Зміст

Лишки (вычеты)

1. Означення.

$f(z)$ – аналітична в околі т. z_0 за виключенням самої z_0 :

$$\left\{z \;\middle|\; 0 < |z - z_0| < \delta\right\}$$

γ – контур, що охоплює z_0 та належить проколотому околу z_0.

Лишком $f(z)$ в точці z_0 називають:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z$$

Зауваження. З теореми Кошы для неоднозв'язної області випливає, що $\forall \gamma_1, \gamma_2$, що охоплюють т. z_0 та належать $\left\{z \;\middle|\; 0 < |z - z_0| < \delta\right\}$, виконується рівність:

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$$

Таким чином, $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$ не залежить від γ.

Теорема 1.1. $f(x)$ – аналітична в $\left\{z \;\middle|\; 0 < |z - z_0| < \delta\right\}$. Тоді:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1},$$

де C_{-1} – коефіцієнт головної частини ряду Лорана при $\frac{1}{z-z_0}$.

2. Методи знаходження лишків.

Лема. z_0 – *усувна* особлива точка $f(z)$. Тоді:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$$

Лема. z_0 – *суттєва* особлива точка. Тоді:

$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$ рахується **тільки за розкладом** в ряд Лорана.

Лема. z_0 – *полюс* порядка k. Тоді:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \Big(f(z) * (z-z_0)^k\Big)^{(k-1)}$$

2.1. Часткові випадки.

1) z_0 - полюс першого порядку. Тоді:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) =$$

2) $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ така, що: $\varphi(z_0) \neq 0 \quad \psi(z_0) = 0 \quad \psi'(z_0) \neq 0$. Тоді:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

3. Нескінчена особлива точка. Ряд Лорана в околі $z = \infty$.

Перетворення $\omega = \frac{1}{z}$ переводить $z = \infty$ в т. $\omega = 0$.

Розглядаємо: $\omega = \dfrac{1}{z} \iff z = \dfrac{1}{\omega} \quad z_0 = \infty \iff \omega_0 = 0$.

$$f(z) = \dots = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} z^k}_{\text{головна}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{z^n}}_{\text{правильна}}$$

Коефіцієнт ряду обчислюється за формулою:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z) z^{n-1} \mathrm{d}z$$

Означення. Точка $z_0 = \infty$ є ізольованою, якщо:

$$\exists R\ \forall z \in \Big\{ z \ \Big| \ R < |z| \Big\} : f(z) \text{ – аналітична.}$$

Означення. Точка $z_0 = \infty$ – ізольована, називається:

- *усувною*, якщо $\exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A \pm \infty$.
- *полюсом*, якщо $\exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.
- *суттєвою*, якщо $\nexists \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Порядок полюса $z_0 = \infty$:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to\infty} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Тоді порядок полюса $z_0 = \infty$ є кратність нуля $z_0 = \infty$ для $h(z) = \dfrac{1}{f(z)}$

3.1. Характеристика ізольованої особливої точки $z_0 = \infty$ за розкладом в ряд Лорана.

Твердження. $z_0 = \infty$ – ізольована, особлива точка для $f(z)$. Тоді:

1) $z_0 = \infty$ – *усувна*: ряд Лорана не містить головної частини.
2) $z_0 = \infty$ – *полюс* кр. k: ряд Лорана містить k доданків головної частини.
3) $z_0 = \infty$ – *суттєва*: ряд Лорана містить безліч доданків головної частини.

Означення. z_0 – ізольована особлива точка функції $f(z)$.

Лишком функції $f(z)$ в т. $z_0 = \infty$ називають:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z$$

3.2. Пошук лишків. Зв'язок з рядом Лорана.

Теорема 3.1. $z_0 = \infty$ – ізольована, особлива точка для $f(z)$. Тоді:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = -C_1$$

де C_1 – коефіцієнт головної частини ряду Лорана $f(z)$ в околі $z_0 = \infty$, тобто коефіцієнт при доданку $\frac{1}{z}$.

Зауваження. Навіть у усувної точки $z_0 = \infty$ лишок може бути ненульовим.

4. Застосування лишків для обчислення інтегралів.

Теорема 4.1 (Коші, для лишків I)**.** Задана $f(x)$ – аналітична в області D за вийнятком скінченої кількості особливих точок $z_1, \ldots, z_n$.

γ – замкнений контур в D, який охоплює $z_1, \ldots, z_n$. Тоді:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$

Теорема 4.2 (Коші, для лишків II)**.** Задана $f(x)$ – аналітична в області D за вийнятком скінченої кількості особливих точок $z_1, \ldots, z_n$. Тоді:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

Зауваження. Ми розглядаємо випадок скінченої кількості особливих точок, бо в випадку нескінченої кількості з'являється гранична точка(точки) із множини особливих, що не будуть ізольованими.

4.1. Застосування теорії лишків для дійсних інтегралів.

I. $R(x,y)$ — дробово-раціональна функція від x, y:

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \text{ де } P, Q \text{ – многочлени.}$$

Тоді, шляхом заміни в інтегралі отримаємо:

$$\int\limits_{0}^{2\pi} R(\cos(x), \sin(x))\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} e^{ix} = z & \cos x = \dfrac{z^2+1}{2z} \\ i\dfrac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{d}x & \sin x = \dfrac{z^2-1}{2iz} \end{matrix} \right| = \int\limits_{|z|=1} iR\left(\frac{z^2+1}{2z}; \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z} \circleddash$$

Підінтегральна функція – дробово-раціональна від z, тому має скінчену кількість особливих точок в колі $|z| = 1$, таким чином:

$$\circleddash\ 2\pi \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} \left[R\left(\frac{z^2+1}{2z}; \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{z}\right]$$

II. Невласні дійсні інтеграли.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x$$

Теорема 4.3. $f(x)$ задана на $\mathbb{R}$ така, що вона продовжується аналітично на верхню півплощину $\mathbb{C}(\Im z > 0)$ за виключенням скінченої кількості особливих точок $z_1, \ldots, z_n$.

$f(x)$ така, що $\exists \lim\limits_{|z|\to\infty} |z \cdot f(z)| = 0$. Тоді: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)$

III. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos x\mathrm{d}x$ або $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\mathrm{d}x$.

Зауважемо, що: $\cos(\alpha x) = \Re e^{i\alpha x}$, $\sin(\alpha x) = \Im e^{i\alpha x}$. Тому:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \Re \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\mathrm{d}x = \Im \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x$$

Тому далі будемо розглядати:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x$$

Лема (Жордана)**.** $f(x)$ – аналітична в верхній півплощині $\mathbb{C}$ за виключенням скінченої кількості особливих точок $z_1, \ldots, z_n$.

$$\lim_{|z|\to\infty} \max_{\substack{|z|=R \\ \Im z\geq 0}} (f(z)) = 0$$

Тоді:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \Im z\geq 0}} f(z)e^{i\alpha z}\mathrm{d}z = 0$$

Теорема 4.4. $f(x)$ задана на $\mathbb{R}$ така, що вона продовжується аналітично на верхню півплощину $\mathbb{C}(\Im z > 0)$ за виключенням скінченої кількості особливих точок $z_1, \ldots, z_n$.

$$\lim_{|z|\to\infty} \max_{\substack{|z|=R \\ \Im z \geq 0}} (f(z)) = 0$$

Тоді:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)e^{i\alpha z}$$

Теорема 4.5. $f(x)$ – парна. γ – симетричний відносно OX. **Тоді:**

$$\int\limits_{\gamma} f(x)\mathrm{d}x = 0$$