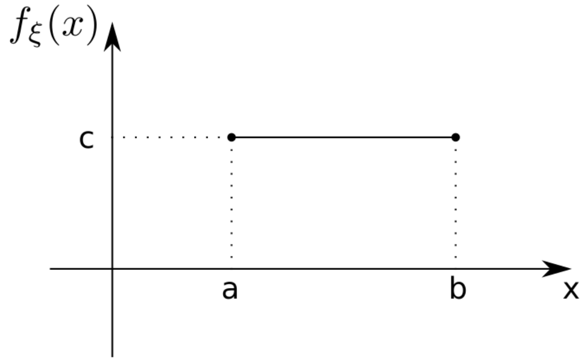
Собственно, теорвер...

Зміст

1. Абсолютно неперервні розподіли.

1.1. Рівномірний розподіл.

Рівномірний розподіл на $[a, b]$. Графік функції щільності розподілу:



Позначення: $\xi \sim U(a, b)$. Функція щільності має наступній вигляд:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c, x \in [a, b] \\ 0, x \notin [a, b] \end{cases}, \text{ де } c = \frac{1}{b-a}$$

Визначимо функцію розподілу:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; a] \\ \int\limits_a^t f_\xi(t)dt = \frac{1}{b-a}x - \frac{a}{a-b} = \frac{x-a}{b-a}, x \in (a, b] \\ 1, x \in (b; +\infty) \end{cases}$$

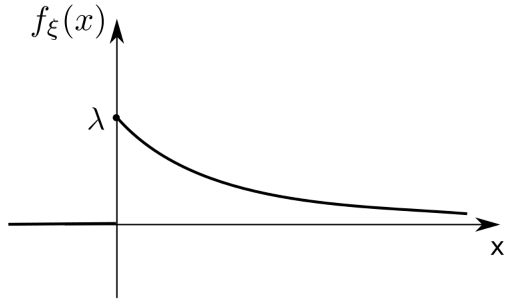
Числові характеристики:
$\mathbb{E}\xi = \int\limits_a^b x f_\xi(x)dx = \frac{b^2-a^2}{2b-a} = \frac{a+b}{2}$
$\mathbb{E}\xi^2 = \int\limits_a^b x^2 f_\xi(x)dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$
$\mathbb{D}\xi = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$
Величини залежать лише від довжини проміжку.
Нехай $[c, b] \subset [a, b]$, тоді знайдемо:

$$\mathbb{P}\{\xi \in [c, d]\} = F_\xi(d) - F_\xi(c) = \frac{d-c}{b-a}$$

1.2. Експоненціальний розподіл.

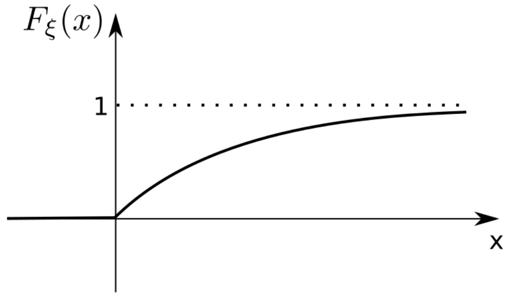
Розглядаємо $\xi \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$.
Щільність розподілу:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$



Запишемо функію розподілу:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0, \qquad x < 0 \\ F(0) + \int\limits_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$$



Знайдемо: $\mathbb{P}\left\{\xi \in [x, d]\right\} = (1 - e^{-\lambda x})\Big|_c^d = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.
Виведемо числові характеристики. Спочатку виведемо формулу $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{E}\xi^k$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k * f_\xi(x) dx = \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^k} * \Gamma(k+1) = \frac{k!}{\lambda^k}$$

Користуючись цією формулою, отримаємо числові характеристики розподілу:

$$\mathbb{E}\xi = (k = 1) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = (k = 2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{D}\xi = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Властивості Гамма-функції:

$$1.\Gamma(\alpha) = \int\limits_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$2.\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$3.\Gamma(\alpha+1) = \alpha * \Gamma(\alpha)$$

$$4.\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Експоненціальна величина описує час безвідмовної роботи приладу до моменту першої відмови. Це твердження не є повністю вірним. Чому?

Властивості експоненціального розподілу.
1. Відсутність післядії.

$$\xi \sim Exp(\lambda) \Rightarrow \begin{matrix} \forall t, h > 0 \\ \mathbb{P}\{\xi > t+h \big| \xi > t\} = \mathbb{P}\{\xi > h\} \end{matrix}$$

Доведення.

$$\mathbb{P}\{\xi > t+h \big| \xi > t\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi > t+h, \xi > t\}}{\mathbb{P}\{\xi > t\}} = \frac{\mathbb{P}\{\xi > t+h\}}{\mathbb{P}\{\xi > t\}} = \frac{e^{-\lambda(t+h) - e^{-\lambda\infty}}}{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda\infty}} =$$

$$= e^{-\lambda h} - e^{-\lambda\infty} = \mathbb{P}\left\{\xi > h\right\}$$

■

2. Стійкість відносно min.

$$\xi_1, \xi_2 ..., \xi_n \text{ - незалежні.} \begin{pmatrix} \xi_1 \sim Exp(\lambda_1) \\ \xi_2 \sim Exp(\lambda_2) \\ ... \\ \xi_n \sim Exp(\lambda_n) \end{pmatrix} \Rightarrow \min\left\{\xi_1, \xi_2, ., ., \xi_n\right\} \sim Exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$$

Доведення.

$$F_{min(\xi_1,...,\xi_n)}(x) = \mathbb{P}\left\{\min\left(\xi_1, ..., \xi_n\right) < x\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\min\left(\xi_1, ..., \xi_n\right) \geq x\right\} =$$

$$1 - \mathbb{P}\left\{\xi_1 \geq x, ..., \xi_n \geq x\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\xi_1 \geq x\right\} \cdot ... \cdot \mathbb{P}\left\{\xi_n \geq 1\right\} = 1 - e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{-\lambda_n x} =$$

$$= F_{Exp(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)}(x), x \geq 0$$

■

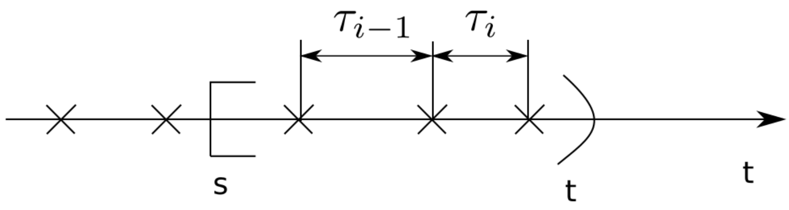
Використання: нехай є прилад, що складається з n блоків. Для коректної роботи приладу необхідно коректна робота всіх блоків.
Позначимо: ξ_i - час роботи блоку $i, i = 1, ..., n$.
Час роботи всього приладу: $\xi = \min\left\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right\}$.

Приклад. Прилад - 10 блоків. Кожний з них з ймовірністю 0.99 може пропрацювати 1000 годин. Знайти середній час роботи всього приладу та ймовірність того, що він пропрацює 500 год.
Розглянемо блок і-тий:
$\xi_i = Exp(\lambda_i)$.
$\mathbb{P}\left\{\xi_i \geq 1000\right\} = 0.99 = e^{-1000\lambda} \Longrightarrow \lambda = \frac{\ln 0.99}{-1000} \approx 10^{-5}$
$\mathbb{E}\xi_i = \frac{1}{\lambda} = 10^5$
Для всього приладу:
$\xi = \min\left\{\xi_1, ..., \xi_n\right\} \sim Exp(\sum_{i=1}^{10} \lambda_i) = Exp(10^{-4})$
$\mathbb{E}\xi = 10^4 \qquad \mathbb{P}\left\{\xi \geq 500\right\} = e^{-500 * 10^{-4}} = e^{-0.005} \approx 0.95$

3. Inter-arrival times dependency.

Теорема 1.1. Розглянемо потік Пуассона з інтенсивністю

$$\lambda \Rightarrow N(s,t) \sim Pois(\lambda(t-s))$$



τ_i- inter-arrival times. $\Rightarrow (\tau_i, i \in \mathbb{Z})-$ незалежні, та $Exp(\lambda)$.

1.3. Гаусівський (нормальний) розподіл.

Стандартний Гаусівський розподіл. Позначення:

$$\xi \sim N(0,1^2)$$

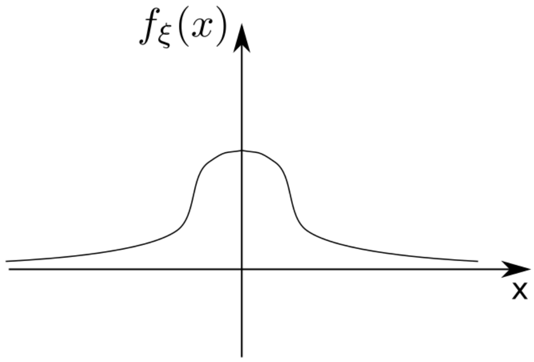
Щільність розподілу: $f_\xi(x) = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. З умови нормування та властивостей Гамма-функції:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 2C\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \begin{vmatrix} \dfrac{x^2}{2} = t \\ x = \sqrt{2t} \\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{2t}} \end{vmatrix} = 2C\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{t}} =$$

$$= \sqrt{2}C\int\limits_0^{\infty} t^{-1/2}e^{-t}dt = \sqrt{2}C\Gamma(1/2) = \sqrt{2\pi}C \Longrightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Остаточно,
щільність розподілу:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Знайдемо числові характеристики розподілу:
$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$ (Функція щільності парна)
$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} 2te^{-t} \frac{dt}{\sqrt{2t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} t^{1/2} e^{-t} dt =$
$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(3/2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = 1$
Для гаусівського розподілу: $N(a, \sigma^2)$, де $a = \mathbb{E}\xi \quad \sigma = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t) dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi(x)$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функція Лапласа aka **CDF** (cumulative distr. function).
$\xi \sim N(0, 1)$. Знайдемо $\mathbb{P}\{\xi \in [b, c]\}, \mathbb{E}\xi^k, k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\{\xi \in [b, c]\} = F_\xi(c) - F_\xi(b) = \Phi(c) - \Phi(b)$$

$$k = 2n, n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}\xi^k = \int\limits_{0}^{+\infty} x^k e^{-x^2/2} dx = \frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} t^{\frac{k-1}{2}} e^{-t} dt = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{(\pi)}} \Gamma(\frac{k+1}{2}) =$$

$$= \frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{k-1}{2} \cdot \frac{k-3}{2} \cdot ... \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(k-1)!!}{2^{\frac{k}{2}}} \cdot \sqrt{\pi} = (k-1)!!$$

$$\mathbb{E}\xi^k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} (k-1)!!, & k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2n+1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Перейдемо до загального гаусівського розподілу.
Загальний гаусівський розподіл.

Означення. Візьмемо, що $\xi_0 \sim N(0, 1)$ - стандартна гаусівська величина. ξ називається гаусівською величиною: $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, якщо $\xi = a + \sigma\xi_0$ - існує та справедливе перетворення стандартної гаусівської величини.

Числові характеристики гаусівського розподілу:
$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(a + \sigma\xi_0) = a$
$\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}(a + \sigma\xi) = \sigma^2 \mathbb{D}\xi = \sigma^2$
$F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\} = \mathbb{P}\{a + \sigma\xi < x\} = \mathbb{P}\left\{\xi_0 < \frac{x-a}{\sigma}\right\} = F_{\xi_0}(\frac{x-a}{\sigma}) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-a}{\sigma})$
$\mathbb{P}\{\xi \in [b, c]\} = F_\xi(c) - F_\xi(b) = \Phi(\frac{c-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{b-a}{\sigma})$

Знаючи $F_\xi(x)$ знайдемо вираз для щільності розподілу:

$$f_\xi(x) = F'\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\frac{x-a}{\sigma})^2/2} \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E_{N(a,\sigma^2)} = \frac{\mathbb{E}\left(\xi - \mathbb{E}\xi\right)^4}{\left(\mathbb{D}\xi\right)^2} - 3 = \left| \begin{matrix} \xi = a\sigma\xi_0 \\ \mathbb{E}\xi = a \end{matrix} \right| = \frac{\sigma^4 \mathbb{R}\xi_0^4}{\sigma^4} - 3 = \mathbb{E}\xi_0^4 - 3 = 0$$

Правило “3σ“. $\xi \sim (a, \sigma^2)$ Знайдемо: $\mathbb{P}\left\{|\xi - a| < 3\sigma\right\} =$
$= \mathbb{P}\left\{\xi \in (a - 3\sigma; a + 3\sigma)\right\} = \Phi(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma} - \Phi(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma})) = 2\Phi(3) \approx 0.9974$
Тобто, у багатьох практичних випадках, гаусівська величина відповідає нерівності $|\xi - a| < 3\sigma$ з великою вірогідністю.

Теорема 1.2 (Центральна гранична теорема)**.** Розглянемо $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - незалежні, мають однаковий розподіл. Якщо $\mathbb{E}\xi_i = 0$ та $\mathbb{D}\xi_1 = 1$:

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{\sqrt{n}} \underset{n \to \infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} N(0, 1)$$

Гаусівська випадкова величина добре описує результат дії великої кількості випадкових факторів, дія кожного з яких окремо є досить малою.

2. Випадкові вектори

Розглядаємо:

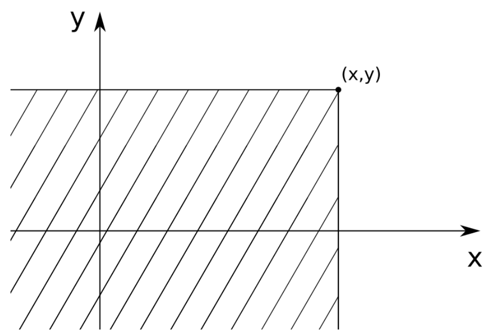
$$\vec{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

Означення. Випадковий вектор - система випадкових величин $\xi_1 ... \xi_n$, що задані на спільному ймовірністному просторі $(\Omega, F, \mathbb{P})$.

Функція розподілу: $F_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_n) = \mathbb{P}\left\{\xi_1 < x_1, ..., \xi_n < x_n\right\}$.

$$\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

$$F_{\overline{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\left\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\right\}$$



2.1. Властивості функції розподілу.

1. $F_{\bar{\xi}}(x,y) \in [0,1] \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
2. $F_{\bar{\xi}}$ - неспадна для кожного аргументу. Тобто:

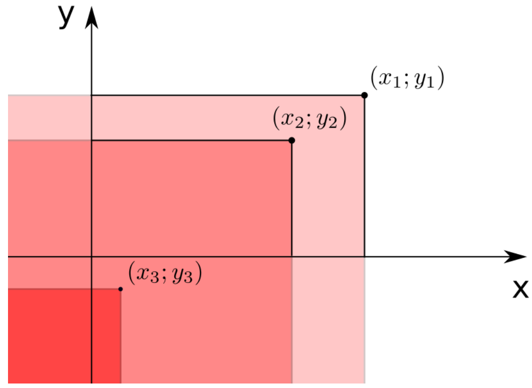
$$F_{\bar{\xi}}(x_1,y) \le F_{\bar{\xi}}(x_2,y) \text{ при } x_1 \le x_2;$$
$$F_{\bar{\xi}}(x,y_1) \le F_{\bar{\xi}}(x,y_2) \text{ при } y_1 \le y_2.$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < y\} \le \mathbb{P}\{\xi_1 < x_2, \xi_2 < y\}$$

3, $F_{\bar{\xi}}$ - неперервна зліва за кожним аргументом.

4a.

В одновимірному: $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi = 1$ $\Rightarrow$ В багатовимірному: $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\bar{\xi}}(x,y) = 0$, $\lim\limits_{y\to-\infty} F_{\bar{\xi}}(x,y) = 0$



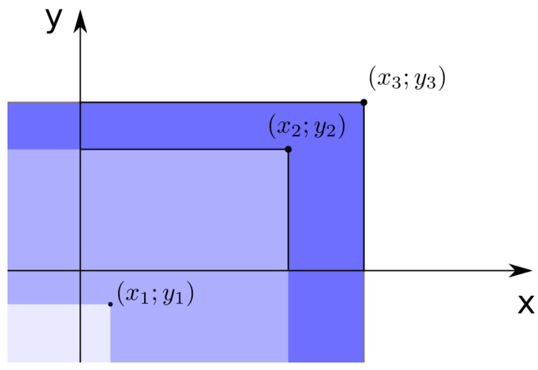
Доведення. $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\bar{\xi}}(x_n,y_n) = 0$, якщо $x_n \to \infty$ або $y_n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} F_{\bar{\xi}}(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n\} = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{n\ge1}(\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n)\right\} = \mathbb{P}\{\emptyset\} = 0$$

■

4b.

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F_{\bar{\xi}}(x,y) = 1$$



Доведення.

$$\lim_{n\to\infty} F_{\bar{\xi}}(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{n\ge1}(\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n)\right\} = \mathbb{P}\{\Omega\} = 1$$

■

4c.

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \in \mathbb{R}}} F_{\overline{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_2 < y\} = F_{\xi_2}(y)$$

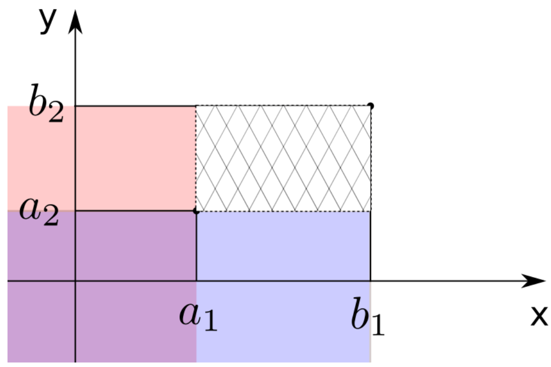
$$\lim_{\substack{y \to +\infty \\ x \in \mathbb{R}}} F_{\overline{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x\} = F_{\xi_1}(x)$$

Означення. $\overline{\xi} = \begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{bmatrix}$ $\quad F_{\overline{\xi}}(x,y)$ **– сумісна функція розподілу.**

ξ_1 - випадкова величина. F_{ξ_1} -**маргінальна функція розподілу** ξ_1.
Щоб отримати маргінальну функцію розподілу, потрібно відправили "зайві" аргументи до $+\infty$.

5. В одновимірному випадку:

$$\mathbb{P}\{\xi \in [a,b)\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$



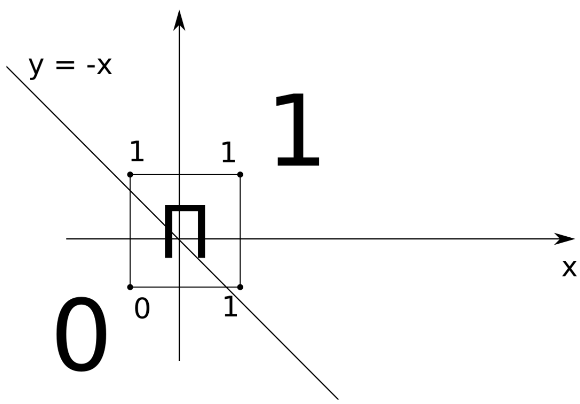
У багатовимірному випадку нас цікавить вірогідність $\mathbb{P}\{\xi_1 \in [a_1,b_1), \xi_2 \in [a_2,b_2)\}$ (користуємося правилом знаходження приросту функції 2-ох змінних):

$$\mathbb{P}\{\xi_1 \in [a_1,b_1), \xi_2 \in [a_2,b_2)\} = \mathbb{P}\left\{\overline{\xi} \in \ \Pi\right\} =$$

$$= F_{\overline{\xi}}(b_1,b_2) - F_{\overline{\xi}}(b_1,a_2) - F_{\overline{\xi}}(b_1,a_2) + F_{\overline{\xi}}(a_1,a_2)$$

Приклад.

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, x+y \le 0 \\ 1, x+y > 0 \end{cases}$$



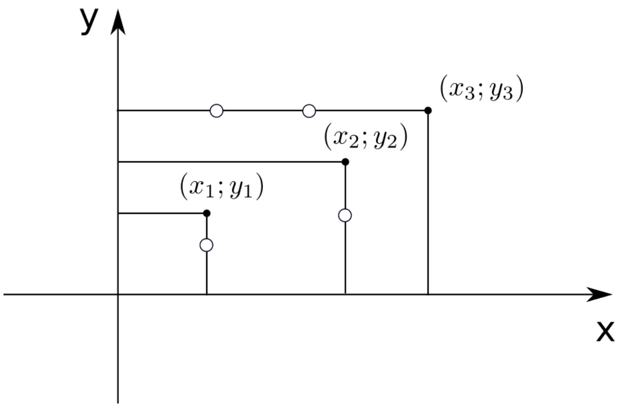
Задана функція не є функцією розподілу. Розглянемо прямокутник П.

2.2. Дискретні та неперервні випадкові вектори.

2.2.1. Дискретні випадкові вектори.

Означення. $\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ ... \\ \xi_n \end{bmatrix}$ називають дискретним(неперервним), якщо усі його координати - дискретні(неперервні) випадкові величини.

$\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ ... \\ \xi_n \end{bmatrix}$ - дискретний вектор. $p_{ij} = \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}$



$\xi_1 \backslash \xi_2$	y_1	...	y_j	...	y_n
x_1	p_{11}	...	p_{1j}	...	p_{1n}
...	...	...	...	...	...
x_i	p_{i1}	...	p_{ij}	...	p_{in}
...	...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	...	p_{mj}	...	p_{mn}

2.2.2. Неперервні випадкові вектори.

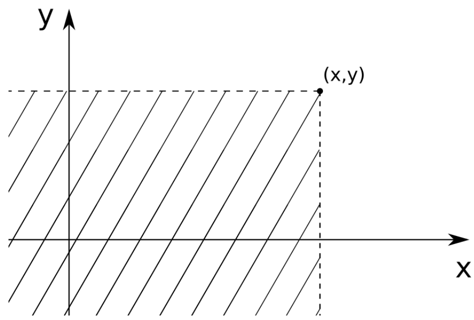
ξ - неперервна $\Leftrightarrow$ F_ξ - неп. функція $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}\{\xi = x\} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Означення. $\overline{\xi}$ - неперервний вектор, якщо $\mathbb{P}\{\xi = \overline{x}\} = 0 \quad \forall \overline{x}$

Означення. $\overline{\xi}$ - абсолютно неперервний вектор, якщо

$$\exists f : F_\xi = \int\limits_{-\infty}^{x} ... \int\limits_{-\infty}^{x_n} f_{\overline{\xi}}(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n = \mathbb{P}\{\xi_1 < x_1, ..., \xi_n < x_n\}$$

$$F_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_1, \xi_2}(s, t) ds dt$$



2.2.3. Властивості щільності розподілу:

1. $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\xi_1,\xi_2}(x,y)}{\partial x \partial y}$ - в точках, де похідна існує.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dxdy = 1$

Доведення.

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dxdy = 1$$

$$F_{\xi_1,\xi_2}(x,y) \xrightarrow[x,y\to\infty]{} 1$$

■

3. $\mathbb{P}\left\{\overline{\xi} \in B\right\} = \iint\limits_{B} f_{\overline{\xi}} dxdy$, якщо B - квадрована множина.

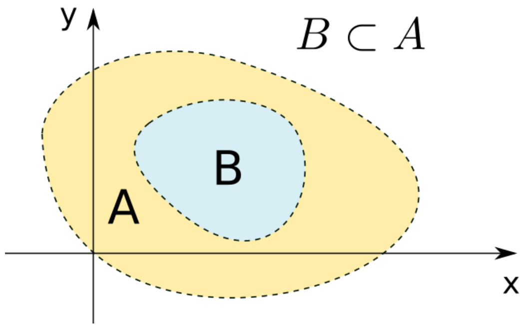
Доведення. Доведемо спочатку для прямокутників $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\xi} \in B\right\} = F(b_1,b_2) - F(b_1,a_2) - F(a_1,b_2) + F(a_2,b_2) = \iint\limits_{B} f_{\overline{\xi}} dxdy$$

■

2.3. Рівномірний розподіл на площині.

$$\overline{\xi} \sim U(A) \Leftrightarrow f_{\overline{\xi}} = \begin{cases} c, (x,y) \in A \\ 0, (x,y) \notin A \end{cases}$$



$$1 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f_{\xi}(x,y)dxdy = c \cdot S(A) \Rightarrow c = \frac{1}{S(A)}$$

$$\boxed{f_{\overline{\xi}} = \begin{cases} \frac{1}{S(A)}, (x,y) \in A \\ 0, (x,y) \notin A \end{cases}}$$

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\xi} \in B\right\} = \iint\limits_{B} f_{\overline{\xi}(x,y)} dxdy = \iint\limits_{B} \frac{1}{S(A)} dxdy = \frac{S(B)}{S(A)}$$

2.4. Маргінальна щільність

$$\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \qquad f_{\overline{\xi}} \text{ - щільність} \qquad f_{\overline{\xi}}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,y)dy$$

Доведення.

$$\int\limits_C f_{\xi_1}dx = \mathbb{P}\{\xi_1 \in C\} = \mathbb{P}\{(\xi_1, \xi_2) \in C \times \mathbb{R}\} = \int\limits_C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,y)dxdy$$

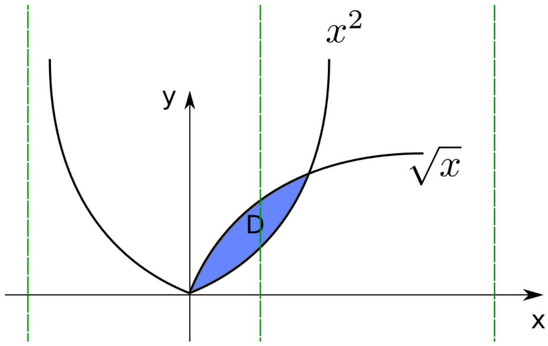
■

Приклад.

$$f_{\overline{xi}}(x,y) = \begin{cases} 3, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}$$

За умовою нормування:

$$S(D) = \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$



$$f_{\xi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}dy$$

1. $\begin{matrix} x \in (-\infty; 0) \\ x \in (1; +\infty) \end{matrix}$ $\quad f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 0dy = 0$
2. $x \in [0,1] \quad f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} 3dy = 3(\sqrt{x} - x^2)$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ 3(\sqrt{x} - x^2), x \in [0,1] \end{cases}$$

Перевірка: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}dx = 3\int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = 1$.
Аналогічно для $f_{\xi_2}(y)$.

2.5. Числові характеристики випадкових векторів.

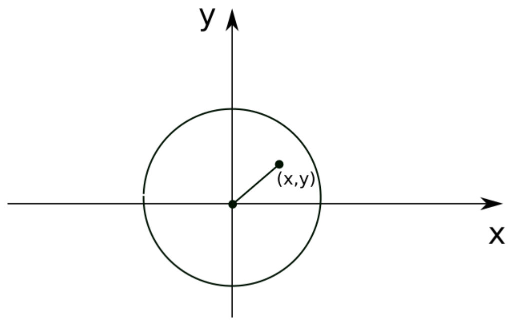
$$\mathbb{E}\xi_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,y)dy\right)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\overline{\xi}}(x,y)dxdy$$

$$\mathbb{E}\xi_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\overline{\xi}}(x,y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\overline{\xi}}(x,y)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\overline{\xi}}(x,y)dy$$

Таким чином, за подвійним інтегралом рахувати числові характеристики зручніше, адже ми можемо вибрати найпростіший вигляд.

Приклад. Точка розподілена в одиничному крузі, для якого $f_{\overline{\xi}}(x,y)$ пропорційеа відстані до границі круга. Знайти $\mathbb{D}\xi_1, \mathbb{D}\xi_2$.

$$f_{\overline{\xi}}(x,y) = \begin{cases} (1-\sqrt{x^2+y^2})k, (x,y) \in \bigcirc \\ 0, (x,y) \notin \bigcirc \end{cases}$$



$$1 = k\iint\limits_{\bigcirc}(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1-\rho)\rho d\rho = \frac{\pi k}{3} \Longrightarrow k = \frac{3}{\pi}$$

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}\xi)^2 = \iint\limits_{\bigcirc} x^2\frac{3}{\pi}(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

2.6. Коваріація та її властивості.

$$\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{E}\xi_1, \mathbb{E}\xi_2 . \mathbb{D}\xi_1, \mathbb{D}\xi_2$$

Маэстро, что с Вами?

Означення. Коваріація (кореляційний момент) - $cov(\xi_1, \xi_2)$.

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_2)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1 \xi_2) - \mathbb{E}\xi_1 \xi_2$$

Коваріяція дискретного випадкового вектора.

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} - \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij} \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij} \right\}$$

Коваріяція неперервного випадкового вектора.

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xy \cdot f_{\overline{\xi}} dxdy - \iint\limits_{\mathbb{R}^2} x \cdot f_{\overline{\xi}} dxdy \cdot \iint\limits_{\mathbb{R}^2} y \cdot f_{\overline{\xi}} dxdy$$

Властивості коваріації.

1. $cov(\xi, \xi) = \mathbb{D}\xi$.
2. Якщо ξ_1, ξ_2 - незалежні , то $cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) = 0$

Означення. ξ_1 та ξ_2 наз. некорельованими, якщо $cov(\xi_1, \xi_2) = 0$.

3. $cov(\xi_1, \xi_2) = cov(\xi_2, \xi_1)$ (симетричність).
4. $cov(\xi, c) = 0$
5. $cov(\alpha\xi_1' + \beta\xi_1'', \xi_2) = \mathbb{E}(\alpha\xi_1' + \beta\xi_1'' - \mathbb{E}(\alpha\xi_1' + \beta\xi_1''))(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) = \alpha cov(\xi_1', \xi_2) + \beta cov(\xi_1'', \xi_2)$

Отримали: Коваріація є білінійним симетричним функціоналом.
6. Якщо ξ_1, ξ_2 - незалежні, то $\mathbb{D}(\xi_1 \pm \xi_2) = \mathbb{D}\xi_1 \pm \mathbb{D}\xi_2$.
Якщо існує залежність: $\mathbb{D}(\xi_1 \pm \xi_2) = \mathbb{E}((\xi_1 \pm \xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1 \pm \xi_2))^2 = \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1) \pm (\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)) = \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)^2 + (\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)^2 \pm 2(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)) = \mathbb{D}\xi_1 + \mathbb{D}\xi_2 \pm 2cov(\xi_1, \xi_2)$
7. $cov(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) - (\mathbb{E}\mathbb{I}_A)(\mathbb{E}\mathbb{I}_B) = \mathbb{P}\{A \cap B\} - \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}$
8. Нерівність Коші-Буняковського.

$$|cov(\xi_1, \xi_2)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2}$$

2.7. Коваріаційна матриця вектора та її властивості

ξ : дисперсія $\mathbb{D}\xi = \mathbb{R}\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$
$\overline{\xi}$: коваріаційна матриця $C_{\overline{\xi}} = \mathbb{E}(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})^T$

$$C_{\overline{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) & \cdots & cov(\xi_1, \xi_n) \\ cov(\xi_2, \xi_1) & \mathbb{D}\xi_2 & \cdots & cov(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\xi_n, \xi_1) & cov(\xi_n, \xi_1) & \cdots & \mathbb{D}\xi_n \end{bmatrix}$$

1. $C_{\overline{\xi}}$ - симетрична матриця.
2. A - квадратна матриця $n \times n$, симетрична.
A - невід'ємно визначена $\Leftrightarrow$ $(A\overline{x}, \overline{x}) \geq \forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n$ $C_{\overline{\xi}}$ - невід'ємно визначена.
$(C_{\overline{\xi}}, \overline{\xi}) = (\mathbb{E}(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})(\mathbb{E}(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})^T \overline{x}, \overline{x}) = \mathbb{E}\left|\left|(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})^T \overline{x}\right|\right|^2 \geq 0.$
Застосування невід'ємної визначеності.

$$\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \qquad C_{\overline{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) \\ cov(\xi_1, \xi_2) & \mathbb{D}\xi_2 \end{bmatrix} - \text{ невід'ємно визначена}$$

Застосуємо критерій Сільвестра:

$$\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2 - cov^2(\xi_1, \xi(2)) \geq 0 \Longrightarrow |cov(\xi_1, \xi_2)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2}$$

Що означає виродженість коваріаційної матриці? $\Leftrightarrow \det C_{\overline{\xi}} = 0$:

$$\det C_{\overline{\xi}} = 0 \Leftrightarrow \exists \overline{x} \in \mathbb{R}^n : \left(C_{\overline{\xi}}, \overline{\xi}\right) = 0 \Leftrightarrow C_{\overline{\xi}} - \text{не додатня, невід'ємно визначена}$$

Доведення.

$$\det C_{\overline{\xi}} = 0 \Rightarrow KerC_{\overline{\xi}} \neq \left\{\vec{0}\right\} \Rightarrow \exists \overline{x} \neq 0 : C_{\overline{\xi}}\overline{x} = 0 \Rightarrow \left(C_{\overline{\xi}}\overline{x}, \overline{x}\right) = 0$$

$$\exists \overline{x} \neq 0 : \left(C_{\overline{\xi}}\overline{x}, \overline{x}\right) = 0 \Rightarrow \exists \overline{y} \neq 0 : \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

$$\left(C_{\overline{\xi}}\overline{x}, \overline{x}\right) = 0 = (\Omega\overline{y}, \overline{y}) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2 \Leftrightarrow \exists \lambda_i = 0 \Rightarrow \det C_{\overline{\xi}} = 0$$

∎

Теорема 2.1. $C_{\overline{\xi}}$ є виродженою т.т.т.к між $\xi_1, ..., \xi_n$ є афінна залежність. Тобто:

$$\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + ... + \lambda_n\xi_n = c$$

Доведення.

$$\exists \overline{x} \neq 0 : \left(C_{\overline{\xi}}\overline{x}, \overline{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists \overline{\xi} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n : \left(\mathbb{E}(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})^T \cdot \overline{x}, \overline{x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\mathbb{E}(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi}) \cdot \overline{x}, (\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi}) \cdot \overline{x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}\left|\left|\left(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi}\right)^T \overline{x}\right|\right|^2 = 0 \Leftrightarrow \left|\left|\left(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi}\right)^T \overline{x}\right|\right|^2 = 0 \quad \text{м.н.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi}\right)^T \overline{x} = 0 \Leftrightarrow \left(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1\right) x_1 + ... + (\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)x_n = 0 \Leftrightarrow$$

$\exists x_1, ..., x_n$ не всі з яких дорівнюють нулю:

$$\Leftrightarrow x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n = x_1\mathbb{E}\xi_1 + ... + x_n\mathbb{E}\xi_n = c \Leftrightarrow$$

Візьмемо $x_i = \lambda_i$: $\lambda_1\xi_1 + ... + \lambda_n\xi_n = c \Leftrightarrow$ афінна залежність. ∎

Розглянемо $cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)$.
Застосуємо нерівність Коші-Буняковського: $|cov(\xi, \eta)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}$

$$\boxed{r_{\xi,\eta} = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}} \text{ - коефіцієнт кореляції між } \xi \text{ та } \eta.}$$

$$-1 \leq r_{\xi,\eta} \leq 1$$

Коефіцієнт показує "силу" лінійної залежності між ξ та η.

$$r_{\xi,\eta} = 0 \Leftrightarrow cov(\xi, \eta) \Leftrightarrow \xi \text{ та } \eta\text{- некорельовані.}$$

$$r_{\xi,\eta} = \pm 1 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi & cov(\xi, \eta) \\ cov(\xi, \eta) & \mathbb{D}\eta \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det C_{\xi,\eta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta - cov(\xi, \eta) = 0 \Leftrightarrow |r_{\xi,\eta}| = 1$$

Теорема 2.2. $r_{\xi,\eta} = \pm 1$ т.т.т.к. $\eta = k\xi + b$, де $k, b \in R$
При цьому $\begin{matrix} r_{\xi,\eta} + 1 \Rightarrow k > 0 \\ r_{\xi,\eta} - 1 \Rightarrow k < 0 \end{matrix}$

Доведення.

$$r_{\xi,\eta} = \frac{cov(\xi, k\xi + b)}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}(k\xi + b)} = \frac{k\mathbb{D}\xi}{\sqrt{k^2 \cdot \mathbb{D}^2\xi}} = \frac{k}{|k|} = \begin{cases} 1, k > 0 \\ -1, k < 0 \end{cases}$$

∎

2.8. Незалежність випадкових величин

Означення. Випадкові величини ξ, η називають незалежними, якщо події $\{\xi \in [a,b]\}, \{\eta \in [a,b]\}$ є незалежними $\forall a \le b, c \le d$
Зокрема, якщо ξ, η - дискретні:

$$\begin{matrix} \xi \in \{x_1, ..., x_n\} \\ \eta \in \{y_1, ..., y_n\} \end{matrix} \qquad \{\xi = x_i\} \perp\!\!\!\perp \{\eta = y_j\} \quad \begin{matrix} \forall i = \overline{1,m} \\ \forall j = \overline{1,n} \end{matrix}$$

Теорема 2.3. ξ, η - незалежні $\Leftrightarrow F_{\xi,\eta} = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$

Доведення. Нехай ξ, η - незалежні $\Leftrightarrow \forall a \le b, c \le d : \mathbb{P}\{\xi \in [a,b], \eta \in [c,d]\} = \mathbb{P}\{\xi \in [a,b]\} \cdot \mathbb{P}\{\eta \in [c,d]\} \Rightarrow \mathbb{P}\{\xi \in [a,b), \eta \in [c,d)\} = \mathbb{P}\{\xi \in [a,b)\} \cdot \mathbb{P}\{\eta \in [c,d)\}$
$\mathbb{P}\{\xi < b, \eta < d\} = \mathbb{P}\{\xi < b\} \cdot \mathbb{P}\{\eta < d\} \Leftrightarrow F_{\xi,\eta}(b,d) = F_\xi(b) \cdot F(\eta)(d)$
Нехай навпаки: $F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x) - F_\eta(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\{\xi \in [a,b), \eta \in [c,d)\} = F_{\xi,\eta}(d,b) - F_{\xi,\eta}(b,c) - F_{\xi,\eta}(a,d) + F_{\xi,\eta}(a,c) =$$
$$= F_\xi(b)F_\eta(d) - F_\xi(b)F_\eta(c) - F_\xi(a)F_\eta(d) + F_\xi(a)F_\eta(c) =$$
$$= (F_\xi(b) - F_\xi(a))(F_\eta(d) - F_\eta(c)) = \mathbb{P}\{\xi \in [a,b)\} \cdot \mathbb{P}\{\eta \in [c,b)\}$$

∎

Теорема 2.4. Для абсолюно неперервного вектора $\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix}^T$

$$\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Leftrightarrow f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Доведення.

$$\begin{matrix} 1. & F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y) \Longrightarrow f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y) \\ 2. & f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y) \Longrightarrow F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y) \end{matrix} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

2.

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(s,t) ds dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_\xi(s) \cdot f_\eta(t) ds dt =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(s) ds \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(t) dt = F_\xi(s) \cdot F_\eta(t)$$

1.

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)) = \frac{\partial}{\partial x}(F_\xi(x) \cdot f_\eta(y)) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$$

∎

2.9. Умовні розподіли та умовні математичні сподівання.

2.9.1. Дискретний вектор.

$\xi_1 \backslash \xi_2$	y_1	...	y_j	...	y_n
x_1	p_{11}	...	p_{1j}	...	p_{1n}
...	...	...	...	...	...
x_i	p_{i1}	...	p_{ij}	...	p_{in}
...	...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	...	p_{mj}	...	p_{mn}

Розподіли ξ_2 за ξ_1

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_2 = x_i\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}}{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i\}} = \\ = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_i j}$$

$\xi_1 \backslash \xi_2$	y_1	...	y_j	...	y_n	
$P\{\xi_2 \vert \xi_1 = x_1\}$	$\frac{p_{11}}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}$	...	$\frac{p_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}$	...	$\frac{p_{1n}}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}$	-----> ряд розподілу ξ_2 за $\xi_1 = x_1$
...	...	...	...	...	...	
$P\{\xi_2 \vert \xi_1 = x_m\}$	$\frac{p_{i1}}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}$	...	$\frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}$	...	$\frac{p_{in}}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}$	-----> ряд розподілу ξ_2 за $\xi_1 = x_i$
...	...	...	...	...	...	
$P\{\xi_2 \vert \xi_1 = x_i\}$	$\frac{p_{m1}}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}$	...	$\frac{p_{mi}}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}$	...	$\frac{p_{mn}}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}$	-----> ряд розподілу ξ_2 за $\xi_1 = x_n$

$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_{ik}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j p_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\xi_1 & x_1 & \cdots & x_i & \cdots & x_m \\
\mathbb{E}_{\xi_2|\xi_1 = x_k} & \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j p_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} p_{1j}} & \cdots & \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}} & \cdots & \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j p_{mj}}{\sum_{j=1}^{n} p_{mj}} \\
\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k\} & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{mj}
\end{array} \longrightarrow \text{ряд розподілу } \mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)] = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j \cdot p_{1j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{1j}} \cdot \sum_{j=1}^{n} p_{1j} + \ldots + \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j \cdot p_{mj}}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{mj}} \cdot \sum_{j=1}^{n} p_{mj} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij} = \mathbb{E}\xi_2$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)] = \mathbb{E}\xi_2 \qquad \mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)] = \mathbb{E}\xi_1$$

2.9.2. Абсолютно неперервний вектор.

$$\overline{\xi}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} \qquad f_{\overline{\xi}}(x,y) - \text{ сумісна щільність розподілу.}$$

$f_{\xi_2|\xi_1}(y|x) = f_{\xi_2|\xi_1=x}(y)$ - умовна щільність другої координати за першою.

$F_{\xi_2|\xi_1=x}(y)$ - умовна функція розподілу ξ_2 за умови $\xi_1 = x$.
$F_{\xi_2|\xi_1=x}(y) = \mathbb{P}\left\{\xi_2 < y|\xi_1 = x\right\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1=x,\xi_2<y\}}{\mathbb{P}\{\xi_1=x\}} = \frac{0}{0}$

$$F_{\xi_2|\xi_1=x}(y) = \lim_{\varepsilon\to\infty}\mathbb{P}\left\{\xi_2|\xi_1 \in [x,x+\varepsilon)\right\} = \frac{\mathbb{P}\left\{\xi_1\in[x,x+\varepsilon),\xi_2\in(-\infty,y)\right\}}{\mathbb{P}\left\{\xi_1\in[x,x+\varepsilon)\right\}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int\limits_x^{x+\varepsilon} ds \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\overline{\xi}}(s,t)dt}{\int\limits_x^{x+\varepsilon} f_{\xi_1}(s)ds} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\cdot\int\limits_x^{x+\varepsilon} ds \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\overline{\xi}}(s,t)dt}{\varepsilon\cdot\int\limits_x^{x+\varepsilon} f_{\xi_1}(s)ds} = \boxed{\frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\overline{\xi}}(x,t)dt}{f_{\xi_1}(x)} = F_{\xi_2|\xi_1=x}(y)}$$

Знаючи умовну функцію розподілу, можемо знайти умовну щільність:

$$f_{\xi_2|\xi_1=x} = F'_{\xi_2|\xi_1=x}(y) = \frac{f_{\overline{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_1}(x)}$$

Знайдемо умовне математичне сподівання ξ_2 за ξ_1

$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1=x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_{\xi_2|\xi_1=x}dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\frac{f_{\overline{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_1}(x)}dy = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_{\overline{\xi}}(x,y)dy}{f_{\xi_1}(x)}$$

$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$ - випадкова величина, яка спочатку визначає, куди попала умова (чому дорівнює $x \longleftarrow \xi_1$), а далі визначає $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x)$.
$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$ - набуває значення $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x)$, коли ξ_1 набула значення x.

$$\xi_1 \longrightarrow x \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_2|\xi_1) \longrightarrow \mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x)$$

$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$ є функцією від ξ_1. Якою? $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x)$
$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1) = \Psi(\xi_1)$, де $\Psi(x) = \mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x)$

Формула повного математичного сподівання ($?\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)] = \mathbb{E}\xi_2?$)

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)] = \mathbb{E}\Psi(\xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x)\cdot f_{\xi_1}(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_{\overline{\xi}}(x,y)dy}{f_{\xi_1}(x)}\cdot f_{\xi_1}(x)dx = \mathbb{E}\xi_2$$

3. Характеристичні функції.

ξ - випадкова величина. Загальна характеристика такої величини - функція розподілу. Існує для кожної величинию. Також є характеристики, такі як ряд розподілу та щільність розподілу - існують не завжди. Введемо ще одну характеристику, яка буде існувати для будь-якої випадкової величини.

Означення. Характеристична функція випадкової величини.

$$\chi_\xi(t) = \mathbb{E}(\cos(t\xi) + i\sin(t\xi)) = \mathbb{E}(e^{it\xi})$$

$$\boxed{X_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}}$$

Як шукати? Дискретний випадок: $\sum\limits_{i=1}^{n(\infty)} e^{itx_i} p_i$

Для абсолютно неперервної величини: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx$

3.1. Властивості характеристичних функцій.

ξ - випадкова величина. $\chi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{et\xi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^i t x f_\xi(x)dx$

1. Характеристична функція є унікальною характеристикою ймовірнісного розподілу.
2. $\chi_\xi(0) = 1 \qquad \chi_\xi(0) = \mathbb{E}e^0 = 1.$
3. $|\chi_\xi(t)| \le 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\left|\mathbb{E}e^{it\xi}\right| = |\mathbb{E}\cos(t\xi) + i\mathbb{E}\sin(t\xi)| = \sqrt{\mathbb{E}\cos(t\xi)^2 + \mathbb{E}\sin(t\xi)^2} = 1$$

4. χ_ξ - неперервна за t для ξ - абсолютно неперервна випадкова величина.

$$\chi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx \quad \longleftarrow \quad \chi_\xi(t+h) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t+h)x} f_\xi(x)dx$$

$$(\chi_\xi - \text{ непервна в т. } t) \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \chi_\xi(t+h) = \chi_\xi(t)$$

Для $\lim\limits_{h\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t+h)x} f_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx$, треба щоб $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx$ збігався рівномірно на $t \in \mathbb{R}$. $\left|e^{itx} \cdot f_\xi(x)\right| = |f_\xi(x)| = f_\xi(x) = M(x)$- мажорантний ряд.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} M(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1 < \infty$$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx$ - збігається рівномірно за озн. Вейерштрасса.
5. $\xi_1 \perp\!\!\!\perp \xi_2 \Longrightarrow \chi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \chi_{\xi_1}(t) \cdot \chi_{\xi_2}(t)$
6. Якщо $\exists \mathbb{E}\xi^n$, то $\mathbb{E}\xi^n = \frac{1}{i^n} \cdot \chi_\xi^{(n)}(0)$.

Доведення. В неперервному випадку.

$$\mathbb{E}\xi^n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_\xi(x)dx$$

$$\chi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx$$

$$\chi^{(n)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (ix)^n e^{itx} f_\xi(x)dx$$

Але потрібна рівномірна збіжність. Скористаємося озн. Вейерштрасса:

$$\left|(ix)^n e^{itx} f_\xi(x)\right| = |x|^n \cdot f_\xi(x) = M(x) :$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} M(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^n \cdot f_\xi(x)dx < \infty$$

$$\chi^{(n)}(0) = i^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_\xi(x)dx = i^n \cdot \mathbb{E}(\xi^n)$$

■

6*. Якщо існує $\exists \chi(t)^{(n)}$, то виконується попередня властивість. ($n -$ парне.)

7. $\chi_{a\xi+b}(t) = \mathbb{E}e^{i(a\xi+b)t} = \mathbb{E}(e^{ia\xi t} \cdot e^{ibt}) = e^{ibt} \cdot \mathbb{E}e^{ai\xi t} = e^{ibt}\chi_\xi(at)$
8. $\chi_{-\xi}(t) = \chi_\xi(-t) = \mathbb{E}e^{i(-\xi)t} = \overline{\mathbb{E}e^{i\xi t}} = \overline{\chi_\xi(t)}$
9. Нехай випадкова величина ξ має симетричний розподіл.

$$\mathbb{P}\{\xi \in B\} = \mathbb{P}\{\xi \in -B\} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi - \text{ ДВВ: Ряд розподілу симетричний відносно 0.} \\ \xi - \text{ АНВВ: } f_\xi(x) = f_\xi(-x) \end{cases}$$

Тоді: $-\xi \equiv \xi \Longrightarrow \overline{\chi_\xi(t)} = \chi_\xi(t) = \chi_\xi(-t)$.
Це означає, що $\chi_\xi(t)$ - парна, дійсного значення.
10. Нехай ξ не є обов'язково симетричною. Тоді $\overline{\chi_\xi(t)} = \chi_{-\xi}(t) = \chi_\xi(-t)$.
Інакше, парність $\chi_\xi(t)$ означає її дійснозначність.

3.2. Основні "проблеми" характеристичних функцій.

1. За функцією χ досить важко визначити, чи є вона характеристичною функцією деякої випадкової величини.
2. Якщо χ - дійсно характеристична функція деякої випадкової величини, то важко зрозуміти, чи буде ξ ДВВ або АНВВ.

Задача: Чи є функція характеристичною? Якщо є, то для якого розподілу?
Основні критерії, яким має відповідати характеристична функція - це 4 властивості наведені нижче. Якщо одна з властивостей не виконується, то функція не є характеристичною. Інакше, потрібно навести конкретний розподіл, який описує задана функція.
1. $\chi(0) = 1$
2. $|\chi(t)| \leq 1$
3. Неперервна і визначена $\forall t \in \mathbb{R}$.
4. $\chi(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \chi(-t) = \chi(t)$

3.3. Характеристичні функції головних ймовірнісних розподілів.

3.3.1. Дискретні розподіли.

З дискретними розподілами працювати легше. В загальному випадку, величина приймає невід'ємні цілі значення. Раніше вводили поняття генератрисси:

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot z^k$$

В данному розділі розглядаємо пов'язану функцію функцію:

$$\chi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot (e^{it})^k = G_\xi(e^{it})$$

$$\begin{array}{ccccc}
\xi \sim Bin(n,p) & \Longrightarrow & G_\xi(z) = (pz+q)^n & \Longrightarrow & \chi_\xi(t) = (pe^{it}+q)^n \\
\xi \sim Geom_0(p) & \Longrightarrow & G_\xi(z) = \frac{p}{1-qz} & \Longrightarrow & \chi_\xi(t) = \frac{p}{1-qe^{it}} \\
\xi \sim Geom_1(p) & \Longrightarrow & G_\xi(z) = \frac{pz}{1-qz} & \Longrightarrow & \chi_\xi(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}} \\
\xi \sim Pois(\lambda) & \Longrightarrow & G_\xi(z) = e^{\lambda(z-1)} & \Longrightarrow & \chi_\xi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}
\end{array}$$

Таким чином, ми бачимо, що характеристичні функції напряму пов'язані з генератриссами. При роботі з ДВВ зручніше працювати з генератриссами, але на відміну від генератрисс, хактеристична функція визначена для всіх видів випадкових величин. Перейдемо до абсолютно неперервного випадку.

3.3.2. Абсолютно неперервні розподіли.

Згадаємо: $\chi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx$

$$\xi \sim \mathbf{U(a,b)}. \qquad \chi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b]; \end{cases} = \frac{1}{a-b} \int\limits_a^b e^{itx} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

$$\chi_{U(-a,a)}(t) = \begin{cases} \frac{e^{ita} - e^{-ita}}{2iat}, & t \neq 0; \\ 1, & t = 0; \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sin(at)}{at}, & t \neq 0; \\ 1, & t = 0; \end{cases}$$

$$\xi \sim \mathbf{Exp}(\lambda). \qquad \chi_\xi(t) = \int\limits_0^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x} e^{itx} dx = \frac{\lambda}{it - \lambda} e^{x(it-\lambda)} \Big|_{x=0}^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Для гаусівського розподілу: спочатку розглянемо $\xi_0 \sim N(0,1)$. Потім скористаємося властивістю $\xi = a + \sigma\xi_0$, де $\xi \sim N(a, \sigma^2)$.

$$\xi \sim \mathbf{N(0,1)}. \qquad \chi_{\xi_0}(t) = \mathbb{E} e^{it\xi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{-\frac{x^2}{2}} & du = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\ dv = e^{itx} dx & v = \frac{1}{it} e^{itx} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{it} \cdot e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{it} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{it} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \chi_{\xi_0}(t)$$

$$\chi'_{\xi_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \Longrightarrow \quad \chi'_{\xi_0}(t) = -t\chi_{\xi_0}(t)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -t\chi \qquad \int \frac{d\chi}{\chi} = -\int tdt \qquad \ln|\chi| = -\frac{t^2}{2} + C \qquad \chi(t) = K \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\chi(0) = 1 = K \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\chi_{\xi_0}(t) = \chi_{N(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

$$\boxed{\chi_{N(a,\sigma^2)}(t) = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}$$

3.4. Ймовірнісні розподіли, стійкі відносно додавання.

Означення. Розподіл називають стійким відносно додавання, якщо сума двох незалежних випадкових величин, що мають цей розподіл (можливо, з різними параметрами), також має цей розподіл.

$Pois(\lambda)$ - стійкий розподіл. Це означає, що:

$$\perp\!\!\!\perp \begin{cases} \xi_1 \sim Pois(\lambda_1) \\ \xi_2 \sim Pois(\lambda_2) \end{cases} \implies \xi_1 + \xi_2 \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Доведемо задопомогою характеристичної функції розподілу:

$$\begin{cases} \chi_{\xi_1}(t) = e^{\lambda_1 (e^{it}-1)} \\ \chi_{\xi_2}(t) = e^{\lambda_2 (e^{it}-1)} \end{cases} \implies \chi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \chi_{\xi_1}(t) \cdot \chi_{\xi_2}(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$$

Остаточно: $\boxed{\xi_1 + \xi_2 \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)}$

$N(a, \sigma^2)$ - стійкий розподіл.

$$\perp\!\!\!\perp \begin{cases} \xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2) \\ \xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \chi_{\xi_1} = e^{ia_1 t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \\ \chi_{\xi_2} = e^{ia_2 t - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} \end{cases}$$

$$\chi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \chi_{\xi_1} \cdot \chi_{\xi_2}(t) = e^{i(a_1+a_2)t - \frac{(\sigma_1+\sigma_2)^2 t^2}{2}} = \chi_{N(a_1+a_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)}(t)$$

Остаточно: $\boxed{\xi_1 + \xi_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$

Розглянемо біноміальний розподіл: $Bin(n, p)$

$$\perp\!\!\!\perp \begin{cases} \xi_1 \sim Bin(n_1, p) \\ \xi_2 \sim Bin(n_2, p) \end{cases} \qquad \begin{cases} \chi_{\xi_1}(t) = \left(pe^{it} + q\right)^{n_1} \\ \chi_{\xi_2}(t) = \left(pe^{it} + q\right)^{n_2} \end{cases}$$

$$\chi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \left(pe^{it} + q\right)^{n_1} \cdot \left(pe^{it} + q\right)^{n_2} = \left(pe^{it} + q\right)^{n_1+n_2}$$

Остаточно: $\boxed{\xi_1 + \xi_2 \sim Bin(n_1 + n_2, p)}$

Задача: знайти щільність розподілу $f_\xi(x)$ за харатеристичною функцією.

$$\chi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx - \text{перетворення Фур'є} \qquad f \xrightarrow{F} \chi$$

$$f_\xi(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \chi_\xi(x) dx - \text{обернене перетворення} \qquad \chi \xrightarrow{F^{-1}} f$$

3.5. Характеристичні функції випадкових векторів.

3.5.1. Означення.

Розглядаємо випадковий вектор $\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$. Характеристична функція:

$$\chi_{\overline{\xi}}(\overline{t}) = \chi_{\overline{\xi}}(t_1, t_2, ..., t_n) = \mathbb{E}e^{i<\overline{\xi},\overline{t}>} = \mathbb{E}e^{i(t_1\xi_1+...+t_n\xi_n)}$$

Для дискретного випадкового вектора $\overline{\xi}$:

$$\chi_{\overline{\xi}}(\overline{t}) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} e^{i\left(t_1 x_1^{(i_1)}+...+t_n x_n^{(in)}\right)} \cdot \mathbb{P}\left\{\xi_1 = x^{(i_1)}, ..., \xi_n = x_n^{(i_n)}\right\}$$

Для абсолютно неперервного випадкового вектора $\overline{\xi}$:

$$\chi_{\overline{\xi}}(\overline{t}) = \underset{\mathbb{R}^n}{\int \cdots \int} e^{i(t_1x_1+...+t_nx_n)} f_{\overline{\xi}}(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n$$

3.5.2. Властивості характеристичної функції випадкового вектора.

1. $\chi_{\overline{\xi}}$ - унікальна характеристика випадкового вектора. Проте, за однакової характеристичної функції неможна вважати, що вектори однакові. Можна вважати, що вони мають однакові розподіли. Наведемо приклад:

$$\xi \sim U(-1,1) \qquad -\xi \sim U(-1,1) \qquad \xi \neq -\xi \qquad \xi \overset{\circ}{=} -\xi$$

2. $\chi_{\overline{\xi}}(\vec{0}) = 1$
3. $\left|\chi_{\overline{\xi}}(\overline{t})\right| \leq 1$
4. $\chi_{\overline{\xi}} \in C(\mathbb{R}^n)$
5. Якщо $\overline{\xi_1} \perp\!\!\!\perp \overline{\xi_2} \Longrightarrow \chi_{\overline{\xi_1}+\overline{\xi_2}}(t) = \chi_{\overline{\xi_1}}(t) \cdot \chi_{\overline{\xi_2}}(t)$
6. $\exists\mathbb{E}\left(\xi_1^{k_1} \cdot ... \cdot \xi_n^{k_n}\right) \Longrightarrow \mathbb{E}\left(\xi_1^{k_1} \cdot ... \cdot \xi_n^{k_n}\right) = \dfrac{1}{i^{k_1+...+k_n}} \cdot \dfrac{\partial^{k_1+...+k_n}}{\partial t_1^{k_1} \cdot ... \cdot \partial t_n^{k_n}} \chi_{\overline{\xi}}(\vec{0})$
7. $\chi_{A\overline{\xi}+\overline{b}}(\overline{t}) = \mathbb{E}e^{i<A\overline{\xi}+\overline{b},\overline{t}>} = \mathbb{E}\left(e^{i<A\overline{\xi},\overline{t}>} \cdot e^{i<\overline{b},\overline{t}>}\right) = e^{i<\overline{b},\overline{t}>}\mathbb{E}e^{i<\overline{\xi},A^T\overline{t}>} = e^{i<\overline{b},\overline{t}>}\chi_{\overline{\xi}}\left(A^T\overline{t}\right)$
8. Якщо координати вектора $\overline{\xi}$ - незалежні, Тоді: $\chi_{\overline{\xi}}(\overline{t}) = \mathbb{E}e^{i(t_1\xi_1+...+t_n\xi_n)} =$
$= \mathbb{E}\left(e^{it_1\xi_1} \cdot ... \cdot e^{it_n\xi_n}\right) = \left(\mathbb{E}e^{it_1\xi_1}\right) \cdot ... \cdot \left(\mathbb{E}e^{it_n\xi_n}\right) = \chi_{\xi_1}(t_1) \cdot ... \cdot \chi_{\xi_n}(t_n)$
Якщо координати незалежні, то характеристична функція розпадається на добуток маргінальних характеристичних функція. До речі, справедливе і обернене твердження. Звідси, отримали критерій незалежності координат.

3.6. Гаусівські випадкові вектори.

$$n=1 \qquad \xi \sim N(a,\sigma^2) \qquad f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad F_\xi(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

$$\sigma^2=\mathbb{D}\xi \qquad a=\mathbb{E}\xi \qquad \chi_\xi(t)=e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

3.6.1. Характеристики стандартного гаусівського розподілу.

Нехай маємо стандартний гаусівський n-вимірний випадковий вектор:
$\overline{\xi}=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}$, де $\xi_1,...,\xi_n$ - незалежні $N(0,1) \Longrightarrow \overline{\xi}\sim N(\vec{0},I)$.

$$\mathbb{E}\overline{\xi}=\begin{bmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \vdots\\ \mathbb{E}\xi_n\end{bmatrix}=\vec{0} \qquad C_{\overline{\xi}}=\begin{bmatrix}\mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1,\xi_2) & \cdots & cov(\xi_1,\xi_n)\\ cov(\xi_2,\xi_1) & \mathbb{D}\xi_2 & \cdots & cov(\xi_2,\xi_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ cov(\xi_n,\xi_1) & cov(\xi_n,\xi_1) & \cdots & \mathbb{D}\xi_n\end{bmatrix}=I^{n\times n}$$

Для одновимірної стандартної величини $\xi\sim N(0,1)$:

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad F_\xi(x)=\frac{1}{2}+\Phi(x) \qquad \chi_\xi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Для стандартного вектора $\overline{\xi}\sim N(\vec{0},I) \quad \overline{\xi}=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}$.

$$f_{\overline{\xi}}(x_1,...,x_n)=f_{\xi_1}(x_1)\cdot ...\cdot f_{\xi_n}(x_n)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_j^2}{2}}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{x_1^2+...+x_m^2}{2}}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{<\overline{x},\overline{x}>}{2}}$$

$$F_{\overline{\xi}}(x_1,...,x_n)=F_{\xi_1}(x_1)\cdot ...\cdot F_{\xi_n}(x_n)=\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}+\Phi(x_j)\right)$$

$$\chi_{t_1,...,t_n}=\chi_{\xi_1}(t_1)\cdot ...\cdot \chi_{\xi_n}(t_n)=e^{-\frac{t_1^2}{2}\cdot ...\cdot\frac{t_n^2}{2}}=e^{-\frac{t_1^2+...t_n^2}{2}}=e^{-\frac{<\overline{t},\overline{t}>}{2}}$$

3.6.2. Характеристика загального гаусівського розподілу.

Якщо C - симетрична невід'ємно визначена матриця, то в неї існує квадратний корінь: така матриця $A: \quad A^2=C$.
Розглянемо загальний гаусівський вектор: $\overline{\xi}\sim N(\vec{0},I)$.

$\boxed{\overline{\eta} = \overline{a} + A\overline{\xi}}$ - за означенням будемо називати гаусівським, тобто $\overline{\eta} \sim N(\overline{a}, C)$.

$$\mathbb{E}\overline{\eta} = \mathbb{E}\left(\overline{a} + A\overline{\xi}\right) = \mathbb{E}\overline{a} + \mathbb{E}\left(A\overline{\xi}\right) = \overline{a} + A \cdot \mathbb{E}\overline{\xi} = \overline{a}$$

$$C_{\overline{\eta}} = \mathbb{E}(\overline{\eta} - \mathbb{E}\overline{\eta})(\overline{\eta} - \mathbb{E}\overline{\eta})^T = \mathbb{E}(\overline{a} + A\overline{\xi} - \overline{a})(\overline{a} + A\overline{\xi} - \overline{a})^T =$$

$$= \mathbb{E}(A\overline{\xi}\overline{\xi}^T A^T) = A \cdot \mathbb{E}\left(\overline{\xi}\overline{\xi}^T\right) \cdot A^T = A \cdot C_{\overline{\xi}} \cdot A^T = A \cdot I \cdot A^T = A^2 = C$$

Характеристична функція загального гаусівського вектора:

$$\overline{\eta} = \overline{a} + A\overline{\xi} \text{ ,де } A^2 = AA^T = C, \overline{\xi} - N(\vec{0}, I)$$

$$\chi_{\overline{\eta}}(\overline{t}) = \chi_{A\overline{\xi}+\overline{a}}(\overline{t}) = e^{i<\overline{a},\overline{t}>} \cdot \chi_{\overline{\xi}}\left(A^T\overline{t}\right) = e^{i<\overline{a},\overline{t}>} \cdot e^{-\frac{<A^T\overline{t},A^T\overline{t}>}{2}} = e^{i<\overline{a},\overline{t}> - \frac{<C\overline{t},\overline{t}>}{2}}$$

Щільність розподілу вектора $\overline{\eta} \sim N(\overline{a}, C)$:
Лема. Щільність розподілу афінного перетворення.
Нехай маємо $\overline{\xi}$ - абсолютно неперервний випадковий вектор зі щільністю $f_{\overline{\xi}}(\overline{x})$. Маємо його афінне перетворення: $\overline{\eta} = A\overline{\xi} + \overline{a}$(A - невироджена матриця). Тоді, $\overline{\eta}$ - абсолютно неперервний випадковий вектор зі щільністю $f_{\overline{\eta}}(\overline{y})$:

$$f_{\overline{\eta}}(\overline{y}) = \frac{1}{|\det(A)|} f_{\overline{\xi}}(A^{-1}(\overline{y} - \overline{a}))$$

Доведення. Нехай $B \subset \mathbb{R}^n$. $\left(\text{Позначимо n-кратний інтеграл за множ. } B - \iint\limits_B\right)$:

$$\iint\limits_B f_{\overline{\eta}}(\overline{y})d\overline{y} = \mathbb{P}\left\{\overline{\eta} \in B\right\} = \mathbb{P}\left\{A\overline{\xi} + \overline{a} \in B\right\} = \mathbb{P}\left\{A\overline{\xi} \in B - \overline{a}\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\overline{\xi} \in A^{-1}(B - \overline{a})\right\} = \iint\limits_{A^{-1}(B-\overline{a})} f_{\overline{\xi}}(\overline{\xi})d\overline{\xi} = \begin{vmatrix} \overline{y} = A\overline{x} + \overline{a} \\ \overline{x} = A^{-1}(\overline{y} - \overline{a}) \\ J = \left|\det(A^{-1})\right| \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_B f_{\overline{\xi}}(A^{-1}(\overline{y} - \overline{a}))\left|\det(A^{-1})\right| d\overline{y} = \int\limits_B \frac{1}{|\det(A)|} f_{\overline{\xi}}(A^{-1}(\overline{y} - \overline{a}))d\overline{y}$$

Інакше кажучи, інтеграли за будь-якою множиною збігаються т.т.т.к. збігаються підінтегральні функції. Приходимо до:

$$\iint\limits_B f_{\overline{\eta}}(\overline{y})d\overline{y} = \int\limits_B \frac{1}{|\det(A)|} f_{\overline{\xi}}(A^{-1}(\overline{y} - \overline{a}))d\overline{y} \Longleftrightarrow \boxed{f_{\overline{\eta}}(\overline{y}) = \tfrac{1}{|\det(A)|} f_{\overline{\xi}}(A^{-1}(\overline{y} - \overline{a}))}$$

$\blacksquare$

Повернемося до щільності розподілу загального вектора:

$$f_{\overline{\eta}}(\overline{x}) = \frac{1}{|\det A|} f_{\overline{\xi}}(A^{-1}(\overline{x}-\overline{a})) = \frac{1}{|\det A|} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{<A^{-1}(\overline{x}-\overline{a}), A^{-1}(\overline{x}-\overline{a})>}{2}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det C}} \cdot e^{-\frac{<C^{-1}(\overline{x}-\overline{a}),(\overline{x}-\overline{a})>}{2}}$$

Якщо C - вироджена матриця ($\det C = 0 \Leftrightarrow \nexists C^{-1}$), то щільності немає.

3.6.3. Властивості гаусівських векторів.

1. Класс гаусівських векторів замкнений відносно афінних перетворень.

$$\overline{\eta} \sim N(\overline{a}, C) \qquad \overline{a} = \mathbb{E}\overline{\eta} \qquad C = C_{\overline{\eta}}$$

$$\overline{\theta} = D \cdot \overline{\eta} + \overline{b} \Longrightarrow \overline{\theta} \sim N(D\overline{a} + \overline{b}; DC_{\overline{\eta}}D^T)$$

Доведення. $\overline{\eta} = \overline{a} + A\overline{\xi}$, де $\overline{\xi}$ - загальний гаусівський вектор, $AA^T = C$.

$$\overline{\theta} = D\overline{\eta} + \overline{b} = D(\overline{a} + A\overline{\xi}) + \overline{b} = DA\overline{\xi} + (D\overline{a} + \overline{b})$$

$$\mathbb{E}\overline{\theta} = D\overline{a} + \overline{b} \qquad C_{\overline{\theta}} = (DA)(DA)^T = D(AA^T)D^T = DC_{\overline{\eta}}D^T$$

■

2. Нехай $\overline{\xi}$ - стандарний гаусівський вектор.
$\overline{\eta} = U\overline{\xi}$, де U - ортогональна матриця $\big(U \cdot U^T = I\big)$. Тоді $\overline{\eta} \sim N(\vec{0}, I)$.

$$\mathbb{E}\overline{\eta} = U \cdot \mathbb{E}\overline{\xi} = \vec{0} \qquad C_{\overline{\eta}} = U \cdot C_{\overline{\xi}} \cdot U^T = UU^T = I$$

3. Розглянемо довільний гаусівський вектор $\overline{\xi} = \begin{bmatrix}\xi_1 & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}$:

$$\boxed{\xi_1, ..., \xi_n \text{ - незалежні} \Longleftrightarrow \xi_1, ..., \xi_n \text{ - некорельовані}}$$

Тобто, для координат ГВВ незалежність еквівалентна некорельованості.

Доведення. Нехай величини $\xi_1, ..., \xi_n$ є некорельованими.

$$C_{\overline{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1,\xi_2) & \cdots & cov(\xi_1,\xi_n) \\ cov(\xi_2,\xi_1) & \mathbb{D}\xi_2 & \cdots & cov(\xi_2,\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\xi_n,\xi_1) & cov(\xi_n,\xi_1) & \cdots & \mathbb{D}\xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\chi_{\overline{\xi}}(\overline{t}) = e^{i<\overline{a},\overline{t}> - \frac{<C_{\overline{\xi}}\overline{t},\overline{t}>}{2}} = e^{i(a_1t_1 + ... a_nt_n) - \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2t_1^2 + ... + \sigma_n^2t_n^2\right)} =$$

$$= e^{\left(ia_1t_1 - \frac{\sigma_1^2t_1^2}{2}\right) + \left(ia_nt_n - \frac{\sigma_n^2t_n^2}{2}\right)} = \chi_{N(a_1,\sigma_1^2)}(t_1) \cdot ... \cdot \chi_{N(a_n,\sigma_n^2)}(t_n)$$

$$\left(\chi_{\overline{\xi}}(\overline{t}) = \chi_{N(a_1,\sigma_1^2)}(t_1) \cdot ... \cdot \chi_{N(a_n,\sigma_n^2)}(t_n)\right) \Leftrightarrow (\xi_1, ..., \xi_2 - \text{ незалежні.})$$

■

Наслідок 1. Якщо $\overline{\xi} = \begin{bmatrix}\xi_1 & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}$ - гаусівський вектор, то $\xi_1, ..., \xi_n$ - гаусівські величини. Візьмемо таку матрицю перетворення, що:

$$\xi_i = \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdot & 1 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_i \\ \vdots \\ \xi_n\end{bmatrix} - \text{афінне перетворення.}$$

У гаусівському векторі всі координати - гаусівські величини, але обернений факт може бути хибним. Тобто, гаусівські величини можуть об'єднуватися в негаусівський вектор. Якщо координати гаусівськи та незалежні, то вектор, складений із них, точно буде гаусівським.

3.6.4. Гаусівський вектор на площині.

Нехай, маємо вектор $\overline{\xi} = \begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{bmatrix}$ $\quad \begin{matrix}\xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2) \\ \xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2)\end{matrix} \quad r_{\xi_1, \xi_2} = r = \dfrac{cov(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}}$

$$\chi_{\overline{\xi}}(t_1, t_2) = e^{i(<\overline{a}, \overline{t}>) - \frac{1}{2}<C\overline{t}, \overline{t}>} = e^{i(a_1 t_1 + a_2 t_2) - \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2\right)}$$

Щільність розподілу: $f_{\overline{\xi}}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{2}}\sqrt{\det C}} e^{-\frac{1}{2}<C^{-1}(\overline{x} - \overline{a}), \overline{x} - \overline{a}>}$

$$\det C = \sigma_1^2\sigma_2^2 - (r\sigma_1\sigma_2)^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1 - r^2)$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - r^2)}\begin{bmatrix}\sigma_2^2 & -r\sigma_1\sigma_2 \\ -r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{r}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{r}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2}\end{bmatrix}$$

$$< C^{-1}(\overline{x} - \overline{a}), \overline{x} - \overline{a} >= \frac{1}{1 - r^2}\left(\frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r}{\sigma_1\sigma_2}(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\right)$$

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1 - r^2)}} e^{-\frac{1}{2(1 - r^2)}\left(\frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2r}{\sigma_1\sigma_2}(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\right)}$$

Маємо такі обмеження: $(\sigma_1, \sigma_2 \neq 0, |r| \neq 1)$.
Зокрема, якщо $r = 0 \Leftrightarrow \xi_1, \xi_2$ - некорельовані:

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2}\right)} = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1}{2\pi\sigma_2} e^{-\frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

— **Happy End** —

4. Функції від випадкових величин (векторів)

Для дискретної випадкової величини ξ: $\eta = \phi(\xi) \Rightarrow \eta$ - ДВВ.
Припустимо, що φ - неперервно диференційована. ξ - асолютно неперервна зі щільністю $f_\xi(x)$. Розглядаємо $\eta = \varphi(\xi)$:

Теорема 4.1. Нехай φ - взаємно-однозначна (бієкція на області значень), та її обернена ψ є неперервно диференційована. (Дифеоморфізм). Тоді:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} |\psi'(y)| \cdot f_\xi(\psi(y)), & y \in E_\varphi \\ 0 & y \notin E_\varphi \end{cases} = f_\xi(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)| \cdot \mathbb{I}_{E_\varphi}(y)$$

Доведення. Розглядаемо множину B.

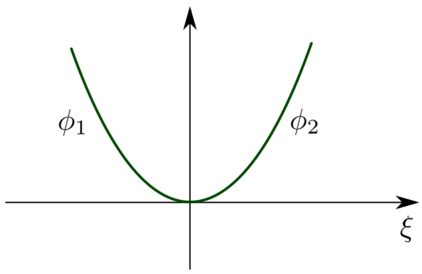
$$\int\limits_B f_\eta(y)dy = \mathbb{P}\{\eta \in B\} = \mathbb{P}\{\varphi(\xi) \in B\} = \mathbb{P}\left\{\xi \in \phi^{-1}(B)\right\} = \int\limits_{\phi^{-1}(B)} f_\xi(x)dx =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi(x) = y \\ x = \psi(y) \end{vmatrix} = \int\limits_{B \cap E_\varphi} f_\xi(\psi(y)) \cdot |J_\psi(y)|\, dy = \int\limits_B f_\xi(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)| \cdot \mathbb{I}_{E_\varphi}(y)dy$$

■

Теорема 4.2. Нехай ϕ не є ін'єкцією, але "розпадається" на декілька таких.

$$\varphi_1(x) = x^2, x \in (-\infty, 0)$$
$$\varphi_2(x) = x^2, x \in [0, +\infty]$$
$$E_{\varphi_1} = (0, +\infty) \quad E_{\varphi_2} = (0, +\infty)$$
$$\psi(x) = y \quad x^2 = y \quad x = \pm\sqrt{y}$$
$$\psi_1(y) = -\sqrt{y} \quad \psi_2(y) = \sqrt{y}$$



Тоді: $\boxed{f_\eta(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_\xi(\psi_i(y)) \cdot |\psi_i'(y)| \cdot \mathbb{I}_{E_{\varphi_i}}(y)}$.

Доведення. Розглядаемо множину B.

$$\int\limits_B f_\eta(y)dy = \mathbb{P}\{\eta \in B\} = \mathbb{P}\left\{\xi \in \phi_1^{-1}(B) \cup \dots \cup \xi \in \phi_n^{-1}(B)\right\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left\{\xi \in \phi_i^{-1}(B)\right\}$$

■

4.1. Функції від випадкових векторів.

Розглядаємо $\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad \eta = \varphi(\xi_1, \xi_2)$.

1. Для дискретного випадку обчислення тривіальні.
2. $\overline{\xi}$ - абсолютно неперервний випадковий вектор.

$$f_{\overline{\xi}}(\overline{x}) \Rightarrow \eta = \varphi(\overline{\xi}) \quad f_\eta(y) = ? \quad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Теорема 4.3. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n . \varphi$ - взаємно-однозначна $\Rightarrow \psi = \varphi^{-1}$.
φ, ψ - дифеоморфізми $\Rightarrow \exists J_\psi(\overline{y})$ - якобіан. Тоді:

$$f_{\overline{\eta}}(\overline{y}) = f_{\overline{\xi}}(\psi(\overline{y})) \cdot |J_\psi(\overline{y})| \cdot \mathbb{I}_{E_\varphi}(\overline{y})$$

Теорема 4.4. φ розпадаэться на суму ін'єктивних функцій $\varphi_1, ..., \varphi_k$.
$\varphi_i^{-1} = \psi_i$. $\quad E_i$ - область значень φ_i. $\quad J_{\psi_i}$ - якобіан ψ_i. Тоді:

$$f_\eta(\overline{y}) = \sum_{i=1}^{k} f_{\overline{\xi}}(\psi_i(\overline{y})) \cdot |J_{\varphi_i}(\overline{y})| \cdot \mathbb{I}_{E_{\varphi_i}}(\overline{y})$$

Часто будемо використовувати: $\boxed{f_{\xi_1+\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x, y-x)dx}$.

Якщо $\xi_1 \perp\!\!\!\perp \xi_2$: $\boxed{f_{\xi_1+\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y-x)dx}$.

Також: $f_{\xi_1+\xi_2}(y) = (f_{\xi_1}(x) \circledast f_{\xi 2}(y))$ - згортка.

4.2. Загальний алгоритм знаходження PDF

Розглядаємо $\eta = \varphi(\overline{\xi}) \quad f_\eta(z) = ?$.

$$F_\eta = \mathbb{P}\{\eta < z\} = \mathbb{P}\{\varphi(\xi_1, \xi_2) < z\} = \left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \middle| \varphi(x, y) < z \right\} = D_z \right| =$$

$$= \iint\limits_{D_z} f_{\overline{\xi}}(x, y)dxdy \Longrightarrow f_\eta(z) = F'_\eta(z)$$

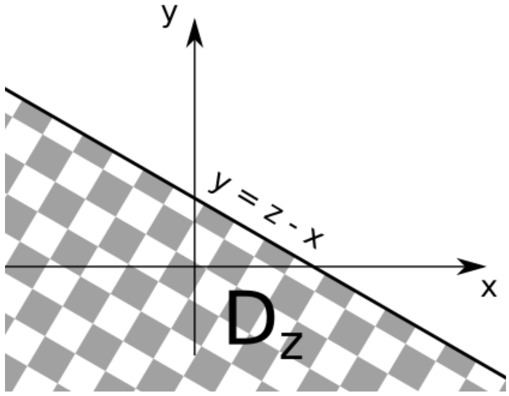
Знайдемо щільності розподілу суми, добутку та частки випадкових величин.

$$\xi_1, \xi_2, f_{\overline{\xi}}(x, y) \Longrightarrow f_{\xi_1+\xi_2}(z), f_{\xi_1 \cdot \xi_2}(x, y), f_{\xi_1/\xi_2}(x, y) - ?$$

Сума: $F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \mathbb{P}\left\{\xi_1+\xi_2<z\right\} = \mathbb{P}\left\{\overline{\xi}\in D_z\right\} = \iint\limits_{D_z} f_{\overline{\xi}}(x,y)dxdy =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{\overline{\xi}}(x,y)dy$$

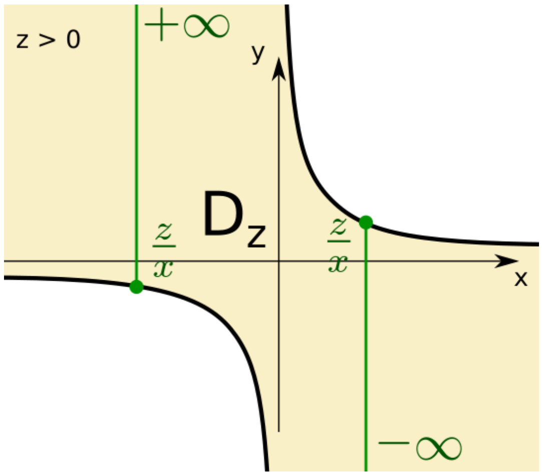
$$f_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,z-x)dx$$



$$f_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,z-x)dx = |\xi_1 \perp\!\!\!\perp \xi_2| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x)\cdot f_{\xi_2}(z-x)dx$$

Добуток: Шукаємо $f_{\xi_1\cdot\xi_2}$ $\quad F_{\xi_1\cdot\xi_2} = \mathbb{P}\left\{\xi_1\cdot\xi_2<z\right\}$.

$$x*y<z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y<\frac{z}{x} \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} y>\frac{z}{x} \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right.$$



$$F_{\xi_1\cdot\xi_2}(z) = \iint\limits_{D_z} f_{\overline{\xi}}(x,y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{0} dx \int\limits_{\frac{z}{x}}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,y)dy + \int\limits_{0}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f_{\overline{\xi}}(x,y)dy$$

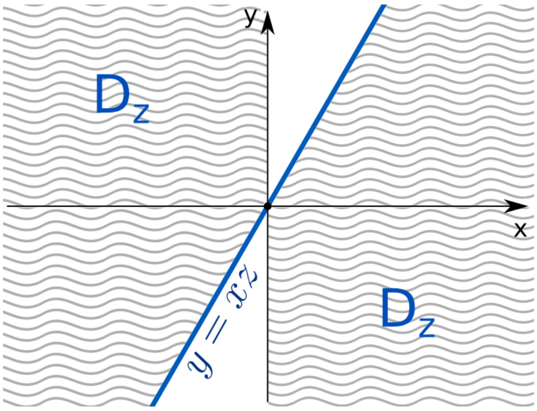
$$f_{\xi_1\cdot\xi_2}(z) = -\int\limits_{-\infty}^{0} f_{\overline{\xi}}(x,\frac{z}{x})\cdot\frac{1}{x}dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,\frac{z}{x})\cdot\frac{1}{x}dx$$

Відношення. Розглядаємо: $\overline{\xi} = \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}$ $\quad f_{\overline{\xi}}(x,y)$ $\quad \eta = \frac{\xi_2}{\xi 1}$. За алгоритмом:

$$F_\eta(z) = \mathbb{P}\left\{\frac{\xi_2}{\xi_1}<z\right\} = \mathbb{P}\left\{\overline{\xi}\in D_z\right\} = \iint\limits_{D_z} f_{\overline{\xi}}(x,y)dxdy$$

де, $D_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{y}{x} < z\right\}$ Якщо $z > 0$:

$$\frac{y}{x} < z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < xz \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y > xz \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



Повертаємося до інтегралу, що записано вище:

$$F_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} dx \int\limits_{zx}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,y)dy + \int\limits_{0}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{zx} f_{\overline{\xi}}(x,y)dy$$

$$f_\eta(z) = F_\eta'(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} f_{\overline{\xi}}(x,zx)xdx + \int\limits_{0}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,zx)xdx$$

Приклад. $\xi_1, \xi_2 \sim N(0,1) \quad \xi_1 \perp\!\!\!\perp \xi_2 \quad \eta = \frac{\xi_2}{\xi_1}$

Величини ξ_1, ξ_2 розподілені нормально: $f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = f_{\xi_2}(x)$.

$$f_\eta(z) = -\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2x^2}{2}} xdx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2x^2}{2}} xdx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} \underbrace{xdx}_{=d\left(\frac{x^2}{2}\right)} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} \underbrace{xdx}_{=d\left(\frac{x^2}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi(1+z^2)} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} d\left(\frac{x^2}{2}(1+z^2)\right) + \frac{1}{2\pi(1+z^2)} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} d\left(\frac{x^2}{2}(1+z^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1+z^2)} e^{-\frac{x^2}{2}(s+z^2)} \Bigg|_{x=-\infty}^{0} - \frac{1}{2\pi(1+z^2)} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} \Bigg|_{x=0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1+z^2)} + \frac{1}{2\pi(1+z^2)} = \frac{1}{\pi(1+z^2)}, z \in \mathbb{R}$$

Отримали, що: $\dfrac{N(0,1)}{N(0,1)} \sim$ **Cauchy Distribution**

4.3. Щільності розподілу максимума, мінімума, порядкових статистик.

4.3.1. Максимум.

Розглянемо максимум з деяких незалежних випадкових величин: $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

$$M = \max\{\xi_1, ..., \xi_n\}$$

$$F_M(x) = \mathbb{P}\{M < x\} = \mathbb{P}\{\max\{\xi_1, ..., \xi_n\} < x\} = \mathbb{P}\{\xi_1 < x, ..., \xi_n < x\} =$$
$$= \mathbb{P}\{\xi_1 M x\} \cdot ... \cdot \mathbb{P}\{\xi_n < x\} = F_{\xi_1}(x) \cdot ... \cdot F_{\xi_n}(x)$$

$$\boxed{F_M(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x)}$$

Якщо $\xi_1, ..., \xi_n$ однаково розподілені, то $F_M(x) = F_\xi^n(x)$. В такому випадку, можемо знайти і функцію розподілу: $f_M(x) = n \cdot F_\xi^{n-1}(x) \cdot f_\xi(x)$.

4.3.2. Мінімум.

Розглянемо мінімум з деяких незалежних випадкових величин: $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

$$m = \min\{\xi_1, ..., \xi_n\}$$

$$F_m(x) = \mathbb{P}\{\min \xi_1, ..., \xi_n < x\} = 1 - \mathbb{P}\{\min \xi_1, ..., \xi_n \geq x\} =$$
$$= 1 - \mathbb{P}\{\xi_1 \geq x, ..., \xi_n \geq x\} = 1 - (1 - F_{\xi_1}(x)) \cdot ... \cdot (1 - F_{\xi_n}(x))$$

$$\boxed{F_m(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{\xi_i}(x))}$$

Якщо $\xi_1, ..., \xi_n$ однаково розподілені, то $F_m(x) = 1 - (1 - F_\xi(x))^n$. В такому випадку, можемо знайти і функцію розподілу: $f_m(x) = n \cdot (1 - F_\xi(x))^{n-1} \cdot f_\xi(x)$.

4.3.3. Порядкові статистики.

$\xi_1, \xi_2 ..., \xi_n$ - незалежні однаково розподілені абсолютно неперервні випадкові величини зі щільністю f. Знайдемо: $\mathbb{P}\{\xi_i - \xi_j = 0\} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}\{\xi_i \neq \xi_j\} = 1$.
Це означає, що з імовірністю 1 всі величини різні. Тому, можемо впорядкувати величини за зростанням:

$$\underbrace{\xi_{(1)}}_{\min\{\xi_1,...,\xi_n\}} \quad < \quad \xi_{(2)} \quad < \quad \cdots \quad < \quad \underbrace{\xi_{(n)}}_{\max\{\xi_1,...,\xi_n\}}$$

$\xi_{(k)}, k \in [1, n]$ - k-та порядкова статистика (order statistics).
Щільність розподілу $\xi_{(k)}, k \in [1, n]$:

$$F_{\xi_{(k)}}(x) = \mathbb{P}\left\{\xi_{(k)} < x\right\} = \mathbb{P}\left\{\forall i \le k : \xi_i \in (-\infty, x)\right\} =$$

$$= \sum_{l=k}^{n} \underbrace{\mathbb{P}\left\{n(\xi_i \in (-\infty, x)) = l\right\}}_{\text{схема Бернуллі}} = \sum_{l=k}^{n} C_n^l \cdot F^l(x) \cdot \overline{F}^{n-l}(x)$$

$$f_{\xi_{(k)}}(x) = F'_{\xi_{(k)}}(x) = \sum_{l=k}^{n} C_n^l \left(lF^{l-1}(x)f(x)\overline{F}^{n-l}(x) - F^l(x)(n-l)\overline{F}^{n-l-1}(x)f(x) \right) =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{Телескопічна сума.} \\ \text{Доданки скорочуються.} \end{matrix} \right| = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(x) \cdot \overline{F}^{n-k}(x) \cdot f(x), k \in [1, n]$$

4.4. Знаходження числових характеристик функцій від випадкових величин.

Теорема 4.5. Нехай є випадковий вектор $\overline{\xi} = \begin{bmatrix}\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n\end{bmatrix}$. Та фукнція $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. В такому вигляді, ми не можемо застосувати теорему до характеристичної функції, адже характеристична функція є комплекснозначною. Але, слід зауважити, що умови теореми будуть виконуватися і в комплексному випадку.

$$\mathbb{E}\varphi(\overline{\xi}) = \underset{R^n}{\int \cdots \int} \varphi(x_1, ..., x_n) \cdot f_{\overline{\xi}}(x_1, ..., x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Доведення. Для 2-вимірного випадку. Дано:

$$n = 2 \qquad \overline{\xi} = \begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{bmatrix} \qquad \eta = \varphi(\xi_1, \xi_2)$$

Доведемо, що: $\mathbb{E}\varphi(\xi_1, \xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) f_{\overline{\xi}}(x, y) dx dy$

Спочатку доведемо одну допоміжну лему.

Лема. $\mathbb{P}\{\eta \geq 0\} = 1 \Longleftrightarrow \eta \geq 0$ м.н (a.s.). **Тоді** $\mathbb{E}\eta = \int\limits_0^{+\infty} \underbrace{\overline{F_\eta}(x) dx}_{1 - F_\eta(x) = \mathbb{P}\{\eta \geq x\}}$.

Доведення. (леми)

Раніше, за означенням: Більш загально:

$$\mathbb{E}\eta = \int\limits_0^{+\infty} x \cdot f_\eta(x) dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}\eta = \int\limits_0^{+\infty} \overline{F_\eta}(x) dx$$

$$\eta = \int\limits_0^{\eta} 1 dx = \int\limits_0^{+\infty} \mathbb{I}\{\eta \geq x\} dx \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\eta = \mathbb{E} \int\limits_0^{+\infty} \mathbb{I}\{\eta \geq x\} dx =$$

Можемо внести математичне сподівання під знак інтегралу.

$$= \int\limits_0^{+\infty} \underbrace{\mathbb{E}\mathbb{I}\{\eta \geq x\}}_{\mathbb{P}\{\eta \geq x\}} dx = \int\limits_0^{+\infty} \mathbb{P}\{\eta \geq x\} dx = \int\limits_0^{+\infty} \overline{F_\eta}(x) dx$$

■

Повернемося до доведення основної теореми. Нехай $\varphi(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

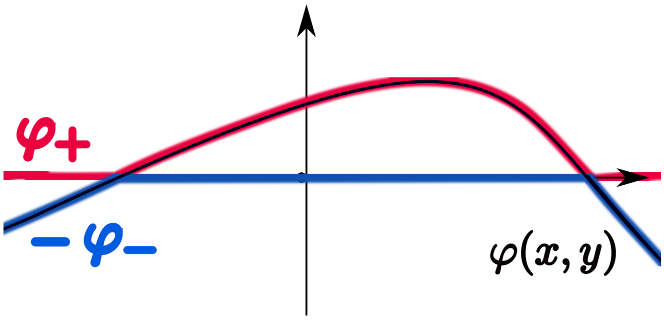
$$\mathbb{E}\eta = \underbrace{\mathbb{E}\varphi(\xi_1, \xi_2)}_{\geq 0} = \int\limits_0^{+\infty} \mathbb{P}\left\{\varphi(\xi_1, \xi_2) \geq z\right\} dz = D_z : \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \varphi(x, y) \geq z\right\} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \mathbb{P}\left\{\overline{\xi} \in D_z\right\} = \int\limits_0^{+\infty} \left(\iint\limits_{D_z} f_{\overline{\xi}}(x, y) dxdy \right) dz = \iint\limits_{R^2} f_{\overline{\xi}}(x, y) \left(\int\limits_0^{\varphi(x,y)} dz \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) \cdot f_{\overline{\xi}}(x, y) dxdy \quad \text{Що і треба було показати.}$$

Нехай $\varphi(x, y)$ - довільна. Скористаємося фактом, що будь-яку функцію можна зобразити як різницю двох невід'ємних функцій:

$$\varphi(x, y) = \varphi_+(x, y) - \varphi_-(x, y) \qquad \begin{aligned} \varphi_+(x, y) &= \max\left\{\varphi(x, y), 0\right\} \geq 0 \\ \varphi_-(x, y) &= -\min\left\{\varphi(x, y), 0\right\} \geq 0 \end{aligned}$$



$$\underbrace{\varphi_+ + (-\varphi_-)}_{\varphi_+ - \varphi_-} = \left[\begin{matrix} \varphi + 0 \\ 0 + \varphi \end{matrix} \right. = \varphi$$

$$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\varphi(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}\left(\varphi_+(\xi_1, \xi_2) - \varphi_-(\xi_1, \xi_2)\right) = \mathbb{E}\varphi_+(\xi_1, \xi_2) - \mathbb{E}\varphi_-(\xi_1, \xi_2) =$$

Застосовуємо висновок про математичне сподівання невід'ємної функції:

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi_+(x, y) f_{\overline{\xi}}(x, y) dxdy - \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi_-(x, y) f_{\overline{\xi}}(x, y) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\varphi_+(x, y) - \varphi_-(x, y)\right) f_{\overline{\xi}}(x, y) dxdy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) f_{\overline{\xi}}(x, y) dxdy \quad \text{Ч.и.т.д.}$$

$\blacksquare$

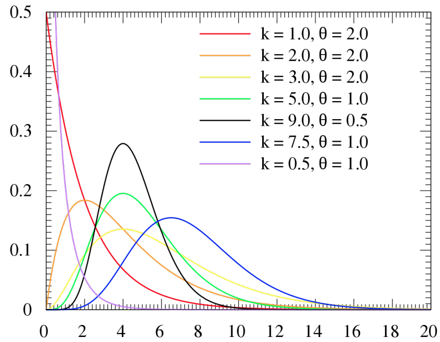
5. Деякі додаткові ймовірнісні розподіли.

5.1. Гамма-розподіл.

5.1.1. PDF.

Будемо називати гамма розподіленою величиною $\xi \sim \Gamma(\alpha, \beta) \quad \alpha, \beta > 0$:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$



За умовою нормування:

$$1 = c \int\limits_{9}^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{c}{\beta^\alpha} \underbrace{\int\limits_{0}^{+\infty} (\beta x)^{\alpha-1} e^{\beta x} d(\beta x)}_{\Gamma(\alpha)} = \frac{c \cdot \Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha} \Longrightarrow c = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$$

Розглянемо випадок $\alpha = 1$: $\qquad f_{\Gamma(1,\beta)}(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} = f_{Exp(\beta)}$

Тобто, экспоненціальний розподіл є окремим випадком гамма-розподілу.

5.1.2. Числові характеристики.

Знайдемо одразу n-тий момент величини $\xi \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.

$$\mathbb{E}\xi^n = \int\limits_{0}^{+\infty} x^n \cdot f_\xi(x) dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x^n \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} x^{\alpha+n-1} e^{-\beta x} dx =$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^{n+\alpha}} \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} (\beta x)^{\alpha+n-1} e^{-\beta x} d(\beta x) = \boxed{\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\beta^n \cdot \Gamma(\alpha)}}$$

$\mathbb{E}\xi = (n = 1) = \frac{1}{\beta \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha + 1) = \frac{\alpha}{\beta}$

$\mathbb{E}\xi^2 = (n = 2) = \frac{1}{\beta^2 \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha + 2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$

$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$

5.1.3. Стійкість відносно додавання.

Експоненціальний розподіл не є стійким відносно додавання, але більш широкий класс - гамма розподілів буде мати таку властивість.

Теорема 5.1 (Про напівстійкість Гамма-розподілу.).

$$\perp\!\!\!\perp \begin{cases} \xi_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta) \\ \xi_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\xi_1 + \xi_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)}$$

Доведення. За умовою, маємо:

$$f_{\xi_1} = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0; \end{cases} \qquad f_{\xi_2} = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$$

Скористаємося правилом згортки: $\quad f_{\xi_1+\xi_2}(y) = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y - x) dx =$

$$= \tfrac{\beta^{\alpha_1}\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int\limits_0^y x^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta x} (y - x)^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta(y - x)} dx = \left| \underbrace{\begin{cases} x > 0 \\ y - x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < y \end{cases}}_{x \in (0, y)} \right| \ominus$$

Зауваження. Надалі будемо вважати, що при $y \le 0 \quad f_{\xi_1+\xi_2}(y) = 0$.

$$\ominus \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int\limits_0^y x^{\alpha_1 - 1} (y - x)^{\alpha^2 - 1} dx = \left| \begin{matrix} x = yt \quad dx = ydt \\ x : 0 \to y \\ t : 0 \to 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int\limits_0^1 y^{\alpha_1 - 1} t^{\alpha_1 - 1} y^{\alpha_2 - 1} (1 - t)^{\alpha_2 - 1} y dt =$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \cdot y^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot \underbrace{\int\limits_0^1 t^{\alpha_1 - 1} (1 - t)^{\alpha_2 - 1} dt}_{\beta(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}} = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot y^{\alpha_1+\alpha_2-1} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot y^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta y}, & y > 0; \\ 0 & y \le 0; \end{cases} = f_{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \beta)}(y)$$

■

5.2. Chi-square distribution with n degrees of freedom.

5.2.1. PDF.

Розглядаємо $\xi_1, ..., \xi_n$ - незалежні гаусівські $N(0,1)$. Інакше: $\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \sim N(\vec{0}, I)$.

Розподіл χ^2_n - це закон розподілу $\left|\left|\overline{\xi}\right|\right|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

$n = 1$. Шукаємо: $\xi^2, \xi \sim N(0,1)$.

$$\varphi(x) = x^2 \quad x^2 = y \Longrightarrow x = \pm\sqrt{y} \Longrightarrow \begin{matrix} \psi_1(y) = -\sqrt{y} \\ \psi_2(y) = \sqrt{y} \end{matrix} \quad E_{\varphi_1} = \mathbb{E}_{\varphi_2} = [0, +\infty]$$

$$f_{\varphi(\xi)}(y) = \sum_{i=1}^{2} f_\xi\left(\psi_i(y)\right) \cdot |\psi_i'(y)| \cdot \mathbb{I}\left\{y \in E_{\varphi_i}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{x=-\sqrt{y}} \cdot \left|(-\sqrt{y})'\right| \cdot \mathbb{I}R_+(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{x=\sqrt{y}} \cdot \left|(\sqrt{y})'\right| \cdot \mathbb{I}R_+(y) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \mathbb{I}R_+(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0; \\ 0, & y \le 0 \end{cases} = f_{\chi_1^2}(y)$$

$n \in \mathbb{N}$. Шукаємо: $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \quad \forall \xi_i : \xi_i \sim N(0,1)$.

Розглянемо щільність $f_{\chi_1^2}(y)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0; \\ 0, & y \le 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0; \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

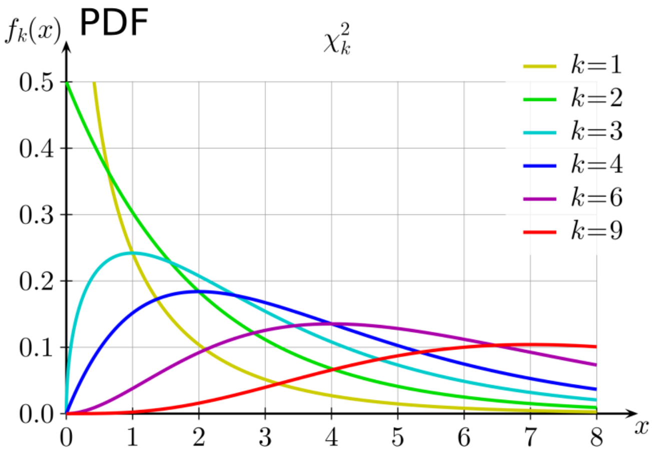
Впізнаємо гамма-розподіл:

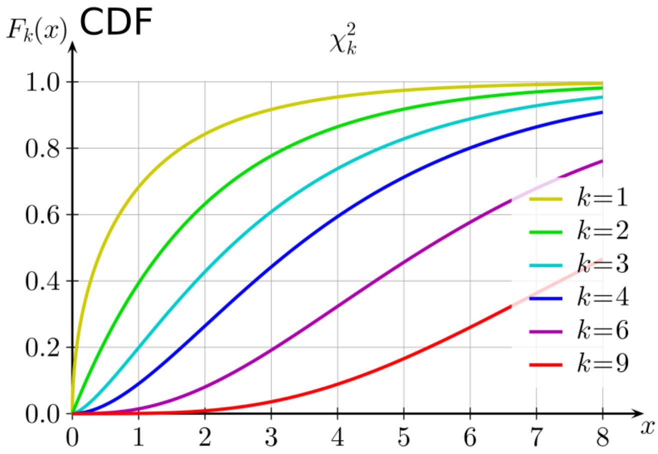
$$\chi_1^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Тоді, χ_n^2 це сумма n-незалежних χ_1^2: $\chi_n^2 = \underbrace{\chi_1^2 + ... + \chi_1^2}_{n} = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$f_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0; \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$$

$n = 2$. Зокрема, в такому випадку, отримаємо: $\chi_2^2 = \Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right) = Exp\left(\frac{1}{2}\right)$.





5.2.2. Числові характеристики.

$\mathbb{E}\chi^2_n = \mathbb{E}\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = n \quad \left[\mathbb{E}\left(\xi_1^2 + ... \xi_n^2\right) = \mathbb{E}\xi_1^2 + ... + \mathbb{E}\xi_n^2 = n\right]$
$\mathbb{D}\chi^2_n = \mathbb{D}\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2n$

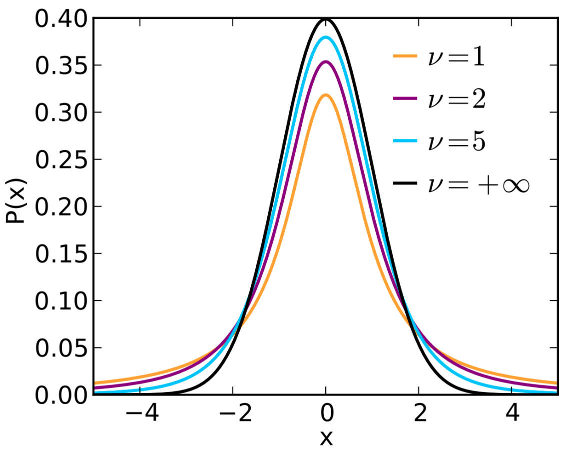
5.3. t-розподіл Стьюдента з n степенями вільності.

Позначається t_n або St_n. Розглядаємо розподіл такої величини η:

$$\eta = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}{n}}} = \xi_0 \frac{n}{\sqrt{\chi^2_n}},$$

де $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n$– незалежні стандартні гаусівські величини.

$$f_{St_n}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$



The PDF of the Student distribution.

Слід зауважити, що у випадку $n = 1 : St_1$ отримаємо розподіл Коші:

$$f_{St_1}(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

Якщо спрямуємо $n \to \infty$, отримаємо стандартний гаусівський розподіл:

$$f_{St_\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

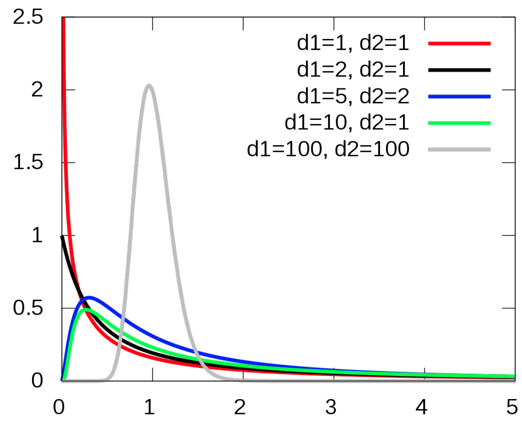
5.4. Розподіл Фішера(-Снедекора)

Позначається $F_{m,n}$. Розглядаємо розподіл такої величини ω :

$$\omega = \frac{\left(\xi_1^2 + ... + \xi_m^2\right)/m}{\left(\eta_1^2 + ... + \eta_n^2\right)/n}$$

де $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m, \eta_1, ..., \eta_n$– незалежні стандартні гаусівські величини.

$$f(x; d_1, d_2) = \frac{\sqrt{\frac{(d_1 x)^{d_1} d_2^{d_2}}{(d_1 x + d_2)^{d_1+d_2}}}}{x\beta\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)}$$



The PDF of the F-distribution

6. Граничні теореми теорії ймовірностей

6.1. Нерівність Чебишова.

ξ - випадкова величина, для якої $\exists \mathbb{E}\xi$ $\exists \mathbb{D}\xi$.

Знаємо, що $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$. Але дисперсія є більше теоретичною величиною. Наприклад, розглянемо прилад, який перестає працювати якщо напруга в мережі $\xi = U_{\text{м}}$ відхиляється $\xi < 180$ або $\xi > 260$.
Інакше кажучи, якщо $|\xi - \mathbb{E}\xi| > 40$ - прилад не працює. Нас цікавить ймовірність $\mathbb{P}\left\{|\xi - \mathbb{E}\xi| > a\right\}$=?. Але, знаючи дисперсію, не зрозуміло, як пов'язати цю характеристику з ймовірністю зазначеної критичної події.
Саме таку оцінку дає нерівність Чебишова.

Теорема 6.1 (нерівність Чебишова)**.** Якщо $\exists \mathbb{D}\xi$, то:

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}\left\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq a\right\} \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{a^2}$$

Перевага: Обчислюється лише через дисперсію. Не залежить від розподілу.
Недолік: нерівнісь дає дуже грубу оцінку ймовірності.

Наслідок.

$$\mathbb{P}\left\{|\xi - \mathbb{E}\xi| < a\right\} = \mathbb{P}\left\{\xi \in (\mathbb{E}\xi - a, \mathbb{E}\xi + a)\right\} \geq 1 - \frac{\mathbb{D}\xi}{a^2}$$

Лема. (нерівність Маркова) η - невід'ємна випадкова величина $\mathbb{P}\left\{\eta \geq 0\right\} = 1$.
Тоді: $\boxed{\mathbb{P}\left\{\eta \geq a\right\} \leq \frac{\mathbb{E}\eta}{a}}$

Доведення.

$$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\left(\eta \cdot \mathbb{I}\left\{0 \leq \eta < a\right\} + \eta \cdot \mathbb{I}\left\{\eta \geq a\right\}\right) = \mathbb{E}\eta \cdot \mathbb{I}\left\{\eta < a\right\} + \mathbb{E}\eta \cdot \mathbb{I}\left\{\eta \geq a\right\} \geq$$
$$\geq \mathbb{E}\eta \cdot \mathbb{I}\left\{\eta \geq a\right\} \geq \mathbb{E}a \cdot \mathbb{I}\left\{\eta \geq a\right\} = a \cdot \mathbb{E}\mathbb{I}\left\{\eta \geq a\right\} = a \cdot \mathbb{P}\left\{\eta \geq a\right\}$$

∎

Доведення. (До нерівності Чебишова.) Очевидно, що:

$$\eta = (\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geq 0$$

За нерівністю Маркова:

$$\mathbb{P}\left\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq a\right\} = \mathbb{P}\left\{(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geq a^2\right\} \leq \frac{\mathbb{E}\left(\xi - \mathbb{E}\xi\right)^2}{a^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{a^2}$$

∎

6.2. Види збіжності випадкових величин

З мат. аналізу пам'ятаємо означення збіжності числової послідовності:

Означення. (Нагадування)
Послідовність $\left\{x_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ збігається до x якщо:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N \; |x_n - x| < \varepsilon$$

Для (ξ_n) - послідовності випадкових величин, єдиного аналогічного означення не існує. Тому, доведеться розглянути декілька видів видів збіжності.

6.2.1. Збіжність з імовірністю 1.

Позначення: $\boxed{\textbf{м.н.}\text{-збіжність.}}$

Означення. Нехай задана послідовність $(\xi_n) = \left\{\xi_n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$, тоді:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{м.н.}} \xi \iff \mathbb{P}\left\{\xi_n \to \xi\right\} = 1 \iff \mathbb{P}\left\{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\right\} = 1$$

називається збіжністю з імовірністю 1 або м.н. збіжністю.

1) Найбільш природній вид збіжності.

2) Досить незручний для використання.

6.2.2. Збіжність в середньому квадратичному.

Позначення: $\boxed{\mathbb{L}_2\text{-збіжність.}}$

Означення. Нехай задана послідовність $(\xi_n) = \left\{\xi_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$, тоді:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{L}_2} \xi \iff \mathbb{E}\left(\xi_n - \xi\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

називається збіжністю в середньому квадратичному.

6.2.3. Збіжність в середньому.

Позначення: $\boxed{\mathbb{L}_1\text{-збіжність.}}$

Означення. Нехай задана послідовність $(\xi_n) = \left\{\xi_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$, тоді:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{L}_2} \xi \iff \mathbb{E}\left|\xi_n - \xi\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

називається збіжністю в середньому.

6.2.4. Збіжність за імовірністю.

Позначення: $\boxed{\mathbb{P}\text{-збіжність.}}$

Надалі **критичною подією** будемо називати велике відхилення однієї величини від іншої на фіксоване додатнє число, тобто: $\varepsilon > 0 : |\xi_n - \xi| > \varepsilon$.

Означення. Нехай задана послідовність $(\xi_n) = \left\{\xi_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$, тоді:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

називається збіжністю за імовірністю.

Зауваження. Для збіжності за імовірністю справедливою є еквівалентність:

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \;\; \mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0 \;\; \mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi| \le \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\right)$$

6.2.5. Взаємозв'язок збіжностей.

Кожна стрілки відповідає теоремі, що описує зв'язок збіжностей.

Пунктирні стрілки 1 та 2 потребують додаткового пояснення:

①. Завжди існує м.н.-збіжна підпослідовність.

②. Виконується, якщо $\xi = const$.

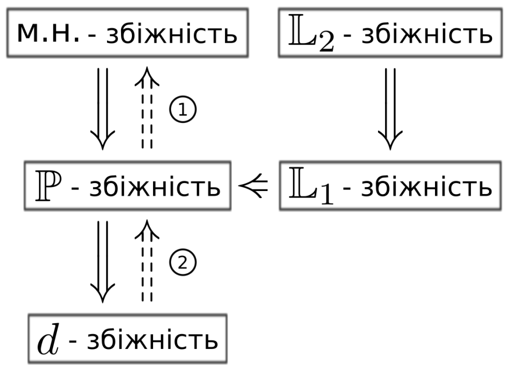


Схема зв'язку різних видів збіжності.

Лема. (Нерівність Ляпунова (ч.в.))

$$\mathbb{E}\,|\eta| \le \sqrt{\mathbb{E}\eta^2}$$

Доведення. $\mathbb{E}(|\eta|^2) - (\mathbb{E}\,|\eta|)^2 = \mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E}\,|\eta|)^2 = \mathbb{D}\,|\eta| \ge 0 \Rightarrow \mathbb{E}\,|\eta| \le \sqrt{\mathbb{E}\eta^2}$ ■

Теорема. Покажемо, що $\mathbb{L}_2 \Longrightarrow \mathbb{L}_1$, тобто:

$$\mathbb{L}_2 : \mathbb{E}(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbb{L}_1 : \mathbb{E}\,|\xi_n - \xi| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Доведення. За нерівністю Ляпунова та правилом "2-ох міліціонерів":

$$0 \le \underbrace{\mathbb{E}\,|\xi_n - \xi|}_{\to 0} \le \sqrt{\mathbb{E}(\xi_n - \xi)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \;\; \Longleftarrow \;\; \mathbb{L}_2\text{-збіжність.}$$

■

Теорема. Покажемо, що $\mathbb{L}_1 \Longrightarrow \mathbb{P}$, тобто:

$$\mathbb{L}_1 : \mathbb{E}\left|\xi_n - \xi\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbb{P}: \quad \forall\varepsilon > 0 : \mathbb{P}\left\{\left|\xi_n - \xi\right| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Доведення. Підставимо $|\xi_n - \xi|$ у нерівність Маркова:

$$0 \le \underbrace{\mathbb{P}\left\{\left|\xi_n - \xi\right| > \varepsilon\right\}}_{\to 0} \le \frac{\mathbb{E}\left|\xi_n - \xi\right|}{\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \mathbb{L}_1\text{-збіжність.}$$

За правилом "2-ох міліціонерів" отримали збіжність імовірності до 0. ■

6.2.6. Збіжність за розподілом (слабка збіжність).

Позначення: $\boxed{\textbf{d}\text{-збіжність.}}$

Означення. Нехай задана послідовність $(\xi_n) = \left\{\xi_n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$, тоді:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi \iff \begin{matrix} F_\xi(x) \in C^1(D) \\ F_{\xi_n}(x) \in C^1(D) \end{matrix} \quad \forall x \in D : \underbrace{F_{\xi_n}(x)}_{\mathbb{P}\{\xi_n < x\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{F_\xi(x)}_{\mathbb{P}\{\xi < x\}}$$

називається збіжністю за розподілом.

Теорема. Покажемо, що $d \Longrightarrow \mathbb{P}$ якщо $\xi = const$, тобто:

$$d: \quad \exists C \in \mathbb{R} \ \ \forall x \neq C : F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_C(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbb{P}: \quad \forall\varepsilon > 0 : \mathbb{P}\left\{\left|\xi_n - C\right| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Доведення. Умову збіжності послідовності (ξ_n) за розподілом до константи $\exists C \in \mathbb{R}$ природнім чином можна представити як:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} C \iff \mathbb{P}\left\{\xi_n < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0, & x \le C; \\ 1, & x > C; \end{cases} = F_C(x)$$

В той же час, умову збіжності за імовірністю можна розписати так:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} C \iff \forall\varepsilon > 0 \ \ \mathbb{P}\left\{\xi_n \in [C - \varepsilon, C + \varepsilon]\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Розпишемо, скориставшись правилом $\mathbb{P}\{\xi \in [a,b)\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$:

$$1 \geq \mathbb{P}\{\xi_n \in [C-\varepsilon, C+\varepsilon]\} \geq \mathbb{P}\{\xi \in [C-\varepsilon, C+\varepsilon]\} =$$

$$= F_{\xi_n}(C+\varepsilon) - F_{\xi_n}(C-\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_C(C+\varepsilon) - F_C(C-\varepsilon) = 1 - 0 = 1$$

Тому, за правилом "2-ох міліціонерів", отримали збіжність послідовності (ξ_n) за імовірністю до константи C. Отже: $d \xRightarrow{\xi=const} \mathbb{P}$. ■

Зауваження. Для всіх видів збіжності виконуються арифм. власт. границь.

6.2.7. Критерій середньоквадратичної збіжності до константи.

Теорема 6.2. Нехай задана послідовність $(\xi_n) = \left\{\xi_n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$, тоді:

$$\exists C \in \mathbb{R} : (\xi_n) \xrightarrow{\mathbb{L}_2} C \iff \begin{cases} \mathbb{E}\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} C; \\ \mathbb{D}\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0; \end{cases}$$

Доведення.

$$(\xi_n) \xrightarrow{\mathbb{L}_2} C \iff \mathbb{E}(\xi_n - C)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \mathbb{E}\left((\xi_n - \mathbb{E}\xi_n) + (\mathbb{E}\xi_n - C)\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff$$

$$\iff \mathbb{E}(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)^2 + \mathbb{E}\left((\mathbb{E}\xi_n - C)^2\right) + 2\mathbb{E}(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)(\mathbb{E}\xi_n - C) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff$$

$$\iff \mathbb{D}\xi_n + (\mathbb{E}\xi_n - C) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \begin{cases} \mathbb{E}\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} C; \\ \mathbb{D}\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0; \end{cases}$$

■

Теорема 6.3 (Окремий випадок теореми неперервності П.Леві).

$$(\xi_n) \xrightarrow{d} \xi \iff \forall t \in \mathbb{R} \quad \underbrace{\chi_{\xi_n}(t)}_{\mathbb{E}e^{it\xi_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{\chi_\xi(t)}_{\mathbb{E}e^{it\xi_n}}$$

Без доведення. ■

6.3. Закон великих чисел (ЗВЧ).

Маємо $\xi_1, \xi_2, ...$, тоді:

$$\underbrace{\frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n}}_{\text{вибіркове середнє}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\xi$$

Теорема 6.4. (ЗВЧ для незалежних, однаково розподілених величин) $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - незалежні, однаково розподілені випадкові величини.
Нехай $\exists \mathbb{E}\xi_i = a$. **Тоді**:

$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} a \qquad \left(\mathbb{P}\left\{\frac{\xi_1 - a + ... + \xi_n - a}{n} > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$$

Доведення. (за додаткової умови існування дисперсії $\exists \mathbb{D}\xi_i$, що , але з послабленим припущенням про некорельованість замість незалежності.)

$$\overline{\xi} = \frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} : \begin{array}{l} \mathbb{E}\overline{\xi}_n = \mathbb{E}\dfrac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} = \dfrac{\mathbb{E}\xi_1 + ... + \mathbb{E}\xi_n}{n} = \dfrac{na}{a} = a \\ \mathbb{D}\overline{\xi}_n = \mathbb{D}\dfrac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} = \dfrac{\mathbb{D}\xi_1 + ... + \mathbb{D}\xi_n}{n^2} = \dfrac{n\mathbb{D}\xi}{n^2} = \dfrac{\mathbb{D}\xi}{n} \end{array}$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}\overline{\xi}_n = a \xrightarrow[n\to\infty]{} a \\ \mathbb{D}\overline{\xi}_n = \dfrac{\mathbb{D}\xi}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases} \Longrightarrow \overline{\xi}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{L}_2} a \Longrightarrow \overline{\xi}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} a$$

■

Доведення. (без припущення про існування $\mathbb{D}\xi$)
Введемо характеристичну функцію $\chi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}$. Тоді:

$$\chi_{\frac{\xi_1+...+\xi_n}{n}}(t) = \mathbb{E}e^{\frac{it}{n}(\xi_1+...+\xi_n)} = \chi_{\xi_1+...+\xi_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \underbrace{\chi_\xi\left(\frac{t}{n}\right) \cdot ... \cdot \chi_\xi\left(\frac{t}{n}\right)}_{n} = \chi_\xi^n\left(\frac{t}{n}\right)$$

Розпишемо в ряд Тейлора:

$$\chi_\xi(h) = \chi_\xi(0) + \frac{\chi'_\xi(0)}{1!}h + o(h) \quad h \to 0$$

$$\chi_\xi(h) = \left|\frac{\chi'_\xi(0)}{i} = \mathbb{E}\xi\right| = 1 + ia \cdot h + o(h) \quad h \to 0$$

$$\chi_\xi\left(\frac{t}{n}\right) = 1 + \frac{iat}{n} + o(\frac{1}{n}) \quad n \to \infty$$

Отримали:

$$\chi_{\bar{\xi}_n}(t) = \chi_\xi^n\left(\frac{t}{n}\right) = \left[1 + \frac{iat}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \quad n \to \infty$$

$$\ln \chi_{\bar{\xi}_n}(t) = n \ln\left[1 + \frac{iat}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \sim n\left[\frac{iat}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = iat + o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

$$\chi_{\bar{\xi}_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{iat} = \mathbb{E}e^{iat} = \chi_\xi(t) \quad \boxed{\xRightarrow{\text{т. Леві}}}$$

$$\boxed{\Longrightarrow}\bar{\xi}_n = \frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} a \Rightarrow \boxed{\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} a}$$

■

Теорема 6.5. (посилений ЗВЧ А.М.Колмогорова.)
$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - незалежні, однаково розподілені випадкові величини.

$$\text{Нехай } \exists \mathbb{E}\xi_i = a. \textbf{ Тоді: } \frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{м.н.}} a$$

Без доведення. ■

6.4. ЗВЧ для різнорозподілених випадкових величин.

6.4.1. Формулювання.

Теорема 6.6. $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - незалежні випадкові величини. Нехай $\begin{matrix} \exists \mathbb{E}\xi_i = a_i \\ \exists \mathbb{D}\xi_i = \sigma_i^2 \end{matrix}$.
Додатково накладемо умову рівномірної обмеженості: $\exists C > 0 : \sigma_i^2 < C$.

Тоді: $\dfrac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} - \dfrac{a_1 + ... + a_n}{n} = \dfrac{(\xi_1 - a_1) + ... + (\xi_n - a_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P},\mathbb{L}_2} 0$

Доведення.

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(\dfrac{(\xi_1 - a_1) + ... + (\xi_n - a_n)}{n}\right) = \dfrac{\overbrace{\mathbb{E}(\xi_1 - a_1)}^{=0} + ... + \overbrace{\mathbb{E}(\xi_n - a_n)}^{=0}}{n} = 0 \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \mathbb{D}\left(\dfrac{(\xi_1 - a_1) + ... + (\xi_n - a_n)}{n}\right) = \dfrac{\mathbb{D}(\xi_1 - a_1) + ... + \mathbb{D}(\xi_n - a_n)}{n^2} = \\ = \dfrac{\mathbb{D}\xi_1 + ... + \mathbb{D}\xi_n}{n} - \dfrac{a_1 + ... + a_n}{n^2} = \dfrac{\sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2}{n^2} \leq \dfrac{C \cdot n}{n^2} = \dfrac{C}{n} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

З цього слідує: $\frac{(\xi_1 - a_1) + ... + (\xi_n - a_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{L}_2,\mathbb{P}} 0$ ■

6.4.2. ЗВЧ для схеми Бернуллі.

Успіх: p. Невдача: $q = 1 - p$.
Введемо величину $\xi_i = \mathbb{I}\{\text{на і-тому випробуванні відбувся успіх}\}$

$$\begin{matrix} \xi_i & 0 & 1 \\ \mathbb{P} & q & p \end{matrix} \quad \mathbb{E}\xi_i = p$$

За ЗВЧ Колмогорова:

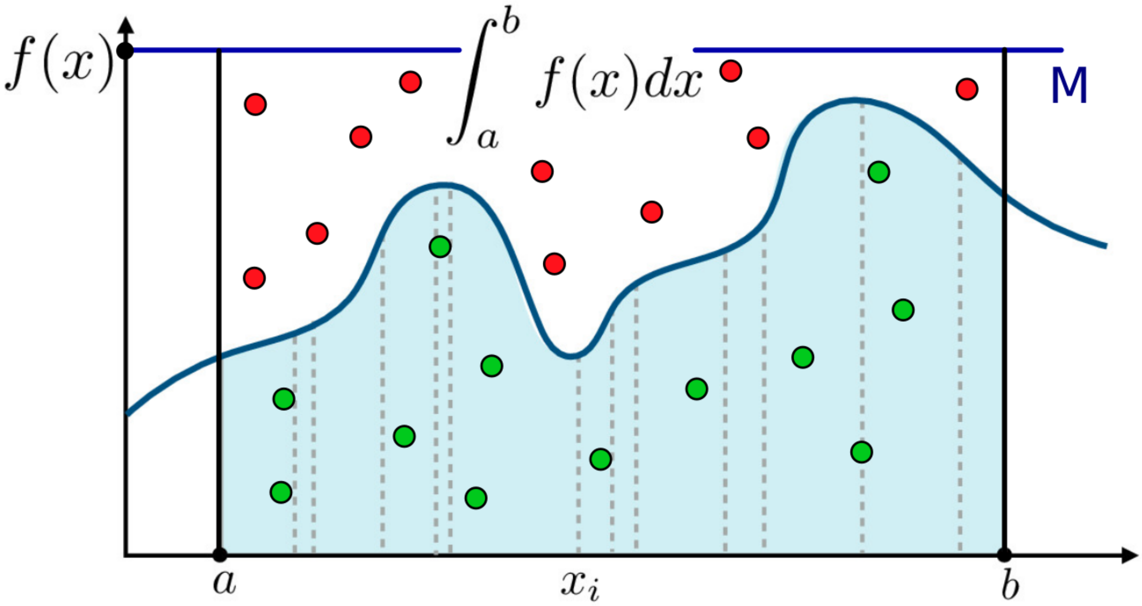
$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{L}_2,\mathbb{P},\text{м.н}} \mathbb{E}\xi_i = p$$

$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n}$ - відносна частота успіхів $= \nu_n \Longrightarrow \boxed{\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{L}_2,\text{м.н}} p}$

6.4.3. Методи Монте-Карло.

Приклад. Методи Монте-Карло дозволяють чисельно розв'язувати нестохастичні (детерміновані) задачі задопомогою стохастичних методів.

Шукаємо приблизне значення $\int\limits_b^a f(x)dx$ при $M \geq f(x) \geq 0$ - обмежена на $[a, b]$.



Вибираємо незалежні: $\xi_n \sim U(a, b)$.

$f(\xi_1), ...f(\xi_n)$ - незалежні, однаково розподілені з математичним сподіванням:

$$\mathbb{E}f(\xi_i) = \int\limits_b^a f(x) \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_b^a f(x)dx$$

Застосуємо закон великих чисел:

$$\frac{f(\xi_1) + ... + f(\xi_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{м.н.}} \mathbb{E}f(\xi)$$

Якщо взяти $n >> 1$:

$$\frac{f(\xi_1) + ... + f(\xi_n)}{n} \approx \frac{1}{b-a}\int\limits_b^a f(x)dx$$

Інакше:

$$\int\limits_b^a f(x)dx \approx (b-a) \cdot \frac{f(\xi_1) + ... + f(\xi_n)}{n}$$

Приклад. (Другий спосіб) Розглядаємо прямокутник $\Pi = (a, b) \times M$.
Випадкові вектори $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{bmatrix}$ - точки всередині прямокутника П.
Схема Бернуллі: n випробувань. Успіх: потрапляння точки під графік $f(x)$.

$$p = \mathbb{P}\{\text{успіх}\} = \frac{S_{\text{під графіком}}}{S_\Pi} = \frac{\int\limits_b^a f(x)dx}{M(b-a)}$$

Частота влучання під графік: $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{м.н}} p = \frac{\int_b^a f(x)dx}{M(b-a)}$.
Якщо $n >> 1$, то $\int\limits_b^a f(x)dx \approx M(b-a)\nu_n = M(b-a) \cdot \frac{\text{к-сть точок під графіком}}{n}$.

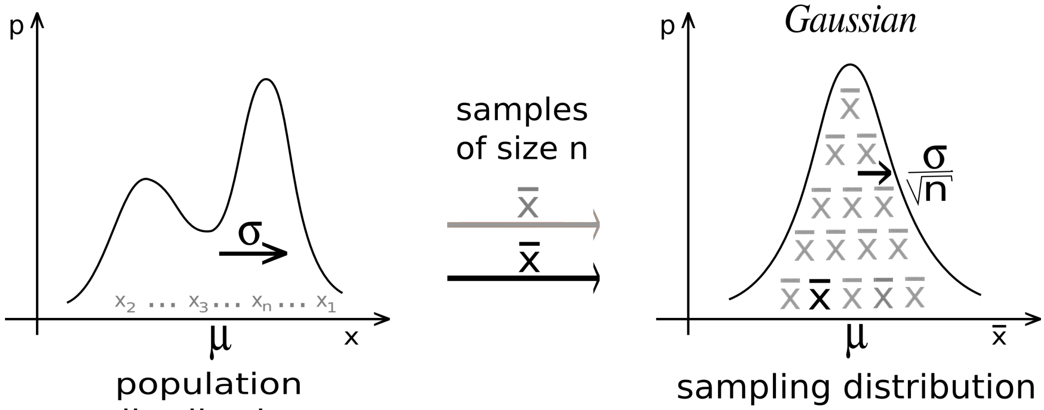
6.5. Центральна гранична теорема та її застосування.

6.5.1. Формулювання.

Теорема 6.7. (Для незалежних, однаково розподілених величин).
$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - незалежні, однаково розподілені випадкові величини.
Нехай $\exists \mathbb{E}\xi_i = m \;\; \exists \mathbb{D}\xi_i = \sigma^2$.

$$\textbf{Тоді}: \; \frac{(\xi_1 - m) + ... + (\xi_n - m)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \gamma \sim N(0,1)$$

Неформально говорячи, класична ЦГТ стверджує, що сума з n незалежних величин однаково розподілених має розподіл, близький до $N(nm, n\sigma^2)$. Якою б не була форма розподілу генеральної сукупності, вибірковий розподіл наближається до нормального, а його дисперсія задається ЦГТ.



Доведення. $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - незалежні, однаково розподілені випадкові величини. Будемо позначати: $\xi_1 - m = \eta_1 \ \cdots \ \xi_n - m = \eta_n$. Тоді:

$$\mathbb{E}\eta_i = \mathbb{E}(\xi_i - m) = \mathbb{E}\xi_i - m = m - m = 0 \qquad \chi(t) = \chi_{\eta_i}(t)$$

$$\chi_{\frac{\eta_1+...+\eta_n}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E}\exp\left\{it \cdot \frac{\eta_1 + ... + \eta_n}{\sigma\sqrt{n}}\right\} = \chi_{\eta_1+...+\eta_n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \chi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Хочемо знайти границю характеристичноъ функції на $n \to \infty$. Позначимо:

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{\frac{(\xi_1-m)+...+(\xi_n-m)}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = L(t) = \lim_{n\to\infty} \chi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\ln L(t) = \lim_{n\to\infty} n \ln \chi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \circleddash$$

Розпишемо характеристичну функцію у ряд Тейлора:

$$\chi(h) = \chi_\eta(h) = \chi(0) + \frac{\chi'(0)}{1!}h + \frac{\chi''(0)}{2!}h^2 + o(h^2) = \qquad h \to 0$$

$$= \left| \begin{array}{c} \dfrac{\chi'(0)}{i} = \mathbb{E}\eta = 0 \\ \dfrac{\chi''(0)}{i^2} = -\mathbb{E}\eta^2 = -\mathbb{D}\eta = -\sigma^2 \end{array} \right| = 1 - \frac{\sigma^2}{2}h^2 + o(h^2) \qquad h \to 0$$

$$\chi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{t^2}{n\sigma^2} + o\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad n \to +\infty$$

Підставивши у границю, отримаємо:

$$\circleddash \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{t^2}{2}$$

Отже, для початкової границі маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{\frac{(\xi_1-m)+...+(\xi_n-m)}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = L(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \chi_{N(0,1)}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \boxed{\xrightarrow{\text{т. Леві}}}$$

$$\boxed{\Longrightarrow} \quad \frac{(\xi_1 - m) + ... + (\xi_n - m)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \gamma \sim N(0,1)$$

■

Зауваження. При великих n: $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n \approx N(nm, n\sigma^2)$. Тоді:

$$\mathbb{P}\{a \le S_n \le\} \approx \mathbb{P}\{a \le \gamma_n \le b\} = \Phi\left(\frac{b - mn}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - mn}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

6.5.2. Використання ЦГТ у схемі Бернуллі.

- p - імовірність успіху.
- $q = 1 - p$ - імовірність невдачі.
- $\varepsilon_i = \mathbb{I}\{\text{на і-тому випробуванні - успіх}\} \in \{0, 1\}$
- $\mathbb{E}\epsilon_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$
- $\mathbb{E}\varepsilon_i^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p$
- $\mathbb{D}\varepsilon_i = \mathbb{E}(\varepsilon_i)^2 - (\mathbb{E}\varepsilon_i)^2$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \quad \Longrightarrow \quad n >> 1 : \text{ ЦГТ } S_n \approx N(nm, n\sigma^2) = N(np, npq)$$

Інтегральна формула Муавра-Лапласа

$$\mathbb{P}\{a \le S_n \le b\} \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Можемо використовувати, якщо: $\begin{cases} n \ge 50 \\ npq \ge 10 \end{cases}$. $\circledast$

Якщо n мале, користуємося точною формулою:

$$\mathbb{P}\{a \le S_n \le b\} = \sum_{k=a}^{b} \mathbb{P}\{S_n = k\} = \sum_{k=a}^{b} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Якщо p близьке до 1 або до 0, застосовуємо граничну теорему Пуассона.

6.5.3. Локальна формула Муавра-Лапласа.

Якщо виконуються умови $\circledast$:

$$\mathbb{P}\{S_n = k\} = \mathbb{P}\{k \le S_n \le k\} \approx \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) \circleddash$$

За теоремою Лагранжа:

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a) \qquad b - a = \frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} - \frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

$$\circleddash \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Bigg|_{x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}}$$

Локальна формула Муавра-Лапласа

$$\mathbb{P}\{S_n = k\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(k - np)^2}{2npq}\right\}$$

6.5.4. Теорема Пуассона

Теорема 6.8 (Пуассона)**.** Нехай є послідовність схем Бернуллі:
1. Одне випробування з p_1 - імовірність успіху.
2. Два випробування з p_2 - імовірність успіху.
$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$
n. n випробувань з p_n - імовірність успіху.
Нехай є величина ν_n - кількість успіхів в n-тій схемі Бернуллі.
Якщо $b \cdot p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$,
тоді: $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \theta \sim Pois(\lambda) \ : \ \mathbb{P}\{\theta = k\} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

Зауваження. Якщо виконується зазначена збіжність:

$$\mathbb{P}\{\nu_n = k\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{\mathbb{P}\{\theta = k\}}_{\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}} \quad \forall k \in \overline{1,n} \implies \forall x \notin \overline{0,1} \quad F_{\nu_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_{Pois(\lambda)}(x)$$

$$\mathbb{P}\{\nu_n = k\} = \mathbb{P}\left\{\nu_n \in \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]\right\} = F_{\nu_n}\left(k + \frac{1}{2}\right) - F_{\nu_n}\left(k - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{}$$
$$\longrightarrow F_\theta\left(k + \frac{1}{2}\right) - F_\theta\left(k - \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left\{\theta \in \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]\right\} = \mathbb{P}\{\theta = k\}$$

Доведення. Покажемо збіжність $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \theta$.

$$\begin{array}{c} \nu_n \sim Bin(n, p_n) \\ \theta \sim Pois(\lambda) \\ np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \underbrace{\left(p_n e^{it} + q_n\right)^n}_{=(p_n e^{it} + 1 - p_n)^n} = \chi_{\nu_n} \xrightarrow[n\to\infty]{?} \chi_\theta(t) = e^{\lambda\left(e^{it} - 1\right)} \\ \text{Позначимо: } L(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(p_n e^{it} + 1 - p_n\right)^n \end{array}$$

$$\ln L(t) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(p_n e^{it} + 1 - p_n\right)^n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(1 + \underbrace{p_n(e^{it} - 1)}_{\to 0}\right)^n = \lambda(e^{it} - 1)$$

$$L(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)} = \chi_{Pois(\lambda)}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{Q.E.D.}$$

■

6.5.5. Наближена формула Пуассона у схемі Бернуллі.

Якшо у серії із n випробувань Бернуллі: $n \geq 50 \ \ npq \leq 10$.

$$\boxed{p \approx 0} \qquad \mathbb{P}\{\nu_k = k\} \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad k \in \overline{1,n} \quad \underline{\lambda = np}$$