

# Зміст

<b>1. Описова статистика.</b>	<b>3</b>
1.1. Основні поняття математичної статистики. . . . .	3
1.2. Типи даних. . . . .	5
1.3. Первинна обробка інформації. . . . .	6
1.3.1. Статистичний ряд. . . . .	7
1.4. Графічні методи представлення інформації. . . . .	8
1.4.1. Гістограма. . . . .	8
1.4.2. Полігон частот. . . . .	8
<b>2. Дискриптивні міри.</b>	<b>9</b>
2.1. Міри центральної тенденції (measures of central tendency). . . . .	9
2.1.1. Вибіркове середнє. . . . .	9
2.1.2. Вибіркова медіана. . . . .	10
2.1.3. Вибіркова мода. . . . .	11
2.2. Міри розсіювання (Measure of dispersion) . . . . .	12
2.2.1. Розмах вибірки (range). . . . .	12
2.2.2. Середнє абсолютне відхилення (mean absolute error). . . . .	12
2.2.3. Вибіркова дисперсія (variance). . . . .	13
2.2.4. Стандартне відхилення (standard deviation). . . . .	14
2.2.5. Коефіцієнт варіації (coefficient of variation). . . . .	14
2.3. Міри позиції. . . . .	15
2.3.1. Квантиль. . . . .	15
2.3.2. Процентиль. . . . .	16
2.4. Міри форми. . . . .	17
2.4.1. Вибірковий момент. . . . .	17
2.4.2. Коефіцієнт асиметрії (skewness). . . . .	17
2.5. Коефіцієнт асиметрії Пірсона. . . . .	18
2.5.1. Коефіцієнт ексцесу (kurtosis). . . . .	18

<b>3. Властивості вибірових характеристик.</b>	<b>19</b>
3.1. Емпірична функція розподілу. Властивості. . . . .	19
3.2. Властивості вибірових моментів. . . . .	21
<b>4. Точкові оцінки параметрів Г.С.</b>	<b>23</b>
4.1. Методи побудови точкових оцінок. . . . .	23
4.1.1. Метод моментів. . . . .	23
4.1.2. Метод максимальної вірогідності (MLE). . . . .	23
4.2. Властивості оцінок. . . . .	24
4.2.1. Незміщеність(unbiasedness). . . . .	24
4.2.2. Консистентність. . . . .	24

# Собственно, матстат...

## 1. Описова статистика.

### 1.1. Основні поняття математичної статистики.

- **Математична статистика** – це розділ математики, в якому вивчаються методи збору, систематизації та обробки інформації з метою виявлення існуючих закономірностей.

У математичній статистиці набір даних розглядається як реалізація або спостереження деякої випадкової величини (в.в.)  $\xi$ , яка визначена на деякому ймовірнісному просторі  $(\Sigma, \mathcal{F}, P)$ , пов'язаний із стохастичним експериментом.

- **Генеральна сукупність** (population) – це (як правило, невідомий) ймовірнісний розподіл  $\mathcal{F}$  в.в.  $\xi$ , що спостерігається (ймовірнісна міра  $P$ )
- **Вибірка** (sample) – це набір незалежних в.в.  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , кожна з яких має розподіл  $\mathcal{F}$ . При цьому  $n$  називається об'ємом вибірки.
- **Реалізація вибірки** – це значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$  або  $\vec{x} = [x_1 \ \dots \ x_n]$ , які прийняли в.в.  $\xi_1, \dots, \xi_n$  в результаті конкретного стохастичного експерименту. При цьому  $x_k$  називається **варіантою**. Тобто:

$(\Sigma, \mathcal{F}, P)$		Вибірка: $(\xi_1, \dots, \xi_n)$
$\omega_o \in \Sigma$	$x_1 = \xi_1(\omega_o) , \ \dots , \ x_n = \xi_n(\omega_o)$	Реал. вибірки: $(x_1, \dots, x_n)$

Основою будь-яких висновків щодо властивостей г.с.  $\mathcal{F}$  є **вибірковий метод**, суть якого полягає в тому, що властивості в.в.  $\xi$  визначаються шляхом вивчення цих властивостей на випадковій вибірці. Множина всіх реалізацій  $S$  вибірки  $x_1, \dots, x_n$  називається **вибірковим простором**.

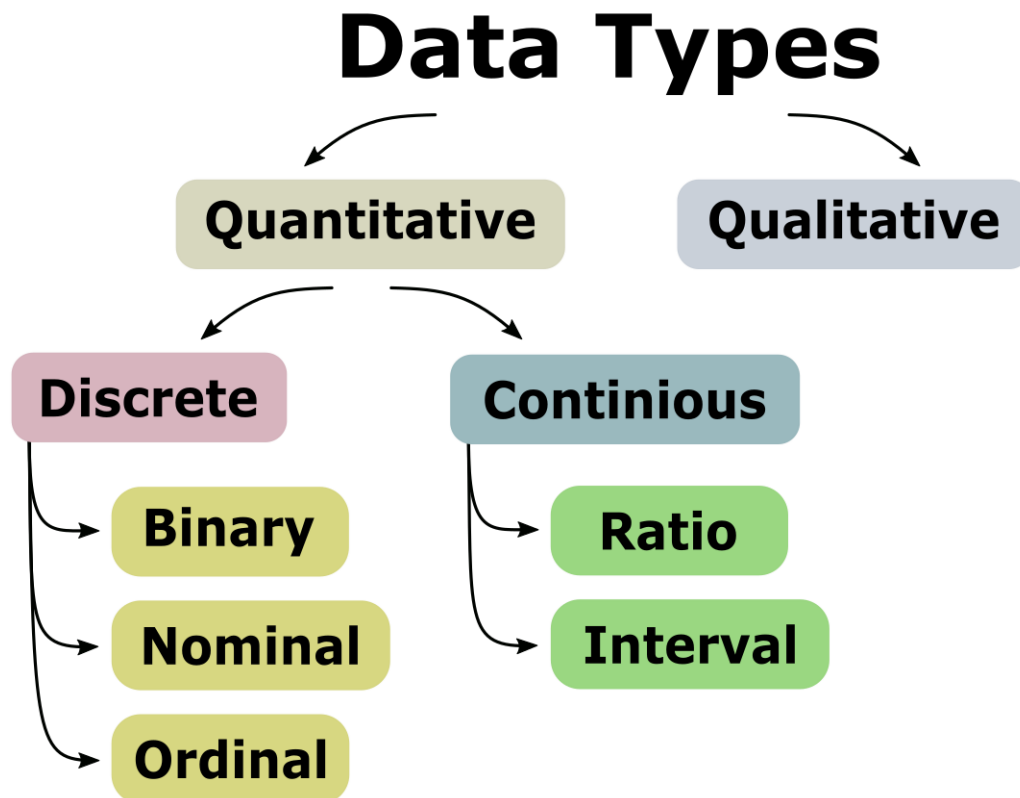
- Пара  $(S, \mathcal{F})$  називається **статистичною моделлю** опису серії спостережень, які породжують вибірку.
- Якщо розподіл  $\mathcal{F}_\xi$  відомий з точністю до невідомого вектора параметрів  $\vec{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_q \end{bmatrix}$  з множиною значень  $\Theta (\vec{\theta} \in \Theta)$ , тоді статистичну модель називають **параметричною моделлю**, а множину  $\Theta$  - параметричною множиною.
- **Статистикою** (або вибірковою характеристикою) називається довільна борелева функція  $g(\vec{\xi}) = g(\xi_1, \dots, \xi_n)$  від елементів вибірки. Розподіл цієї в.в. називається **вибірковим розподілом**, а значення  $g(\vec{x})$  статистики за реалізацією  $\vec{x}$  - **вибірковим значенням**.

Статистичну модель називають неперервною або дискретною, якщо розподіл г.с.  $\mathcal{F}_\xi$  є неперервним або дискретним.

- **Описова статистика** (або дескриптивна статистика, англ. descriptive statistics) – це розділ статистики, що займається обробкою емпіричних даних, їх систематизацією та наочним представленням у вигляді графіків та таблиць.
- **Статистичні виводи** (англ. inferential statistics) – це розділ статистики, що займається вивченням зв'язків між вибірковими даними та г.с., з яких вона отримана.

Зокрема, статистичні виводи займаються відповіддю на питання, які висновки можна зробити щодо г.с. (функція розподілу, щільність або закон розподілу, числові характеристики такі як математичне сподівання, дисперсія, моменти в.в., тощо) за вибіркою.

## 1.2. Типи даних.



- **Кількісні дані** використовують чисельні значення для опису об'єкта, що нас цікавить.
  - **Дискретні дані** відповідають вибірці з дискретного розподілу г.с. Дискретні дані зазвичай є цілими числами, хоча можуть задаватись і десятковими дробими. Їх особливістю є те, що вони мають "пробіли" ("діри") у своїх можливих значеннях.
  - **Неперервні дані** відповідають вибірці з неперервного розподілу г.с. Неperервні дані приймають будь-які значення з певного діапазону і не мають стрибків
- **Якісні дані** використовують описові вирази для вимірювання або класифікації об'єкта, що нас цікавить.

### 1.3. Первинна обробка інформації.

- **Варіаційним рядом**  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  називаються елементи вибірки, які впорядковані за зростанням. При цьому:

$$x_{(1)} = \min_{1 \leq k \leq n} x_k \quad x_{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} x_k$$

$x_k$  називається **порядковою статистикою порядку  $k$** .

Процес впорядкування вибірки називається **”ранжуванням”**.

**Розмах вибірки**  $R$  — різниця між найбільшим та найменшим елементами, тобто:

$$R = x_{(n)} - x_{(1)}$$

Нехай розподіл г.с.  $\mathcal{F}$  є дискретним. Тоді нехай  $x_1^*, \dots, x_m^*$  — елементи вибірки, впорядковані за зростанням, причому кожне значення вказується лише один раз,  $n_k$  — число разів появи  $x_k^*$  в реалізації вибірки.  $n_k$  називається **частотою** появи  $x_k^*$ .

Зауважимо, що  $n_1 + \dots + n_m = n$ .

Сума частот елементів  $\sum_{i=1}^k x_i^*$  називається **кумулятивною частотою**  $n_k^*$ :

$$n_k^* = n_1 + \dots + n_k$$

Величина  $\nu_k = \frac{n_k}{n}$  називається **відносною частотою**.

Сума відносних частот елементів  $\sum_{i=1}^k \nu_i$  називається **кумулятивною відносною частотою** елементу  $x_k^*$ .

### 1.3.1. Статистичний ряд.

На основі вказаних вище характеристик можна побудувати **статистичний ряд**:

Значення $(x_k^*)$	Частоти $(n_k)$	Кумулятивні частоти $(n_k^*)$	Відносні частоти $(\nu_k)$	Кумулятивні відносні частоти $(\nu_k^*)$
$x_1^*$	$n_1$	$n_1^*$	$\nu_1 = \frac{n_1}{n}$	$\nu_1^*$
$x_2^*$	$n_2$	$n_2^* = n_1 + n_2$	$\nu_2 = \frac{n_2}{n}$	$\nu_2^*$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_m^*$	$n_m$	$n_m^* = \sum_{i=1}^m n_i = n$	$\nu_m = \frac{n_m}{n}$	$\nu_m^* = \sum_{i=1}^m \nu_i = 1$

Якщо розподіл г.с. є неперервною або дискретною з великою кількістю значень, тоді використовують **інтервальний статистичний ряд**.

Область, в якому лежать всі значення реалізації вибірки розбивають на **m класів**:

$$\Delta_1 = [y_0, y_1), \dots, \Delta_m = [y_{m-1}, y_m]$$

Кількість класів зазвичай варіюється в межах 5 - 20. Іноді, для визначення кількості класів використовують **формулою Стреджеса**:

$$m - 1 = \log_2 n$$

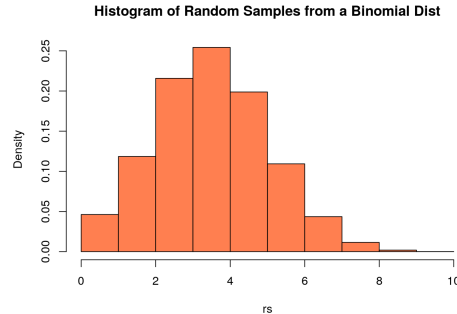
*Зауваження.* Реалізація вибірки може містити так звані **викиди**. У випадку наявності викідів або великої порожніх класів на початку або в кінці вибірки, доцільно використовувати при розбитті класи з відкритими кінцями (клас, що має лише нижню або верхню межу).

*Зауваження.* В деяких випадках спостереження можуть надаватись не як індивідуальні значення, а вже розподілені по інтервалах тобто у вигляді інтервального статистичного розподілу. В цьому випадку дані називаються **групованими**.

## 1.4. Графічні методи представлення інформації.

### 1.4.1. Гістограма.

Якщо розподіл г.с. є неперервним, гістограма будується на основі інтервального статистичного розподілу г.с. наступним чином: будують систему координат таку, що на осі абсцис будуть відображатися інтервали  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ , а на осі ординат відповідні частоти.



Далі будують у вказаній системі координат прямокутники з основами  $\Delta_k, k \in \overline{1, m}$ , та відповідними висотами  $n_k$ .

Також використовують гістограму відносних частот, в якій висота стовпців визначається за формулою:

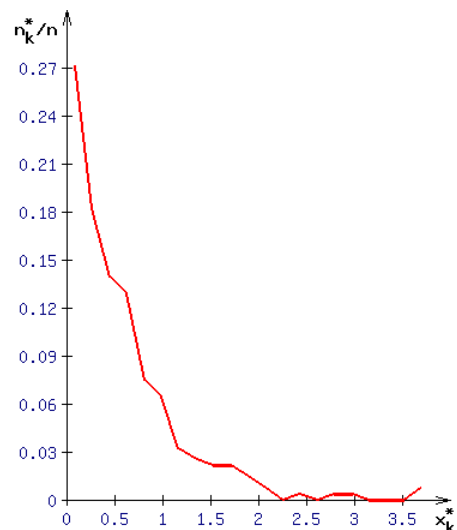
$$h_k = \frac{\nu_k}{l(\Delta_k)}$$

Зауважимо, що в цьому випадку площа отриманої фігури буде дорівнювати 1.

### 1.4.2. Полігон частот.

Якщо розподіл г.с. є дискретним, тоді полігон частот будується на основі статистичного розподілу г.с. наступним чином: будують систему координат таку, що на осі абсцис будуть відображатися елементи вибірки  $x_1^*, \dots, x_m^*$ , а на осі ординат відповідні частоти.

Далі у вказаній системі координат будують точки  $M_k(x_k^*, n_k), k = \overline{1, m}$ , які з'єднують між собою у ламану  $M_1 M_2 \dots M_m$





## 2. Дискриптивні міри.

Графічні методи є чудовим способом для отримання швидкого огляду вибірових даних, але вони не є точними та не призводять самі по собі до наступних досліджень. Для цього нам потрібно введення числових параметрів таких як, наприклад, середнє.

Існують різні шляхи, за допомогою яких ми можемо спробувати описати розподіл. Розглянемо деякі з них, які корисні при описі гістограми або полігона частот.

Надалі, нехай  $x_1, \dots, x_n$  реалізація вибірки з г.с.  $\mathcal{F}$ .

### 2.1. Міри центральної тенденції (measures of central tendency).

#### 2.1.1. Вибіркове середнє.

Вибіркове середнє  $\bar{x}$  є одним із найбільш відомих параметрів центральної тенденції і знаходиться за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

*Зауваження.* Вказана формула може бути використана лише у випадку, коли всі індивідуальні значення  $x_j$  є відомими.

Якщо ж відносно вибірки є відомим лише розбиття спостережень на класи ( $\Delta_i$ ) та частота попадань елементів вибірки у кожен з цих інтервалів ( $n_i$ ). В цьому випадку групованих даних можна використовувати наступну формулу:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i x_i^* = \sum_{i=1}^m \nu_i x_i^*$$

### 2.1.2. Вибіркова медіана.

Однією із вад вибіркового середнього воно дає нерепрезентативні результати, оскільки є чутливим до викидів у вибірці та симетрії. Тому іноді є більш привабливим використання інших параметрів. Наприклад, **вибіркової медіани**.

Нехай у вибірці відомі всі індивідуальні спостереження. Будуємо варіаційний ряд:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

Знаходимо медіану як середній елемент цього варіаційного ряду  $M_e^*$ :

$$M_e^* = \begin{cases} x_{(k+1)}, & n = 2k + 1; \\ \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}, & n = 2k; \end{cases}$$

Якщо вибірка представлена групованими даними, тоді вибіркова медіана розраховується наступним чином:

- 1) Знаходимо клас (позначимо його номер  $me$ ), що буде містити елемент, який відповідає медіані, тобто:

$$n_{me-1}^* < \frac{n}{2} \quad n_{me}^* \geq \frac{n}{2}$$

- 2) Елемент знайденого класу, що буде відповідати медіані, обчислюємо за наступною формулою:

$$M_e^* = y_{me-1} + (y_{me} - y_{me-1}) \frac{\frac{n}{2} - n_{me}^*}{n_{me}}$$

Зазначимо, що дріб у правій частині останньої рівності вказує нам, яку частину інтервалу ми маємо пройти, щоб дійти до медіани.

### 2.1.3. Вибіркова мода.

**Вибіркова мода**  $M_o^*$  — це елемент вибірки, який зустрічається частіше за все.

У випадку групованих даних визначення більш складне. Клас (позначимо його номер  $mo$ ), який має найбільшу частоту, називається **модальним**, причому при розбитті на інтервали, вони мають бути однакової ширини.

Значення моди знаходиться за формулою:

$$M_o^* y_{mo-1} + (y_{mo} - y_{mo-1}) \frac{n_{mo} - n_{mo-1}}{(n_{mo} - n_{mo-1}) + (n_{mo} - n_{mo+1})}$$

*Зауваження.* Вказані три параметри центральної тенденції дають різну інформацію. Але якщо розподіл симетричний, то вони будуть давати приблизно однакові значення.

## 2.2. Міри розсіювання (Measure of dispersion)

При розгляді двох різних розподілів, вони можуть мати однакові або дуже близькі середні, але при цьому суттєво відрізнятись. Наприклад, при порівнянні рівня добробуту двох країн: у них може бути дуже близькими середній добробут по країні, але в одній країні всі отримують приблизно однаковий рівень достатку, а в іншій можуть екстремальні значення великого достатку та злиденного. Параметри розсіювання як раз і потрібні для відокремлення таких випадків.

### 2.2.1. Розмах вибірки (range).

Розмах вибірки є найпростішою мірою розсіювання, який обчислюється як різниця між найбільшим та найменшим спостереженням даної вибірки:

$$R = x_{(n)} - x_{(1)}$$

### 2.2.2. Середнє абсолютне відхилення (mean absolute error).

Якщо відомо математичне сподівання розподілу  $\mathcal{F}$ ,  $\mathbb{E}\xi_j = \mu$ , тоді середнє абсолютне відхилення розраховується наступним чином:

- Якщо дані не груповані, то:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |x_j - \mu|$$

- Якщо дані груповані, то:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j |x_j^* - \mu| = \sum_{j=1}^m \nu_j |x_j^* - \mu|$$

Якщо ж математичне сподівання не відомо, то  $\mu$  у формулах змінюється на  $\bar{x}$ .

### 2.2.3. Вибіркова дисперсія (variance).

Найбільш корисним параметром розсіювання є **вибіркова дисперсія**. Вона є середнім квадратів відхилень елементів вибірки від середнього значення.

Якщо  $\mathbb{E}\xi_j = \mu$ , тоді вибіркова дисперсія розраховується наступним чином:

- 1) Якщо дані не груповані, то:

$$\sigma_*^2 = \mathbb{D}_\xi^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2$$

- 2) Якщо дані груповані, то:

$$\sigma_*^2 = \mathbb{D}_\xi^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i (x_i^* - \mu)^2$$

Якщо ж  $\mathbb{E}\xi_j$  не відомо, тоді розглядають або **вибіркову дисперсію**.

- 1) Якщо дані не груповані, то:

$$s^2 = \mathbb{D}_\xi^{**} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$$

- 2) Якщо дані груповані, то:

$$s^2 = \mathbb{D}_\xi^{**} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i (x_i^* - \bar{x})^2$$

Або **виправлену (незміщену) вибіркову дисперсію**.

- 1) Якщо дані не груповані, то:

$$s_0^2 = \mathbb{D}_\xi^{***} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$$

- 2) Якщо дані груповані, то:

$$s_0^2 = \mathbb{D}_\xi^{***} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m n_i (x_i^* - \bar{x})^2$$

#### 2.2.4. Стандартне відхилення (standard deviation).

Оскільки при знаходженні дисперсії ми підносимо відхилення до квадрату, то не зовсім зрозумілим є одиниці вимірювання дисперсії. Тому природньо взяти від цього виразу корінь квадратний.

Таким чином, ми отримуємо величину, рівну корню квадратному від вибіркової дисперсії, яка називається **стандартним відхиленням** і задається виразом:

$$\sigma_{\xi}^{*,**,***} = \sqrt{\mathbb{D}_{\xi}^{*,**,***}}$$

#### 2.2.5. Коефіцієнт варіації (coefficient of variation).

**Коефіцієнт варіації** (відносне стандартне відхилення) визначається, як процентне відношення стандартного відхилення до вибіркового середнього.

$$C_V = \frac{s_0}{x} \cdot 100\%$$

*Зауваження.* Він є відносним показником розсіювання(мінливості) ознаки(вибірки) по відношенню до середнього показника вибірки. (Може використовуватися лише для відносного рівня вимірювання). Використання коефіцієнта варіації є суттєвим лише при вивченні ознаки, яка має **додатне значення**.

## 2.3. Міри позиції.

Міри позиції є індикаторами, як окрема величина співвідноситься з іншими.

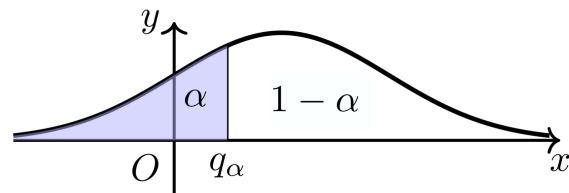
### 2.3.1. Квантиль.

Нехай  $\alpha \in (0, 1)$ .  **$\alpha$ -квантилем** в.в.  $\xi$  називається таке число  $q_\alpha \in \mathbb{R}$ , що:

$$\mathbb{P}\{\xi \leq q_\alpha\} \geq \alpha \qquad \mathbb{P}\{\xi \geq q_\alpha\} \geq 1 - \alpha$$

Зауважимо, що для неперервних в.в.  $\alpha$ -квантиль однозначно знаходиться з рівняння:

$$F(q_\alpha) = \alpha$$



де  $F$  - функція розподілу в.в.  $\xi$ .

Знайдемо, як слід шукати вибіркові значення квантилів. Якщо у вибірці відомі всі індивідуальні спостереження. Побудуємо варіаційний ряд:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

Елемент, що буде відповідати  $\alpha$ -квантилю цього варіаційного ряду:

$$q_\alpha = \begin{cases} x_{(|K|+1)}, & K = n \cdot \alpha \notin \mathbb{Z}; \\ \frac{x_{(K)} + x_{(K+1)}}{2}, & K = n \cdot \alpha \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

Для групованих даних  $\alpha$ -квантиль  $q_\alpha$  визначається наступним чином:

- 1) Знаходимо клас (позначимо його номер  $K_\alpha$ ), що буде містити  $\alpha$ -квантиль, тобто:

$$n_{K_\alpha-1}^* < n \cdot \alpha \qquad n_{K_\alpha}^* \geq n \cdot \alpha$$

де  $n_i^*$  — кумулятивна частота  $i$ -го класу;

2) Обчислюємо значення  $\alpha$ -квантиля за наступною формулою:

$$q_\alpha = y_{K_\alpha-1} + (y_{K_\alpha} - y_{K_\alpha-1}) \frac{\alpha \cdot n - n_{K_\alpha-1}^*}{n_{K_\alpha}}$$

де  $y_{K_\alpha-1}, y_{K_\alpha}$  — відповідно нижня та верхня межі класу, який містить квантиль,  $n_{K_\alpha}$  — частота класу, який містить квантиль.

### 2.3.2. Процентиль.

**$p$ -процентилем** (percentile) називається величина  $P_p$ , яка співпадає з квантилем порядку  $\alpha = \frac{p}{100}$  тобто:

$$P_p = q_{\frac{p}{100}}$$

**Квартилями (quartile)** називають процентиля кратно 25-ти:

- $Q_1 = P_{25}$  — нижній квартиль;
- $Q_2 = P_{50} = M_e$  — медіана;
- $Q_3 = P_{75}$  — верхній квартиль;

**Децилями (decile)** називають процентиля кратно 10-ти:

$$D_1 = P_{10}, D_2 = P_{20}, \dots, D_9 = P_{90}$$

**Міжквартильним діапазоном (interquartile range)** називають величину:

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

Помітимо, що міжквартильний діапазон є мірою розсіювання. Його недоліком є те, що він вимірює розкид в середині даних, а не по всій множині.



## 2.4. Міри форми.

Міри форми – є індикаторами симетричності та ”згладженості” даних.

### 2.4.1. Вибірковий момент.

**Вибірковим моментом** k-го порядку називається величина:

$$\bar{x}^k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^k$$

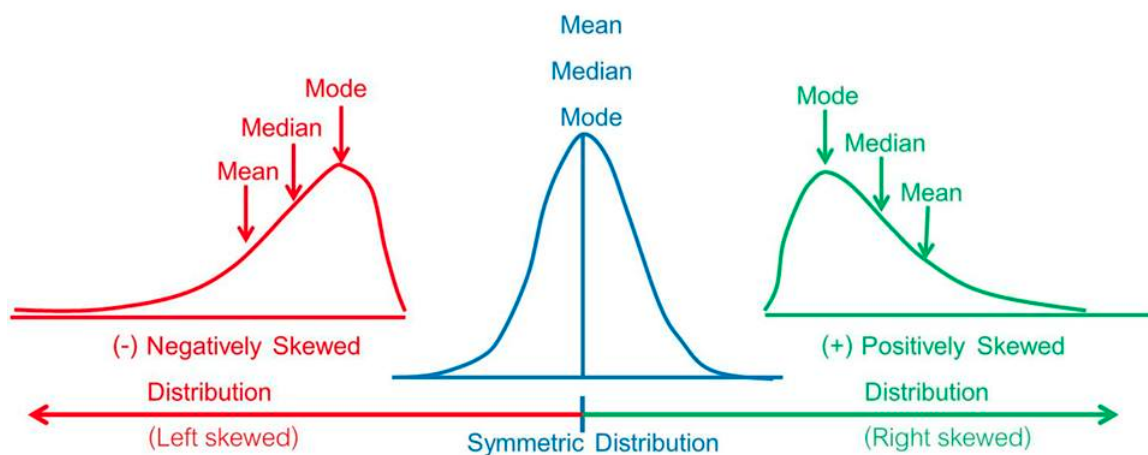
**Вибірковим центральним моментом** k-го порядку називається величина:

$$\bar{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^k$$

### 2.4.2. Коефіцієнт асиметрії (skewness).

**Коефіцієнтом асиметрії** називається число:

$$A_S = \frac{\bar{\mu}_3}{s_0^3}$$



Коефіцієнтом асиметрії характеризує **міру скошеності розподілу** даних щодо вибіркового середнього:

- $As = 0$  – дані симетричні щодо середнього;
- $As > 0$  – дані мають правосторонню асиметрію;
- $As < 0$  – дані мають лівосторонню асиметрію.

## 2.5. Коефіцієнт асиметрії Пірсона.

**Коефіцієнтом асиметрії Пірсона** називається число:

$$Sk = \frac{\bar{x} - M_0}{s_0}$$

Недоліком коефіцієнта асиметрії Пірсона полягає в тому, що він враховує лише центральну частину розподілу.

### 2.5.1. Коефіцієнт ексцесу (kurtosis).

**Коефіцієнтом ексцесу** називається число:

$$Ek = \frac{\overline{\mu^4}}{s_0^4} - 3$$

яке характеризую міру "гостровершинності" розподілу даних у порівнянні із нормальним розподілом:

- $Ek = 0$  – розподіл даних близький до нормального;
- $Ek > 0$  – розподіл даних більш "гостровершинний" ніж нормальний розподіл;
- $Ek < 0$  – розподіл даних більш "пласковершинний" ніж нормальний розподіл.

### 3. Властивості вибірових характеристик.

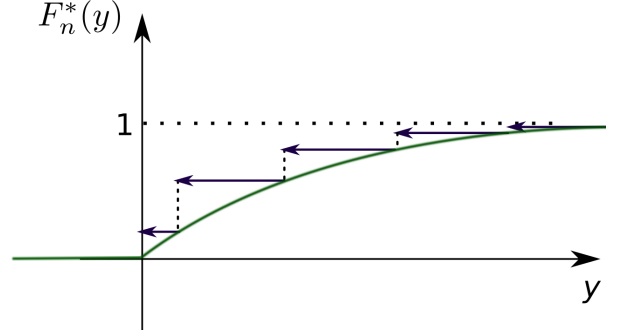
#### 3.1. Емпірична функція розподілу. Властивості.

Емпіричною функцією розподілу, побудованою за вибіркою  $\xi_1, \dots, \xi_n$  об'єму  $n$ , називається випадкова функція:

$$F_n^* : \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow [0, 1]$$

при кожному  $y \in \mathbb{R}$  рівна:

$$F_y^*(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I} \{ \xi_i < y \}$$



Із збільшенням кількості спостережень, емпірична функція розподілу наближається до теоретичної функції розподілу г.с. Зазначимо її основні властивості.

**Теорема 3.1** (Консистентність). Нехай  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – вибірка з розподілу  $\mathcal{F}$  з ф.р.  $F$  та нехай  $F_n^*$  – емпірична ф.р., яку побудовано по цій вибірці. Тоді,  $\forall y \in \mathbb{R}$  :

$$F_n^*(y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{м.н.}} F(y)$$

*Доведення.* За означенням:

$$F_n^*(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(\xi_i < y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{м.н.}} \underbrace{\mathbb{E} \mathbb{I} \{ \xi_i < y \}}_{=F_\xi(y)}$$

Оскільки індикатори подій  $\{ \xi_1 < y \}, \{ \xi_1 < y \}, \dots, \{ \xi_n < y \}$  є незалежними й однаково розподіленими, їх математичне сподівання скінчено:

$$\mathbb{E} \mathbb{I} \{ \xi_1 < y \} = 1 \cdot \mathbb{P} \{ \xi_1 < y \} + 0 \cdot \mathbb{P} \{ \xi_1 \geq y \} = \mathbb{P} \{ \xi_1 < y \} = F(y)$$

Застосовуючи посилений ЗВЧ :  $F_n^*(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I} \{ \xi_i < y \} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E} \mathbb{I} \{ \xi_1 < y \} = F_\xi(y)$

■

**Теорема 3.2** (Глівенко-Кантеллі). В умовах теореми 3.1:

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |F_n^*(y) - F(y)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{м.н.}} 0$$

Без доведення ■.

**Теорема 3.3** (Колмогорова). Нехай  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – вибірка з неперервною ф.р.  $F \in C^1(\mathbb{R})$ , а  $F_n^*$  – емпірична ф.р. **Тоді:**

$$\sqrt{n} \sup_{y \in \mathbb{R}} |F_n^*(y) - F(y)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \eta,$$

де в.в.  $\eta$  має розподіл Колмогорова з неперервною ф.р.:

$$F_K(y) = \begin{cases} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2 y^2}, & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Без доведення ■.

Нехай  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – вибірка з розподілу  $\mathcal{F}$  з функцією розподілу  $F$ , а  $F_n^*(y)$  – емпірична функція розподілу. Тоді для довільного  $y \in \mathbb{R}$ :

- 1)  $\mathbb{E}F_n^*(y) = F(y)$  (незміщеність оцінки);
- 2)  $\mathbb{D}F_n^*(y) = \frac{F(y)(1 - F(y))}{n}$ ;
- 3)  $\sqrt{n}(F_n^*(y) - F(y)) \implies N(0, F(y)(1 - F(y)))$  при  $F(y) \neq 0, 1$ ;
- 4) величина  $nF_n^*(y)$  має біноміальний розподіл  $B(n, F(y))$ .

*Доведення.* Помітимо, що  $\mathbb{I}\{\xi_1 < y\}$  має розподіл Бернуллі  $B(F(y))$ , а тому:

$$\mathbb{E}\mathbb{I}\{\xi_1 < y\} = F(y) \qquad \mathbb{D}\mathbb{I}\{\xi_1 < y\} = F(y)(1 - F(y))$$

Оскільки, крім того  $\mathbb{I}\{\xi_1 < y\}, \mathbb{I}\{\xi_2 < y\}, \dots$  є незалежними, то:

$$nF_n^*(y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{\xi_i < y\} \sim B(n, F(y)) \implies (\text{властивість 4})$$

Властивості 1, 2 випливають з 4-ї. Для доведення 3-ї використаємо ЦГТ:

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(F_n^* - F(y)) &= \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{\xi_i < y\} - nF(y)}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{\xi_i < y\} - n\mathbb{E}\mathbb{I}(\xi_1 < y)}{\sqrt{n}} \implies \\ &\implies N(0, \mathbb{D}\mathbb{I}\{\xi_1 < y\}) = N(0, F(y)(1 - F(y))) \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

### 3.2. Властивості вибірових моментів.

Нехай  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — вибірка з розподілу  $\mathcal{F}$ . Тоді:

- 1) Якщо  $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$ , то  $\mathbb{E}\bar{\xi} = \mathbb{E}\xi_1 = a$  — незміщеність  $\bar{\xi}$ ;
- 2) Якщо  $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$ , то  $\bar{\xi} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}\xi_1 = a$  — консистентність  $\bar{\xi}$ ;
- 3) Якщо  $\mathbb{D}\xi_1 < \infty, \mathbb{D}\xi_1 \neq 0$ , то  $\sqrt{n}(\bar{\xi} - \mathbb{E}\xi_1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(0, \mathbb{D}\xi_1)$

*Доведення.*

- Властивість 1 випливає із властивостей математичного сподівання.
- Доведення 2 та 3 випливає безпосередньо із застосування ЗВЧ Хінчина та ЦГТ, відповідно.

■

Вибірковий  $k$ -й момент  $\bar{\xi}^k$  є незміщеною, консистентною та асимптотично нормальною для теоретичного  $k$ -го моменту. Нехай  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – вибірка з розподілу  $\mathcal{F}$ . Тоді:

- 1) Якщо  $\mathbb{E}|\xi_1|^k < \infty$ ,  $\mathbb{E}\bar{\xi}^k = \mathbb{E}\xi_1^k = m_k$ ;
- 2) Якщо  $\mathbb{E}|\xi_1|^k < \infty$ , то  $\bar{\xi}^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}\xi_1^k$ ;
- 3) Якщо  $\mathbb{D}\xi_1^k < \infty$ ,  $\mathbb{D}\xi_1^k \neq 0$ , то  $\sqrt{n}(\bar{\xi}^k - \mathbb{E}\xi_1^k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(0, \mathbb{D}\xi_1^k)$

Вибіркові дисперсії мають наступні властивості:

Нехай  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – вибірка з розподілу  $\mathcal{F}$  та  $\mathbb{D}\xi_1 < \infty$ . Тоді:

- 1)  $\mathbb{E}s^2 = \frac{n-1}{n}\mathbb{D}\xi_1 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$ ,  $\mathbb{E}s_0^2 = \mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2$ ;
- 2)  $s^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2$ ,  $s_0^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2$ ;

## 4. Точкові оцінки параметрів Г.С.

Нехай є генеральна сукупність  $\mathcal{F}$  випадкової величини  $\xi$  з відомим розподілом, але невідомим вектором параметрів  $\vec{\theta} = [\theta_1 \ \dots \ \theta_n]$ .

**Оцінка  $\theta^*$**  параметру  $\theta$  — деяка статистика, значення якої "близькі" до  $\theta$ :

$$\theta_n^* = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad \theta \approx \theta^*(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

### 4.1. Методи побудови точкових оцінок.

#### 4.1.1. Метод моментів.

Нехай є генеральна сукупність  $\mathcal{F}$  випадкової величини  $\xi$ , яка має характеристики:

**Теоретичні**  $(\mathbb{E}\xi, \mathbb{D}\xi, \mathbb{E}\xi^k, \dots)$  та **Вибіркові**  $(\bar{\xi}, \mathbb{D}_{\xi}^{*,**,***})$

Ідея методу моментів – прийняти вибіркові значення характеристик за теоретичні.

#### 4.1.2. Метод максимальної вірогідності (MLE).

Нехай  $\mathcal{F}$  – дискретна генеральна сукупність. Маємо:  $\xi_1, \dots, \xi_n \xrightarrow{\text{реалізація}} x_1, \dots, x_n$ .

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \theta) = \mathbb{P} \{ \xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n \} \text{ — Likelihood function.}$$

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \theta) = |\mathbb{L}| = \prod_{i=1}^n \mathbb{P} \{ \xi_i = x_i \} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{\theta} \{ \xi = x_i \} \xrightarrow{\theta} \max$$

Надалі максимізуємо вираз, застосувавши властивість монотонності логарифма:

$$\ln \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln \mathbb{P}_{\theta} \{ \xi = x_i \} \xrightarrow{\theta} \max$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \mathbb{P}_{\theta} \{ \xi = x_i \} = 0 \implies \theta^*$$

Нехай  $\mathcal{F}$  – неперервна генеральна сукупність. Маємо щільність розподілу вибірки:

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \theta) = f_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = |\mathbb{L}| = \prod_{i=1}^n f_{\xi_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n f_{\xi}(x_i)$$

Скористалися однаковою розподіленістю величин  $\xi_1, \dots, \xi_n$  з щільністю  $f_{\xi}(x)$ .

Надалі пошук оцінки  $\theta^*$  аналогічно до дискретного випадку.

## 4.2. Властивості оцінок.

### 4.2.1. Незміщеність(unbiasedness).

Означення.  $\theta^*$  — **незміщена** оцінка параметру  $\theta$ , якщо  $\mathbb{E}\theta^* = \theta$ .

Означення.  $\theta_n^*$  — **асимптотично незміщена** оцінка параметру  $\theta$ , якщо:

$$\mathbb{E}\theta_n^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$$

### 4.2.2. Консистентність.

Означення.  $\theta_n^*$  називається **консистентною** оцінкою параметра  $\theta$ , якщо:

$$\theta_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta \quad \text{— слабка} \qquad \theta_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{м.н.}} \theta \quad \text{— сильна}$$

Як перевіряти консистентність?

1) За (посиленим, якщо у сенсі м.н.) законом великих чисел.

2) За означенням збіжності ( $\mathbb{P}$ , м.н.).

3) **Лема.** Для  $\theta_n^*$ :  $\begin{cases} \text{(Асимптотично) незміщена.} \\ \mathbb{D}\theta_n^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{cases} \implies \theta_n^* \text{ — слабо консистентна.}$

Доведення.

$$\begin{cases} \mathbb{E}\theta_n^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta; \\ \mathbb{D}\theta_n^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{cases} \implies \left| \begin{array}{c} \text{За критерієм} \\ \mathbb{L}_2\text{-збіжності до } const \end{array} \right| \implies \theta_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{L}_2} \theta \implies \theta_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta$$

■