Содержание

1. Введение

1.1. Комплексные числа

Рассмотрим уравнение одной переменной:
$x^2 + 1 = 0; \qquad i = \sqrt{-1}; \qquad i^2 = -1; \qquad i$ - мнимая единица
$\mathbb{N}$ - множество всех натуральных чисел
$\mathbb{Z}$ - множество всех целых чисел
$\mathbb{R}$ - множество всех рациональных чисел
$\mathbb{Q}$ - множество всех действительных чисел
$\mathbb{C}$ - множество всех комплексных чисел

Действия над комплексными числами:
$(t_1 = a_1 + ib_1; \quad t_2 = a_2 + ib_2)$

1. $$t_1 = t_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2; \\ b_1 = b_2; \end{cases}$$

2. Арифметика: $t_1 \pm t_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$
3. $t_1 * t_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$
4. $$\frac{t_1}{t_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i * \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Операции сравнения не определены
НЕРАВЕНСТВ НЕТ

Действительная и мнимая часть комплесного числа, полярные координаты:
$z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$
$x = \operatorname{Re} z$ - действительная часть
$y = \operatorname{Im} z$ - мнимая часть
$\bar{z} = x - iy$ - комплексное сопряжение
Модулем комплексного числа z называется расстояние от z до начала координат $\Rightarrow |OZ| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (x - iy)(x + iy) = x^2 + y^2 \Rightarrow |z| = z * \bar{z}$
$\varphi = \arg z$ - аргумент комплексного числа z. Следствие:
Тригонометрическое представление комплексного числа:
$$\begin{cases} x = |z| \cos \varphi \\ y = |z| \sin \varphi \end{cases} \qquad z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

1.2. Композиция, отображение, ассоциативность композиции

1.2.1. Композиция(суперпозиция)

1.2.2. Ассоциативность композиции

1.3. Образы и полные прообразы

1.4. Индуктивные множества

Принцип мат. индукции

1.4.1. Биноминальные коэфициенты. Бином Ньютона

1.5. Аксиомы множества действительных чисел

1.6. Основные утверждения анализа

2. Последовательности, пределы

Означення 2.1. Последовательность - это пронумерованый набор чисел.
Обозначение: $\{a_n, n \geq 1\}$ или $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

Означення 2.2. Задана последовательность $\{a_n, n \geq 1\}$ Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$ если: $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon}$

Обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

Базовые примеры пределов последовательностей: (Для a>1)

$$1) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad 2) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad 3) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad 4) \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

3. Неперервність

Означення 3.1. $f : A \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in A \qquad x_0-$ гранична точка A
f називається неперервною в т. x_0 якщо:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Означення 3.2. $f : A \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in A \qquad x_0-$ гранична точка A
f називається неперервною в т. x_0 справа(зліва), якщо:

$$\exists \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0) \qquad (\exists \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0))$$

Теорема 3.1. $f : A \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in A \qquad x_0-$ гранична точка A
$f(x)$ неперервна в т. x_0 т.т.т.к. $\quad \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$

Означення 3.3. $f : A \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in A \qquad x_0-$ гранична точка A
Точка x_0 називається **точкою розриву функції** якщо $f(x)$ не є неперервною в точці x_0

3.1. Класифікація точок розриву

Нехай задано: $f : A \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in A \qquad x_0-$ гранична точка A

0) Точка x_0 називається **усувною** точкою розриву, якщо:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Приклад. $f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad x \neq 0 \quad$ АЛЕ: $\quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

1) Точка x_0 називається точкою розриву типу **стрибок**, якщо:

$$\exists \lim_{x \to x_0+} f(x) \quad \exists \lim_{x \to x_0-} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-} f(x)$$

Зауваження. Точки розриву 0) та 1) загалом називають т. розриву I роду

2) Точка x_0 називається точкою розриву **II роду**, якщо виконується хоча б одна з умов:
1. $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \infty$
2. $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \infty$
3. $\nexists \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$
4. $\nexists \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$

3.2. Арифметичні властивості неперевних функцій

Теорема. $f, g : A \to \mathbb{R} \quad x_0 \in A$ - гранична точка $\quad f, g$ - неперервны в т. x_0.
1)$\forall c \in \mathbb{R} \qquad cf(x)$ - неперевна в т. x_0
2)$f(x) + g(x)$ - неперевна в т. x_0
3)$f(x) * g(x)$ - неперевна в т. x_0
4)$g(x_0) \neq 0$ то $\frac{f(x)}{g(x)}$ - неперевна в т. x_0

Доведення. 3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) * \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) * g(x_0)$. Таким чином, f(x)g(x) - неперервна. ∎

Доведення. 4) $g(x_0) \neq 0$, тож $\quad \exists \delta \quad \forall \in A \quad x \neq x_0 \quad |x - x_0| \quad g(x) \neq 0$.
Неперервна в т. x_0 : $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x \in A \quad x \neq x_0$
$|x - x_0| < \delta \to |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$.
- 1. У випадку якщо $|g(x_0)| = g(x_0)$: розв'яжемо відносно $\varepsilon = \frac{g(x_0)}{2} > 0$
$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \qquad\qquad g(x_0) - \varepsilon < g(x) < \varepsilon + g(x_0)$
Маємо: $0 < \frac{g(x_0)}{2} < g(x) < \frac{3g(x_0)}{2} \quad \to \quad g(x) \neq 0$
- 2. Якщо $|g(x_0)| = -g(x_0)$: розв'яжемо відносно $\varepsilon = -\frac{g(x_0)}{2} > 0$
Маємо: $\frac{3g(x_0)}{2} < g(x) < \frac{g(x_0)}{2} < 0 \quad \to \quad g(x) \neq 0$
Таким чином: $\frac{f(x)}{g(x)}$ - корректно визначено, отже за властивістю границь:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

∎

Теорема 3.2 (Неперервність композиції функцій)**.** Дано:
$f : A \to B \quad g : B \to \mathbb{R} \quad x_0$ - гранична точка A
$y_0 = f(x_0) \quad f(x)$ - неперервна в т. $x_0 \quad g(y_0)$ - неперервна в т. y_0.
Тоді: $\quad h : A \to \mathbb{R} \quad h(x) = g(f(x)) \quad h = g \circ f(x)$ - неперервна в т. x_0

Доведення. За властивістю границь суперпозиції функцій:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g(f(x_0)) = h(x_0)$$

■

Зауваження. f - неперервна в т. x_0, тоді:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \to x_0} x)$$

Або для композиції: $\quad \lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g(\lim\limits_{x \to x_0} f(x))$

3.3. Неперервність елеменарних математичних функцій

0) $f(x) = x$ - неперервна в т. x_0

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$
$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta < \varepsilon$$

1а) $f(x) = x^n$ - неперервна в т. x_0 за арифм. властивостями неперервних.
1б) $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ - неперервна в будь-якій т.x_0:
Неперервна як сумма неперервних.

Означення 3.4. Функція неперервна на всій множині А, якщо вона неперервна $\forall x \in A$. Позначення: Множина всіх функцій неперервних на А: $C(A)$
Тоді: з 1б) випливає, що многочлени $\in C(\mathbb{R})$

2) $f(x) = \sin x$
Відомо, що: $1 - \frac{x^2}{2} < \frac{\sin x}{x} < 1$. Перевіримо: т.$x_0 = a \in \mathbb{R}$.

$$f(x) - f(a) = \sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$$

$$\lim_{x \to a} (\sin x - \sin a) = \lim_{x \to a} 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2} = \left| \begin{matrix} \frac{x-a}{2} = t \\ t \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t \to 0} (\sin t \cos(t + a)) = 0$$

Таким чином: $\forall x \in \mathbb{R} : \quad \lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a \Longrightarrow f(x)$ - неперервна $\forall x \in \mathbb{R}$
Отже: $\quad f(x) = sin(x) \in C(\mathbb{R})$

3) $h(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$f(x) = \frac{\pi}{2} - x \in C(\mathbb{R}); \quad g(y) = \sin y \in C(\mathbb{R}) \implies h(x) = g \circ f(x) \in C(\mathbb{R})$
4а) $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ - неперервна $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ - за арифм. властивостями.
4б) $f(x) = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ - неперервна $\forall x \neq \pi k, k \in \mathbb{N}$ - аналогічно.
5) $f(x) = e^x$

$$\lim_{x\to 0} e^x - 1 = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1) * x}{x} = 1 * 0 = 0 \qquad \lim_{x\to 0} e^x = 1 = e^0$$

$$\lim_{x\to a} e^x - e^a = \lim_{x\to a} e^a(e^{x-a} - 1) = \left| \begin{matrix} x \to a \\ x - a = t \to 0 \end{matrix} \right| = e^a \lim_{t\to 0} e^t - 1 = 0$$

Таким чином, $f(x) = e^x$ - неперервна $\forall x \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.3 (Теорема про існування та неперервність оберненої функції для строго монотонної та неперервної). $f : (a,b) \to (c,d)$ $\quad \begin{matrix} \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \\ \lim\limits_{x\to b} f(x) = d \end{matrix}$
$f(x)$ - строго монотонно зростаюча та неперервна.
Тоді: $\exists g : (c,d) \to (a,b)$ - монотонна та неперервна.
1) $\forall x \in (a,b) \qquad g(f(x)) = x$.
2) $\forall y \in (c,d) \qquad f(g(y)) = y$.

Доведення. Розглянемо випадок $f(x)$ - строго зростаюча.
Визначимо монотонну: $\forall y \in (c,d): \qquad M_y = \{x, f(x) < y\}$.
1) M_y - обмежена, оскільки $M_y \subset (a,b) \qquad$ (Окремо: $b = +\infty$)
M_y - обмежена зверху. $\qquad y < d - \varepsilon < d \Rightarrow \varepsilon > 0$

$$\lim_{x\to b-} f(x) = d \Rightarrow \forall\varepsilon \quad \exists\delta : \quad b - x < \delta \Rightarrow |f(x) - d| < \varepsilon$$

Отже для x: $\quad x > b - \delta \quad f(x) > d - \varepsilon > y$.
Тобто для M_y - обмеження зверху $b - \delta$. $(x > b - \delta \Rightarrow f(x) > y \Rightarrow x \notin M_y)$.
Аналогічно - M_y - обмежена знизу.
2) Доведемо, що M_y - не порожня.

$$\lim_{x\to a+} f(x) = c \quad \exists\varepsilon \quad c + \varepsilon < y$$

Тоді: $\quad \exists\delta \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$ або $c - \varepsilon < f(x) < c + \varepsilon$.
Тобто: $\quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < c + \varepsilon < y \Rightarrow x \in M_y$.
Отже M_y - непорожня обмежена множина. $\Rightarrow \exists \sup M_y$.
Позначимо: $\quad \sup\{x : f(x) < y\} = x_y$. Отримали(побуд.): $\forall y \in (c,d) \xrightarrow{one} \exists! x_y$

Визначимо $g : (c, d) \to (a, b)$ наступним чином: $\quad g(y) = x_y$
Перевіримо, що $g(y)$ обернена для всіх $f(x)$:

$$\forall x \in (a, b) \quad f(x) = y \quad g(y) = x_y \quad g(f(x)) = x_y$$

Перевіримо, що $x_y = x$: $x_y = \sup\{x, f(x) < y\}$

$$\{x_n, n \geq 1\} = M_y = \{x, f(x) < y\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_y$$

$f(x_n) < y$; $\quad f(x)$ - неперервна, тож $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_y) \Rightarrow f(x_y) \leq y$
Розглянемо $\{\tilde{x_n}, n \geq 1\} \subset (x_y; b)$:

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x_n} > y \qquad f(\tilde{x_n}) > y \qquad \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x_n}) = f(x_y) \qquad f(x_y) \geq y$$

Отримали: $f(x_y) = y$ або $f(g(y)) = y$. Також маємо: $f(x) = f(x_y) = y$
Таким чином: $\quad g(f(x)) = x \quad g$ - строго зростаюча, обмежена, неперервна.
Зробимо перевірку. 1) $g(y)$ - строго зростаюча?
$y_1 < y_2 \quad x_1 = g(y_1) \quad x_2 = g(y_2)$; Якщо $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow y_1 \geq y_2$.
Протиріччя: $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow g(y)$ - строго зростаюча.
2) $g(y)$ - неперервна на (c, d) - Від супротивного:
Нехай: $\exists y_0$ таке, що g - не є неперервною в т.y_0.
Тобто $\quad \exists\{y_n, n \geq 1\} \subset (c, d) \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \{g(y_n), n \geq 1\} \neq x_0 = g(y_0)$
$g(y_n) = x_n \in (a, b)$. $\quad$ Послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ не збігається до x_0.
Тоді $\quad \exists\{x_{n_k}, k \geq 1\}$ - підпослідовність, така, що $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x^* \neq x_0$.
Таким чином, отримали: $\quad \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0 \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x^* \neq x_0 \Rightarrow$
$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*) \Rightarrow f(x_{n_k}) = y_{n_k} \quad f(x_0) = y_0$
Отже: $\quad \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = f(x^*) \neq y_0$ - $\bigotimes$ протиріччя. ∎

Зауваження. Аналогічна теорема є для випадку $f(x)$ - строго спадаюча.
Тоді: $\quad g(y)$ - обернена, також строго монотонно спадна.

Зауваження. Теорема вірна для випадків $\left[\begin{array}{l} b = +\infty \\ a = -\infty \end{array}\right.$

3.4. Приклади неперервних функцій

7) $g(y) = \ln y \quad y > 0$; $\quad$ Розглянемо: $f(x) = e^x -$ строго зростає.

$$g : (0; +\infty) \to (-\infty; +\infty) \qquad f : (-\infty; +\infty) \to (0; +\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \begin{vmatrix} x = -t \\ t \to +\infty \end{vmatrix} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$g(y)$ та $f(x)$ – взаємнообернені $\Rightarrow$ з теореми 3.3 - $g(x)$ – неперервна.
8)$g(y) = \sqrt[k]{x}$ Розглянемо: $f(x) = x^k$;
a) $k = 2m$ $f : (-\infty; +\infty) \to (0; +\infty)$;
b) $k = 2m + 1$ $f : (-\infty; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$;
$f(x)$ - строго зростаюча і неперервна; $f(g(y)) = y$; $g(f(x)) = x \Longrightarrow$
$f(x)$ і $g(x)$ - взаємно обернені та неперервні.
9) $g(y) = \arcsin x$ $f(x) = \sin x$ $f : (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$
$f(x)$ - строго монотонна, зростає, неперервна. $f(g(x)) = \sin \arcsin x = x$
За попередньою теоремою $\to$ $g(y) = \arcsin y$ - неперервна.
Аналогічно: $\arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$ - неперервні.

Теорема 3.4 (Перша теорема Вейерштрасса)**.** Задана $f(x) \in C([a, b])$.
Тоді $f(x)$ обмежена на [a,b].

Доведення. Від супротивного: Нехай $f(x)$ - не є обмеженою.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in [a, b]$: $|f(x_n)| > n$ $\{x_n, n \geq 1\}$ - отримали послідовність.

Тоді $\exists \{x_{n_k}, k \geq 1\}$ $f(x_{n_k}) \geq n_k$ або $\{x_{n_m}\}$ $f(x_{n_m}) \leq -n_m$
Розглянемо: $\{x_{n_k}, k \geq 1\} \subset [a, b]$ $f(x_{n_k}) \geq n_k \Rightarrow \{x_{n_k}\}$ - обмежена.
За теоремою Вейерштрасса: $\exists \{x_{n_{k_p}}, p \geq 1\}$ $\exists \lim\limits_{p\to\infty} x_{n_{k_p}} = x^\star$
$f(x_{n_{k_p}}) \geq n_{k_p} \to \infty$ - за припущенням.
Але за неперервністю: $\lim\limits_{p\to\infty} f(x_{n_{k_p}}) = f(x^\star)$ - $\bigotimes$ протиріччя. ■

Теорема 3.5 (Друга теорема Вейерштрасса)**.** Якщо $f \in C([a, b])$ тоді:
1) $\exists x_\star \in [a, b]$: $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_\star)$
2) $\exists x^\star \in [a, b]$: $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(x^\star)$

Доведення. Розглянемо $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = c$ - з I теореми Вейерштрасса.
Тоді за критерієм inf: 1) $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \geq c$
2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in [a, b]$ $f(x) < c + \varepsilon$
Розглянемо $\varepsilon = \frac{1}{n}$: $\exists x_\varepsilon = x_n \in [a, b] : c \leq f(x_n) < c + \frac{1}{n}$
$\{x_n, n \geq 1\} \subset [a, b]$– обмежена послідовність.
Тоді, $\exists \{x_{n_k}, k \geq 1\}$– збіжна підпослідовність за теоремою Вейерштрасса.
$\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_\star$, тоді $c \leq f(x_{n_k}) < c + \frac{1}{n_k}$
1) $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_\star)$ - з неперервності.
2) З нерівностей: $c \to c \leq f(x_{n_k}) \to c < c + \frac{1}{n_k} \to c$ - теорема про 3 функції.

$\exists \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_\star) = c$. З 1) та 2) та єдності границі маємо:
$\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = c = f(x_\star)$ Аналогічно для sup.

■

> **Теорема 3.6** (Теорема Коши про 0-ве значення)**.** $f(x) \in C([a,b])$
> $f(a) * f(b) < 0 \Longrightarrow \exists x_0 \in (a,b): \quad f(x_0) = 0$

Доведення. Нехай $f(a) < 0$ та $f(b) > 0$.
Розглянемо $M = \{x \in [a,b], f(x) \le 0\}$. Перевіримо: M - не пуста і обмежена.
1) $M \subset [a,b] \Longrightarrow$ обмежена.
2) $f(a) < 0 \quad \exists \varepsilon \quad f(a) < 0$. Для даного ε: $\exists \Delta \quad \forall x \in [a,b] \quad |x-a| < \Delta$
Оскільки $f(x)$ - нерозривна: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad f(a) = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$
Тоді $f(x) < f(a) + \varepsilon \quad f(x) > f(a) - \varepsilon \qquad \forall x \in [a,b] \quad |x-a| < \Delta$
Тоді $x \in M \quad M$ - не пуста множина $\Rightarrow \exists \sup M > a$.
Позначимо $\sup M = x_0$.
Розглянемо $\{x_n, n \ge 1\} \subset M \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad f(x_n) < 0-$ за визначенням M.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \le 0$$

$f(b) > 0 \quad \exists\tilde{\varepsilon} > 0 \quad f(b) - \varepsilon > 0 \quad$ Для $\tilde{\varepsilon}$: $\quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in [a,b]$
$|f(x) - f(b)| < \tilde{\varepsilon} \quad |x-b| < \delta$. Тобто $\forall x \in [a,b] \quad |x-b| < \delta \quad x \in [a,b] \setminus M$
$x_0 = \sup M \quad \forall x \Rightarrow \forall n \ge 1: \quad x_0 + \frac{1}{n} \ne M \quad \tilde{x_n} = x + \frac{1}{n} \quad f(\tilde{x_n}) \ge 0$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x_n} = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x_n}) = f(x_0) \ge 0$$

Тому, випливає, що $f(x_0) = 0$ ■

Наслідок. $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \forall L \in (f(a), f(b)) \quad \exists x_L \in (a,b) \quad f(x_L) = L$

Доведення.

$$g_L(x) = f(x) - L. \quad \text{З умов теореми: } \begin{matrix} g_L(a) > 0 \\ g_L(b) < 0 \end{matrix} \Longrightarrow g_L(a) * g_L(b) < 0$$

$g_L(x) \in C([a,b]) \Rightarrow$ з попередньої теореми: $\exists x_L \in (a,b) \quad g_L(x_L) = 0$
Тобто $f(x_L) - L = 0$ або $f(x_L) = 0$. ■

Зауваження. Щодо неперервності $f(x)$ на $[a,b]$:

$$f(a) = \lim_{x\to a+} f(x) \qquad f(b) = \lim_{x\to b-} f(x)$$

Зауваження (Узагальнення теореми про 0-ві(проміжні) значення). $f \in C([a,b])$
$\lim\limits_{x\to a+} f(x) * \lim\limits_{x\to b-} f(x) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) \quad f(x_0) = 0$
Також: $\forall L \in (\lim\limits_{x\to a+} f(x), \lim\limits_{x\to b-} f(x)) \quad \exists x_L \in (a,b) \quad f(x_L) = L$

3.5. Асимптотика графіків функцій

Означення 3.5. Вы Пряма $x = x_0$ називається вертикальною асимптотою, якщо:

$$\left[\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty \\ &\lim_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty \end{aligned}\right.$$

Означення 3.6. Пряма $y = kx + b$ нахивається похилою асимптотою, якщо:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$$

Теорема 3.7. Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою функції т.т.т.к:

$$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad\qquad b_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - k_\pm x)$$

Доведення. Розглянемо випадок $x \to +\infty : y = kx + b \iff$
$\iff \big($ Пряма $y = k_+x + b_+$ є похилою асимптотою $\big) \iff \big(f(x) = k_+x + b_+ + o(x)\big)$
$\overset{\text{ОЗН}}{\iff} \big(\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - k_+ + \frac{b_+}{x}\big)$

∎

3.6. Рівномірно неперервна функція на множині

Зауваження. Функція $f(x)$ є **неперервною** на множині $A \iff$
$\iff f(x)$ неперервна $\forall x_0 \in A \iff \forall x_0 \in A : \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff$
$\iff \forall x_0 \in A : \exists \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \quad \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Означення 3.7. $f(x)$ називається **ріномірно неперервною** на A, якщо:
$\forall x_0 \in A : \exists \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Або: $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Теорема. Функція $f(x)$ - рівномірно неперервна на множині А,
тоді вона неперервна на цій множині А.

Доведення. Дано: функція ріномірно неперервна на множині A:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Тоді:
$\forall x_0 \in A : \exists \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Тобто, $f(x)$ - неперервна на A. ■

Теорема 3.8 (Теорема Кантера)**.** $f(x) \in C([a,b])$ (Неперервна на відрізку)
Тоді $f(x)$ - рівномірно неперервна на $[a,b]$.

Доведення. Від супротивного: нехай $f(x)$ - не є рівномірно неперервною.
Тобто: $\exists \varepsilon^\star : \forall \delta \quad \exists x_{1\delta}, x_{2\delta} \in [a,b] \quad |x_{1\delta} - x_{2\delta}| < \delta \Rightarrow |f(x_{1\delta} = f(x_{2\delta}))| \geq \varepsilon^\star$
Тоді розглянемо $\delta = \frac{1}{n}$: $\quad x_{1\delta} = x_{1,n} \qquad x_{2\delta} = x_{2,n}$ - перепозначення.
$\{x_{1,n}, n \geq 1\}$ - послідовність точок на $[a,b]$ - обмежена, тому:
$\exists \{x_{1,n_{km}}, k \geq 1\}$ - збіжна: $a \leq x_{1,n_{km}} \leq b \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} x_{1,n_{km}} = x_1^\star \in [a,b]$
Розглянемо підпослідовність $\{x_{2,n}, n \geq 1\}$ - також обмежена, тому:
$\exists \{x_{2,n_{km}}, k \geq 1\}$ - збіжна: $a \leq x_{2,n_{km}} \leq b \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} x_{2,n_{km}} = x_2^\star \in [a,b]$
Отримали: $|x_{1,n} - x_{2,n}| < \frac{1}{n} \Longrightarrow |x_{1,n_{km}} - x_{2,n_{km}}| < \frac{1}{n_{km}}$
Але за побудовою $x_{1,n}, x_{2,n}$ маємо протиріччя: $|f(x_{1,n_{km}}) - f(x_{2,n_{km}})| \geq \varepsilon^\star$

$$f(x_{1,n_{km}}) \to f(x^\star) \qquad f(x_{2,n_{km}} \to f(x^\star)$$

■

4. Ряды

Означення 4.1. Рядом называется формальная бесконечная сумма последовательности чисел.

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \text{або} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Означення 4.2. Частичной суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется каждая конечная сумма k-слагаемых: $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$;

Тоесть возникает послдовательность частичных сумм: $\{S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n; k \in \mathbb{N}\}$.

Означення 4.3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм является сходящейся. Суммой сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$. Если последовательность частичных сумм расходится, то ряд называется расходящимся.

Приклад. -
1) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 + ...$
$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + ... = 0$
$S_k = \left[\begin{array}{ll} 0 & k = 2m \\ 1 & k = 2m + 1 \end{array}\right.$ - ряд не сходится.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n = S_k =$ сумма геом. прогрессии $= a\dfrac{1-a^k}{1-a}$

a) $a \neq 1 \quad \lim\limits_{k\to\infty} a\dfrac{1-a^k}{1-a} = \frac{a}{1-a} * \lim\limits_{n\to\infty} 1 - a^n = \left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{1-a}, |a| < 1 - \text{сходится} \\ \nexists, |a| > 1 - \text{расходится} \end{array}\right.$

b) $a = 1 \quad S_k = n \to \infty$ - расходится;
Вывод:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n - \left[\begin{array}{l} |a| < 1 - \text{сходится} \\ |a| \geq 1 - \text{расходится} \end{array}\right.$

Теорема 4.1 (Необходимый признак сходящегося ряда)**.** Задан сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство.

$$S_{k+1} = \sum_{n=1}^{k+1} a_n; \quad S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

$$S_{k+1} - S_k = a_{k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{k+1} - S_k = (\text{Ряд сходится}) = S - S = 0$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

■

Применение. Задан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ - ряд расходящийся.
Заметим, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ - неизвестно. Нужно дополнительное исследование.

Теорема 4.2 (Критерий Коши)**.** Задан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ряд является сходящимся т.т.т.к. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall k \geq K \quad \forall p \geq 1 \quad |\sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n| < \varepsilon$

Доказательство. $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$- сходящийся$)$ $\Leftrightarrow$ $(\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_k \neq \infty)$ $\Leftrightarrow$ Кр. Коши для последовательностей $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K: \quad \forall k \geq K \quad \forall p \geq 1 \\ |S_{k+p} - S_k| < \varepsilon \quad (m = k+p; |S_m - S_k| < \varepsilon) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K: \quad \forall k \geq K \\ \forall p \geq 1 \quad |\sum\limits_{n=1}^{k+p} a_n - \sum\limits_{n=1}^{k} a_n| < \varepsilon \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K: \quad \forall k \geq K \\ \forall p \geq 1 \quad |\sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n| < \varepsilon \end{pmatrix}$$

■

4.1. Арифметика рядов

Теорема 4.3 (Арифметика рядов)**.** Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходящиеся, то сходящимися являются:
1) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$;

Доказательство. 2) $S_k(a) = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n; \quad S_k(b) = \sum\limits_{n=1}^{k} b_n; \quad S_k(a+b) = \sum\limits_{n=1}^{k} (a_n + b_n)$;

$$S(a+b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \lim_{k\to\infty} S_k(a+b) = \lim_{k\to\infty} S_k(a) +$$

$$+ \lim_{k\to\infty} S_k(b) = S(a) + S(b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

■

Теорема 4.4. "Хвост" ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - это ряд $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$, где $m \in \mathbb{N}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящийся т.т.т.к. сходится "хвост" ряда, тоесть $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$.

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - сходящийся} \iff$$

$$\iff \text{Критерий Коши} \quad \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall k \geq K \quad \forall p \geq 1 \quad \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \right) \iff$$

$$\iff \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{K} = \max(K, m) \quad \forall k \geq \tilde{K} \quad \forall p \geq 1 \quad \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \varepsilon \right) \iff$$

$$\iff \text{Критерий Коши} \quad \left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n - \text{сходящийся.} \right)$$

■

4.2. Знакоположительные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$$

Утверждение 4.1. Задан знакоположительный ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1.$ Тогда $\{S_k; k \geq 1\}$ - монотонная, неубывающая последовательность.

Доказательство. $\forall k \geq 1: \quad S_{k+1} - S_k = a_{k+1} \geq 0 \Rightarrow S_{k+1} \geq S_k$

■

Утверждение 4.2. Задан знакоположительный ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1.$

Если $\exists M \geq 0 \quad \forall k \geq 1 \quad S_k \leq M$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящийся.

Доказательство. Утв.1 $\Longrightarrow \{S_k, k \geq 1\}$ - не убывает.
Условие $\Longrightarrow \forall k \geq 1 \quad 0 \leq S_k \leq M$. Следовательно, $\lim\limits_{k \to \infty} S_k \neq \infty$.

■

Теорема 4.5. (Признак сходимости знакоположительных рядов)
Заданны ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ такие, что $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad 0 \leq a_n \leq b_n$.
Тогда: a) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n-$ сходящийся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n-$ сходящийся.
b) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n-$ - расходящийся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n-$ расходящийся.

Доказательство. a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится.

Рассмотрим ряды: $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n; \quad \sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n; \quad \sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n-$ сходится как "хвост" ряда.

$\tilde{S}_k(a) = \sum\limits_{n=N}^{k} a_n-$ частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$; $\tilde{S}_k(b)-$ частичная сумма $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$;
1) Поскольку $\forall n \geq N \quad a_n \leq b_n$, то $\forall k \geq N : \tilde{S}_k(a) \leq \tilde{S}_k(b)$.
2)$\{\tilde{S}_k(b), k \geq N\}$ - монотонная, неуб. посл. $\Longrightarrow \lim\limits_{k \to \infty} \tilde{S}_k(b) = \sup\limits_{k \geq N} \tilde{S}_k(b) \neq \infty$

Таким образом, $\exists \tilde{S}(b) : \forall k \geq N \quad \tilde{S}_k(b) \leq \tilde{S}_k(b)$.

Отсюда, $\left.\begin{array}{c} \forall k \geq N : \tilde{S}_k(a) \leq \tilde{S}_k(b) \text{ - огр. сверху} \\ \{\tilde{S}_k(a), k \geq N\}\text{- монотонная, неуб. посл.} \end{array}\right) \Longrightarrow \exists \lim\limits_{k \to \infty} \tilde{S}_k(a)$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ сходится, а значит ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n-$ сходится

б) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится, то из а) $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n-$ расходится.

$\blacksquare$

Теорема 4.6 (Признак сравнения в пределах)**.** Заданы ряды:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, такие, что $\quad \forall n \geq 1 \quad a_n \geq 0 \quad b_n \geq 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l \quad$. Тогда:
а) Если $l \neq 0, l \neq \infty$ то оба ряда сходятся, или расходятся одновременно.
b) $l = 0 \Rightarrow$ из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Доказательство. а) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ поскольку $a_n \geq 0, b_n \geq 0$, то $l > 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |\frac{a_n}{b_n} - l| < \varepsilon$$

Рассмотрим $\varepsilon = l/2$: $\quad \forall n \geq N : \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2}$. Или $\frac{1}{2} l b_n < a_n < \frac{3}{2} l b_n$.
Далее по признаку сравнения в неравенствах:
Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - расходится $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} l b_n-$ расходится $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходящийся.
Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} l b_n-$ сходится $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходящийся.
Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n-$ сходится $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} l b_n-$ сходится $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n-$ сходящийся.
Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n-$ расходится $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} l b_n-$ расходится $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n-$ расходящийся.
b) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 = l \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad |\frac{a_n}{b_n}| < \varepsilon)$.
Рассмотрим $\varepsilon = 1$: $\quad 0 \leq a_n < b_n \Longrightarrow$ По признаку сравнения в неравенствах:
Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ч.и.т.д.

$\blacksquare$