ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ
ТА ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

За лекціями Горбань Н.

Редактори: Терещенко Д.

Людомирський Ю.

2021

Зміст

1. Лекція 1

1.1. Нормальні системи диференційних рівнянь

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \end{cases} \tag{1}$$

Системою диф. рівнянь n-го порядку в нормальній формі називається система вигляду (1), де $f_i : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad i = \overline{1, n}$.

Позначення.

$$\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{– невідома вектор-функція,} \quad \overline{f}(t, \overline{x}(t)) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}, \text{ що}$$

$D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тоді $(1) : \overline{x}'(t) = \overline{f}(t, \overline{x}(t))$.

Означення. Розв'язком системи (1) на (α, β) називається така вектор-функція $\overline{x}(t) \in C^1(\alpha, \beta)$, що:

1) $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$;

2) $\overline{x}(t)$ перетворює (1) на тотожність на інтервалі (α, β).

Загальним розв'язком системи (1) називається n-параметрична сім'я розв'язків (1), що охоплює всі розв'язки системи.

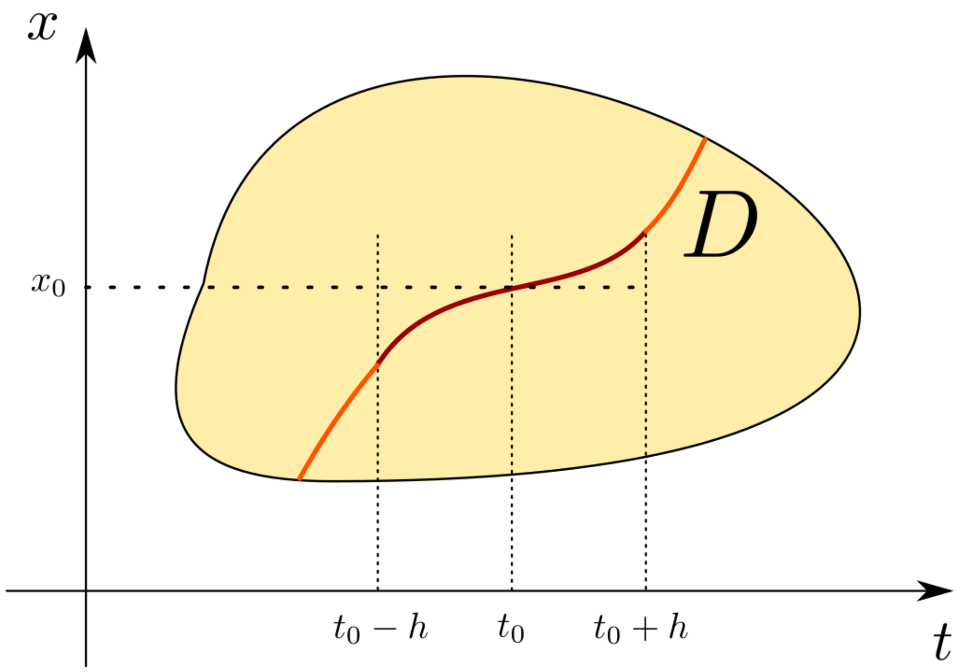
Задача Коші. Для заданих $t_0, \overline{x}^0 \in D$ знайти такий розв'язок (1), що $\overline{x}(t_0) = \overline{x}^0$.
Нехай $\Pi = \{(t, \overline{x}) \in \mathbb{R} \quad \Big| \quad |t - t_0| \le a, \quad ||\overline{x} - \overline{x}_0|| \le b\}$.

Теорема 1.1 (Теорема Пеано)**.** Нехай $\overline{f} \in C(\Pi)$. Тоді розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \overline{x}' = \overline{f}(t, \overline{x}) \\ \overline{x}(t_0) = \overline{x}_0 \end{cases}$$

існує принаймні на проміжку $I_h = (t_0 - h, t_0 + h)$, де $h = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}$, $M = \max\limits_{(t,x)\in\Pi} ||\overline{f}(t, \overline{x})||$.

Теорема 1.2 (про продовження)**.** Нехай для системи (1) виконується, що $\overline{f} \in C(D)$, $\quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область. Тоді $\forall t : (t_0, \overline{x}_0) \in D$ існують такі $t^-, t^+ : t^- < t_0 < t^+$, що розв'язок системи (1) з початкової умови $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$ існує на інтервалі (t^-, t^+), причому $(t^-, \overline{x}(t^-))$ та $(t^+, \overline{x}(t^+))$ належать межі області D.



Теорема 1.3 (Теорема Пікара)**.** Нехай

1) $\overline{f} \in C(\Pi)$;

2) $\exists! L > 0 : \forall (t_1, \overline{x}_1), (t_2, \overline{x}_2) \in \Pi$ справедливо, що $||f(t_1, \overline{x}_1) - f(t_2, \overline{x}_2)|| \leq$ $\leq L||\overline{x}_1 - \overline{x}_2||$ (умова Ліпшиця).

Тоді $\exists!$ розв'язок задачі Коші з початкової умови $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0(t)$, визначений принаймні на $I_h = (t_0 - h, t_0 + h), \quad h = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}, \quad M = \max\limits_{\Pi} ||f(t, \overline{x})||$.

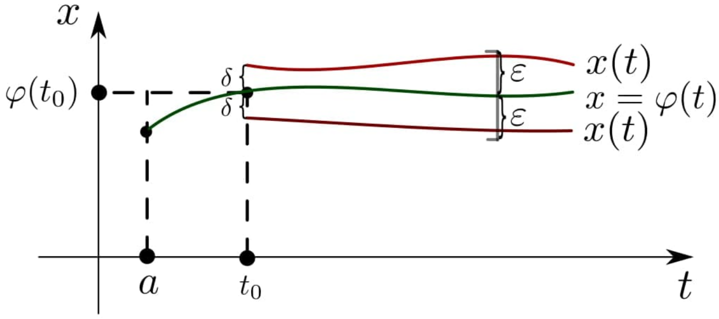
1.2. Основні поняття теорії стійкості.

Розглянем систему диференційних рівнянь $\overline{x}' = \overline{f}(t, \overline{x})$ (1), де $f : D \to \mathbb{R}^n$ та $D = [a, +\infty] \times G, \quad G \subset \mathbb{R}^n$. Нехай при цьому $\overline{f}$ задавольняє умовам існування та єдиності розв'язку задачі Коші в будь-якій точці $(t_0, \overline{x}_0) \in D$

Означення. Розв'язок $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ системи (1) називається **стійким** за Ляпуновим, якщо

1) $\overline{x} = \overline{\varphi}(t) \quad \exists$ на $[a, +\infty]$ (відсутніть вертикальних асимптот)

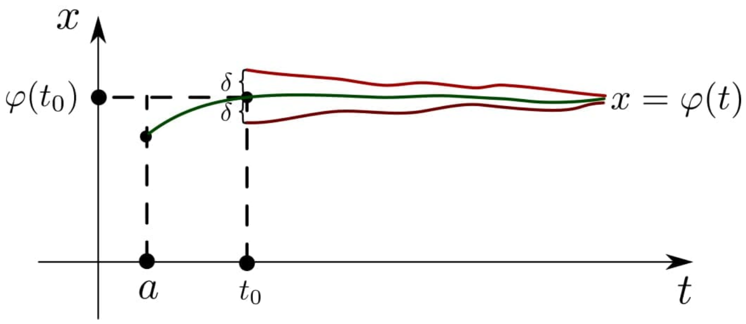
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$ розв'язку $\overline{x}(t)$ системи (1) такого, що $||\overline{x}(t_0) - \overline{\varphi}(t_0)|| < \delta$ виконується наступне, що $\overline{x}(t)$ існує на $[t_0, +\infty]$ та $||\overline{x}(t) - \overline{\varphi}(t)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$.



Означення. Розв'язок $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ системи (1) називається **асимптотично стійким** за Ляпуновим, якщо

1) $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ стійкий;

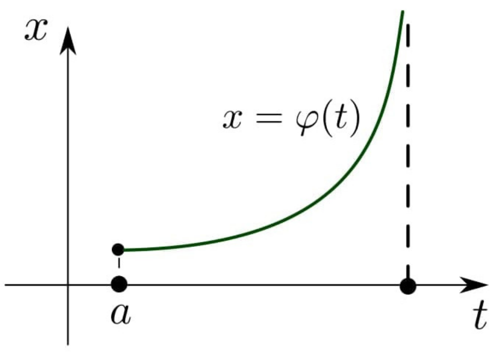
2) $\forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$ розв'язку $\overline{x}(t)$ с-ми (1) такого, що $||\overline{x}(t_0) - \overline{\varphi}(t_0)|| < \delta$ справедливо, що $||\overline{x}(t_0) - \overline{\varphi}(t_0)|| \to 0$ при $t \to +\infty$.

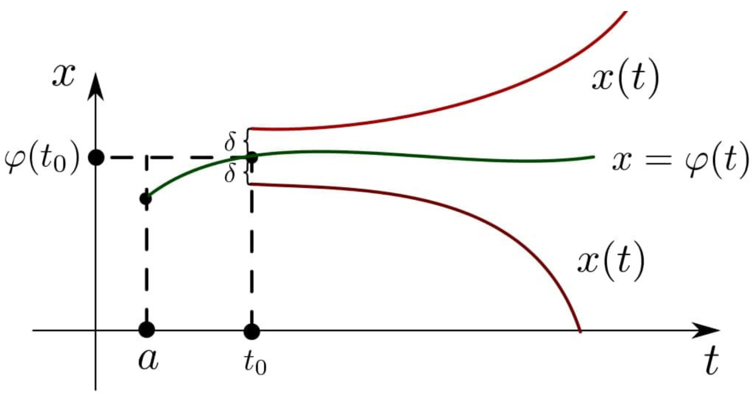


Роз'язок $\overline{\varphi}(t)$ називається **нестійким за Ляпуновим**, якщо він не є стійким, тобто:

1) Або $\overline{x} = \overline{\varphi}(t) \quad \nexists$ на $[a, +\infty]$ (вертикальні асимптоти);

2) Або $\exists \varepsilon > 0 : \exists t_0 \geq a : \forall \delta > 0$ існує розв'язок $\overline{x}(t)$ системи (1) такий, що $||\overline{x}(t_0) - \overline{\varphi}(t_0)|| < \delta$, але $||\overline{x}(t_0) - \overline{\varphi}(t_0)|| > \varepsilon$





1.3. Приклади дослідження на стійкість за означенням.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} x' = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1) Знайдемо розв'язок заданої задачі Коші: $x = 1 \Rightarrow x = t + C$ - загальний розв'язок. Підставимо: $x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow$ $\boxed{\varphi(t) = t}$ – розв'язок, який будемо досліджувати. Зазначений розв'язок не має вертикальних асимптот та $\exists$ на $\mathbb{R}$.

2) Знайдемо розв'язок довільної задачі Коші $x(t_0) = x_0$.

$$x_0 = t_0 + C \quad \Rightarrow \quad C = x_0 - t_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = t + x_0 - t_0$$

3) Нехай $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$, тоді $|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - t_0| < \varepsilon = \delta$. Таким чином, розв'язок є стійким, але не є асимптотично стійким.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} x' = 1 + t - x \text{ – лінійне неоднорідне рівняння першого порядку} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1) Знайдемо розв'язок даної задачі Коші:

$$x' = -x + 1 + t = |\text{ метод Бернуллі, } x = uv| = t + Ae^{-t}$$

Знайшли загальний розв'язок. Із умови задачі Коші: $A = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$

2) Знайдемо розв'язок довільної задачі Коші:

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 = t_0 + Ae^{-t_0} \quad \Rightarrow \quad A = (x_0 - t_0)e^{t_0}$$

Отримали: $x(t) = t + (x_0 - t_0)e^{t_0 - t} -$ загальний розв'язок задачі Коші

3) Беремо $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |t_0 - x_0| < \delta$ і розглянемо:

$$|x(t) - \varphi(t)| = |t - t - (x_0 - t_0)e^{t_0 - t}| < \delta e^{t_0 - t} \to 0, \text{ при } t \to +\infty$$

Отже, $\forall t_0 \quad \exists \delta > 0$: для будь-якого розв'язку $x(t)$: $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$ справедливо, що $|x(t) - \varphi(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$. Отримали, що розв'язок даної задачі Коші $\varphi(t) = t$ є асимптотично стійким.

Зауваження. Очевидно, що простіше досліджувати на стійкість розв'язок типу $\varphi(t) = 0$. Нехай (1) $\overline{x}'(t) = \overline{f}(t, \overline{x})$, а $\overline{x} = \overline{\varphi(t)}$ – розв'язок, який потрібно дослідити на стійкість. Застосуємо заміну: $\overline{z} = \overline{x} - \overline{\varphi}(t)$, де $\overline{z}$ – нова невідома вектор-функція. Отримаємо систему:

$$\overline{z}'(t) + \overline{\varphi}'(t) = \overline{f}(t, \overline{z} + \overline{\varphi}(t)) \quad \Rightarrow \quad \overline{z}'(t) = \overline{f}(t, \overline{z} + \overline{\varphi}(t)) - \overline{f}(t, \overline{\varphi}(t)) \quad (*)$$

Можно довести, що розв'язок $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ системи (1) – стійкий (асимптотично стійкий або нестійкий) $\Longleftrightarrow$ розв'язок $\overline{z} = \overline{0}$ системи $(*)$ – стійкий (асимптотично стійкий або нестійкий).

1.4. Стійкість розв'язків лінійних систем

Лінійна неоднорідна система рівнянь n-ого порядку має вигляд (далі ЛНС):

$$\overline{x}' = A(t)\overline{x} + \overline{f}(t). \tag{2}$$

Де $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A(t) \in C[a,+\infty], \quad \overline{f} \in C[a,+\infty]$

Тоді $\forall t_0 \geq a, \quad \forall \overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний розв'язок ЛНС (2) з початковими умовми $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$, визначений на $[a,+\infty]$.

Нехай $\overline{\varphi}(t)$ – розв'язок (2), який потрібно дослідити на стійкість. Застосуємо заміну: $\overline{z}(t) = \overline{x} - \overline{\varphi}(t)$, де $\overline{z}(t)$ - нова невідома вектор-функція, а $\overline{\varphi}(t)$ - розв'язок, який ми маємо дослідити на стійкість.

Отримали лінійну однорідну систему першого порядку (далі ЛОС):

$$\overline{z}'(t) + \overline{\varphi}'(t) = A(t)\overline{z}(t) + A(t)\overline{\varphi}(t) + \overline{f}(t)$$

$$\overline{z}' = A(t)\overline{z} \text{ – ЛОС n-ого порядку} \tag{3}$$

Заміною ми звели дослідження довільного розв'язку лінійної неоднорідної системи до дослідження нульового розв'язку відповідної ЛОС. Таким чином, приходимо до висновку, що усі розв'язки є одночасно стійкими, асимптотично стійкимиабо не стійкими. А отже, розглядаючи будь-яку лінійну систему, можемо говорити про стійкість не окремого розв'язку, а системи в цілому. Досліджуючи при цьому розв'язок $\overline{x}(t) = \overline{0}$

Розв'яжемо ЛОС (3) (перейдемо до змінної x): $\quad \overline{x}' = A(t)\overline{x}$ – ЛОС (3).

$X(t)$ – її фундаментальна матриця (далі позначаємо ФМ). Тоді загальний розв'язок: $\overline{x}(t) = X(t) \cdot \overline{C}$, де $\overline{C} \in \mathbb{R}^n$. Розв'язок задачі Коші з початковими умовами $\overline{x}(t_0) = \overline{x_0}$:

$$\overline{x}_0 = X(t_0) \cdot \overline{C} \Rightarrow \overline{C} = X^{-1}(t_0) \cdot \overline{x_0} \Rightarrow \boxed{x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\overline{x}_0}$$

Теорема 1.4 (Про стійкість ЛОС)**.**

а) (3) - стійка $\Longleftrightarrow \exists K > 0 : \sup\limits_{t \geq a} ||X(t)|| \leq K$.

б) (3) - асимптотично стійка $\Longleftrightarrow ||X(t)|| \to 0$, при $t \to +\infty$.

в) (3) - нестійка. $\Longleftrightarrow \exists \{t_n\}_{n=1}^{\infty} : ||X(t_n)|| \to +\infty$, при $n \to \infty$

Доведення. а) $\boxed{\Longleftarrow}$

Нехай $\exists K > 0 : \sup\limits_{t \geq a} ||X(t)|| \leq K$.

Доведемо стійкість розв'язку $\overline{x}(t) = \overline{0}$. За означенням, візьмемо розв'язок довільної задачі Коші з початковими умовами $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$. Нехай $||\overline{x}_0|| < \delta$ і розглянемо $||\overline{x}(t)|| = ||X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot \overline{x}_0|| \leq ||X(t)|| \cdot ||X^{-1}(t_0)|| \cdot ||\overline{x}_0|| \leq K \cdot ||X^{-1}(t_0)|| \cdot ||\overline{x}_0|| < K||X^{-1}(t_0)||\delta < \varepsilon$ при $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K||X^{-1}(t_0)|| + 1}$. Отже, $\forall t_0 \geq a \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left(\delta = \dfrac{\varepsilon}{K||X^{-1}(t_0)|| + 1}\right)$ для довільного розв'язку з $||\overline{x}_0|| < \delta$ справедливо $||\overline{x}(t)|| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad$ стійкість розв'язку. $\blacksquare$

Доведення. а) $\boxed{\Longrightarrow}$

Нехай (3) – стійка. Припустимо від супротивного, що

$$\exists \{t_n\}_{n\geq 1}^{\infty} : t_n \to +\infty : ||X(t_n)|| \to +\infty \text{ при } n \to \infty$$

Тоді $\exists j = \overline{1, n} : ||\overline{x}^j(t_n)|| \to \infty$, де $\overline{x}^j$ - це j-тий стовпчик ФМ.

Покладемо $\forall \delta > 0$:

$$\overline{x}_0^{\delta} = \frac{\delta X(t_0)\overline{e}_j}{2||X(t_0)||} \text{ , де } \overline{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - j$$

Тоді $||\overline{x}_0^{\delta}|| = \dfrac{1}{2||X(t_0)||} \cdot \delta ||X(t_0) \cdot \overline{e}_j|| < \delta$.
Розглядаємо розв'язок задачі Коші з початковими умовами $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0^{\delta}$. Маємо:

$$\overline{x}(t) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot \overline{x}_0^{\delta} = X(t)X^{-1}(t_0) \cdot \frac{\delta X(t_0)\overline{e}_j}{2||X(t_0)||} = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{X(t)\overline{e}_j}{||X(t_0)||} = \frac{\delta}{2||X(t_0)||} \cdot \overline{x}^j(t)$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \forall n \geq n_0$$

$$||\overline{x}(t_n)|| = \frac{\delta}{2||X(t_0)||} \cdot ||\overline{x}^j(t_n)|| \to \infty > \varepsilon$$

Отримали нестійкість системи $\Rightarrow$ суперечність початковій побудові $\Rightarrow$ а).

Пункт б) доводиться аналогічно а). Пункт в) випливає із пукнта а). ■

1.5. Стійкість ЛОС зі сталою матрицею.

$$\overline{x}'(t) = A\overline{x}(t), \text{ де } A \text{ - стала матриця } n \times n \tag{4}$$

Теорема 1.5.

а) (4) - стійка $\iff \forall\lambda$ - власне число матриці A:

$\Re\lambda \leq 0$, причому якщо $\Re\lambda = 0$, то йому відповідають лише одновимірні клітини Жордана.

б) (4) - асимптотично стійка $\iff \forall\lambda$ - власні числа матриці $A : \Re\lambda < 0$.

в) (4) - нестійка $\iff$ не є стійкою.

Доведення. Нехай $\lambda = \alpha + i\beta$ - власне число матриці $A \Rightarrow$ у ФМ цьому власному числу відповідає розв'язок:

- якщо λ відповідають лише одновимірні клітини Жордана:

$$\overline{x}(t) = e^{\alpha t}(\overline{Q}_0 \cos{(\beta t)} + \overline{R}_0 \sin{(\beta t)})$$

- якщо клітина Жордана розміру l:

$$\overline{x}(t) = e^{\alpha t}(\overline{Q}_{l-1} \cos{(\beta t)} + \overline{R}_{l-1} \sin{(\beta t)})$$

Тоді:

якщо $\Re\lambda = \alpha < 0 \Rightarrow ||\overline{x}(t)|| \to 0$ за $t \to \infty$.

якщо $\Re\lambda = \alpha > 0 \Rightarrow ||\overline{x}(t)|| \to +\infty$ за $t \to \infty$.

якщо $\Re\lambda = 0$, то:

- якщо лише одновимірні клітини Жордана: $||\overline{x}(t)||$ - обмежена.
- якщо клітини Жордана розмірності $l \geq 2 : ||\overline{x}(t)|| \to +\infty$ за $t \to \infty$. ■

Приклад.

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = y - x \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 2)^2$$

Отримали дійсне власне число $\lambda = 2$, кратності 2. $\Re\lambda = 2 > 0 \Rightarrow$ Система нестійка.

Зауваження. Перевірку умов теореми в частині, що стосується стійкості, можно здійснювати нне знаходячи власних чисел матриці A.

Теорема 1.6 (Критерій Рауса-Гурвіца)**.**

$$\det(A - \lambda I) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n; \quad a_1 \in \mathbb{R}, a_0 > 0;$$

$\Re\lambda < 0 \quad \forall\lambda \quad \iff$ всі головні мінори матриці Гурвіца H додатні, де $H = (h_{ij})_{ij=1}^n$

$$h_{ij} = \begin{cases} a_{2i-j}, & 0 \leq 2i - j \leq n; \\ 0, & \text{інкше.} \end{cases}$$