2.b)
Скористуємося методом Квайна - Мак-Класкі. Випишемо кон'юнкти ДДНФ.
1. 1110
2. 1101
3. 1011
———–
4. 1100
5. 1010
6. 1001
7. 0110
8. 0101
Застосуємо закон неповного склеювання:
9. 11-0 (1, 4)
10. 110- (2, 4)
11. 1-10 (1, 5)
12. -110 (1, 7)
13. 1-01 (2,6)
14. -101 (2, 8)
15. 101- (3, 5)
16. 10-1 (3, 6)
Далі скористаємося законом поглинання. Вилучимо кон'юнкти 1-8. Тобто задана функція f має таку скорочену ДНФ:
$(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4) \vee (x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_4)$
Далі складемо імлікантну таблицю, визначимо ядро та побудуємо спрощену імплікантну таблицю.

Ядровими імплікантами є -110 та -101.
Відповідні кон'юнкти: $(x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4})$ та $(x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4)$. Викреслимо необхідні строки та стовбці. В результаті отримаємо спрощену імлікантну таблицю.

Випишемо у вигляді формули алгебри висловлень умову коректності тупикової ДНФ:

$$(A+B)\&(C+E)\&(D+F)\&(E+F) = (AC+BC+AE+BE)(F+DE) =$$

$$= ACF+BCF+AEF+BEF+ACBE+BCDE+BDE+ADE =$$

$$= \textbf{скористуємося законом поглинання} =$$

$$= ACF+BCF+AEF+BEF+BDE+ADE$$

Цей запис означає існування 6-ти тупикових форм. Переведемо:

$$A = (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_4})$$

$$B = (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3})$$

$$C = (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4})$$

$$D = (x_1 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4)$$

$$E = (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)$$

$$F = (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_4)$$

Випишемо отримані тупикові ДНФ:

1. $(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_4) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4)$
2. $(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_4) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4)$
3. $(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_4) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4)$
4. $(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_4) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4)$
5. $(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4)$
6. $(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4)$

Отримані тупикові ДНФ повністю збігаються з результатом, отриманим за методом карт Картно - 6 тупикових ДНФ по 5 кон'юнктів.

1. Дослідимо на належність основним функціонально-замкненим класам функцію $f_1(x,y,z) = (\overline{x} \to \overline{y}) \vee \overline{z} = (x \vee \overline{y}) \wedge \overline{z}$.

$$f_1(0,0,0) = 1; \quad f_1(1,1,1) = 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} f_1 \notin T_1; \\ f_1 \notin T_0; \\ f_1 \notin M; \end{array}$$

Обчислимо двоїсту функцію до f_1 :

$$f_1^*(x,y,z) = (x \wedge \overline{y}) \vee \overline{z}$$

$f_1^*(1,0,1) = 1 \neq f_1(0,0,0)$, отже $f_1 \notin S$.
Обчислимо поліном Жегалкіна. Отримаємо, функція не є лінійною $f_1 \notin L$:

$$f_1(x,y,z) = \overline{(\overline{x} \wedge y)} \wedge \overline{z} = (1 \oplus (1 \oplus x)y)(1 \oplus z) = 1 \oplus y \oplus z \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$$

2. Дослідимо на належність основним функціонально-замкненим класам функцію $f_2(x,y,z) = (\overline{x} \leftrightarrow \overline{y}) \oplus (\overline{x} \wedge z) = 1 \oplus x \oplus y \oplus (z \wedge (1 \oplus x)) = \mathbf{1} \oplus \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \oplus \mathbf{z} \oplus (\mathbf{x} \wedge \mathbf{z})$

$$f_2(0,0,0) = 1; \quad f_2(1,1,1) = 1; \quad f_2(1,0,1) = 0; \Longrightarrow \begin{array}{l} f_2 \notin T_0; \\ f_2 \in T_1; \\ f_2 \notin M; \end{array}$$

Обчислимо двоїсту функцію до f_2 :

$$f_2^*(x,y,z) = \overline{1 \oplus \overline{x} \oplus \overline{y} \oplus \overline{z} \oplus (\overline{x} \wedge \overline{z})} = 1 \oplus x \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus y \oplus z \oplus x \oplus (x \wedge z) =$$

$$= y \oplus (x \wedge z) \quad | \quad f_2^*(0,0,0) = 0 \neq f_2(0,0,0) \Longrightarrow f_2 \notin S$$

Обчислимо поліном Жегалкіна. Отримаємо, функція не є лінійною $f_2 \notin L$:

$$f_2(x,y,z) = 1 \oplus x \oplus y \oplus z \oplus xz$$

3. Дослідимо на належність основним функціонально-замкненим класам функцію $f_3(x,y,z) = \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z$;

$$f_3(0,0,0) = 0; \quad f_3(1,1,1) = 0; \quad f(0,0,1) = 1 \Longrightarrow \begin{array}{l} f_3 \notin T_1 \\ f_3 \in T_0 \\ f_3 \notin M \end{array}$$

Обчислимо двоїсту функцію до f_3 :

$$f_3^*(x,y,z) = \overline{x \wedge y \wedge \overline{z}} = \overline{x} \vee \overline{y} \vee z \Longrightarrow f_3^*(0,0,0) = 1 \neq f_3(0,0,0) \Longrightarrow f_3 \notin S$$

Обчислимо поліном Жегалкіна. Отримаємо, функція не є лінійною $f_3 \notin L$:

$$f_3(x,y,z) = (x \oplus 1)(y \oplus 1)z = z \oplus xz \oplus yz \oplus xyz$$

Заповнимо таблицю Поста для заданого набору фунцій:

Функція	T_0	T_1	M	S	L
$(x \wedge \overline{y}) \vee \overline{z}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(\overline{x} \leftrightarrow \overline{y}) \oplus (\overline{x} \wedge z)$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$

Отже, для кожного з п'яти основних функціонально-замкнених класів існує принаймі одна функція з набору K, яка цьому класу не належить.
Таким чином, за теоремою Поста набір K є функціонально повним.