ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ

За лекціями Горбань Н.

Редактори: Терещенко Д.
Людомирський Ю.

2021

Зміст

1. Лекція 1

1.1. Нормальні системи диференційних рівнянь

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \end{cases} \tag{1}$$

Системою диф. рівнянь n-го порядку в нормальній формі називається система вигляду (1), де $f_i : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad i = \overline{1, n}$.

Позначення 1.1.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{– невідома вектор-функція,} \quad \vec{f}(t, \vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}, \text{ що}$$

$D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тоді $(1) : \vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t))$.

Означення. Розв'язком системи (1) на (α, β) називається така вектор функція $\overline{x}(t) \in C(\alpha, \beta)$, що:
1. $(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \in D \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$.
2. $\overline{x}(t)$ перетворює (1) на тотожність на (α, β).
Загальним розв'язком системи (1) називається n-параметрична сім'я розв'язків (1), що охоплює всі розв'язки системи.

Задача Коші. Для заданих $t_0, \overline{x}^0 \in D$ знайти такий розв'язок (1), що $\overline{x}(t_0) = \overline{x}^0$.
Нехай $(t_0, \overline{x}^0) \in D : \mathbf{\Pi} = \left\{ (t, \overline{x}) \middle| \, |t - t_0| \le a, \quad \left\| \overline{x} - \overline{x^0} \right\| \le b; \right\}$.
Розглядається задача Коші: $\begin{cases} \overline{x}'(t) = \overline{f}(t, \overline{x}) \\ \overline{x}(t_0) = \overline{x}^0 \end{cases}$

Теорема 1.1 (Теорема Пеано)**.** $\overline{f} \in \mathbb{C}(\mathbf{\Pi}) \Longrightarrow$

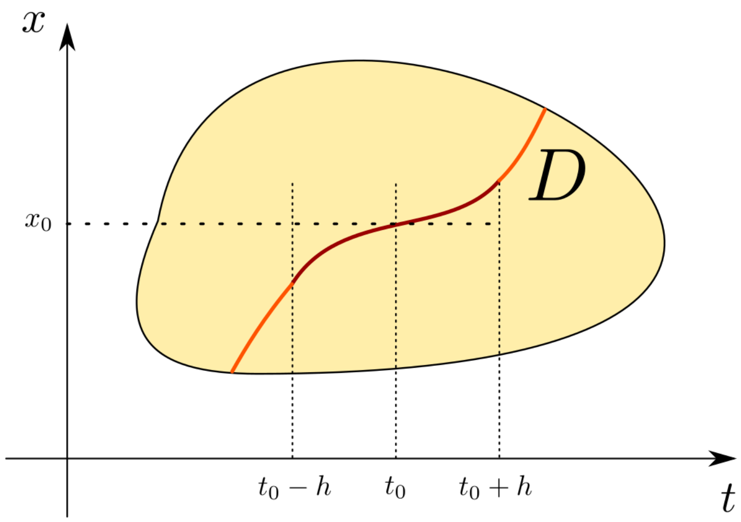
$\Longrightarrow$існують розв'язки задачі Коші, принаймі на інтервалі:

$$I = (t_0 - h, t_0 + h); \quad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{\mathbf{\Pi}} \left|\left|\overline{f}(\overline{x})\right|\right|$$

Теорема 1.2 (Теорема Пікара)**.** Якщо виконуються умови:
1) $f \in C(\mathbf{\Pi})$
2) $\exists L > 0 \quad \forall (t, \overline{x}^1), (t, \overline{x}^2) \in \mathbf{\Pi} : \left|\left|\overline{f}(t, \overline{x}^1) - \overline{f}(t, \overline{x}^2)\right|\right| \leq L \left|\left|\overline{x_1} - \overline{x_2}\right|\right|$ Тоді, існує та єдиний розвязок задачі Коші, принаймі на інтервалі:

$$I = (t_0 - h, t_0 + h); \quad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{\mathbf{\Pi}} \left|\left|\overline{f}(\overline{x})\right|\right|$$

Теорема 1.3 (про продовження)**.** Нехай $\overline{f} \in \mathbb{C}(D), D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ - деяка обмежена область. Нехай $(t_0, \overline{x}^0) \in D$ - задана точка.



Тоді $\exists t^-$та $t^+ : t^- < t < t^+$ такі, що розв'язок задачі Коші з початковою умовою існує на проміжку (t^-, t^+), причому точки $(t^-, \overline{x}(t^-)), (t^+, \overline{x}(t^+))$ належать межі області D.

1.2. Основні поняття теорії стійкості.

Розглянемо систему диф. рівнянь $\overline{x}'(t) = \overline{f}(t, \overline{x})$:

$$f \in \mathbb{C}(D) \qquad D = [a, +\infty] \times G \qquad G \in \mathbb{R}^n \qquad \forall (t_0, \overline{x}^0) \in D \exists! \text{ розв. З.К.}$$

Означення. Розв'язок системи (1) називається стійким за Ляпуновим, якщо:
1) $\overline{x} = \overline{\varphi}(t) \quad \exists$ на $[a, +\infty]$.
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0$, таке, що $||\overline{x}(t_0) - \overline{\varphi}(t_0)|| < \delta$ справедливо, що $||\overline{x}(t) - \overline{\varphi}(t)|| < \delta \quad \forall t \geq t_0$.

Означення. Розв'язок $\overline{x} = \varphi(t)$ називається асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо: 1. $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ - стійкий.
2. $\forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \overline{x}(t)$ такого, що $||\overline{x}(t_0) - \overline{\varphi}(t_0)||$ справедливо, що:
$||\overline{x}(t) - \overline{\varphi}(t)|| \to 0$ при $t \to +\infty$

Означення. Роз'язок називається **нестійким**, якщо він не є стійким.

1.3. Прилади дослідження на стійкість за означенням.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок З.К.:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Знайдемо розв'язок заданої З.К.: $x = 1 \Rightarrow x = t + C$ - заг. розв.
Підставимо: $0 = 0 + C \implies C = 0 \implies \boxed{\varphi(t) = t}$ - будемо досліджувати. Зазначений розв'язок не має вертикальних асимптот та існує на всьому $\mathbb{R}$. 2. Знайдемо розв'язок довільної З.К. $x(t_0) = x_0$.

$$x_0 = t_0 + C \Rightarrow C = x_0 - t_0 \Rightarrow x(t) = t + x_0 - t_0$$

3. Нехай $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$;
Тоді $|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - t_0| < \varepsilon = \delta$.
Таким чином, розв'язок є стійким, але не є асимптотично стійким.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок З.К.:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + t - x \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Знайдемо розв'язок даної задачі Коші:

$$\dot{x} = -x + 1 + t = |\text{ методом Бернуллі }| = t + Ae^{-t}$$

Знайшли загальний розв'язок. Підставимо умову із з. К.: $A = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$
2. Знайдемо розв'язок довільної З.К.:

$$x(t_0) = x_0 \qquad x_0 = t_0 + Ae^{-t_0} \qquad A = (x_0 - t_0)e^{t_0}$$

$$x(t) = t + (x_0 - t_0)e^{t_0 - t} - \text{ загальний розв'язок з. К.}$$

3. Нехай $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$. Розглядаємо: $\forall t \geq t_0$:

$$|x(t) - \varphi(t)| = \left|t + (x_0 - t_0) \cdot e^{t_0 - t} - t\right| = |x_0 - t_0| < \delta \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

Отримали, що знайдений розв'язок є асимптотично стійким.

Перейдемо знов до систем диф. рівнянь: $\overline{x}' = \overline{f}(t, \overline{x}) \quad (1)$.
$\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ - розв'язок, який ми маємо дослідити на стійкість.
Заміна $\overline{z}(t) = \overline{x}(t) - \overline{\varphi}(y)$. Отримаємо систему:

$$\overline{z}' + \overline{\varphi}' = \overline{f}(t, \overline{z} + \overline{\varphi})(t)$$

$$\overline{f}'(t) = \overline{f}(t, \overline{\varphi}) \Longrightarrow \boxed{\overline{z}' = \overline{\varphi}(t, \overline{z} + \overline{\varphi}(t)) - \overline{f}(t, \varphi(t))}$$

Sample