$  однаково розподілені, то  $F_M(x) = F_{\xi}^n(x)$ . В такому випадку, можемо знайти і функцію розподілу:  $f_M(x) = n \cdot F_{\xi}^{n-1}(x) \cdot f_{\xi}(x)$ .

#### 4.3.2. Мінімум.

Розглянемо мінімум з деяких незалежних випадкових величин:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

$$m = \min \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$$

$$\begin{aligned}
F_m(x) &= \mathbb{P} \{\min \xi_1, \dots, \xi_n < x\} = 1 - \mathbb{P} \{\min \xi_1, \dots, \xi_n \geq x\} = \\
&= 1 - \mathbb{P} \{\xi_1 \geq x, \dots, \xi_n \geq x\} = 1 - (1 - F_{\xi_1}(x)) \cdot \dots \cdot (1 - F_{\xi_n}(x))
\end{aligned}$$

$$F_m(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{\xi_i}(x))$$

Якщо  $\xi_1, \dots, \xi_n$  однаково розподілені, то  $F_m(x) = 1 - (1 - F_{\xi}(x))^n$ . В такому випадку, можемо знайти і функцію розподілу:  $f_m(x) = n \cdot (1 - F_{\xi}(x))^{n-1} \cdot f_{\xi}(x)$ .

### 4.3.3. Порядкові статистики.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  - незалежні однаково розподілені абсолютно неперервні випадкові величини зі щільністю  $f$ . Знайдемо:  $\mathbb{P}\{\xi_i - \xi_j = 0\} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}\{\xi_i \neq \xi_j\} = 1$ .

Це означає, що з імовірністю 1 всі величини різні. Тому, можемо впорядкувати величини за зростанням:

$$\underbrace{\xi_{(1)}}_{\min\{\xi_1, \dots, \xi_n\}} < \xi_{(2)} < \dots < \underbrace{\xi_{(n)}}_{\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}}$$

$\xi_{(k)}, k \in [1, n]$  -  $k$ -та порядкова статистика (order statistics).

Щільність розподілу  $\xi_{(k)}, k \in [1, n]$ :

$$F_{\xi_{(k)}}(x) = \mathbb{P}\{\xi_{(k)} < x\} = \mathbb{P}\{\forall i \leq k : \xi_i \in (-\infty, x)\} =$$

$$= \sum_{l=k}^n \underbrace{\mathbb{P}\{n(\xi_i \in (-\infty, x)) = l\}}_{\text{схема Бернуллі}} = \sum_{l=k}^n C_n^l \cdot F^l(x) \cdot \bar{F}^{n-l}(x)$$

$$f_{\xi_{(k)}}(x) = F'_{\xi_{(k)}}(x) = \sum_{l=k}^n C_n^l \left( l F^{l-1}(x) f(x) \bar{F}^{n-l}(x) - F^l(x) (n-l) \bar{F}^{n-l-1}(x) f(x) \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Телескопічна сума.} \\ \text{Доданки скорочуються.} \end{array} \right| = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(x) \cdot \bar{F}^{n-k}(x) \cdot f(x), k \in [1, n]$$

#### 4.4. Знаходження числових характеристик функцій від випадкових величин.

**Теорема 4.5.** Нехай є випадковий вектор  $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ . Та функція  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow$

$\mathbb{R}$ . В такому вигляді, ми не можемо застосувати теорему до характеристичної функції, адже характеристична функція є комплекснозначною. Але, слід зауважити, що умови теореми будуть виконуватися і в комплексному випадку.

$$\mathbb{E}\varphi(\bar{\xi}) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) \cdot f_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

*Доведення.* Для 2-вимірного випадку. Дано:

$$n = 2 \quad \bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad \eta = \varphi(\xi_1, \xi_2)$$

Доведемо, що:  $\mathbb{E}\varphi(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy$

Спочатку доведемо одну допоміжну лему.

**Лема.**  $\mathbb{P}\{\eta \geq 0\} = 1 \iff \eta \geq 0 \text{ м.н (a.s.)}$ . Тоді  $\mathbb{E}\eta = \int_0^{+\infty} \underbrace{\overline{F_{\eta}}(x)}_{1-F_{\eta}(x)=\mathbb{P}\{\eta \geq x\}} dx$ .

*Доведення.* (леми)

Раніше, за означенням:

Більш загально:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta &= \int_0^{+\infty} x \cdot f_{\eta}(x) dx & \iff & \mathbb{E}\eta = \int_0^{+\infty} \overline{F_{\eta}}(x) dx \\ \eta &= \int_0^{\eta} 1 dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{I}\{\eta \geq x\} dx & \implies & \mathbb{E}\eta = \mathbb{E} \int_0^{+\infty} \mathbb{I}\{\eta \geq x\} dx = \end{aligned}$$

Можемо внести математичне сподівання під знак інтегралу.

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{\mathbb{E}\mathbb{I}\{\eta \geq x\}}_{\mathbb{P}\{\eta \geq x\}} dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{\eta \geq x\} dx = \int_0^{+\infty} \overline{F_{\eta}}(x) dx$$

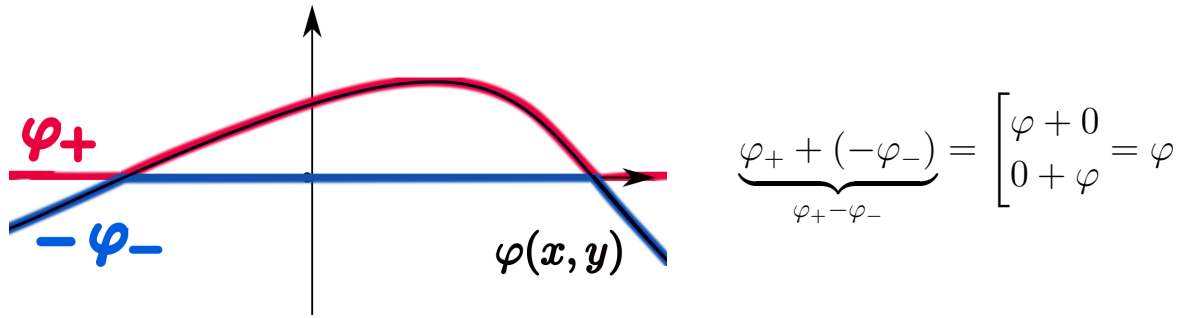
■

Повернемося до доведення основної теореми. Нехай  $\varphi(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\eta &= \underbrace{\mathbb{E}\varphi(\xi_1, \xi_2)}_{\geq 0} = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{\varphi(\xi_1, \xi_2) \geq z\} dz = D_z : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x, y) \geq z\} = \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{\bar{\xi} \in D_z\} = \int_0^{+\infty} \left( \iint_{D_z} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy \right) dz = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{\bar{\xi}}(x, y) \left( \int_0^{\varphi(x, y)} dz \right) dx dy = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) \cdot f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy \quad \text{Що і треба було показати.}\end{aligned}$$

Нехай  $\varphi(x, y)$  - довільна. Скористаємося фактом, що будь-яку функцію можна зобразити як різницю двох невід'ємних функцій:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \varphi_+(x, y) - \varphi_-(x, y) & \varphi_+(x, y) &= \max\{\varphi(x, y), 0\} \geq 0 \\ & & \varphi_-(x, y) &= -\min\{\varphi(x, y), 0\} \geq 0\end{aligned}$$



$$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\varphi(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\varphi_+(\xi_1, \xi_2) - \varphi_-(\xi_1, \xi_2)) = \mathbb{E}\varphi_+(\xi_1, \xi_2) - \mathbb{E}\varphi_-(\xi_1, \xi_2) \ominus$$

Застосуємо висновок про математичне сподівання невід'ємної функції:

$$\begin{aligned}\ominus & \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_+(x, y) f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy - \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_-(x, y) f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} (\varphi_+(x, y) - \varphi_-(x, y)) f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy \quad \text{Ч.и.т.д.}\end{aligned}$$

■

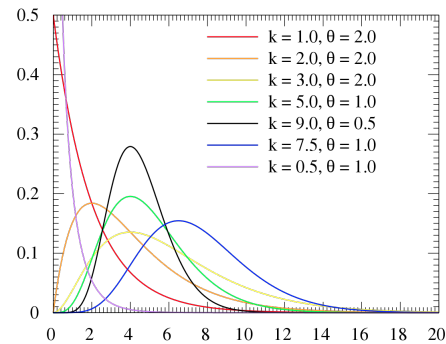
## 5. Деякі ймовірнісні розподіли, що зустрічаються у математичній статистиці.

### 5.1. Гамма-розподіл.

#### 5.1.1. PDF.

Будемо називати гамма розподіленою величиною  $\xi \sim \Gamma(\alpha, \beta)$   $\alpha, \beta > 0$ :

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$



За умовою нормування:

$$1 = c \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{c}{\beta^{\alpha}} \underbrace{\int_0^{+\infty} (\beta x)^{\alpha-1} e^{-\beta x} d(\beta x)}_{\Gamma(\alpha)} = \frac{c \cdot \Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}} \implies c = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$$

Розглянемо випадок  $\alpha = 1$ :  $f_{\Gamma(1,\beta)}(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} = f_{Exp(\beta)}$

Тобто, експоненціальний розподіл є окремим випадком гамма-розподілу.

#### 5.1.2. Числові характеристики.

Знайдемо одразу  $n$ -тий момент величини  $\xi \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi^n &= \int_0^{+\infty} x^n \cdot f_{\xi}(x) dx = \int_0^{+\infty} x^n \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^{+\infty} x^{\alpha+n-1} e^{-\beta x} dx = \\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^{n+\alpha}} \cdot \int_0^{+\infty} (\beta x)^{\alpha+n-1} e^{-\beta x} d(\beta x) = \boxed{\frac{\Gamma(\alpha + n)}{\beta^n \cdot \Gamma(\alpha)}} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\xi = (n = 1) = \frac{1}{\beta \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha + 1) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = (n = 2) = \frac{1}{\beta^2 \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha + 2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

### 5.1.3. Стійкість відносно додавання.

Експоненціальний розподіл не є стійким відносно додавання, але більш широкий клас - гамма розподілів буде мати таку властивість.

**Теорема 5.1** (Про напівстійкість Гамма-розподілу.).

$$\perp \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta) \\ \xi_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta) \end{array} \right. \implies \boxed{\xi_1 + \xi_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)}$$

*Доведення.* За умовою, маємо:

$$f_{\xi_1} = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-\beta x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} \quad f_{\xi_2} = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2-1} e^{-\beta x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$

Скористаємося правилом згортки:  $f_{\xi_1+\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y-x) dx =$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1} \beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^y x^{\alpha_1-1} e^{-\beta x} (y-x)^{\alpha_2-1} e^{-\beta(y-x)} dx = \left| \underbrace{\begin{matrix} x > 0 \\ y-x > 0 \end{matrix}}_{x \in (0,y)} \begin{matrix} x > 0 \\ x < y \end{matrix} \right| \ominus$$

Зауваження. Надалі будемо вважати, що при  $y \leq 0$   $f_{\xi_1+\xi_2}(y) = 0$ .

$$\begin{aligned} & \ominus \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^y x^{\alpha_1-1} (y-x)^{\alpha_2-1} dx = \left| \begin{array}{l} x = yt \quad dx = y dt \\ x : 0 \rightarrow y \\ t : 0 \rightarrow 1 \end{array} \right| = \\ & = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 y^{\alpha_1-1} t^{\alpha_1-1} y^{\alpha_2-1} (1-t)^{\alpha_2-1} y dt = \\ & = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \cdot y^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot \underbrace{\int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} dt}_{\beta(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}} = \\ & = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot y^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta y}, & y > 0; \\ 0 & y \leq 0; \end{cases} = f_{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \beta)}(y) \end{aligned}$$

■



## 5.2. Chi-square distribution with n degrees of freedom.

### 5.2.1. PDF.

Розглядаємо  $\xi_1, \dots, \xi_n$  - незалежні гаусівські  $N(0, 1)$ . Інакше:  $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \sim N(\vec{0}, I)$ .

Розподіл  $\chi_n^2$  - це закон розподілу  $||\bar{\xi}||^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ .

$n = 1$ . Шукаємо:  $\xi^2, \xi \sim N(0, 1)$ .

$$\varphi(x) = x^2 \quad x^2 = y \implies x = \pm\sqrt{y} \implies \begin{cases} \psi_1(y) = -\sqrt{y} \\ \psi_2(y) = \sqrt{y} \end{cases} \quad E_{\varphi_1} = E_{\varphi_2} = [0, +\infty]$$

$$\begin{aligned} f_{\varphi(\xi)}(y) &= \sum_{i=1}^2 f_{\xi}(\psi_i(y)) \cdot |\psi_i'(y)| \cdot \mathbb{I}\{y \in E_{\varphi_i}\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{x=-\sqrt{y}} \cdot |(-\sqrt{y})'| \cdot \mathbb{I}R_+(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{x=\sqrt{y}} \cdot |(\sqrt{y})'| \cdot \mathbb{I}R_+(y) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \mathbb{I}R_+(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} = f_{\chi_1^2}(y) \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$ . Шукаємо:  $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall \xi_i : \xi_i \sim N(0, 1)$ .

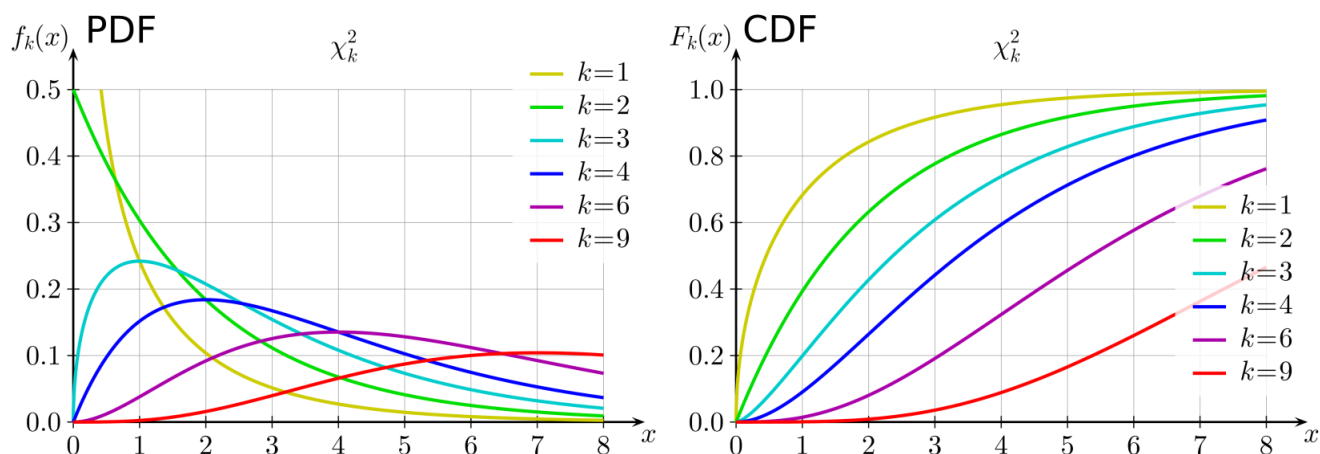
Розглянемо щільність  $f_{\chi_1^2}(y)$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(\frac{1}{2})^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Впізнаємо гамма-розподіл:} \\ \chi_1^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \end{array}$$

Тоді,  $\chi_n^2$  це сума n-незалежних  $\chi_1^2$ :  $\chi_n^2 = \underbrace{\chi_1^2 + \dots + \chi_1^2}_n = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$f_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$

$n = 2$ . Зокрема, в такому випадку, отримаємо:  $\chi_2^2 = \Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right) = \text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$ .



### 5.2.2. Числові характеристики.

$$\mathbb{E}\chi_n^2 = \mathbb{E}\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = n \quad [\mathbb{E}(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) = \mathbb{E}\xi_1^2 + \dots + \mathbb{E}\xi_n^2 = n]$$

$$\mathbb{D}\chi_n^2 = \mathbb{D}\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2n$$

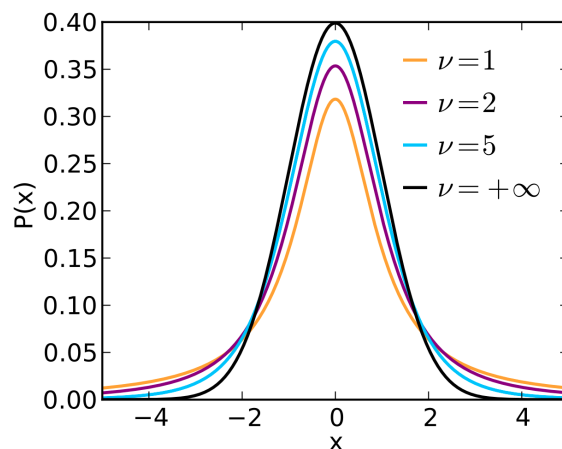
### 5.3. t-розподіл Стюдента з n степенями вільності.

Позначається  $t_n$  або  $St_n$ . Розглядаємо розподіл такої величини  $\eta$ :

$$\eta = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}{n}}} = \xi_0 \frac{n}{\sqrt{\chi_n^2}},$$

де  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  — незалежні стандартні гаусівські величини.

$$f_{St_n}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$



The PDF of the Student distribution.

Слід зауважити, що у випадку  $n = 1$  :  $St_1$  отримаємо розподіл Коші:

$$f_{St_1}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Якщо спрямуємо  $n \rightarrow \infty$ , отримаємо стандартний гаусівський розподіл:

$$f_{St_\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

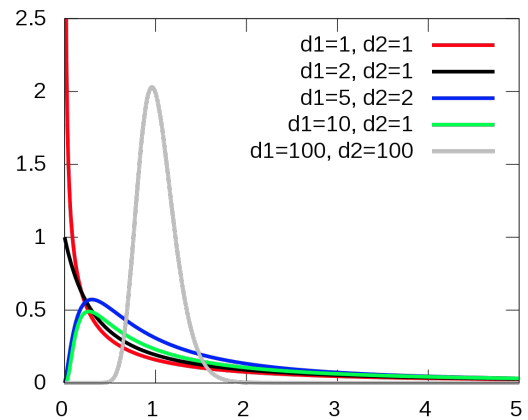
## 5.4. Розподіл Фішера(-Снедекора)

Позначається  $F_{m,n}$ . Розглядаємо розподіл такої величини  $\omega$  :

$$\omega = \frac{(\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2) / m}{(\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2) / n}$$

де  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n$  — незалежні стандартні гаусівські величини.

$$f(x; d_1, d_2) = \frac{\sqrt{\frac{(d_1 x)^{d_1} d_2^{d_2}}{(d_1 x + d_2)^{d_1 + d_2}}}}{x \beta\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)}$$



The PDF of the F-distribution

## 6. Граничні теореми теорії ймовірностей

### 6.1. Нерівність Чебишова.

$\xi$  - випадкова величина, для якої  $\exists \mathbb{E}\xi \exists \mathbb{D}\xi$ .

Знаємо, що  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$ . Але дисперсія є більше теоретичною величиною. Наприклад, розглянемо прилад, який перестає працювати якщо напруга в мережі  $\xi = U_m$  відхиляється  $\xi < 180$  або  $\xi > 260$ .

Інакше кажучи, якщо  $|\xi - \mathbb{E}\xi| > 40$  - прилад не працює. Нас цікавить ймовірність  $\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| > a\} = ?$ . Але, знаючи дисперсію, не зрозуміло, як пов'язати цю характеристику з ймовірністю зазначеної критичної події.

Саме таку оцінку дає нерівність Чебишова.

**Теорема 6.1** (нерівність Чебишова). Якщо  $\exists \mathbb{D}\xi$ , то:

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq a\} \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{a^2}$$

Перевага: Обчислюється лише через дисперсію. Не залежить від розподілу.  
Недолік: нерівність дає дуже грубу оцінку ймовірності.

**Наслідок.**

$$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| < a\} = \mathbb{P}\{\xi \in (\mathbb{E}\xi - a, \mathbb{E}\xi + a)\} \geq 1 - \frac{\mathbb{D}\xi}{a^2}$$

**Лема.** (нерівність Маркова)  $\eta$  - невід'ємна випадкова величина  $\mathbb{P}\{\eta \geq 0\} = 1$ .

Тоді:  $\mathbb{P}\{\eta \geq a\} \leq \frac{\mathbb{E}\eta}{a}$

*Доведення.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta &= \mathbb{E}(\eta \cdot \mathbb{I}\{0 \leq \eta < a\} + \eta \cdot \mathbb{I}\{\eta \geq a\}) = \mathbb{E}\eta \cdot \mathbb{I}\{\eta < a\} + \mathbb{E}\eta \cdot \mathbb{I}\{\eta \geq a\} \geq \\ &\geq \mathbb{E}\eta \cdot \mathbb{I}\{\eta \geq a\} \geq \mathbb{E}a \cdot \mathbb{I}\{\eta \geq a\} = a \cdot \mathbb{E}\mathbb{I}\{\eta \geq a\} = a \cdot \mathbb{P}\{\eta \geq a\} \end{aligned}$$

■

*Доведення.* (До нерівності Чебишова.) Очевидно, що:

$$\eta = (\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geq 0$$

За нерівністю Маркова:

$$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq a\} = \mathbb{P}\{(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geq a^2\} \leq \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2}{a^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{a^2}$$

■