МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
“ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ“
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ
СІКОРСЬКОГО“
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Розрахункова робота

ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ

Варіант-93(27)

Виконав:
Терещенко Денис, КА-96

КИЇВ - 2020

Зміст розрахункової роботи
«Випадкові вектори»

Розрахункова робота складається з виконання двох завдань.

Порядок виконання завдання 1

За таблицею розподілу координат дискретного випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$

Знайти:

1. Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2.
2. Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно та побудувати графіки цих функцій.
3. Функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}(x,\ y)$ випадкового вектора.
4. Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю.
5. Умовні ряди розподілу для кожної координати.
6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Порядок виконання завдання 2

Вважаючи, що неперервний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ рівномірно розподілений у заданій області

Знайти:

1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2.
2. Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно.
3. Функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}(x,\ y)$ випадкового вектора.
4. Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю.
5. Умовні щільності розподілу для кожної координати.
6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Зміст

1. Завдання 1

Дискретний випадковий вектор $\xi = \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\end{bmatrix}$ задано таблицею розподілу.

Варіант 93

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-5	1	4	8
-3	0,06	0,04	0,06	0,03
0	0,01	0,14	0,04	0,13
3	0,12	0,12	0,06	0,19

Таблиця розподілу згідно варіанту.

Позначимо ймовірності: $p_{ij} = \mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\right\}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$

1.1. Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Т.я. події $\{\xi_1 = x_i\}, i = \overline{1,3}$ утворюють повну группу подій, (як і $\{\xi_2 = y_j\}$, $j = \overline{1,4}$), можемо скористатися формулою повної ймовірності:

$$\mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i\right\} = \sum_{j=1}^{4} p_{ij} \qquad \mathbb{P}\left\{\xi_2 = y_j\right\} = \sum_{i=1}^{3} p_{ij}$$

Отримали:

$$\mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3\right\} = 0.06 + 0.04 + 0.06 + 0.03 = 0.19$$
$$\mathbb{P}\left\{\xi_1 = 0\right\} = 0.01 + 0.14 + 0.04 + 0.13 = 0.32$$
$$\mathbb{P}\left\{\xi_1 = 3\right\} = 0.12 + 0.12 + 0.06 + 0.19 = 0.49$$

Перевірка: $\sum\limits_{i=1}^{3} \mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i\right\} = 0.19 + 0.32 + 0.49 = 1.0$

Отримали:

$$\mathbb{P}\left\{\xi_2 = -5\right\} = 0.06 + 0.01 + 0.12 = 0.19$$
$$\mathbb{P}\left\{\xi_2 = 1\right\} = 0.04 + 0.14 + 0.12 = 0.3$$
$$\mathbb{P}\left\{\xi_2 = 4\right\} = 0.06 + 0.04 + 0.06 = 0.16$$
$$\mathbb{P}\left\{\xi_2 = 8\right\} = 0.03 + 0.13 + 0.19 = 0.35$$

Перевірка: $\sum\limits_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{\xi_2 = y_j\right\} = 0.19 + 0.3 + 0.16 + 0.35 = 1.0$

Ряди розподілу ξ_1 та ξ_2:

ξ_1	-3	0	3
P	0.19	0.32	0.49

ξ_2	-5	1	4	8
P	0.19	0.3	0.16	0.35

1.2. Функції розподілу координат ξ_1, ξ_2.

Для ξ_1 :

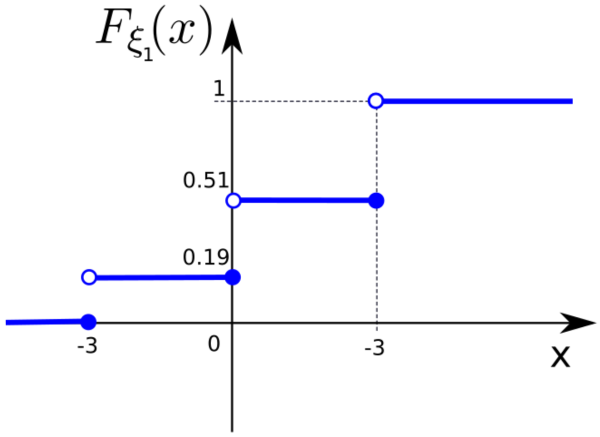
$$F_{\xi_1}(x) = \mathbb{P}\left\{\xi_1 < x\right\} = \begin{cases} \mathbb{P}\left\{\emptyset\right\} = 0, \quad x \le -3; \\ \mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3\right\} = 0.19, \quad -3 < x \le 0; \\ \mathbb{P}\left\{\left\{\xi_1 = -3\right\} \cup \left\{\xi_1 = 0\right\}\right\} = \mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3\right\} + \\ +\mathbb{P}\left\{\xi_1 = 0\right\} = 0.19 + 0.32 = 0.51, \quad 0 < x \le 3 \\ \mathbb{P}\left\{\left\{\xi_1 = -3\right\} \cup \left\{\xi_1 = 0\right\} \cup \left\{\xi_1 = 3\right\}\right\} = \mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3\right\} + \\ +\mathbb{P}\left\{\xi_1 = 0\right\} + \mathbb{P}\left\{\xi_1 = 3\right\} = 0.19 + 0.32 + 0.49 = 1, \quad 3 < x \end{cases}$$

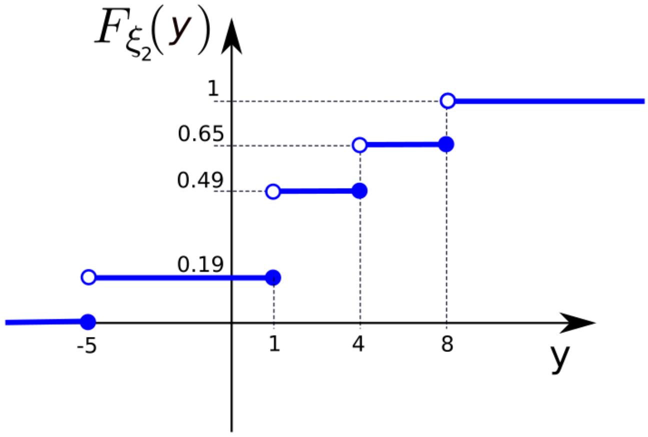
$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3; \\ 0.19, & -3 < x \le 0; \\ 0.51, & 0 < x \le 3 \\ 1, & 3 < x \end{cases}$$

Для ξ_2 :

$$F_{\xi_2}(x) = \mathbb{P}\left\{\xi_2 < x\right\} = \begin{cases} \mathbb{P}\left\{\emptyset\right\} = 0, \quad x \le -5 \\ \mathbb{P}\left\{\xi_2 = -3\right\} = 0.19, \quad -5 < x \le 1 \\ \mathbb{P}\left\{\xi_2 = -5\right\} + \mathbb{P}\left\{\xi_2 = 1\right\} = 0.19 + 0.3 = 0.49, \quad 1 < x \le 4 \\ \mathbb{P}\left\{\xi_2 = -5\right\} + \mathbb{P}\left\{\xi_2 = 1\right\} + \mathbb{P}\left\{\xi_2 = 4\right\} = \\ = 0.19 + 0.3 + 0.16 = 0.65, \quad 4 < x \le 8 \\ \mathbb{P}\left\{\Omega\right\} = 0.19 + 0.3 + 0.16 + 0.35 = 1, \quad 8 < x \end{cases}$$

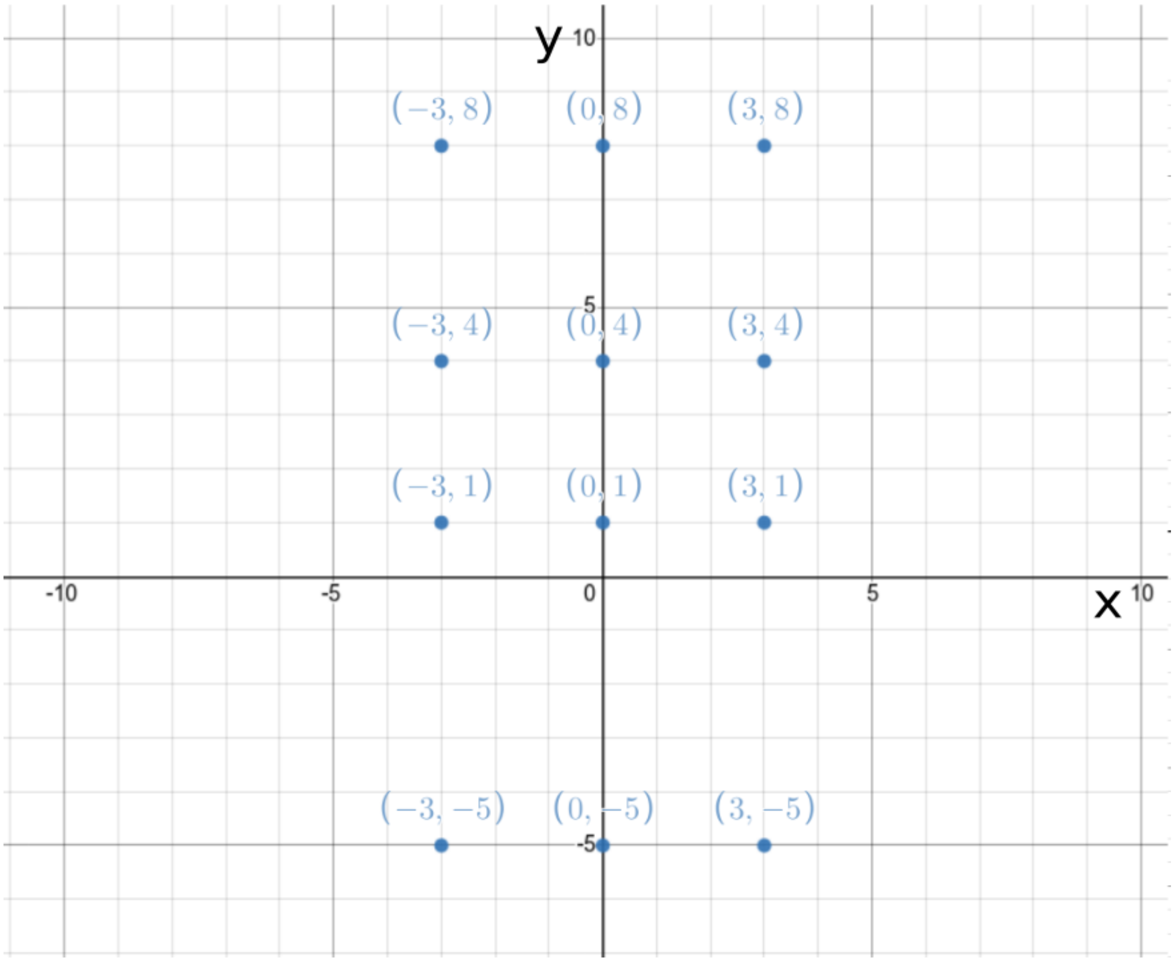
$$F_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -5 \\ 0.19, & -5 < x \le 1 \\ 0.49, & 1 < x \le 4 \\ 0.65, & 4 < x \le 8 \\ 1, & 8 < x \end{cases}$$



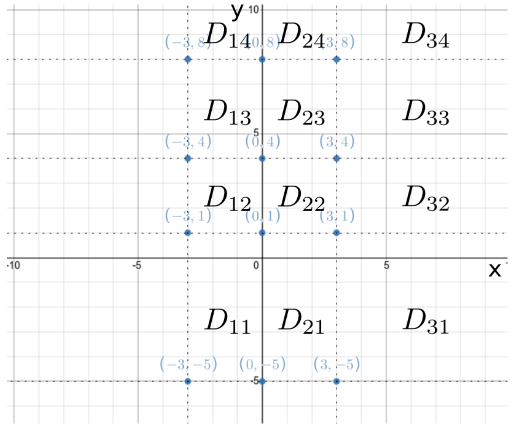


1.3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\overline{\xi}$

За означенням, $F_{\overline{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$. Тоді $F_{\overline{\xi}}(x, y) = 0$ якщо $\begin{array}{c} x \leq x_1 \\ y \leq y_1 \end{array}$. Щоб полегшити знаходження $F_{\overline{\xi}}(x, y)$ намалюємо в декартовій системі координат усі точки, що відповідають значенню вектора $\overline{\xi}$ та обчислимо значення сумісної функції розподілу в кожній області $D_{i,k}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$.



Використаємо формулу $F_{\overline{\xi}}(x, y) = \sum\limits_{i: x_i < x} \sum\limits_{j: y_j < y} p_{ij}$.

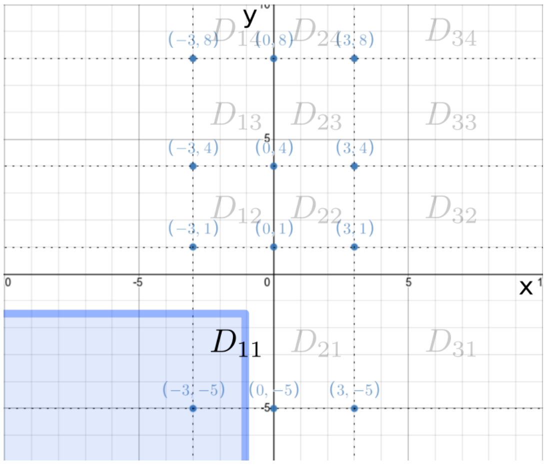


Будемо почергово розглядати зони, як на малюнку зліва.

1.$(x \leq -3) \vee (y \leq -5)$;
$F_{\overline{\xi}}(x, y) = 0$

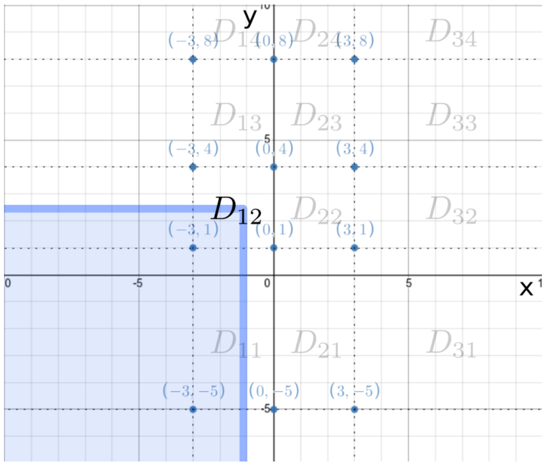
$$2. D_{1,1} = \left\{ (x, y) \middle| \begin{matrix} -3 < x \le 0 \\ -5 < y \le 1 \end{matrix} \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\right\} = 0.06$$



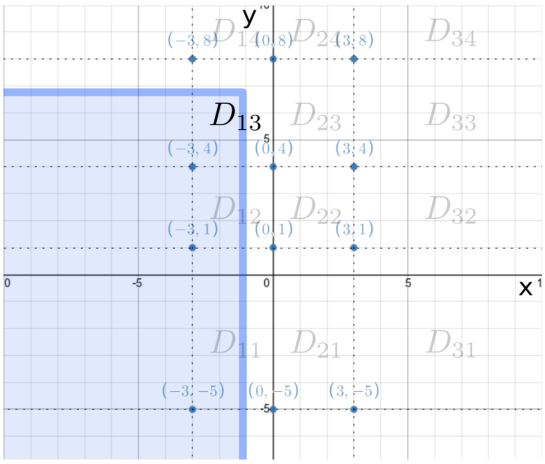
$$3. D_{1,2} = \left\{ (x, y) \middle| \begin{matrix} -3 < x \le 0 \\ 1 < y \le 4 \end{matrix} \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\right\} + \\ + \mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\right\} = \\ = 0.06 + 0.04 = 0.1$$

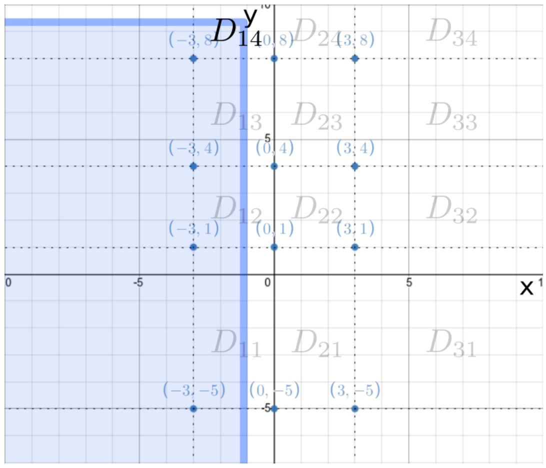


$$4. D_{1,3} = \left\{ (x, y) \middle| \begin{matrix} -3 < x \le 0 \\ 4 < y \le 8 \end{matrix} \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\right\} + \\ + \mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\right\} + \\ + \mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 4\right\} = \\ = 0.06 + 0.04 + 0.06 = 0.16$$

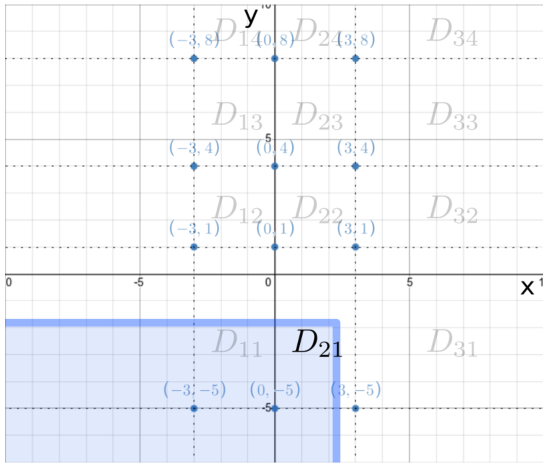


$$5. D_{1,4} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} -3 < x \leq 0 \\ 8 < y \end{array} \right\};$$



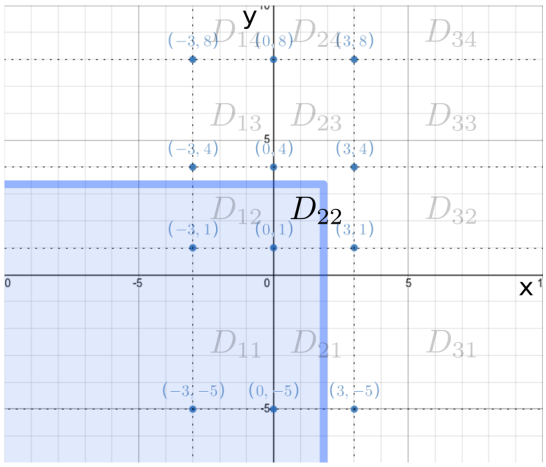
$$F_{\overline{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 4\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 8\} =$$
$$= 0.06 + 0.04 +$$
$$+0.06 + 0.03 = 0.19$$

$$6. D_{2,1} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} 0 < x \leq 3 \\ -5 < y \leq 1 \end{array} \right\};$$



$$F_{\overline{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} =$$
$$= 0.06 + 0.01 = 0.07$$

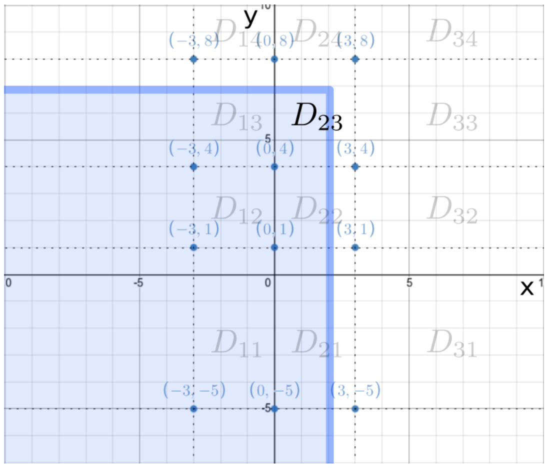
$$7. D_{2,2} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} 0 < x \leq 3 \\ 1 < y \leq 4 \end{array} \right\};$$



$$F_{\overline{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} =$$
$$= 0.06 + 0.04 + 0.01 + 0.14 = 0.25$$

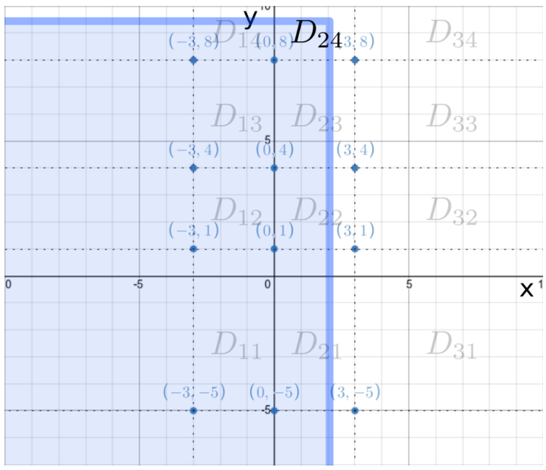
$$8. D_{2,3} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 0 < x \le 3 \\ 4 < y \le 8 \end{matrix} \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 4\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 4\} =$$
$$= 0.06 + 0.04 + 0.06 +$$
$$+0.01 + 0.14 + 0.04 = 0.35$$



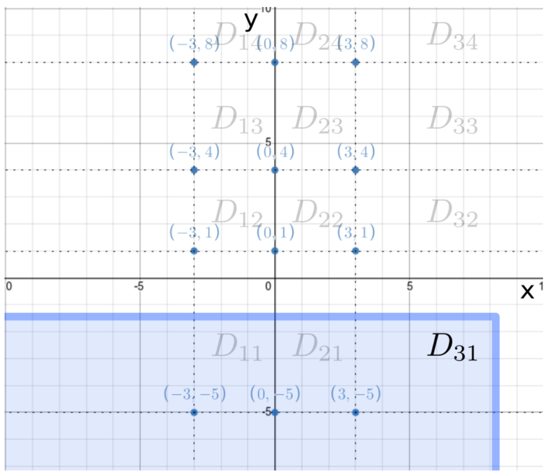
$$9. D_{2,4} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 0 < x \le 3 \\ 8 < y \end{matrix} \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 4\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 8\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 4\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 8\} =$$
$$= 0.06 + 0.04 + 0.06 +$$
$$+0.03 + 0.01 + 0.14 +$$
$$+0.04 + 0.13 = 0.51$$

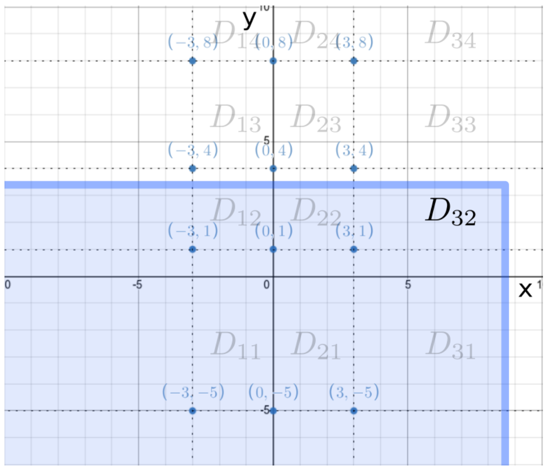


$$10. D_{3,1} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 3 < x \\ -5 < y \le 1 \end{matrix} \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -5\} =$$
$$= 0.06 + 0.01 + 0.12 = 0.19$$

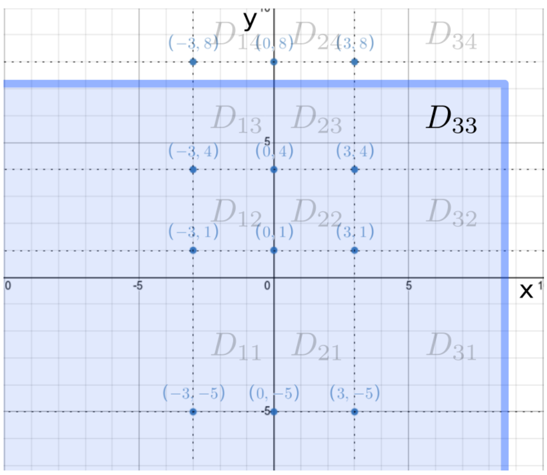


$$11. D_{3,2} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} 3 < x \\ 1 < y \le 4 \end{array} \right\};$$



$$F_{\overline{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\} =$$
$$= 0.06 + 0.04 + 0.01 + 0.14+$$
$$+0.12 + 0.12 = 0.49$$

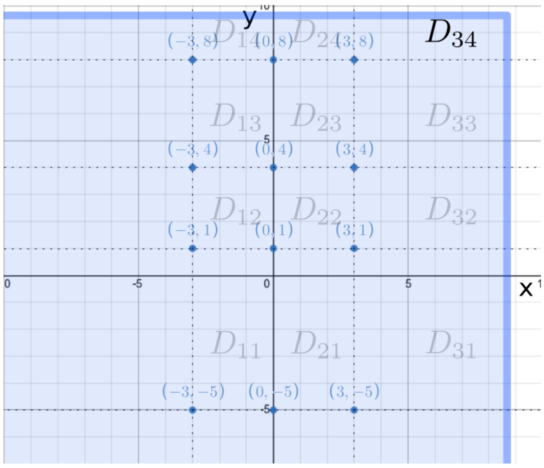
$$12. D_{3,3} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} 3 < x \\ 4 < y \le 8 \end{array} \right\};$$



$$F_{\overline{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 4\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 4\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 4\} =$$
$$= 0.06 + 0.04 + 0.06 + 0.01+$$
$$+0.14 + 0.04 + 0.12+$$
$$+0.12 + 0.06 = 0.65$$

$$13. D_{3,4} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 3 < x \\ 8 < y \end{matrix} \right\};$$

$$\begin{aligned}
F_{\overline{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} + \\
+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} + \\
+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 4\} + \\
+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 8\} + \\
+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} + \\
+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} + \\
+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 4\} + \\
+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 8\} + \\
+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -5\} + \\
+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\} + \\
+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 4\} + \\
+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 8\} = \\
= 0.06 + 0.04 + 0.06 + 0.03 + \\
+0.01 + 0.14 + 0.04 + 0.13 + \\
+0.12 + 0.12 + 0.06 + 0.19 = 1
\end{aligned}$$



Отримали сумісну функцію розподілу, яку можна записати у вигляді таблиці.

$y \setminus x$	$x \leq -3$	$-3 < x \leq 0$	$0 < x \leq 3$	$3 < x$
$y \leq -5$	0	0	0	0
$-5 < y \leq 1$	0	0.06	0.07	0.19
$1 < y \leq 4$	0	0.10	0.25	0.49
$4 < y \leq 8$	0	0.16	0.35	0.65
$8 < y$	0	0.19	0.51	1.00

Перевірка: (властивість узгодження)

$\lim\limits_{x \to +\infty} F_{\overline{\xi}}(x,y) = F_{\xi_2}(y)$ - виконується, адже в останньому стовпчику $F_{\xi_2}(y)$.

$\lim\limits_{y \to +\infty} F_{\overline{\xi}}(x,y) = F_{\xi_1}(x)$ - иконується, адже в останній стрічці $F_{\xi_1}(x)$.

$\lim\limits_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} F_{\overline{\xi}}(x,y) = 1 \qquad F_{\overline{\xi}}(x,y) = 1 \quad \forall (x,y) \in D_{3,4}$

Або у вигляді сукупності:

$$F_{\overline{\xi}}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x \le -3) \lor (y \le -5); \\ 0.06, & (-3 < x \le 0) \land (-5 < y \le 1); \\ 0.1, & (-3 < x \le 0) \land (1 < y \le 4); \\ 0.16, & (-3 < x \le 0) \land (4 < y \le 8); \\ 0.19, & (-3 < x \le 0) \land (8 < y); \\ 0.07, & (0 < x \le 3) \land (-5 < y \le 1); \\ 0.25, & (0 < x \le 3) \land (1 < y \le 4); \\ 0.35, & (0 < x \le 3) \land (4 < y \le 8); \\ 0.51, & (0 < x \le 3) \land (8 < y); \\ 0.19, & (3 < x) \land (-5 < y \le 1); \\ 0.49, & (3 < x) \land (1 < y \le 4); \\ 0.65, & (3 < x) \land (4 < y \le 8); \\ 1, & (3 < x) \land (8 < y); \end{cases}$$

1.4. Математичні сподівання координат. Кореляційна та нормована кореляційна матриця.

а) За рядом розподілу величини ξ_1 знайдемо математичне сподівання:

$$\mathbb{E}\xi_1 = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = -3 * 0.19 + 0 * 0.32 + 3 * 0.49 = 0.9$$

Аналогічно для ξ_2:

$$\mathbb{E}\xi_2 = \sum_{j=1}^{4} y_j p_j = -5 * 0.19 + 1 * 0.3 + 4 * 0.16 + 8 * 0.35 = 2.79$$

Центр розсіювання вектора $\overline{\xi}$ – $(0.9, 2.79)$
б) Побудуємо кореляційну та нормовану кореляційну матриці.
Для дискретного вектора:

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} - \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij} \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij} \right\}$$

$$C_{\overline{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) \\ cov(\xi_1, \xi_2) & \mathbb{D}\xi_2 \end{bmatrix}$$

Розрахуємо та внесемо до матриці всі необхідні величини:

$$
\begin{gathered}
cov(\xi_1, \xi_2) = ((-3) \cdot (-5) \cdot 0.06) + ((-3) \cdot 1 \cdot 0.04) + ((-3) \cdot 4 \cdot 0.06) + \\
+((-3) \cdot 8 \cdot 0.03) + (0 \cdot (-5) \cdot 0.01) + (0 \cdot 1 \cdot 0.14) + \\
+(0 \cdot 4 \cdot 0.04) + (0 \cdot 8 \cdot 0.13) + (3 \cdot (-5) \cdot 0.12) + \\
+(3 \cdot 1 \cdot 0.12) + (3 \cdot 4 \cdot 0.06) + (3 \cdot 8 \cdot 0.19) - \mathbb{E}\xi_1 \cdot \mathbb{E}\xi_2 = \\
= 0.9 - 0.12 - 0.72 - 0.72 - 1.8 + 0.36 + 0.72 + 4.56 - 2.511 = 0.669
\end{gathered}
$$

Знайдемо дисперсію компонент ξ_1 та ξ_2:

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot p_i - 0.9^2 = 6.12 - 0.81 = 5.31$$

$$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = \sum_{j=1}^{4} y_j^2 \cdot p_j - 2.79^2 = 30.01 - 7.7841 = 22.2259$$

Отримали кореляційну матрицю:

$$C_{\overline{\xi}} = \begin{bmatrix} 5.31 & 0.669 \\ 0.669 & 22.2259 \end{bmatrix}$$

Оскільки $cov(\xi_1, \xi_2) > 0$ випадкові величини ξ_1, ξ_2 є корельованими та залежними. Перевіримо додатну визначеність $C_{\overline{\xi}}$:

$$\det C_{\overline{\xi}} = 5.31 \cdot 22.2259 - 0.669^2 = 117.571968 > 0$$

Знайдемо коефіцієнт кореляції: $r_{\overline{\xi}} = \dfrac{cov(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2}} \approx \dfrac{0.669}{\sqrt{118.02}} \approx 0.0616$

1.5. Умовні ряди розподілу для кожної координати.

Обчислимо умовні ймовірності:

$$\mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i | \xi_2 = y_j\right\} = \frac{\mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\right\}}{\mathbb{P}\left\{\xi_2 = y_j\right\}} = \frac{p_{ij}}{p_j}$$

$$\mathbb{P}\left\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = x_i\right\} = \frac{\mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\right\}}{\mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i\right\}} = \frac{p_{ij}}{p_i}$$

Обчислюємо умовні ряди розподілу для ξ_1 та ξ_2 та результати заносимо у таблиці. Отримані дроби скорочуємо, але для зручності у кожному рядку залишаємо однаковий знаменник.

Умовні ряди розподілу ξ_1:

ξ_1	-3	0	3
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \| \xi_2 = -5\}$	6/19	1/19	12/19
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \| \xi_2 = 1\}$	4/30	14/30	12/30
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \| \xi_2 = 4\}$	6/16	4/16	6/16
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \| \xi_2 = 8\}$	3/35	13/35	19/35

Перевірка:

$$\frac{6}{19} + \frac{1}{19} + \frac{12}{19} = 1$$
$$\frac{4}{30} + \frac{14}{30} + \frac{12}{30} = 1$$
$$\frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = 1$$
$$\frac{3}{35} + \frac{13}{35} + \frac{19}{35} = 1$$

Умовні ряди розподілу ξ_2:

ξ_2	-5	1	4	8
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j \| \xi_1 = -3\}$	6/19	4/19	6/19	3/19
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j \| \xi_1 = 0\}$	1/32	14/32	4/32	13/32
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j \| \xi_1 = 3\}$	12/49	12/49	6/49	19/49

Перевірка:

$$\frac{6}{19} + \frac{4}{19} + \frac{6}{19} + \frac{3}{19} = 1$$
$$\frac{1}{32} + \frac{14}{32} + \frac{4}{32} + \frac{13}{32} = 1$$
$$\frac{12}{49} + \frac{12}{49} + \frac{6}{49} + \frac{19}{49} = 1$$

1.6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Скористаємося формулами:

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = y_j) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i|\xi_2 = y_j\}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x_i) = \sum_{j=1}^{4} y_j \cdot \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j|\xi_1 = x_i\}$$

Обчислимо ряд розподілу $\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)$:

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = -5) = (-3) \cdot \frac{6}{19} + 0 \cdot \frac{1}{19} + 3 \cdot \frac{12}{19} = \frac{18}{19}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = 1) = (-3) \cdot \frac{4}{30} + 0 \cdot \frac{14}{30} + 3 \cdot \frac{12}{30} = \frac{24}{30} = \frac{12}{15}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = 4) = (-3) \cdot \frac{6}{16} + 0 \cdot \frac{4}{16} + 3 \cdot \frac{6}{16} = 0$$

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = 8) = (-3) \cdot \frac{3}{35} + 0 \cdot \frac{13}{35} + 3 \cdot \frac{19}{35} = \frac{48}{35}$$

Перевіримо за формулою повного математичного сподівання:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)) = 0.19 \cdot \frac{18}{19} + 0.3 \cdot \frac{12}{15} + 0.16 \cdot 0 + 0.35 \cdot \frac{48}{35} =$$
$$= 0.18 + 0.24 + 0 + 0.48 = 0.9 = \mathbb{E}\xi_1$$

Обчислимо ряд розподілу $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$:

$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = -3) = (-5) \cdot \frac{6}{19} + 1 \cdot \frac{4}{19} + 4 \cdot \frac{6}{19} + 8 \cdot \frac{3}{19} = \frac{22}{19}$$
$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = 0) = (-5) \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{14}{32} + 4 \cdot \frac{4}{32} + 8 \cdot \frac{13}{32} = \frac{129}{32}$$
$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = 3) = (-5) \cdot \frac{12}{49} + 1 \cdot \frac{12}{49} + 4 \cdot \frac{6}{49} + 8 \cdot \frac{19}{49} = \frac{128}{49}$$

Перевіримо за формулою повного математичного сподівання:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)) = 0.19 \cdot \frac{22}{19} + 0.32 \cdot \frac{129}{32} + 0.49 \cdot \frac{128}{49} = = 0.22 + 1.29 + 1.28 = 2.79 = \mathbb{E}\xi_2$$

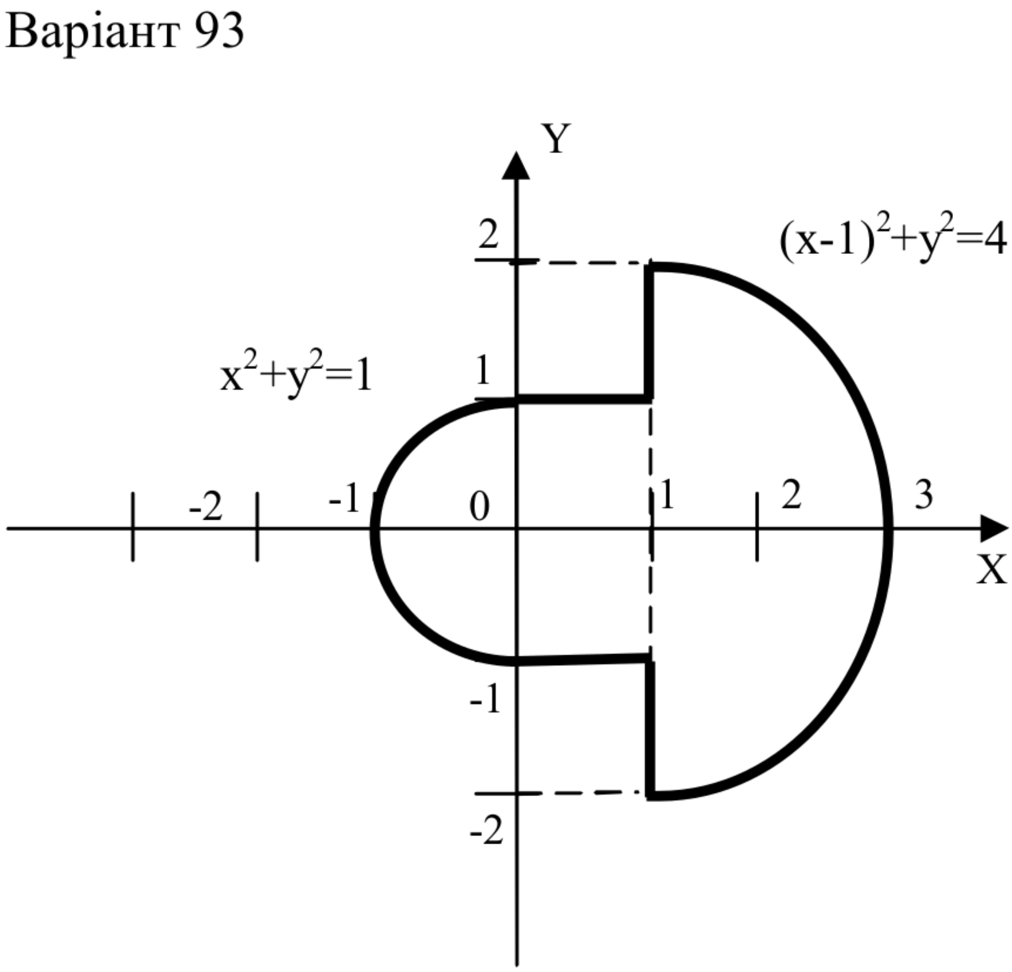
Отримали такі умовні ряди розподілу для $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$, $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$:

$\mathbb{E}(\xi_2\|\xi_1)$	22/19	129/32	128/49
P	0.19	0.32	0.49

$\mathbb{E}(\xi_1\|\xi_2)$	18/19	12/15	0	48/35
P	0.19	0.3	0.16	0.35

2. Завдання 2

Нехай неперервний випадковий вектор $\overline{\xi} = \left[\xi_1, \xi_2\right]$ рівномірно розподілений в області G.



Центр півкола $x^2 + y^2 = 1$ - (0,0). Центр півкола $(x-1)^2 + y^2 = 4$ - (1, 0). Усі рівняння кривих вказано на рисунку.

Задану область можна розбити наступним чином:

$$G = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{c} \Big((-1 \le x < 0) \wedge (-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2})\Big) \vee \\ \vee\, ((0 \le x \le 1) \wedge (-1 \le y \le 1)) \vee \\ \vee \Big((1 \le x \le 3) \wedge (-\sqrt{4-(x-1)^2} \le y \le \sqrt{4-(x-1)^2})\Big) \end{array} \right\}$$

2.1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Спочатку, знайдемо в загальному вигляді інтеграл:

$$\int \sqrt{a^2 - t^2}dt = \left| \begin{matrix} \text{Заміна:} \\ t = a\sin(s) \\ dt = a\cos(s)ds \end{matrix} \right| = a^2 \cdot \int \cos^2(s)ds = a^2 \cdot \int \frac{\cos(2s)+1}{2}ds =$$

$$= a^2 \cdot \frac{\frac{\sin(2s)}{2} + s}{2} + C = \frac{t\sqrt{a^2-t^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{t}{a}\right)}{2} + C$$

$$S_G = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1} dy + \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}} dy =$$

$$= 2\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}dx + 2 + 2\int\limits_{1}^{3} \sqrt{4-(x-1)^2}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{У I інтегралі:} & \text{У II інтегралі:} \\ x = \sin(t) \Rightarrow dx = \cos(t)dt & x-1 = 2\sin(t) \Rightarrow dx = 2\cos(t)dt \\ t_2(0) = 0 \quad t_1 = -\frac{\pi}{2} & t_2 = \frac{\pi}{2} \quad t_1(0) = 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2(t)dt + 8\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \left(\frac{\sin(2t)}{2} + t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + 2 + 4\cdot\left(\frac{\sin(2t)}{2} + t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2\pi + \frac{\pi}{2} + 2 = 2.5\pi + 2$$

Тоді щільність вектора рівномірно розподіленого в області G:

$$f_{\overline{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2.5\pi + 2}, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G \end{cases}$$

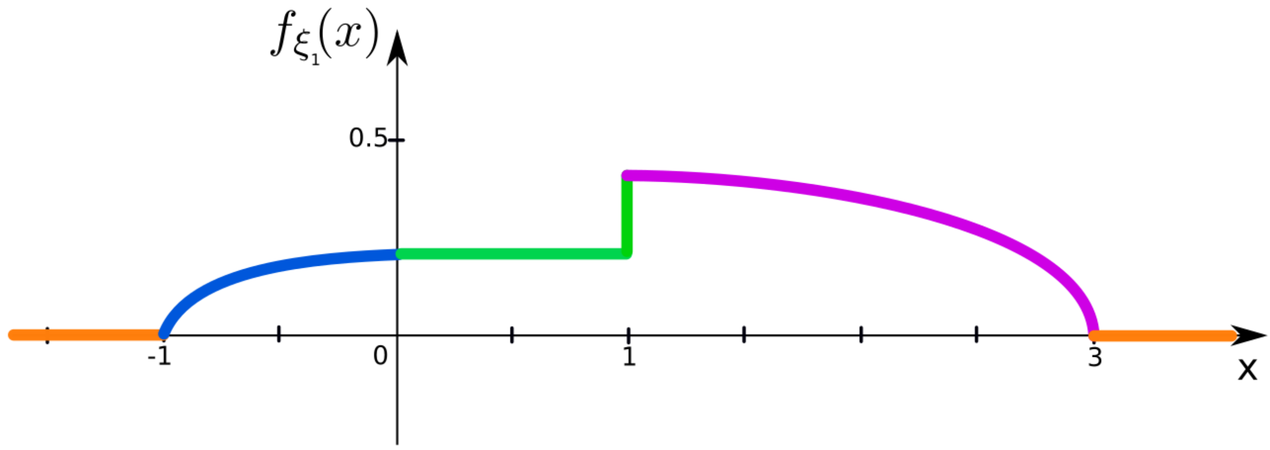
Із визначення рівномірного розподілу випливає, що умова нормування для $f_{\overline{\xi}}(x,y)$ виконана $\left(\frac{1}{S_G} * \iint\limits_G dxdy = (2.5\pi + 2) \cdot \dfrac{1}{2.5\pi + 2} = 1\right)$.

Обчислимо щільності координат вектора $\overline{\xi}$:

$$f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,y)dy \qquad f_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,y)dx$$

$$f_{\xi_1}(x)=\begin{cases}0, \quad x\le -1;\\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\int\limits_{-\sqrt{(1-x^2)}}^{\sqrt{(1-x^2)}} dy=\dfrac{2}{2.5\pi+2}\sqrt{(1-x^2)}, \quad -1<x\le 0;\\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\int\limits_{-1}^{1} dy=\dfrac{2}{2.5\pi+2}, \quad 0<x\le 1;\\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\int\limits_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}} dy=\dfrac{2}{2.5\pi+2}\sqrt{4-(x-1)^2}, \quad 1<x\le 3;\\ 0, \quad x>3;\end{cases}$$

Графік отриманої функції щільності:



Перевірка умови нормування:

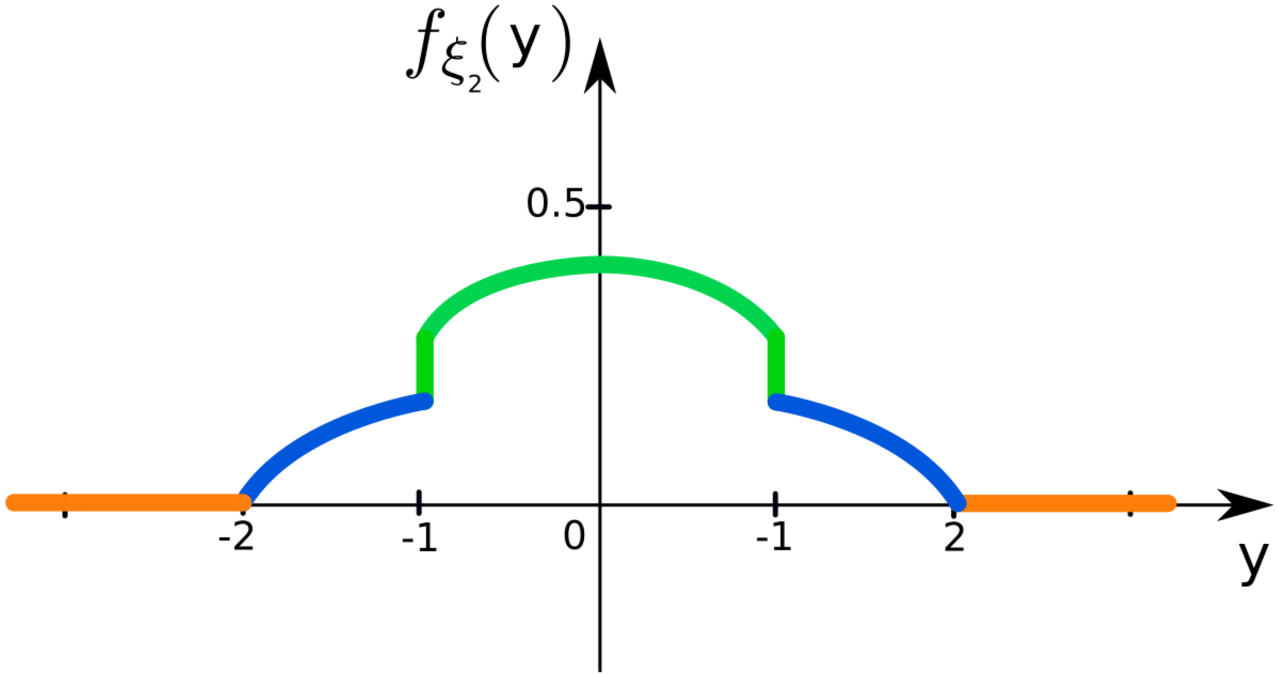
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x)dx=0+\frac{2}{2.5\pi+2}\cdot\left(\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{1-x^2}dx+\int\limits_{0}^{1}dx+\int\limits_{1}^{3}\sqrt{4-(x-1)^2}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{2.5\pi+2}\cdot\frac{(2.5\pi+2)}{2}=1$$

Зауваження. Вже знаходили ці інтеграли під час пошуку площі фігури.

$$f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}0, \quad y\le -2;\\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\int\limits_{1}^{1+\sqrt{4-y^2}} dx=\dfrac{1}{2.5\pi+2}\cdot\sqrt{4-y^2}, \quad -2<y\le -1;\\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{4-y^2}} dx=\dfrac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2}+1\right), -1<y\le 1;\\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\int\limits_{1}^{1+\sqrt{4-y^2}} dx=\dfrac{1}{2.5\pi+2}\cdot\sqrt{4-y^2}, \quad 1<y\le 2;\\ 0, \quad y>2;\end{cases}$$

Графік отриманої функції щільності:



Перевірка умови нормування:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y)dy = 0 + \frac{1}{2.5\pi+2}\left(\int\limits_{-2}^{-1}\sqrt{4-y^2}dy + \int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2}+1\right)dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-2}^{-1}\sqrt{4-y^2}dy\right) = \frac{1}{2.5\pi+2}\left(\int\limits_{-1}^{1}dy + \int\limits_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}dy + \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{c} \text{Вже знаходили такі інтеграли за змінною } x \\ \int\limits_{-1}^{1}dy = y\Big|_{-1}^{1} = 2 \\ \int\limits_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}dy = 2\left(\frac{\sin(2t)}{2}+t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \\ \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2}+t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{array}\right| = (2+\frac{\pi}{2}+2\pi)\cdot\frac{1}{2+2.5\pi} = 1$$

2.2. Функції розподілу координат ξ_1 та ξ_2.

Нехай $F_{\xi_1}(x), F_{\xi_2}(y)$ функції розподілу координат вектора $\overline{\xi}$. Застосуємо формули:

$$F_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi_1}(t)dt \qquad F_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_2}(s)ds$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le -1; \\ \int\limits_{-1}^{x} \frac{2}{2.5\pi+2}\sqrt{(1-s^2)}ds, \quad -1 < x \le 0; \\ \frac{2}{2.5\pi+2}\left(\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{(1-s^2)}ds + \int\limits_{0}^{x} ds\right), \quad 0 < x \le 1; \\ \frac{2}{2.5\pi+2}\left(\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{(1-s^2)}ds + \int\limits_{0}^{1} ds + \int\limits_{1}^{x}\sqrt{4-(s-1)^2}ds\right), \quad 1 < x \le 3; \\ 1, \quad x > 3; \end{cases}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le -1; \\ \frac{2}{2.5\pi+2} \cdot \frac{s\sqrt{1-s^2}+\arcsin(s)}{2}\Big|_{-1}^{x}, \quad -1 < x \le 0; \\ \frac{2}{2.5\pi+2}\left(\frac{s\sqrt{1-s^2}+\arcsin(s)}{2}\Big|_{-1}^{0} + x\right), \quad 0 < x \le 1; \\ \frac{2}{2.5\pi+2}\left(\frac{s\sqrt{1-s^2}+\arcsin(s)}{2}\Big|_{-1}^{0} + 1 + \frac{(s-1)\sqrt{4-(s-1)^2}+4\arcsin\left(\frac{s-1}{2}\right)}{2}\Big|_{1}^{x}\right), \quad 1 < x \le 3; \\ 1, \quad x > 3; \end{cases}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le -1; \\ \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi+2}, \quad -1 < x \le 0; \\ \frac{\frac{\pi}{2}+2x}{2.5\pi+2}, \quad 0 < x \le 1; \\ \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi+2}, \quad 1 < x \le 3; \\ 1, \quad x > 3; \end{cases}$$

Перевіримо на неперервність у точках стику:

$$\lim_{x\to -1-} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 1-} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to -1+} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to -1+} \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi + 2} = \frac{0 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi + 2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0-} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi + 2} = \frac{0 + 0 + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi + 2} = \frac{\pi}{5\pi + 4}$$

$$\lim_{x\to -0+} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to -0+} \frac{\frac{\pi}{2} + 2x}{2.5\pi + 2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2.5\pi + 2} = \frac{\pi}{5\pi + 4}$$

$$\lim_{x\to 1-} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{\pi}{2} + 2x}{2.5\pi + 2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2}$$

$$\lim_{x\to 1+} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} =$$

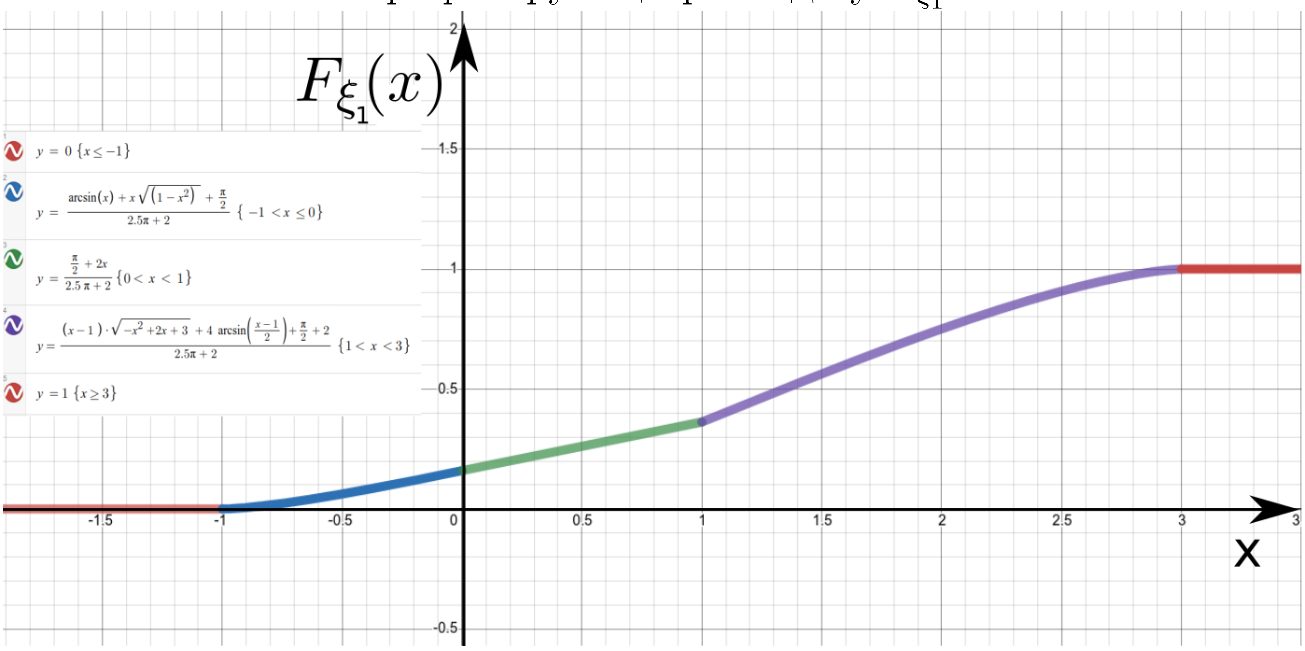
$$= \frac{0 \cdot \sqrt{-s^2 + 2s + 3} - 4\arcsin(0) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2}$$

$$\lim_{x\to 3-} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 3-} \frac{(x-1)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{0} - 4\arcsin\left(\frac{-4}{4}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} = \frac{0 - 4 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} = 1$$

$$\lim_{x\to 3+} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 3+} 1 = 1$$

Графік функції розподілу F_{ξ_1}



$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, \quad y \le -2; \\ \int\limits_{-2}^{y} \frac{\sqrt{4-s^2}}{2.5\pi+2} ds, \quad -2 < y \le -1; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\int\limits_{-2}^{-1} \sqrt{4-s^2} ds + \int\limits_{-1}^{y} \sqrt{4-s^2} + \sqrt{1-s^2} + 1 ds \right), -1 < y \le 1; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\int\limits_{-2}^{-1} \sqrt{4-s^2} ds + \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt{4-s^2} + \sqrt{1-s^2} + 1 ds \right) + \right. \\ \left. + \int\limits_{1}^{y} \sqrt{4-s^2} ds \right), \quad 1 < y \le 2; \\ 1, \quad y > 2; \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, \quad y \le -2; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2} + 2\arcsin\left(\frac{s}{2}\right) \right) \Bigg|_{-2}^{y}, \quad -2 < y \le -1; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \left[\cdot \left(\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2} + 2\arcsin\left(\frac{s}{2}\right) \right) \Bigg|_{-2}^{y} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\arcsin(s)}{2} + \frac{s\sqrt{1-s^2}}{2} + s \right) \Bigg|_{-1}^{} \right], -1 < y \le 1; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \left[\cdot \left(\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2} + 2\arcsin\left(\frac{s}{2}\right) \right) \Bigg|_{-2}^{y} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\arcsin(s)}{2} + \frac{s\sqrt{1-s^2}}{2} + s \right) \Bigg|_{-1}^{1} \right], \quad 1 < y \le 2; \\ 1, \quad y > 2; \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, \quad y \leq -2; \\ \dfrac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\dfrac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + \pi \right), \quad -2 < y \leq -1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\dfrac{2\arcsin(y) + 2y\sqrt{1-y^2}}{4} + \right. \\ \left. + \dfrac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + 1.25\pi + y + 1 \right), -1 < y \leq 1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\dfrac{\pi + 4}{2} + \dfrac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + \pi \right), \quad 1 < y \leq 2; \\ 1, \quad y > 2; \end{cases}$$

Перевіримо на неперервність у точках стику:

$$\lim_{y\to -2-} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to -2-} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to -2+} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to -2+} \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2\pi}{5\pi + 4} = \frac{-2 * 0 + 4\frac{\pi}{2} + 2\pi}{5\pi + 4} = 0$$

$$\lim_{y\to -1-} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to -1-} \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2\pi}{5\pi + 4} = \frac{-\sqrt{3} - 4\frac{\pi}{6} + 2\pi}{5\pi + 4} = \frac{-\sqrt{3} + \dfrac{4\pi}{3}}{5\pi + 4}$$

$$\lim_{y\to -1+} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to -1+} \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{2\arcsin(y) + 2y\sqrt{1-y^2}}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + 1.25\pi + y + 1 \right) = \frac{-\dfrac{\pi}{2} - 1 \cdot 0 - 1 \cdot \sqrt{3} - 4\frac{\pi}{6} + 2.5\pi}{5\pi + 4} =$$

$$= \frac{-\sqrt{3} + \dfrac{4\pi}{3}}{5\pi + 4}$$

$$\lim_{y\to 1-} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to 1-} \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{2\arcsin(y) + 2y\sqrt{1-y^2}}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + 1.25\pi + y + 1 \right) = \frac{\frac{\pi}{2} + 1 \cdot 0 + \sqrt{3} + \frac{4\pi}{6} + 2.5\pi + 4}{5\pi + 4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \frac{11\pi}{3} + 4}{5\pi + 4}$$

$$\lim_{y\to 1+} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to 1+} \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{\pi + 4}{2} + \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + \pi \right) =$$

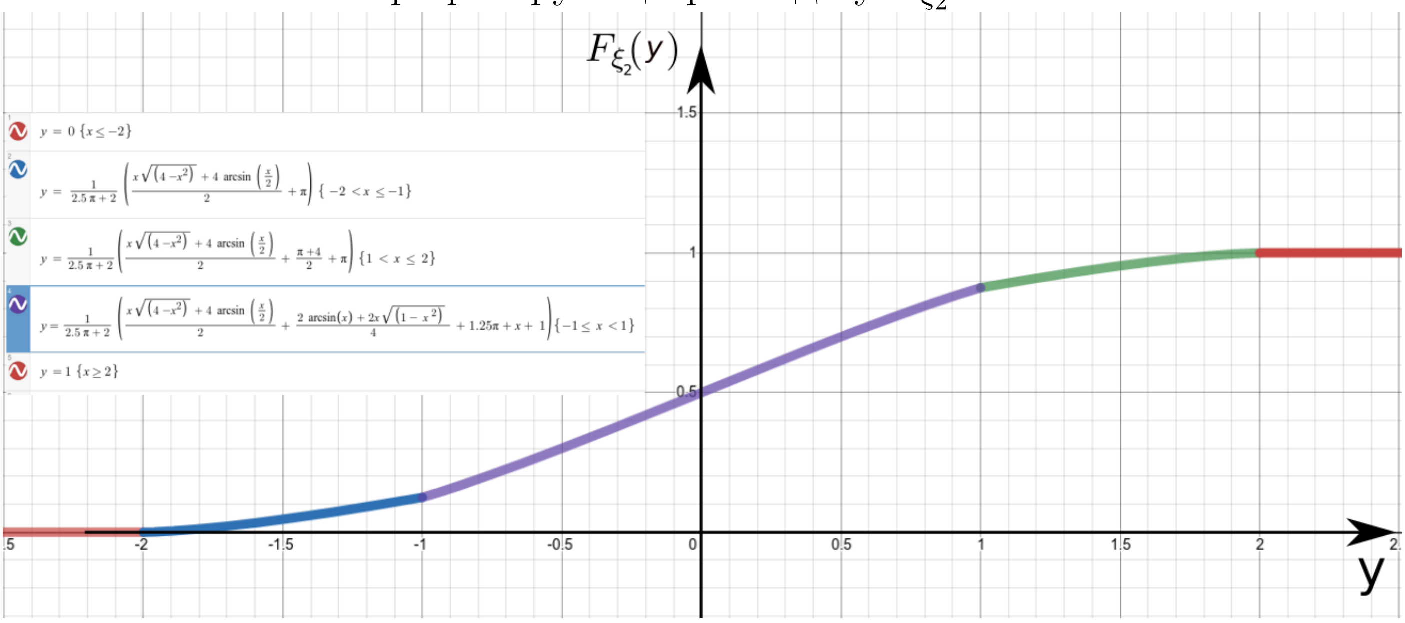
$$= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \frac{\pi + 4}{2} + \frac{\sqrt{3} + \frac{4\pi}{6} + 2\pi}{2} = \frac{\sqrt{3} + \frac{11\pi}{3} + 4}{5\pi + 4}$$

$$\lim_{y\to 2-} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to 2-} \frac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\frac{\pi+4}{2} + \frac{y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + \pi\right) = = \frac{1}{2.5\pi+2}\cdot$$
$$\frac{\pi+4+2\cdot 0+\frac{4\pi}{2}+2\pi}{2} = \frac{5\pi+4}{4\pi+4} = 1$$
$$\lim_{y\to 2+} F_{\xi_2}(y) = 1$$

Тож, знайдені функції розподілу $F_{\xi_1}(x), F_{\xi_2}(y)$ задовольняють умові неперервності. Але, можемо дещо спростити $F_{\xi_2}(y)$ виконавши алгебраїчні перетворення:

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, \quad y \le -2; \\ \dfrac{y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+2\pi}{10\pi+4}, \quad -2 < y \le -1; \\ \dfrac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+2.5\pi+2y+2}{5\pi+4}, \\ -1 < y \le 1; \\ \dfrac{3\pi+4+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi+4}, \quad 1 < y \le 2; \\ 1, \quad y > 2; \end{cases}$$

Графік функції розподілу F_{ξ_2}

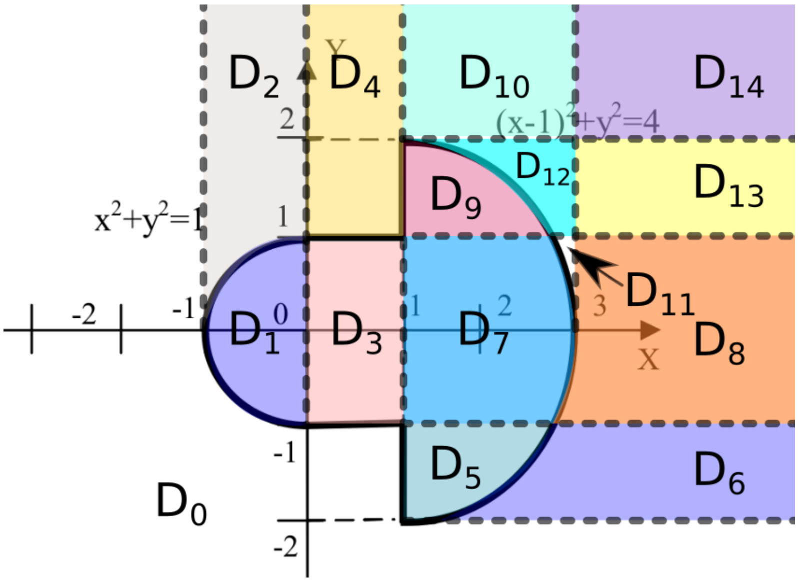


2.3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\overline{\xi}$

Згідно означення $F_{\overline{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$. Скористаємося формулою:

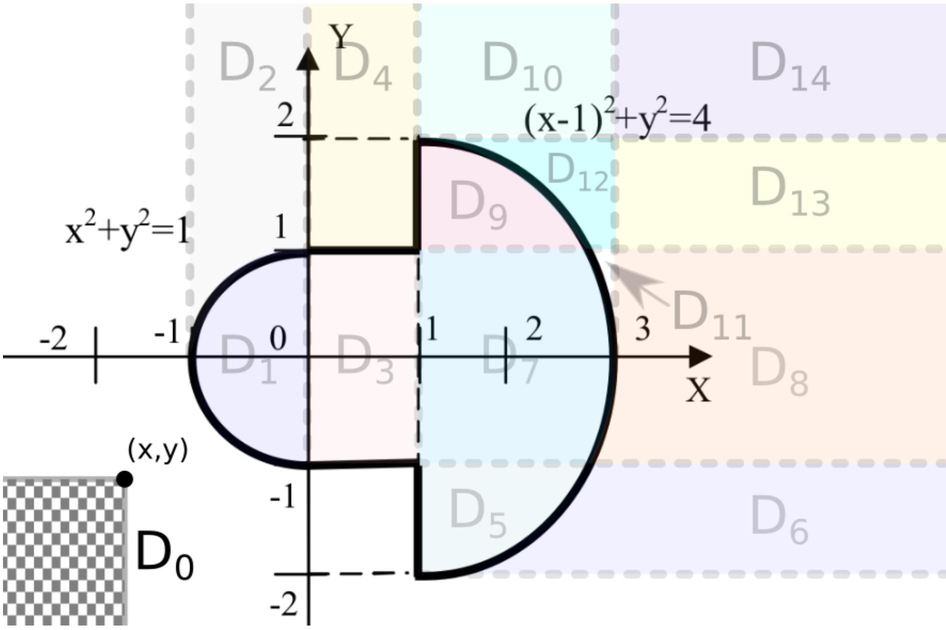
$$F_{\overline{\xi}}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} dt \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\overline{\xi}}(t, s) ds$$

Координатну площину XOY розіб'ємо на області $D_1, D_2, ..., D_{14}$.



1. $D_0 = \left\{ (x, y) \middle| \begin{array}{c} (x \leq -1) \vee \left((x \leq -\sqrt{1 - y^2}) \wedge (y \leq -\sqrt{1 - x^2}) \right) \vee \\ \vee ((0 \leq x \leq 1) \wedge (-2 \leq y \leq -1)) \vee (y \leq -2) \end{array} \right\}$
2. $D_1 = \left\{ (x, y) \middle| (x \leq 0) \wedge (x^2 + y^2 < 1) \right\}$
3. $D_2 = \left\{ (x, y) \middle| ((-1 < x \leq 0) \wedge (1 < y)) \vee \left((x \leq -\sqrt{1 - y^2}) \wedge (y \geq \sqrt{1 - x^2}) \right) \right\}$
4. $D_3 = \left\{ (x, y) \middle| (0 < x \leq 1) \wedge (-1 < y \leq 1) \right\}$
5. $D_4 = \left\{ (x, y) \middle| (0 < x \leq 1) \wedge (1 < y) \right\}$
6. $D_5 = \left\{ (x, y) \middle| \left((x - 1)^2 + y^2 < 2 \right) \wedge (y \leq -1) \wedge (x > 1) \right\}$
7. $D_6 = \left\{ (x, y) \middle| (-2 < y \leq -1) \wedge \left((x - 1)^2 + y^2 \geq 2 \right) \wedge (x > 1) \right\}$
8. $D_7 = \left\{ (x, y) \middle| \left((x - 1)^2 + y^2 < 2 \right) \wedge (-1 < y \leq 1) \wedge (x > 1) \right\}$
9. $D_8 = \left\{ (x, y) \middle| \begin{array}{c} \left((-1 < y \leq 0) \wedge \left((x - 1)^2 + y^2 \geq 2 \right) \wedge (x > 1) \right) \\ \vee ((3 < x) \wedge (0 < y \leq 1)) \end{array} \right\}$
10. $D_9 = \left\{ (x, y) \middle| (1 < y \leq 2) \wedge \left((x - 1)^2 + y^2 \geq 2 \right) \wedge (x > 1) \right\}$
11. $D_{10} = \left\{ (x, y) \middle| (1 < x \leq 3) \wedge (2 < y) \right\}$
12. $D_{11} = \left\{ (x, y) \middle| (0 < y \leq 1) \wedge \left((x - 1)^2 + y^2 \geq 2 \right) \wedge (0 < x \leq 3) \right\}$
13. $D_{12} = \left\{ (x, y) \middle| (1 < y \leq 2) \wedge \left((x - 1)^2 + y^2 \geq 2 \right) \wedge (0 < x \leq 3) \right\}$
14. $D_{13} = \left\{ (x, y) \middle| ((3 < x) \wedge (1 < y \leq 2)) \right\}$
15. $D_{14} = \left\{ (x, y) \middle| ((3 < x) \wedge (2 < y)) \right\}$

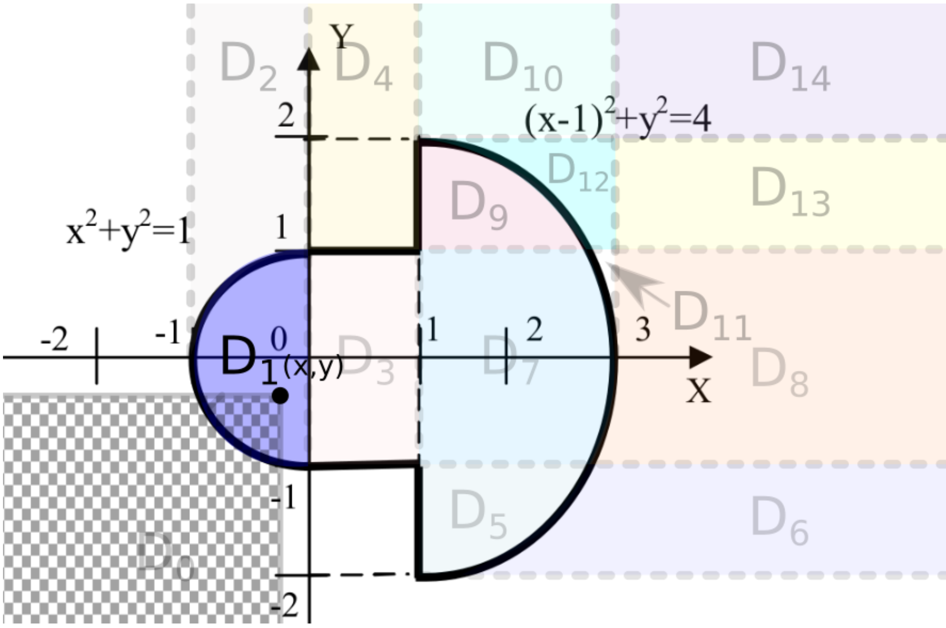
1. $(x, y) \in D_0$



$$F_{\overline{\xi}}(x, y) = 0$$

Перевірка: $\dfrac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 = f_{\overline{\xi}}(x, y)$

2. $(x, y) \in D_1$



$$F_{\overline{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{y} ds \int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{x} dt = \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{y} x + \sqrt{1-s^2} ds =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + 2xy + \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) + 3x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + 2xy + \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) + 3x\sqrt{1-x^2}}{5\pi+4}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2.5\pi+2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\sqrt{1-y^2} - y^2 + 1}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \tfrac{1}{2.5\pi+2} \cdot 1 = f_{\overline{\xi}}(x,y)$$

Перевірка ліній стику областей:

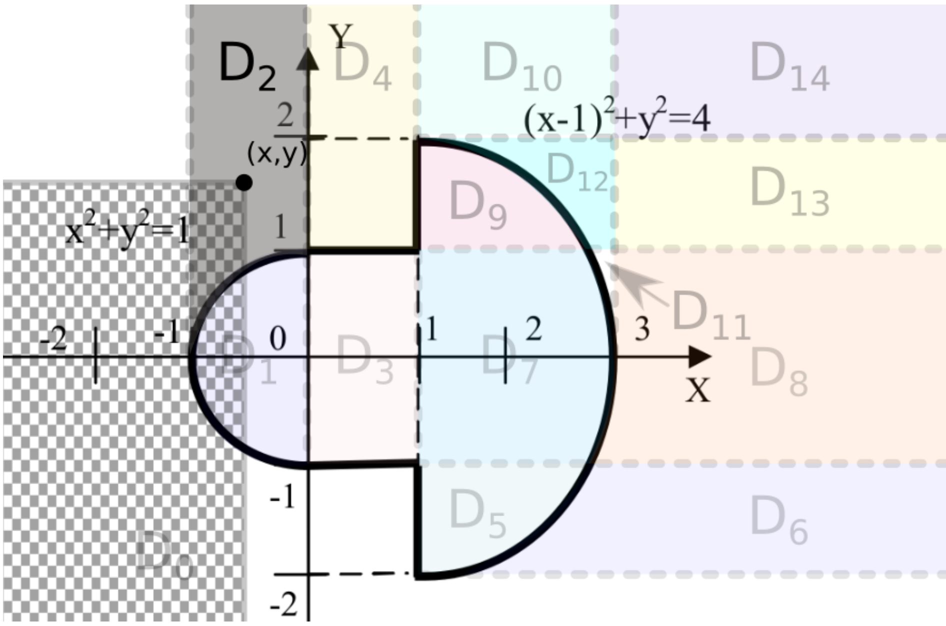
$D_0 - D_1 : y = -\sqrt{1-x^2}, (y \leq 0)$

$F_{\overline{\xi}}(x, -\sqrt{1-x^2})^{D_1} =$

$$= \frac{\arcsin\left(-\sqrt{1-x^2}\right) - x\sqrt{1-x^2} - 2x\sqrt{1-x^2} + \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) + 3x\sqrt{1-x^2}}{5\pi+4} =$$

$= 0 = F_{\overline{\xi}}(x, -\sqrt{1-x^2})^{D_0} = 0$

3. $(x, y) \in D_2$



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} ds \int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{x} dt = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - s^2} + x ds$$

$$= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\arcsin\left(\sqrt{1 - x^2}\right) + x\sqrt{1 - x^2} \right)$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\tfrac{1}{2.5\pi+2} \cdot \arcsin\left(\sqrt{1 - x^2}\right) + x\sqrt{1 - x^2} \right) =$$

$$= \tfrac{1}{2.5\pi+2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} 0 = 0 = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

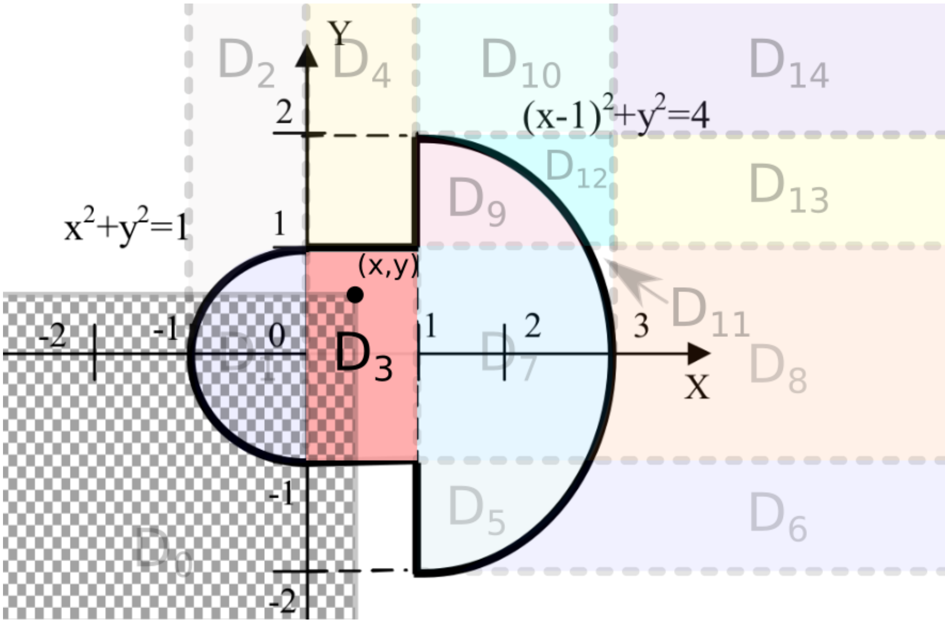
$D_1 - D_2 : y = \sqrt{1 - x^2}$

$F_{\bar{\xi}}(x, \sqrt{1 - x^2})^{D_1} =$

$$= \frac{\arcsin\left(\sqrt{1 - x^2}\right) - x\sqrt{1 - x^2} + 2x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin\left(\sqrt{1 - x^2}\right) + x\sqrt{1 - x^2}}{5\pi + 4} =$$

$$= \tfrac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\arcsin\left(\sqrt{1 - x^2}\right) + x\sqrt{1 - x^2} \right) = F_{\bar{\xi}}(x, -\sqrt{1 + x^2})^{D_2}$$

4. $(x, y) \in D_3$



$$F_{\overline{\xi}}(x,y) = F_{\overline{\xi}}(0,y)^{D_1} + \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \int\limits_0^x dt \int\limits_{-1}^y ds =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + \frac{\pi}{2}}{2} + x(y+1) \right)$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + \frac{\pi}{2}}{2} + x(y+1) \right) \right) =$$

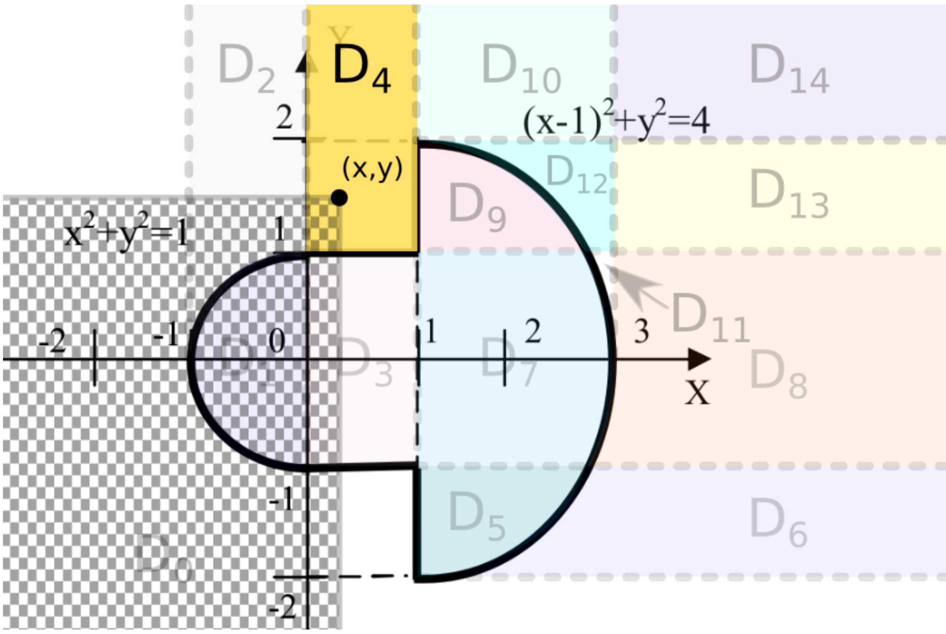
$$= \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y+1) = \frac{1}{2.5\pi+2} = f_{\overline{\xi}}(x,y)$$

Перевірка ліній стику областей:

$D_2 - D_3 : x = 0$

$$F_{\overline{\xi}}(0,y)^{D_1} = \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + \frac{\pi}{2}}{2} = F_{\overline{\xi}}(0,y)^{D_3}$$

5. $(x, y) \in D_4$



$$F_{\overline{\xi}}(x, y) = F_{\overline{\xi}}(x, 1)^{D_3} = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

Перевірка:

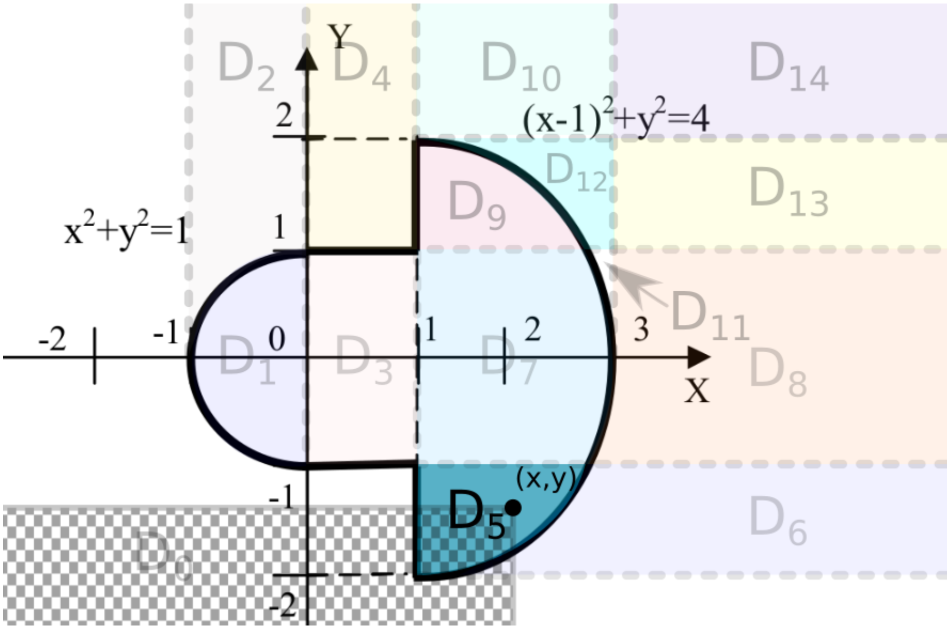
$$\frac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right) = 0 = f_{\overline{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

$D_2 - D_4 : x = 0$

$F_{\overline{\xi}}(0, y)^{D_2} = \frac{\arcsin(1)}{2.5\pi+2} = \frac{\pi}{5\pi+4} = F_{\overline{\xi}}(0, y)^{D_3}$

6. $(x,y) \in D_5$



$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \int\limits_1^x dt \int\limits_{-\sqrt{4-(t-1)^2}}^{y} ds = \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \int\limits_1^x \sqrt{4-(t-1)^2} + y dt =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \frac{(2x-2)\,y + (x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{2}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{(2x-2)\,y + (x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi+4}\right) =$$

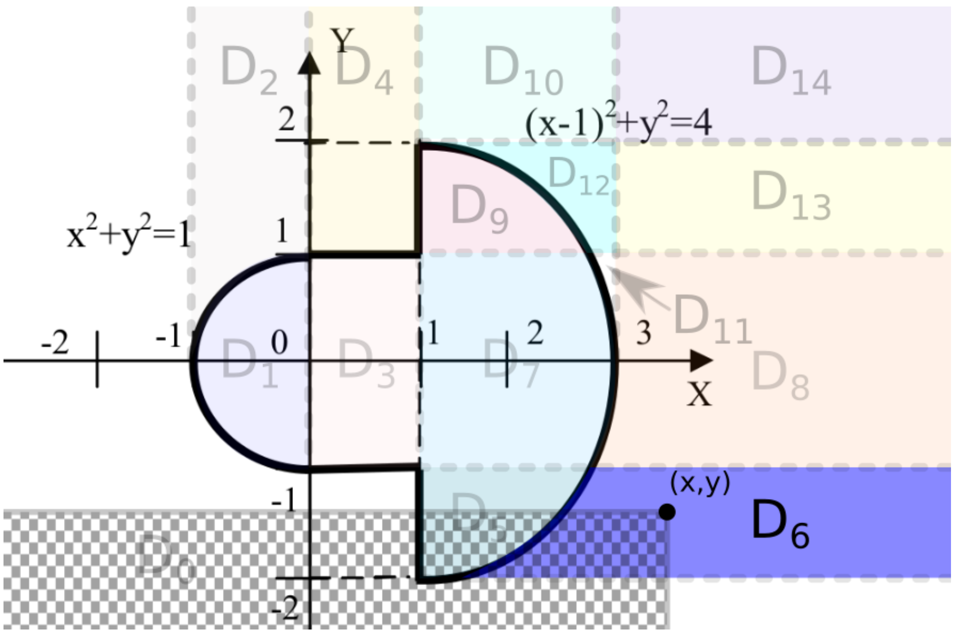
$$= \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x-2}{2} = \frac{1}{2.5\pi+2} = f_{\bar{\xi}}(x,y)$$

Перевірка ліній стику областей:

$D_0 - D_5 : x = 1$

$F_{\bar{\xi}}(1,y)^{D_0} = 0 = F_{\bar{\xi}}(1,y)^{D_3} = \frac{0*y+0\sqrt{3}+4*0}{5\pi+4} = 0$

7. $(x, y) \in D_6$



$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = F_{\bar{\xi}}(1+\sqrt{4-y^2}, y)^{D_5} = \frac{2\left(y\sqrt{4-y^2}\right) - y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)}{5\pi+4} =$$

$$= \frac{\left(y\sqrt{4-y^2}\right) + 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)}{5\pi+4} = \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2\pi}{5\pi+4}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2\pi}{5\pi+4}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(0) = 0 = f_{\bar{\xi}}(x,y)$$

Перевірка ліній стику областей:

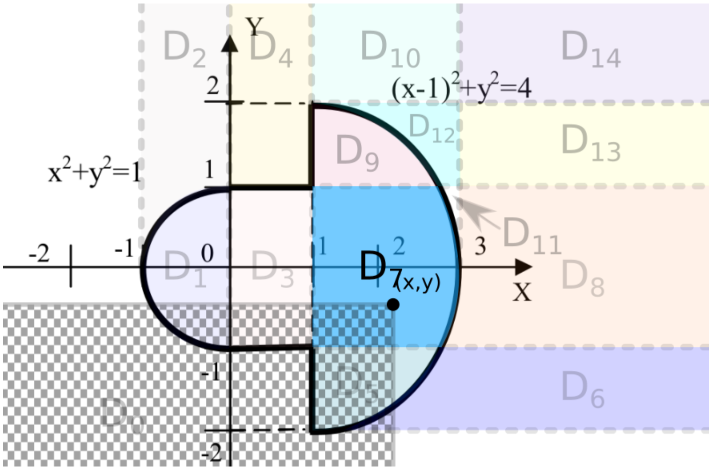
$D_6 - D_5 : x = 1 + \sqrt{4-y^2}$

$$F_{\bar{\xi}}(1+\sqrt{4-y^2}, y)^{D_5} = \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2\pi}{5\pi+4} = F_{\bar{\xi}}(1+\sqrt{4-y^2}, y)^{D_6}$$

$D_6 - D_0 : y = -2$

$F_{\bar{\xi}}(x,-2)^{D_5} = \frac{0\cdot(-2)+4\cdot\frac{-\pi}{2}+2\pi}{5\pi+4} = 0 = F_{\bar{\xi}}(x,-2)^{D_0} = 0$

8. $(x, y) \in D_7$



$$F_{\overline{\xi}}(x, y) = F_{\overline{\xi}}(1, y)^{D_3} + F_{\overline{\xi}}(x, -1)^{D_5} + \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int\limits_1^x ds \int\limits_{-1}^y dt =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1 - y^2} + \frac{\pi}{2}}{2} + (y + 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{(2 - 2x) + (x - 1)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{2} + (x - 1)(y + 1) \right) =$$

$= \frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{2}+(2-2x)+(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+2x(y+1)}{5\pi+4}$

Перевірка:

$\frac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{2}+(2-2x)+(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+2x(y+1)}{5\pi+4} \right) =$

$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\left(x\sqrt{1 - y^2} - y^2 + 1\right)}{(2.5\pi + 2)\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{2.5\pi+2} = f_{\overline{\xi}}(x, y)$

Перевірка ліній стику областей:

$D_7 - D_5 : y = -1$

$F_{\overline{\xi}}(x, -1)^{D_7} = \frac{0+0+(2-2x)+(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+0}{5\pi+4} =$

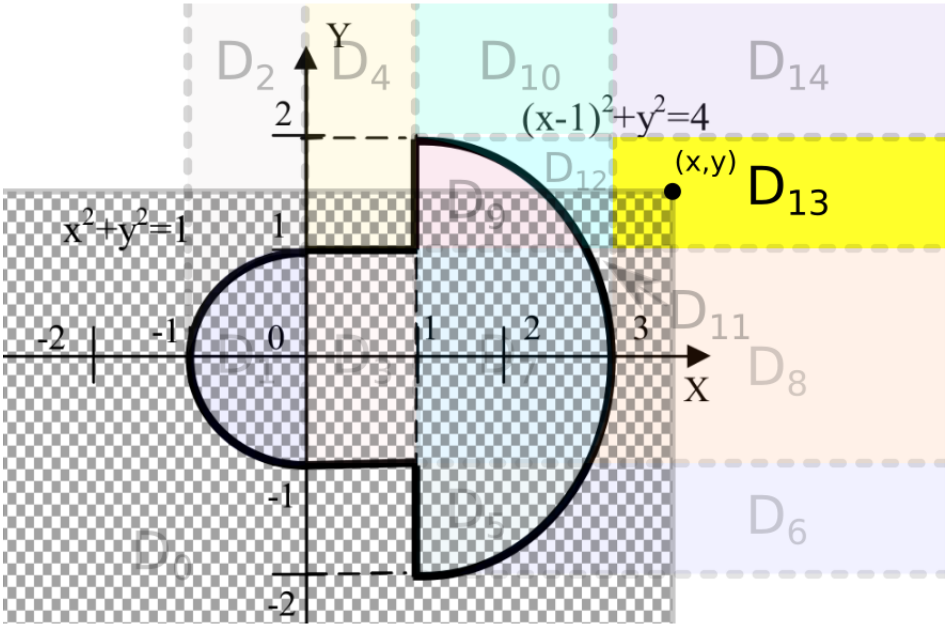
$= F_{\overline{\xi}}(x, -1)^{D_5} = \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \frac{(2-2x)+(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{2} =$

$D_7 - D_3 : x = 1$

$F_{\overline{\xi}}(1, y)^{D_7} = \frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{2}+0+0+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+2(y+1)}{5\pi+4} =$

$= F_{\overline{\xi}}(1, y)^{D_3} = \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{2}}{2} + (y + 1) \right)$

9. $(x, y) \in D_{13}$



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = 1 - \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int\limits_{y}^{2} dt \int\limits_{1}^{1+\sqrt{4-t^2}} ds = \frac{3\pi + 4 + y\sqrt{4 - y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi + 4}$$

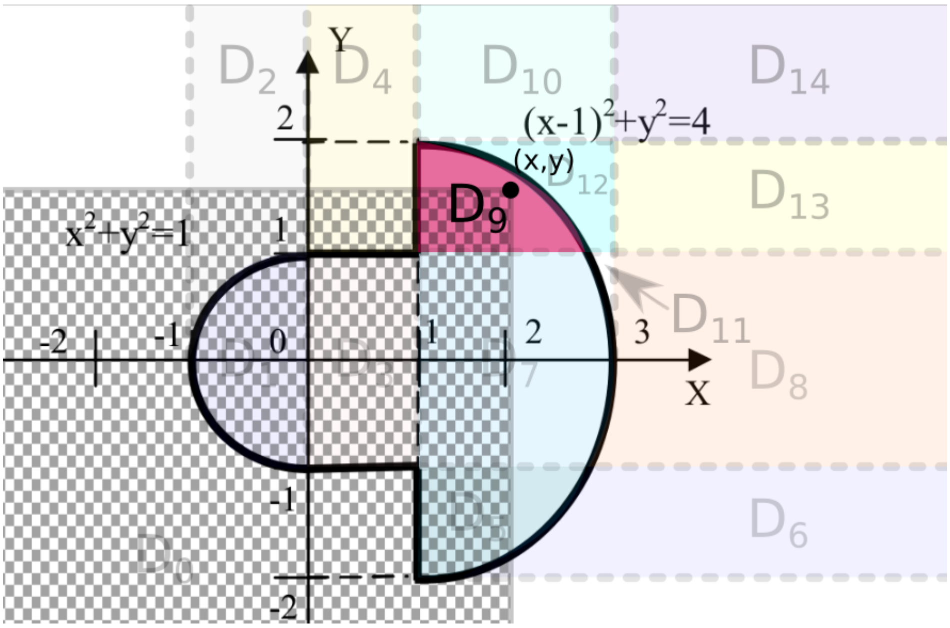
Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{3\pi + 4 + y\sqrt{4 - y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi + 4}\right) = \frac{\partial}{\partial y} 0 = 0 = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

Зробимо пізніше, коли знайдемо функції розподілу у інших зонах.

10. $(x, y) \in D_9$



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = F_{\bar{\xi}}(x, 1)^{D_7} + \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_1^x ds \int_1^y dt =$$

$$= \frac{(2-2x)+(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+4x+\pi}{5\pi+4} + \frac{2(x-1)(y-1)}{5\pi+4} =$$

$$= \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+4+2y(x-1)+\pi}{5\pi+4}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+4+2y(x-1)+\pi}{5\pi+4}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x-2}{5\pi+4} = \frac{1}{2.5\pi+2} = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

$D_9 - D_7 : y = 1$

$F_{\bar{\xi}}(x, 1)^{D_9} = \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+4+2(x-1)+\pi}{5\pi+4} =$

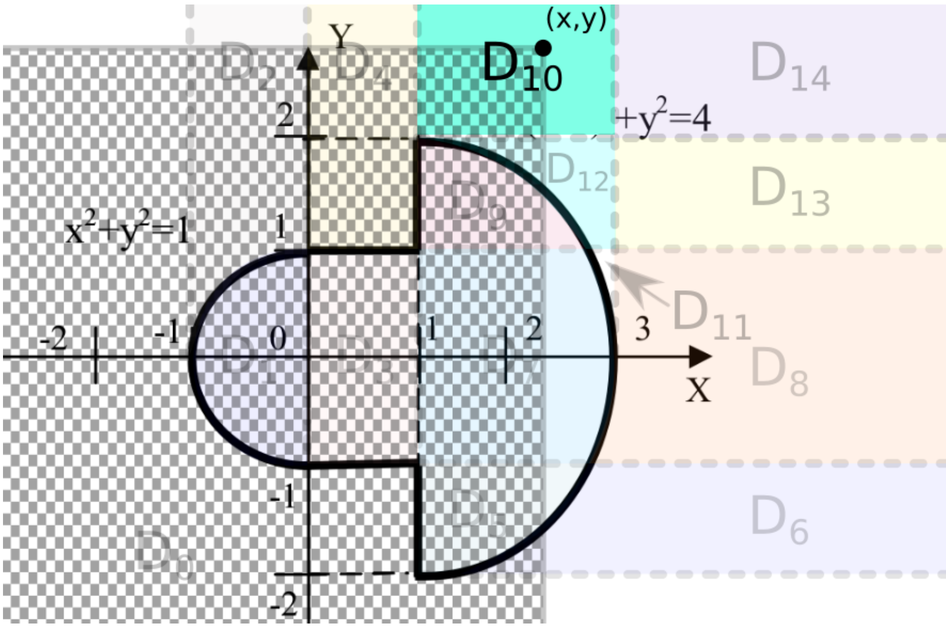
$F_{\bar{\xi}}(x, 1)^{D_7} = \frac{\pi+0+2-2x+(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+4x}{5\pi+4}$

$D_9 - D_4 : x = 1$

$F_{\bar{\xi}}(1, y)^{D_9} = \frac{0+4\arcsin(0)+4+\pi}{5\pi+4} =$

$= F_{\bar{\xi}}(1, y)^{D_4} = \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$

11. $(x,y) \in D_{10}$



$$F_{\overline{\xi}}(x,y) = 1 - \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \int\limits_{x}^{3} dt \int\limits_{\sqrt{4-(t-1)^2}}^{-\sqrt{4-(t-1)^2}} ds = 1 + \frac{2}{2.5\pi+2} \cdot \int\limits_{3}^{x} \sqrt{4-(t-1)^2} dt =$$

$$= \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) - 2\pi}{2.5\pi+2} + 1 =$$

$$= \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi+2}$$

Перевірка:

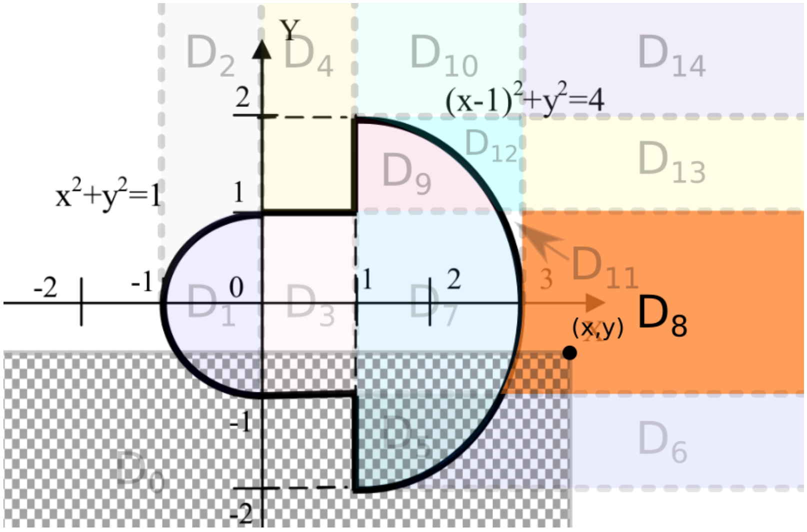
$$\frac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}+2}{2.5\pi+2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}0 = 0 = f_{\overline{\xi}}(x,y)$$

Перевірка ліній стику областей:

$D_{10} - D_4 : x = 1$

$F_{\overline{\xi}}(1,y)^{D_10} = \frac{0+4\arcsin(0)+4+\pi/2+2}{2.5\pi+2} = \frac{\frac{\pi}{2}+2}{2.5\pi+2} = F_{\overline{\xi}}(x,y)^{D_4}$

12. $(x,y) \in D_8$. З малюнку та інтегралу видно, що зону D_8 доведеться розбити ще на 2: $-1 < y \leq 0$ та $0 < y < 1$, але функції розподілу виявилися однаковими. Для $-1 < y \leq 0$ можемо скористатися вже знайденим виразом (при обчисленні виникає модуль, який розкриваємо з -):



$$F_{\overline{\xi}}(x,y) = F_{\overline{\xi}}(1+\sqrt{4-y^2}, y)_{-}^{D_7} =$$

$$= \frac{\arcsin{(y)} + y\sqrt{1-y^2} - |y|\sqrt{4-y^2} - 4\arcsin{\left(\frac{|y|}{2}\right)} + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi + 4}$$

Перевірка:

$\frac{\partial^2 F_{\overline{\xi}}}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi+4} = \frac{\partial}{\partial y} 0 = 0 = f_{\overline{\xi}}(x,y)$

Далі, знайдемо $F_{\overline{\xi}}(x,y)^{D_8}$ для $0 < y < 1$:

$$F_{\overline{\xi}}(x,y) = F_{\overline{\xi}}(1+\sqrt{4-y^2}, y)_{+}^{D_7} + \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int\limits_{-y}^{y} ds \int\limits_{1+\sqrt{4-y^2}}^{1+\sqrt{4-s^2}} dt =$$

$$= \frac{\arcsin{(y)} + y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin{\left(\frac{y}{2}\right)} + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi + 4}$$

Перевірка ліній стику областей:

$D_8 - D_7 : x = 1 + \sqrt{4-y^2}$

Вже знаходили під час пошуку площі зони:

$F_{\overline{\xi}}(1+\sqrt{4-y^2}, y)^{D_7} = \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + \sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi+4} = F_{\overline{\xi}}(1+\sqrt{4-y^2}, y)^{D_8}$

$D_8 - D_6 : y = -1$

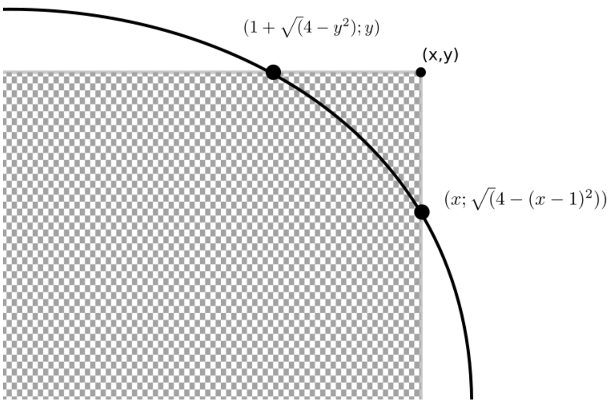
$F_{\overline{\xi}}(x,-1)^{D_8} = \frac{-\frac{\pi}{2} + 0 - \sqrt{3} - 4\frac{\pi}{6} + 2.5\pi}{5\pi+4} = F_{\overline{\xi}}(x,-1)^{D_6} = \frac{-\sqrt{3} + 4\frac{-\pi}{2} + 2\pi}{5\pi+4}$

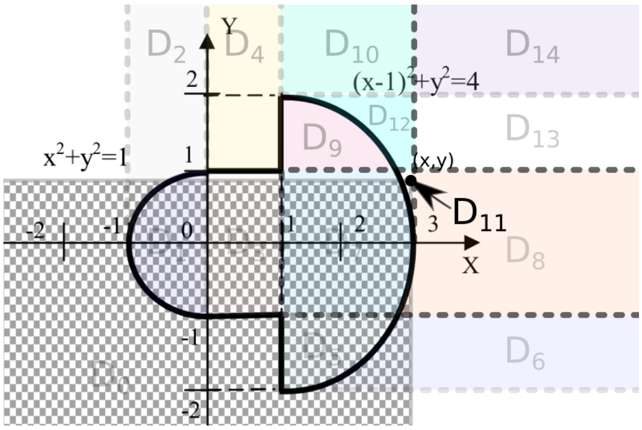
Повертаємося до зони D_13 :

$D_8 - D_{13} : y = 1$

$F_{\overline{\xi}}(x,1)^{D_8} = \frac{\frac{\pi}{2} + 0 + \sqrt{3} + 4\frac{\pi}{6} + 2.5\pi + 4}{5\pi+4} = F_{\overline{\xi}}(x,1)^{D_13} = \frac{3\pi + 4 + \sqrt{3} + 4\frac{\pi}{6}}{5\pi+4}$

13. $(x, y) \in D_{11}$





$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = F_{\bar{\xi}}(x,y)^{D_8} - \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \int\limits_x^3 ds \int\limits_{-\sqrt{4-(s-1)^2}}^{\sqrt{4-(s-1)^2}} dt =$$

$$= \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi+4} -$$

$$-\frac{-(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3} - 4\arcsin\left(\dfrac{x-1}{2}\right) + 2\pi}{2.5\pi+2} =$$

$$= \frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)-1.5\pi+2y+2+2(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3}+8\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi+4}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)-1.5\pi+2y+2+2(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3}+8\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi+4}\right)$$

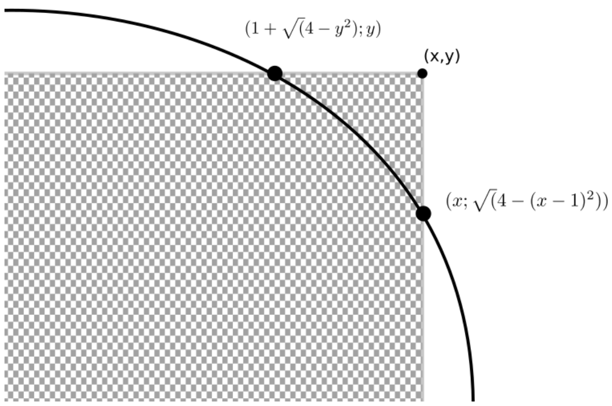
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2\sqrt{-x^2+2x+3} - \frac{(2-2x)(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+3}} - \frac{4}{\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}}}{2}\right) = 0 = f_{\bar{\xi}}(x,y)$$

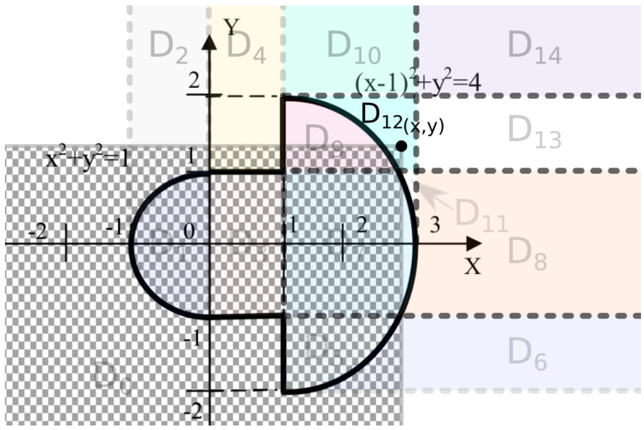
Перевірка ліній стику областей:

$D_{11} - D_6 : x = 3$

$$F_{\bar{\xi}}(3,y)^{D_11} = \frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+2.5\pi+2y+2}{5\pi+4} = F_{\bar{\xi}}(x,y)^{D_6}$$

14. $(x, y) \in D_{12}$





$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_{13}} - \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_{x}^{3} ds \int_{-\sqrt{4-(s-1)^2}}^{\sqrt{4-(s-1)^2}} dt =$$

$$= \frac{3\pi + 4 + y\sqrt{4 - y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi + 4} -$$

$$- \frac{-(1 - x)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} - 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2\pi}{2.5\pi + 2} =$$

$$= \frac{4 - \pi + y\sqrt{4 - y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2(1 - x)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} + 8 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi + 4}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) - 1.5\pi + 2y + 2 + 2(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3} + 8\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi+4}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2\sqrt{-x^2+2x+3} - \frac{(2-2x)(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+3}} - \frac{4}{\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}}}{2}\right) = 0 = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

$D_{12} - D_{13} : x = 3$

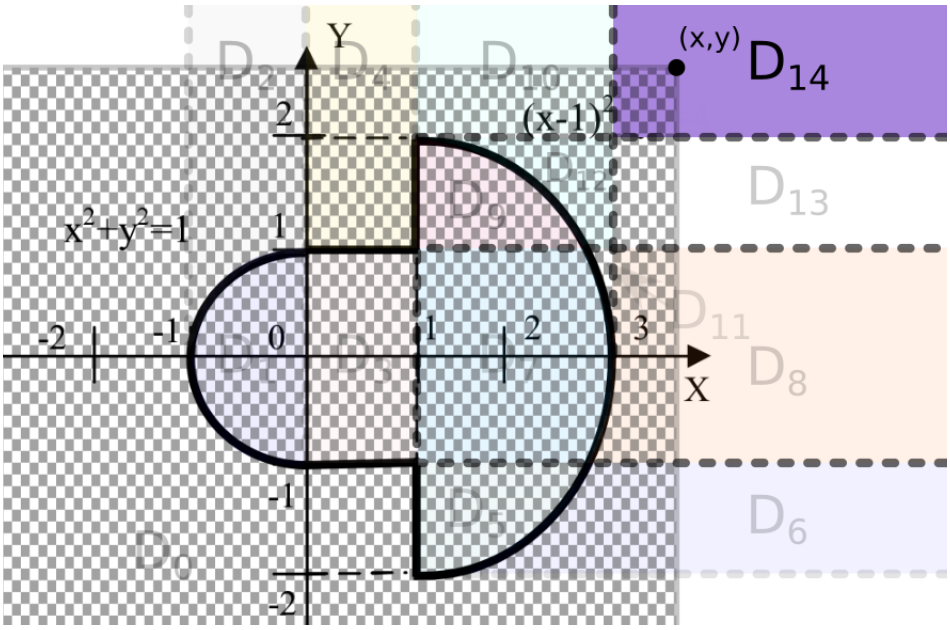
$$F_{\bar{\xi}}(3, y)^{D_11} = \frac{3\pi + 4 + y\sqrt{4 - y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi + 4} = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_13}$$

$D_{12} - D_{13} : y = 2$

$$F_{\bar{\xi}}(x, 2)^{D_11} = \frac{4-\pi+0+2\pi+2(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3}+8\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi+4} = \frac{2+\pi/2+(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{2.5\pi+2} =$$

$$= F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_{10}}$$

15. $(x,y) \in D_{14}$



$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = 1$$

Перевірка: $\dfrac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 = f_{\bar{\xi}}(x,y)$

Перевірка ліній стику областей:

$D_{14} - D_{10} : x = 3$

$F_{\bar{\xi}}(3,y)^{D_{10}} = \dfrac{\pi/2 + 2\pi + 2}{2.5\pi + 2} = 1 = F_{\bar{\xi}}(3,y)^{D_{14}}$

$D_{14} - D_{13} : y = 1$

$F_{\bar{\xi}}(x,1)^{D_{13}} = \frac{\pi/2+2\pi+2}{2.5\pi+2} = 1 = F_{\bar{\xi}}(x,1)^{D_{14}}$

$D_{14} - D_{12} : x = 3, y = 2$

$F_{\bar{\xi}}(3,2)^{D_{12}} = \frac{4-\pi+2\pi+4\pi}{5\pi+4} = 1 = F_{\bar{\xi}}(3,y)^{D_{14}}$

Остаточно отримали відповідь у вигляді системи:

$$F_{\bar{\xi}}(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in D_0;\\ \frac{1}{2.5\pi+2}\cdot\frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+2xy+\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)+3x\sqrt{1-x^2}}{2}, & (x,y)\in D_1;\\ \frac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)+x\sqrt{1-x^2}\right), & (x,y)\in D_2;\\ \frac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{2}}{2}+x(y+1)\right), & (x,y)\in D_3;\\ \frac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2x\right), & (x,y)\in D_4;\\ \frac{1}{2.5\pi+2}\cdot\frac{(2x-2)y+(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{2}, & (x,y)\in D_5;\\ \frac{y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+2\pi}{5\pi+4}, & (x,y)\in D_6;\\ \frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{2}+(2-2x)+(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+2x(y+1)}{5\pi+4}, & (x,y)\in D_7;\\ \frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+2.5\pi+2y+2}{5\pi+4}, & (x,y)\in D_8;\\ \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+4+2y(x-1)+\pi}{5\pi+4}, & (x,y)\in D_9;\\ \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}+2}{2.5\pi+2}, & (x,y)\in D_{10};\\ \frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)-1.5\pi+2y+2}{5\pi+4}+ & \\ +\frac{2(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3}+8\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi+4}, & (x,y)\in D_{11};\\ \frac{4-\pi+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+2(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3}+8\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi+4}, & (x,y)\in D_{12};\\ \frac{3\pi+4+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi+4}, & (x,y)\in D_{13};\\ 1, & (x,y)\in D_{14};\end{cases}$$

Нагадаємо маргінальні функції розподілу:

$$F_{\xi_1}(x)=\begin{cases}0, \quad x\le -1;\\ \frac{\arcsin(x)+x\sqrt{1-x^2}+\frac{\pi}{2}}{2.5\pi+2}, \quad -1<x\le 0;\\ \frac{\frac{\pi}{2}+2x}{2.5\pi+2}, \quad 0<x\le 1;\\ \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}+2}{2.5\pi+2}, \quad 1<x\le 3;\\ 1, \quad x>3;\end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y)=\begin{cases}0, \quad y\le -2;\\ \dfrac{y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+2\pi}{10\pi+4}, \quad -2<y\le -1;\\ \dfrac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+2.5\pi+2y+2}{5\pi+4},\\ -1<y\le 1;\\ \dfrac{3\pi+4+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi+4}, \quad 1<y\le 2;\\ 1, \quad y>2;\end{cases}$$

Таким чином, за функціє розподілу $F_{\bar{\xi}}(x,y)$ бачимо, що виконується властивість:

$$\lim_{x\to+\infty}F_{\bar{\xi}}(x,y)=F_{\xi_2}(y) \qquad \lim_{y\to\infty}F_{\bar{\xi}}(x,y)=F_{\xi_1}(x)$$

$$\begin{cases}F_{\xi_1}(x)=0=F_{\bar{\xi}}(x,y)^{D_0}, & x\le -1;\\ F_{\xi_1}(x)=F_{\bar{\xi}}(x,y)^{D_2}, & -1<x\le 0;\\ F_{\xi_1}(x)=F_{\bar{\xi}}(x,y)^{D_4}, & 0<x\le 1;\\ F_{\xi_1}(x)=F_{\bar{\xi}}(x,y)^{D_{10}}, & 1<x\le 3;\\ F_{\xi_1}(x)=F_{\bar{\xi}}(x,y)^{D_{14}}, & 3<x;\end{cases} \qquad \begin{cases}F_{\xi_2}(y)=0=F_{\bar{\xi}}(x,y)^{D_0}, & y\le -2;\\ F_{\xi_2}(y)=F_{\bar{\xi}}(x,y)^{D_6}, & -2<y\le -1;\\ F_{\xi_2}(y)=F_{\bar{\xi}}(x,y)^{D_8}, & -1<y\le 1;\\ F_{\xi_2}(y)=F_{\bar{\xi}}(x,y)^{D_{13}}, & 1<y\le 2;\\ F_{\xi_2}(y)=F_{\bar{\xi}}(x,y)^{D_{14}}, & y>2;\end{cases}$$

2.4. Математичні сподівання координат. Кореляційна матриця.

а) Обчислимо математичні сподівання координат.

$$\mathbb{E}\xi_1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_{\xi_1}(x)dx=\tfrac{2}{2.5\pi+2}\cdot\left(\int\limits_{-1}^{0}x\sqrt{(1-x^2)}dx+\int\limits_{0}^{1}xdx+\int\limits_{1}^{3}x\sqrt{4-(x-1)^2}dx\right)=$$

$$=\tfrac{2}{2.5\pi+2}\cdot\left(-\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{8}{3}+\pi\right)=-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{8}{3}+\pi=\tfrac{17+6\pi}{3(2.5\pi+2)}\approx 1.213$$

$$\mathbb{E}\xi_2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yf_{\xi_2}(y)dy=\tfrac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\int\limits_{-2}^{-1}y\sqrt{4-y^2}dy+\int\limits_{-1}^{1}y\sqrt{4-y^2}+y\sqrt{1-y^2}+ydy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1}^{2}y\sqrt{4-y^2}\right)=\int\limits_{-2}^{2}y\sqrt{4-y^2}dy+\int\limits_{-1}^{1}y\sqrt{1-y^2}+ydy=-\frac{\left(4-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{-2}^{2}+$$

$$+\left(\frac{y^2}{2}-\frac{\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=0+0=0\text{ - фігура симетрична відносно }OY.$$

Окремо розглянемо інтеграли в такому вигляді:

$$\int t^2\sqrt{a^2-(t-b)^2}dt = \begin{vmatrix} s=t-b \\ dt=ds \end{vmatrix} =$$

$$= \int s^2\sqrt{a^2-s^2}ds - 2b\int s\sqrt{a^2-s^2}ds + b^2\int \sqrt{a^2-s^2}ds$$

Вже розглядали в загальному вигляді:

$$1.\int \sqrt{a^2-s^2}ds = \frac{(t-b)\sqrt{a^2-(t-b)^2}+a^2\arcsin\frac{(t-b)^2}{a}}{2}$$

$$2.\int s\sqrt{a^2-s^2} = \frac{(a^2-(t-b)^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

Знайдемо підстановкою Чєбишева(III):

$$\int s^2\sqrt{a^2-s^2}ds = \begin{vmatrix} p^2=\dfrac{a^2-s^2}{s^2} \\ \dfrac{-2a^2}{s^3}ds=2pdp \\ sds=\dfrac{a^2pdp}{(p^2+1)^2} \end{vmatrix} = \int \frac{a^2p^2}{(p^2+1)^2}dp =$$

$$= \frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{a^2-(t-b)^2}{(t-1)^2}}\right)}{2} - \frac{\sqrt{\frac{a^2-(t-b)^2}{(t-1)^2}}}{\frac{a^2-(t-b)^2}{(t-b)^2}+2}$$

Збираємо разом: $\int t^2\sqrt{a^2-(t-b)^2}dt =$

$$\boxed{= \frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{a^2-(t-b)^2}{(t-1)^2}}\right)}{2} - \frac{\sqrt{\frac{a^2-(t-b)^2}{(t-1)^2}}}{\frac{a^2-(t-b)^2}{(t-b)^2}+2} - \frac{(a^2-(t-b)^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + b^2\frac{(t-b)\sqrt{a^2-(t-b)^2}+a^2\arcsin\frac{(t-b)^2}{a}}{2}}$$

$\mathbb{E}\xi_1^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)dx = \frac{2}{2.5\pi+2}\cdot\left(\int\limits_{-1}^{0} x^2\sqrt{(1-x^2)}dx + \int\limits_{0}^{1} x^2dx + \int\limits_{1}^{3} x^2\sqrt{4-(x-1)^2}dx\right) =$
$= (*) = \frac{2}{2.5\pi+2}\cdot\left(\frac{\pi}{16}+1+2\pi+\frac{16}{3}\right) = \frac{2}{2.5\pi+2}\cdot\left(2\frac{1}{16}\pi+\frac{19}{3}\right) \approx 2,1946$
(*) - підстановка чисельних значень в знайдений інтеграл занадто громіздка.
$\mathbb{E}\xi_2^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\xi_2}(y)dy = \frac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\int\limits_{-2}^{-1} y^2\sqrt{4-y^2}dy + \int\limits_{-1}^{1} y^2\sqrt{4-y^2}+y^2\sqrt{1-y^2}+y^2dy+\right.$

$\left.+\int\limits_{1}^{2} y^2\sqrt{4-y^2}\right) = \frac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\frac{8\pi+3^{\frac{3}{2}}}{12}+\frac{19\pi-4\cdot3^{\frac{3}{2}}+16}{24}+\frac{8\pi+3^{\frac{3}{2}}}{12}\right) = \frac{51\pi+16}{12(5\pi+4)} \approx 0,7450$

Знайдемо дисперсію:
$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = \frac{2}{2.5\pi+2}\cdot\left(2\frac{1}{16}\pi + \frac{19}{3}\right) - \frac{144\pi^2+816\pi+1156}{225\pi^2+360\pi+144} = \frac{909\pi^2+2484\pi-976}{900\pi^2+1440\pi+576} \approx 1.1299$
$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = \frac{51\pi+16}{12(5\pi+4)} - 0 \approx 0,7451$

$$\mathbb{E}\xi_1\xi_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf_{\overline{\xi}}dxdy =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\int\limits_{-1}^{0} xdx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} ydy + \int\limits_{0}^{1} xdx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} ydy + \int\limits_{1}^{3} xdx \int\limits_{\sqrt{4-(x-1)^2}}^{-\sqrt{4-(x-1)^2}} ydy\right) =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\int\limits_{-1}^{0} 0\cdot xdx + \int\limits_{0}^{1} 0\cdot xdx + \int\limits_{1}^{3} 0\cdot xdx\right) = 0$$

Отримали 0, адже фігура симетрична за OY.
Знайдемо коваріацію та коваріаційну матрицю вектора: $cov(\xi_1,\xi_2) = \mathbb{E}_{\xi_1,\xi_2} - \mathbb{E}_{\xi_1}\mathbb{E}_{\xi_2} = 0 * 0 = 0$

$$C_{\overline{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{909\pi^2+2484\pi-976}{900\pi^2+1440\pi+576} & 0 \\ 0 & \frac{51\pi+16}{12(5\pi+4)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.1299 & 0 \\ 0 & 0,7451 \end{bmatrix}$$

Очевидно, що матриця додатньовизначена та невироджена.
Оскільки коваріація дорівнює 0 $\Rightarrow$ величини ξ_1, ξ_2 - некорельовані, слід перевірити координати вектора $\overline{\xi}$ на залежність. Згідно теореми:

Теорема 2.4. Для абсолюно неперервного вектора $\begin{bmatrix}\xi & \eta\end{bmatrix}^T$

$$\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Leftrightarrow f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x)f_\eta(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Контр-приклад: $0 < x \leq 1$, $-1 < y \leq 1$, в точці (1;1) отримаємо:

$$f_{\xi_1}(x)\cdot f_{\xi_2}(y) = \frac{2}{(2.5\pi+2)^2}\sqrt{(1-x^2)}\cdot\left(\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2}+1\right) =$$

$$f_{\xi_1}(1)\cdot f_{\xi_2}(1) = \frac{2}{(2.5\pi+2)^2}\sqrt{(1-x^2)}\cdot\cdot\left(\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2}+1\right) = 0 \neq \frac{2}{(2.5\pi+2)^2}$$

Тобто, з теореми випливає, що величини залежні.

2.5. Умовні щільності розподілу.

Нагадаємо:

$$f_{\bar{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2.5\pi + 2}, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le -1; \\ \dfrac{2}{2.5\pi+2}\sqrt{(1-x^2)}, \quad -1 < x \le 0; \\ \dfrac{2}{2.5\pi+2}, \quad 0 < x \le 1; \\ \dfrac{2}{2.5\pi+2}\sqrt{4-(x-1)^2}, \quad 1 < x \le 3; \\ 0, \quad x > 3; \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, \quad y \le -2; \\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\cdot\sqrt{4-y^2}, \quad -2 < y \le -1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2}+1\right), -1 < y \le 1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\cdot\sqrt{4-y^2}, \quad 1 < y \le 2; \\ 0, \quad y > 2; \end{cases}$$

Скористаємося формулами:

$$f_{\xi_1}(x|y) = \frac{f_{\bar{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_2}(y)} \qquad f_{\xi_2}(y|x) = \frac{f_{\bar{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_1}(x)}$$

$$f_{\xi_1|\xi_2}(x|y) = \begin{cases} \text{Невизначено }, y \le -2; \\ \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4-y^2}}, & -2 < y \le -1, x \in [1, 1+\sqrt{4-y^2}]; \\ 0, & -2 < y \le -1, x \notin [1, 1+\sqrt{4-y^2}]; \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2}+1}, & -1 < y \le 1, x \in [-\sqrt{1-y^2}, 1+\sqrt{4-y^2}]; \\ 0, -1 < y \le 1, x \notin [-\sqrt{1-y^2}, & 1+\sqrt{4-y^2}]; \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4-y^2}}, & 1 < y \le 2, x \in [1, 1+\sqrt{4-y^2}]; \\ 0, & 1 < y \le 2, x \notin [1, 1+\sqrt{4-y^2}]; \end{cases} \\ \text{Невизначено }, y > 2; \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x)=\begin{cases} \text{Невизначено },\quad x\le -1;\\ \begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{(1-x^2)}}, & -1<x\le 0, y\in[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}];\\ 0, & -1<x\le 0, y\notin[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}];\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x\le 1, y\in[-1,1];\\ 0, & 0<x\le 1, y\notin[-1,1];\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{4-(x-1)^2}}, & 0<x\le 1, y\in[-\sqrt{4-(x-1)^2},\sqrt{4-(x-1)^2}];\\ 0, & 0<x\le 1, y\notin[-\sqrt{4-(x-1)^2},\sqrt{4-(x-1)^2}];\end{cases}\\ \text{Невизначено },\quad x>3;\end{cases}$$

Перевірка. Очевидними є наступні рівності:

$$\int\limits_{1}^{1+\sqrt{4-y^2}}\frac{1}{\sqrt{4-y^2}dx}=1$$

$$\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{4-y^2}}\frac{1}{\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2}+1}dx=1$$

$$\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)}}dy=1$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2}dy=1$$

$$\int\limits_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}}\frac{1}{2\sqrt{4-(x-1)^2}}dy=1$$ Тоді:

Умови нормування для умовних щільностей виконуються, оскільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x/y)dx=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dx}{f_{\xi_2}(y)}=\frac{f_{\xi_2}(y)}{f_{\xi_2}(y)}=1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y/x)dy=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dy}{f_{\xi_1}(x)}=\frac{f_{\xi_1}(x)}{f_{\xi_1}(x)}=1.$$

2.6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{\xi_1|\xi_2}(x|y)dx =$$

$$= \begin{cases} \text{Невизначено }, y \le -2; \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4-y^2}}, & -2 < y \le -1, x \in [1, 1+\sqrt{4-y^2}]; \\ 0, & -2 < y \le -1, x \notin [1, 1+\sqrt{4-y^2}]; \end{cases} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2}+1}, & -1 < y \le 1, x \in [-\sqrt{1-y^2}, 1+\sqrt{4-y^2}]; \\ 0, -1 < y \le 1, x \notin [-\sqrt{1-y^2}, & 1+\sqrt{4-y^2}]; \end{cases} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4-y^2}}, & 1 < y \le 2, x \in [1, 1+\sqrt{4-y^2}]; \\ 0, & 1 < y \le 2, x \notin [1, 1+\sqrt{4-y^2}]; \end{cases} \\ \text{Невизначено }, y > 2; \end{cases}$$