

ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ

За лекціями Горбань Н.

Редактори: Терещенко Д.
Людомирський Ю.

2021

Зміст

1. Лекція 1	3
1.1. Основні поняття теорії стійкості.	5
1.2. Прилади дослідження на стійкість за означенням.	5

1. Лекція 1

Нормальні системи диф. рівнянь.

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (1)$$

Означення. Системою диф. рівнянь n -го порядку в нормальній формі називається система вигляду (1), де $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^{n+1}; i = 1, \dots, n$.

Позначення:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ — невідома вектор-функція}$$
$$\vec{f}(t, \vec{x}(t)) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad D \rightarrow \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Тоді (1): $\boxed{\vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t))}$

Означення. Розв'язком системи (1) на (α, β) називається така вектор функція $\vec{x}(t) \in C(\alpha, \beta)$, що:

1. $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$.
2. $\vec{x}(t)$ перетворює (1) на тотожність на (α, β) .

Загальним розв'язком системи (1) називається n -параметрична сім'я розв'язків (1), що охоплює всі розв'язки системи.

Задача Коші. Для заданих $t_0, \vec{x}^0 \in D$ знайти такий розв'язок (1), що $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^0$.

Нехай $(t_0, \vec{x}^0) \in D : \Pi = \left\{ (t, \vec{x}) \left| |t - t_0| \leq a, \quad \left\| \vec{x} - \vec{x}^0 \right\| \leq b; \right. \right\}$.

Розглядається задача Коші:
$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}^0 \end{cases}$$

Теорема 1.1 (Теорема Пеано). $\vec{f} \in \mathbb{C}(\Pi) \implies$

\implies існують розв'язки задачі Коші, принаймні на інтервалі:

$$I = (t_0 - h, t_0 + h); \quad h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{\Pi} \left\| \vec{f}(\vec{x}) \right\|$$

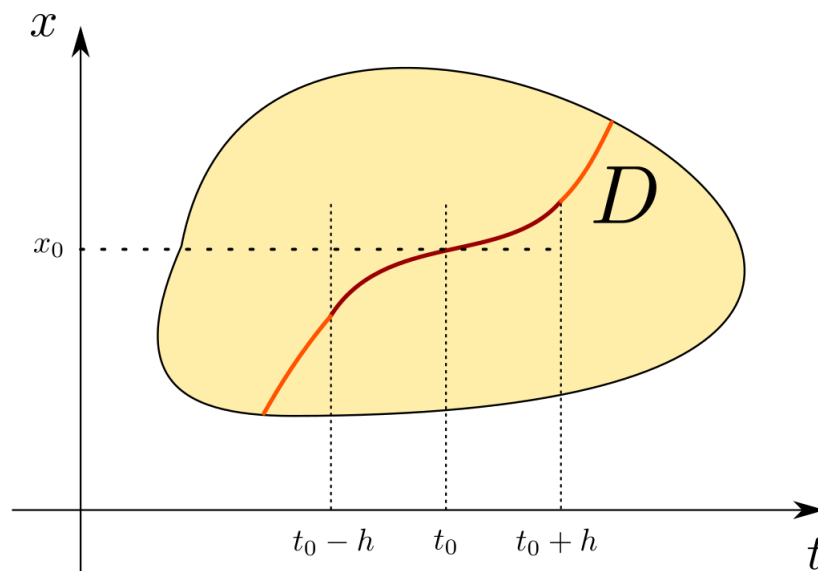
Теорема 1.2 (Теорема Пікара). Якщо виконуються умови:

1) $f \in C(\Pi)$

2) $\exists L > 0 \quad \forall (t, \vec{x}^1), (t, \vec{x}^2) \in \Pi : \left\| \vec{f}(t, \vec{x}^1) - \vec{f}(t, \vec{x}^2) \right\| \leq L \left\| \vec{x}^1 - \vec{x}^2 \right\|$ Тоді, існує та єдиний розв'язок задачі Коші, принаймні на інтервалі:

$$I = (t_0 - h, t_0 + h); \quad h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{\Pi} \left\| \vec{f}(\vec{x}) \right\|$$

Теорема 1.3 (про продовження). Нехай $\vec{f} \in \mathbb{C}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ - деяка обмежена область. Нехай $(t_0, \vec{x}^0) \in D$ - задана точка.



Тоді $\exists t^-$ та $t^+ : t^- < t < t^+$ такі, що розв'язок задачі Коші з початковою

умовою існує на проміжку (t^-, t^+) , причому точки $(t^-, \vec{x}(t^-)), (t^+, \vec{x}(t^+))$ належать межі області D .

1.1. Основні поняття теорії стійкості.

Розглянемо систему диф. рівнянь $\vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x})$:

$$f \in \mathbb{C}(D) \quad D = [a, +\infty] \times G \quad G \in \mathbb{R}^n \quad \forall (t_0, \vec{x}^0) \in D \exists! \text{ розв. З.К.}$$

Означення. Розв'язок системи (1) називається стійким за Ляпуновим, якщо:

- 1) $\vec{x} = \vec{\varphi}(t) \quad \exists$ на $[a, +\infty]$.
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0$, таке, що $\|\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)\| < \delta$ справедливо, що $\|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$.

Означення. Розв'язок $\vec{x} = \varphi(t)$ називається асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо: 1. $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ - стійкий.

2. $\forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \vec{x}(t)$ такого, що $\|\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)\| < \delta$ справедливо, що: $\|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$

Означення. Роз'язок називається **нестійким**, якщо він не є стійким.

1.2. Прилади дослідження на стійкість за означенням.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок З.К.:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Знайдемо розв'язок заданої З.К.: $x = 1 \Rightarrow x = t + C$ - заг. розв.

Підставимо: $0 = 0 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$ - будемо досліджувати.

Зазначений розв'язок не має вертикальних асимптот та існує на всьому \mathbb{R} .

2. Знайдемо розв'язок довільної З.К. $x(t_0) = x_0$.

$$x_0 = t_0 + C \Rightarrow C = x_0 - t_0 \Rightarrow x(t) = t + x_0 - t_0$$

3. Нехай $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$;

Тоді $|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - t_0| < \varepsilon = \delta$.

Таким чином, розв'язок є стійким, але не є асимптотично стійким.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок З.К.:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + t - x \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Знайдемо розв'язок даної задачі Коші:

$$\dot{x} = -x + 1 + t = | \text{методом Бернуллі} | = t + Ae^{-t}$$

Знайшли загальний розв'язок. Підставимо умову із з. К.: $A = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$

2. Знайдемо розв'язок довільної З.К.:

$$x(t_0) = x_0 \quad x_0 = t_0 + Ae^{-t_0} \quad A = (x_0 - t_0)e^{t_0}$$

$$x(t) = t + (x_0 - t_0)e^{t_0-t} - \text{загальний розв'язок з. К.}$$

3. Нехай $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$. Розглядаємо: $\forall t \geq t_0$:

$$|x(t) - \varphi(t)| = |t + (x_0 - t_0) \cdot e^{t_0-t} - t| = |x_0 - t_0| < \delta \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$$

Отримали, що знайдений розв'язок є асимптотично стійким.

Перейдемо знов до систем диф. рівнянь: $\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x}) \quad (1)$.

$\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ - розв'язок, який ми маємо дослідити на стійкість.

Заміна $\vec{z}(t) = \vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)$. Отримаємо систему:

$$\vec{z}' + \vec{\varphi}' = \vec{f}(t, \vec{z} + \vec{\varphi})(t)$$

$$\vec{f}'(t) = \vec{f}(t, \vec{\varphi}) \implies \boxed{\vec{z}' = \vec{f}(t, \vec{z} + \vec{\varphi}(t)) - \vec{f}(t, \varphi(t))}$$

Sample