

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
“ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ”
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ
СІКОРСЬКОГО”
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Розрахункова робота
ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ
Варіант-93(27)

Виконав:
Терещенко Денис, КА-96

КИЇВ - 2020

Зміст розрахункової роботи

«Випадкові вектори»

Розрахункова робота складається з виконання двох завдань.

Порядок виконання завдання 1

За таблицею розподілу координат дискретного випадкового вектора

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$$

Знайти:

1. Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2 .
2. Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно та побудувати графіки цих функцій.
3. Функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ випадкового вектора.
4. Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю.
5. Умовні ряди розподілу для кожної координати.
6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Порядок виконання завдання 2

Вважаючи, що неперервний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ рівномірно розподілений у заданій області

Знайти:

1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2 .
2. Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно.
3. Функцію розподілу $F_{\bar{\xi}}(x, y)$ випадкового вектора.
4. Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю.
5. Умовні щільності розподілу для кожної координати.
6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Зміст

1. Завдання 1	4
1.1. Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2	4
1.2. Функції розподілу координат ξ_1, ξ_2	5
1.3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\bar{\xi}$	6
1.4. Математичні сподівання координат. Кореляційна та нормована кореляційна матриця.	12
1.5. Умовні ряди розподілу для кожної координати.	13
1.6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.	14
2. Завдання 2	16
2.1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2	17
2.2. Функції розподілу координат ξ_1 та ξ_2	20
2.3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\bar{\xi}$	25
2.4. Математичні сподівання координат. Кореляційна матриця. . . .	42
2.5. Умовні щільності розподілу.	45
2.6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.	47

1. Завдання 1

Дискретний випадковий вектор $\xi = [\xi_1 \ \xi_2]$ задано таблицею розподілу.

Варіант 93

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-5	1	4	8
-3	0,06	0,04	0,06	0,03
0	0,01	0,14	0,04	0,13
3	0,12	0,12	0,06	0,19

Таблиця розподілу згідно варіанту.

Позначимо ймовірності: $p_{ij} = \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}, i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 4}$

1.1. Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Т.я. події $\{\xi_1 = x_i\}, i = \overline{1, 3}$ утворюють повну групу подій, (як і $\{\xi_2 = y_j\}, j = \overline{1, 4}$), можемо скористатися формулою повної ймовірності:

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i\} = \sum_{j=1}^4 p_{ij} \quad \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j\} = \sum_{i=1}^3 p_{ij}$$

Отримали:

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = -3\} = 0.06 + 0.04 + 0.06 + 0.03 = 0.19$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = 0\} = 0.01 + 0.14 + 0.04 + 0.13 = 0.32$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = 3\} = 0.12 + 0.12 + 0.06 + 0.19 = 0.49$$

Перевірка: $\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i\} = 0.19 + 0.32 + 0.49 = 1.0$

Отримали:

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = -5\} = 0.06 + 0.01 + 0.12 = 0.19$$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = 1\} = 0.04 + 0.14 + 0.12 = 0.3$$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = 4\} = 0.06 + 0.04 + 0.06 = 0.16$$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = 8\} = 0.03 + 0.13 + 0.19 = 0.35$$

Перевірка: $\sum_{j=1}^4 \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j\} = 0.19 + 0.3 + 0.16 + 0.35 = 1.0$

Ряди розподілу ξ_1 та ξ_2 :

ξ_1	-3	0	3
P	0.19	0.32	0.49

ξ_2	-5	1	4	8
P	0.19	0.3	0.16	0.35

1.2. Функції розподілу координат ξ_1, ξ_2 .

Для ξ_1 :

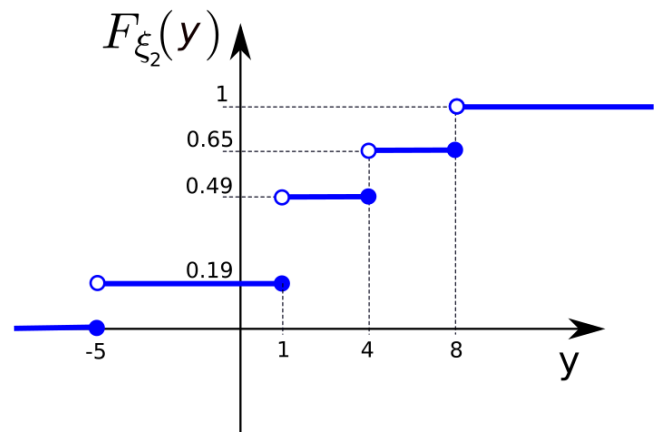
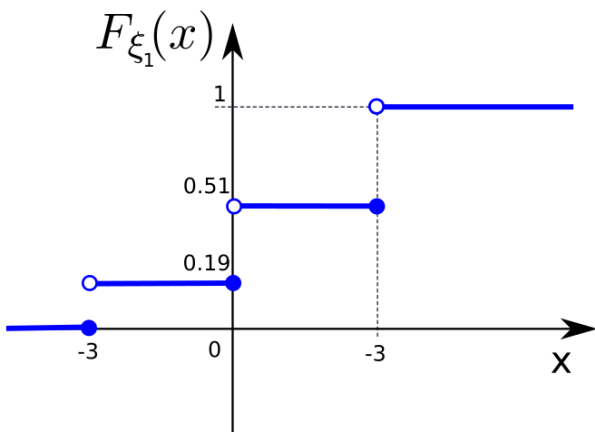
$$F_{\xi_1}(x) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x\} = \begin{cases} \mathbb{P}\{\emptyset\} = 0, & x \leq -3; \\ \mathbb{P}\{\xi_1 = -3\} = 0.19, & -3 < x \leq 0; \\ \mathbb{P}\{\{\xi_1 = -3\} \cup \{\xi_1 = 0\}\} = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3\} + \\ + \mathbb{P}\{\xi_1 = 0\} = 0.19 + 0.32 = 0.51, & 0 < x \leq 3 \\ \mathbb{P}\{\{\xi_1 = -3\} \cup \{\xi_1 = 0\} \cup \{\xi_1 = 3\}\} = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3\} + \\ + \mathbb{P}\{\xi_1 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3\} = 0.19 + 0.32 + 0.49 = 1, & 3 < x \end{cases}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3; \\ 0.19, & -3 < x \leq 0; \\ 0.51, & 0 < x \leq 3 \\ 1, & 3 < x \end{cases}$$

Для ξ_2 :

$$F_{\xi_2}(x) = \mathbb{P}\{\xi_2 < x\} = \begin{cases} \mathbb{P}\{\emptyset\} = 0, & x \leq -5 \\ \mathbb{P}\{\xi_2 = -3\} = 0.19, & -5 < x \leq 1 \\ \mathbb{P}\{\xi_2 = -5\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 1\} = 0.19 + 0.3 = 0.49, & 1 < x \leq 4 \\ \mathbb{P}\{\xi_2 = -5\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 4\} = \\ = 0.19 + 0.3 + 0.16 = 0.65, & 4 < x \leq 8 \\ \mathbb{P}\{\Omega\} = 0.19 + 0.3 + 0.16 + 0.35 = 1, & 8 < x \end{cases}$$

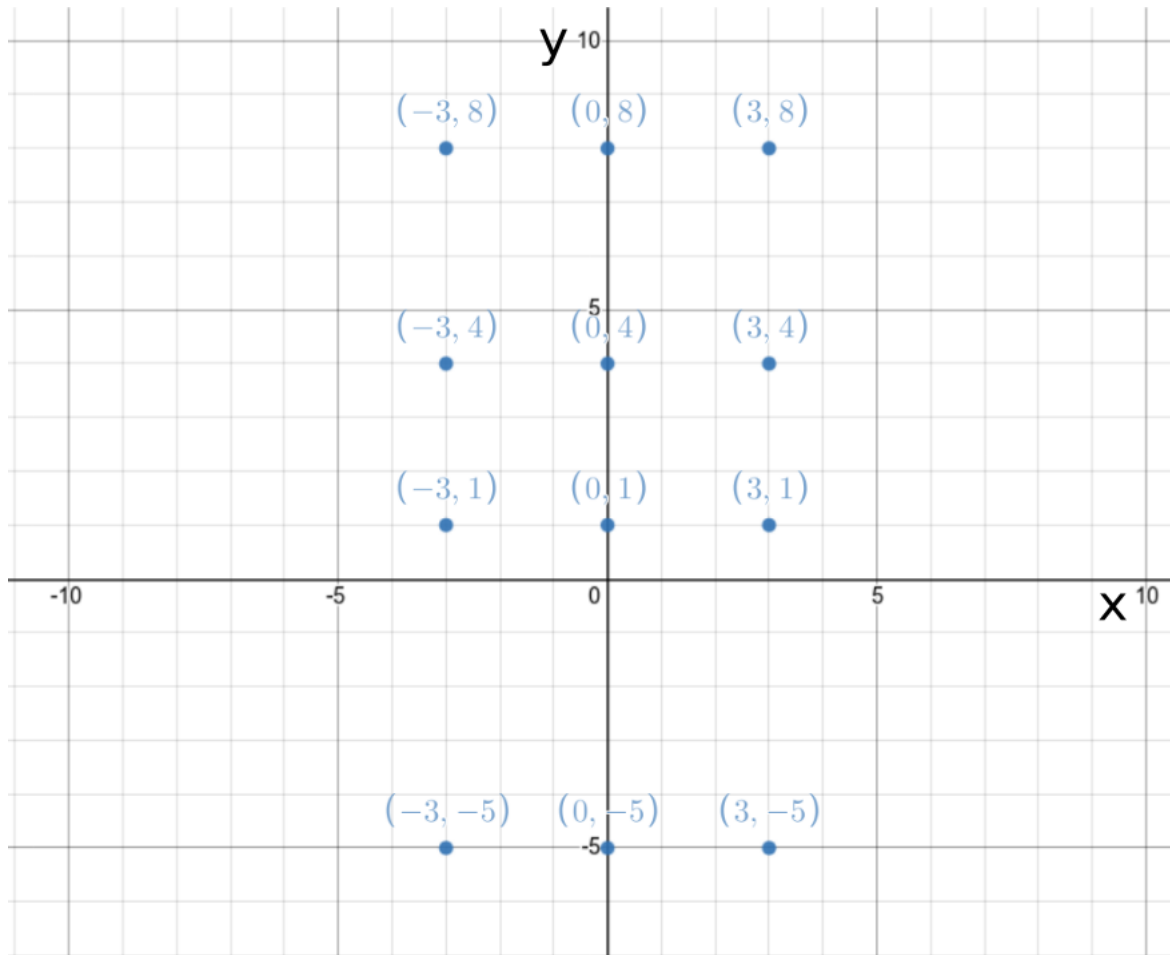
$$F_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -5 \\ 0.19, & -5 < x \leq 1 \\ 0.49, & 1 < x \leq 4 \\ 0.65, & 4 < x \leq 8 \\ 1, & 8 < x \end{cases}$$



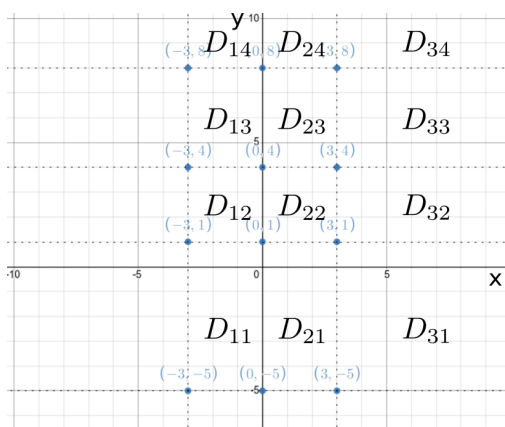
1.3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\bar{\xi}$

За означенням, $F_{\bar{\xi}}(x, y) = \mathbb{P} \{ \xi_1 < x, \xi_2 < y \}$. Тоді $F_{\bar{\xi}}(x, y) = 0$ якщо $\begin{matrix} x \leq x_1 \\ y \leq y_1 \end{matrix}$.

Щоб полегшити знаходження $F_{\bar{\xi}}(x, y)$ намалюємо в декартовій системі координат усі точки, що відповідають значенню вектора $\bar{\xi}$ та обчислимо значення сумісної функції розподілу в кожній області $D_{i,k}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$.



Використаємо формулу $F_{\bar{\xi}}(x, y) = \sum_{i: x_i < x} \sum_{j: y_j < y} p_{ij}$.



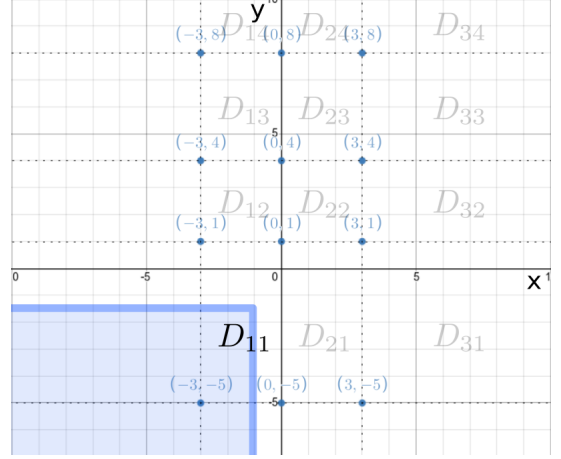
Будемо по чергово розглядати зони, як на малюнку зліва.

$$1. (x \leq -3) \vee (y \leq -5);$$

$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = 0$$

$$2.D_{1,1} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} -3 < x \leq 0 \\ -5 < y \leq 1 \end{array} \right. \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = -5 \} = 0.06$$

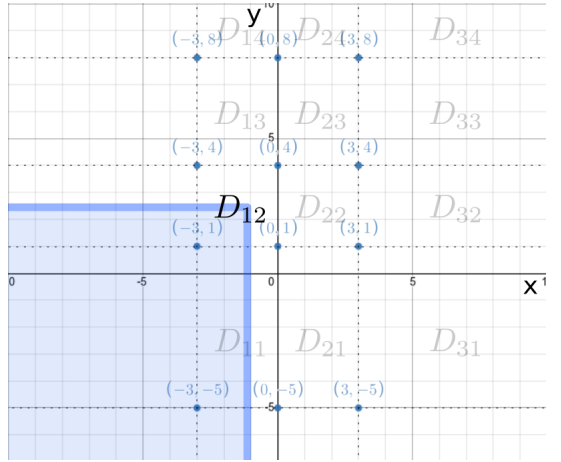


$$3.D_{1,2} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} -3 < x \leq 0 \\ 1 < y \leq 4 \end{array} \right. \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = -5 \} +$$

$$+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 1 \} =$$

$$= 0.06 + 0.04 = 0.1$$



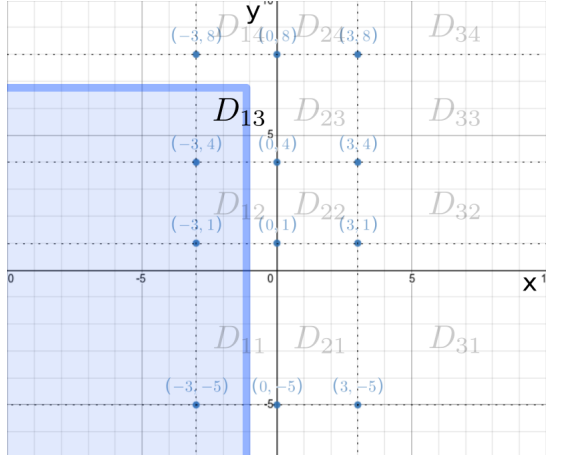
$$4.D_{1,3} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} -3 < x \leq 0 \\ 4 < y \leq 8 \end{array} \right. \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = -5 \} +$$

$$+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 1 \} +$$

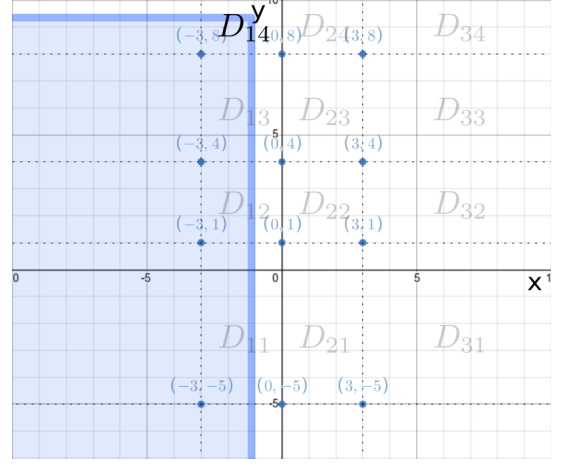
$$+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 4 \} =$$

$$= 0.06 + 0.04 + 0.06 = 0.16$$



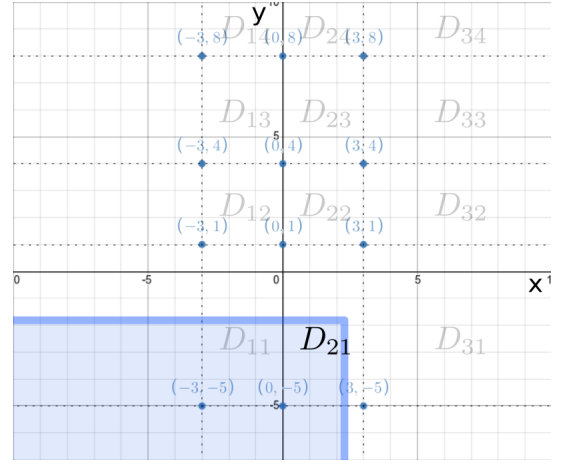
$$5.D_{1,4} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} -3 < x \leq 0 \\ 8 < y \end{array} \right. \right\};$$

$$\begin{aligned} F_{\bar{\xi}}(x, y) &= \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 4 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 8 \} = \\ &= 0.06 + 0.04 + \\ &+ 0.06 + 0.03 = 0.19 \end{aligned}$$



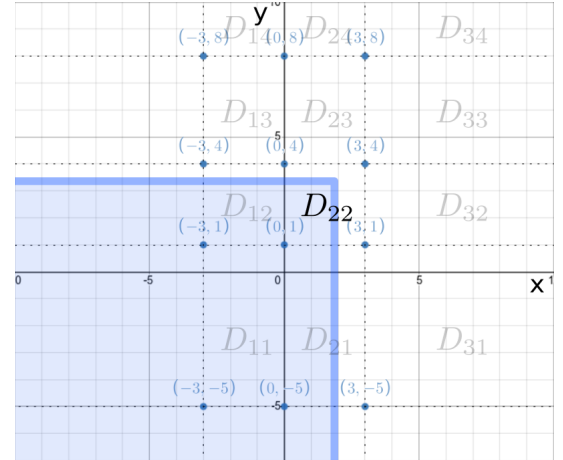
$$6.D_{2,1} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} 0 < x \leq 3 \\ -5 < y \leq 1 \end{array} \right. \right\};$$

$$\begin{aligned} F_{\bar{\xi}}(x, y) &= \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = -5 \} = \\ &= 0.06 + 0.01 = 0.07 \end{aligned}$$



$$7.D_{2,2} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} 0 < x \leq 3 \\ 1 < y \leq 4 \end{array} \right. \right\};$$

$$\begin{aligned} F_{\bar{\xi}}(x, y) &= \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \} = \\ &= 0.06 + 0.04 + 0.01 + 0.14 = 0.25 \end{aligned}$$



$$8.D_{2,3} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} 0 < x \leq 3 \\ 4 < y \leq 8 \end{array} \right. \right\};$$

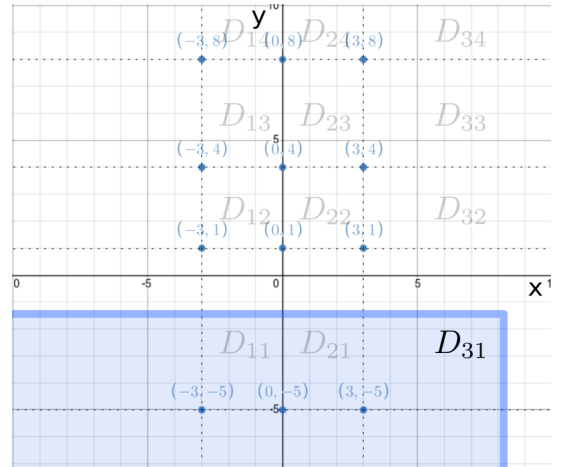
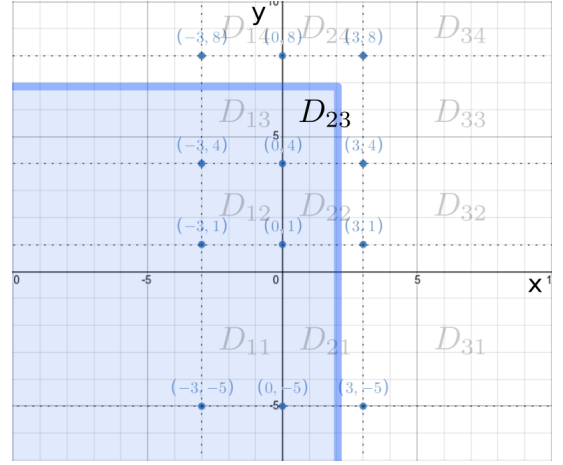
$$\begin{aligned} F_{\bar{\xi}}(x, y) &= \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 4 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = 4 \} = \\ &= 0.06 + 0.04 + 0.06 + \\ &+ 0.01 + 0.14 + 0.04 = 0.35 \end{aligned}$$

$$9.D_{2,4} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} 0 < x \leq 3 \\ 8 < y \end{array} \right. \right\};$$

$$\begin{aligned} F_{\bar{\xi}}(x, y) &= \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 4 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 8 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = 4 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = 8 \} = \\ &= 0.06 + 0.04 + 0.06 + \\ &+ 0.03 + 0.01 + 0.14 + \\ &+ 0.04 + 0.13 = 0.51 \end{aligned}$$

$$10.D_{3,1} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} 3 < x \\ -5 < y \leq 1 \end{array} \right. \right\};$$

$$\begin{aligned} F_{\bar{\xi}}(x, y) &= \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 3, \xi_2 = -5 \} = \\ &= 0.06 + 0.01 + 0.12 = 0.19 \end{aligned}$$

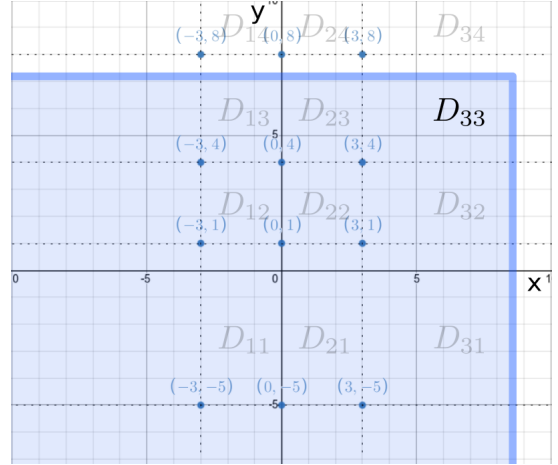
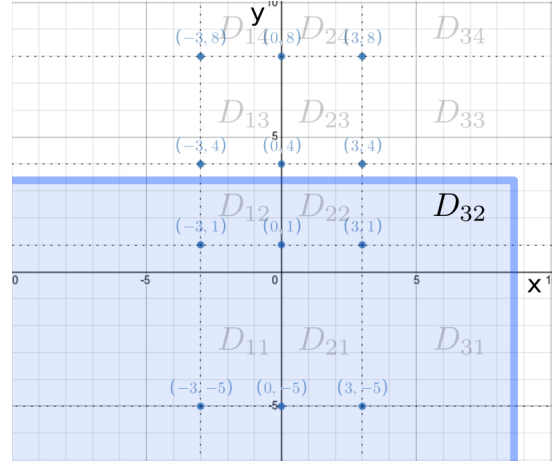


$$11.D_{3,2} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} 3 < x \\ 1 < y \leq 4 \end{array} \right. \right\};$$

$$\begin{aligned} F_{\bar{\xi}}(x, y) &= \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 3, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 3, \xi_2 = 1 \} = \\ &= 0.06 + 0.04 + 0.01 + 0.14 + \\ &+ 0.12 + 0.12 = 0.49 \end{aligned}$$

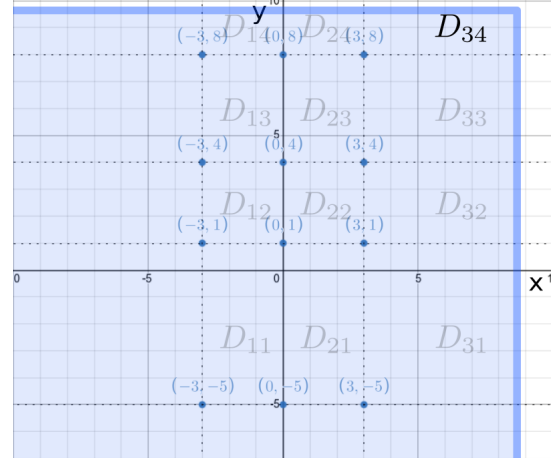
$$12.D_{3,3} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} 3 < x \\ 4 < y \leq 8 \end{array} \right. \right\};$$

$$\begin{aligned} F_{\bar{\xi}}(x, y) &= \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 4 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = 4 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 3, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 3, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 3, \xi_2 = 4 \} = \\ &= 0.06 + 0.04 + 0.06 + 0.01 + \\ &+ 0.14 + 0.04 + 0.12 + \\ &+ 0.12 + 0.06 = 0.65 \end{aligned}$$



$$13.D_{3,4} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} 3 < x \\ 8 < y \end{array} \right. \right\};$$

$$\begin{aligned} F_{\bar{\xi}}(x, y) &= \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 4 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = -3, \xi_2 = 8 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = 4 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 0, \xi_2 = 8 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 3, \xi_2 = -5 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 3, \xi_2 = 1 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 3, \xi_2 = 4 \} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \xi_1 = 3, \xi_2 = 8 \} = \\ &= 0.06 + 0.04 + 0.06 + 0.03 + \\ &+ 0.01 + 0.14 + 0.04 + 0.13 + \\ &+ 0.12 + 0.12 + 0.06 + 0.19 = 1 \end{aligned}$$



Отримали сумісну функцію розподілу, яку можна записати у вигляді таблиці.

$y \setminus x$	$x \leq -3$	$-3 < x \leq 0$	$0 < x \leq 3$	$3 < x$
$y \leq -5$	0	0	0	0
$-5 < y \leq 1$	0	0.06	0.07	0.19
$1 < y \leq 4$	0	0.10	0.25	0.49
$4 < y \leq 8$	0	0.16	0.35	0.65
$8 < y$	0	0.19	0.51	1.00

Перевірка: (властивість узгодження)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\bar{\xi}}(x, y) = F_{\xi_2}(y)$ - виконується, адже в останньому стовпчику $F_{\xi_2}(y)$.

$\lim_{y \rightarrow +\infty} F_{\bar{\xi}}(x, y) = F_{\xi_1}(x)$ - виконується, адже в останній стрічці $F_{\xi_1}(x)$.

$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} F_{\bar{\xi}}(x, y) = 1 \quad F_{\bar{\xi}}(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in D_{3,4}$

Або у вигляді сукупності:

$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x \leq -3) \vee (y \leq -5); \\ 0.06, & (-3 < x \leq 0) \wedge (-5 < y \leq 1); \\ 0.1, & (-3 < x \leq 0) \wedge (1 < y \leq 4); \\ 0.16, & (-3 < x \leq 0) \wedge (4 < y \leq 8); \\ 0.19, & (-3 < x \leq 0) \wedge (8 < y); \\ 0.07, & (0 < x \leq 3) \wedge (-5 < y \leq 1); \\ 0.25, & (0 < x \leq 3) \wedge (1 < y \leq 4); \\ 0.35, & (0 < x \leq 3) \wedge (4 < y \leq 8); \\ 0.51, & (0 < x \leq 3) \wedge (8 < y); \\ 0.19, & (3 < x) \wedge (-5 < y \leq 1); \\ 0.49, & (3 < x) \wedge (1 < y \leq 4); \\ 0.65, & (3 < x) \wedge (4 < y \leq 8); \\ 1, & (3 < x) \wedge (8 < y); \end{cases}$$

1.4. Математичні сподівання координат. Кореляційна та нормована кореляційна матриця.

а) За рядом розподілу величини ξ_1 знайдемо математичне сподівання:

$$\mathbb{E}\xi_1 = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = -3 * 0.19 + 0 * 0.32 + 3 * 0.49 = 0.9$$

Аналогічно для ξ_2 :

$$\mathbb{E}\xi_2 = \sum_{j=1}^4 y_j p_j = -5 * 0.19 + 1 * 0.3 + 4 * 0.16 + 8 * 0.35 = 2.79$$

Центр розсіювання вектора $\bar{\xi} = (0.9, 2.79)$

б) Побудуємо кореляційну та нормовану кореляційну матриці.

Для дискретного вектора:

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} - \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i p_{ij} \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_j p_{ij} \right\}$$

$$C_{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) \\ cov(\xi_1, \xi_2) & \mathbb{D}\xi_2 \end{bmatrix}$$

Розрахуємо та внесемо до матриці всі необхідні величини:

$$\begin{aligned} cov(\xi_1, \xi_2) &= ((-3) \cdot (-5) \cdot 0.06) + ((-3) \cdot 1 \cdot 0.04) + ((-3) \cdot 4 \cdot 0.06) + \\ &\quad + ((-3) \cdot 8 \cdot 0.03) + (0 \cdot (-5) \cdot 0.01) + (0 \cdot 1 \cdot 0.14) + \\ &\quad + (0 \cdot 4 \cdot 0.04) + (0 \cdot 8 \cdot 0.13) + (3 \cdot (-5) \cdot 0.12) + \\ &\quad + (3 \cdot 1 \cdot 0.12) + (3 \cdot 4 \cdot 0.06) + (3 \cdot 8 \cdot 0.19) - \mathbb{E}\xi_1 \cdot \mathbb{E}\xi_2 = \\ &= 0.9 - 0.12 - 0.72 - 0.72 - 1.8 + 0.36 + 0.72 + 4.56 - 2.511 = 0.669 \end{aligned}$$

Знайдемо дисперсію компонент ξ_1 та ξ_2 :

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot p_i - 0.9^2 = 6.12 - 0.81 = 5.31$$

$$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = \sum_{j=1}^4 y_j^2 \cdot p_j - 2.79^2 = 30.01 - 7.7841 = 22.2259$$

Отримали кореляційну матрицю:

$$C_{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} 5.31 & 0.669 \\ 0.669 & 22.2259 \end{bmatrix}$$

Оскільки $cov(\xi_1, \xi_2) > 0$ випадкові величини ξ_1, ξ_2 є корельованими та залежними. Перевіримо додатну визначеність $C_{\bar{\xi}}$:

$$\det C_{\bar{\xi}} = 5.31 \cdot 22.2259 - 0.669^2 = 117.571968 > 0$$

$$\text{Знайдемо коефіцієнт кореляції: } r_{\bar{\xi}} = \frac{cov(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2}} \approx \frac{0.669}{\sqrt{118.02}} \approx 0.0616$$

1.5. Умовні ряди розподілу для кожної координати.

Обчислимо умовні ймовірності:

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i | \xi_2 = y_j\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}}{\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_j}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = x_i\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}}{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_i}$$

Обчислюємо умовні ряди розподілу для ξ_1 та ξ_2 та результати заносимо у таблиці. Отримані дробі скорочуємо, але для зручності у кожному рядку залишаємо однаковий знаменник.

Умовні ряди розподілу ξ_1 :

ξ_1	-3	0	3
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \xi_2 = -5\}$	6/19	1/19	12/19
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \xi_2 = 1\}$	4/30	14/30	12/30
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \xi_2 = 4\}$	6/16	4/16	6/16
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \xi_2 = 8\}$	3/35	13/35	19/35

Перевірка:

$$\begin{aligned}\frac{6}{19} + \frac{1}{19} + \frac{12}{19} &= 1 \\ \frac{4}{30} + \frac{14}{30} + \frac{12}{30} &= 1 \\ \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} &= 1 \\ \frac{3}{35} + \frac{13}{35} + \frac{19}{35} &= 1\end{aligned}$$

Умовні ряди розподілу ξ_2 :

ξ_2	-5	1	4	8
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j \xi_1 = -3\}$	6/19	4/19	6/19	3/19
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j \xi_1 = 0\}$	1/32	14/32	4/32	13/32
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j \xi_1 = 3\}$	12/49	12/49	6/49	19/49

Перевірка:

$$\begin{aligned}\frac{6}{19} + \frac{4}{19} + \frac{6}{19} + \frac{3}{19} &= 1 \\ \frac{1}{32} + \frac{14}{32} + \frac{4}{32} + \frac{13}{32} &= 1 \\ \frac{12}{49} + \frac{12}{49} + \frac{6}{49} + \frac{19}{49} &= 1\end{aligned}$$

1.6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Скористаємося формулами:

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = y_j) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i | \xi_2 = y_j\}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x_i) = \sum_{j=1}^4 y_j \cdot \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = x_i\}$$

Обчислимо ряд розподілу $\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2)$:

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = -5) = (-3) \cdot \frac{6}{19} + 0 \cdot \frac{1}{19} + 3 \cdot \frac{12}{19} = \frac{18}{19}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = 1) = (-3) \cdot \frac{4}{30} + 0 \cdot \frac{14}{30} + 3 \cdot \frac{12}{30} = \frac{24}{30} = \frac{12}{15}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = 4) = (-3) \cdot \frac{6}{16} + 0 \cdot \frac{4}{16} + 3 \cdot \frac{6}{16} = 0$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2 = 8) = (-3) \cdot \frac{3}{35} + 0 \cdot \frac{13}{35} + 3 \cdot \frac{19}{35} = \frac{48}{35}$$

Перевіримо за формулою повного математичного сподівання:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)) &= 0.19 \cdot \frac{18}{19} + 0.3 \cdot \frac{12}{15} + 0.16 \cdot 0 + 0.35 \cdot \frac{48}{35} = \\ &= 0.18 + 0.24 + 0 + 0.48 = 0.9 = \mathbb{E}\xi_1\end{aligned}$$

Обчислимо ряд розподілу $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = -3) &= (-5) \cdot \frac{6}{19} + 1 \cdot \frac{4}{19} + 4 \cdot \frac{6}{19} + 8 \cdot \frac{3}{19} = \frac{22}{19} \\ \mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = 0) &= (-5) \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{14}{32} + 4 \cdot \frac{4}{32} + 8 \cdot \frac{13}{32} = \frac{129}{32} \\ \mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = 3) &= (-5) \cdot \frac{12}{49} + 1 \cdot \frac{12}{49} + 4 \cdot \frac{6}{49} + 8 \cdot \frac{19}{49} = \frac{128}{49}\end{aligned}$$

Перевіримо за формулою повного математичного сподівання:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)) = 0.19 \cdot \frac{22}{19} + 0.32 \cdot \frac{129}{32} + 0.49 \cdot \frac{128}{49} = 0.22 + 1.29 + 1.28 = 2.79 = \mathbb{E}\xi_2$$

Отримали такі умовні ряди розподілу для $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$, $\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)$:

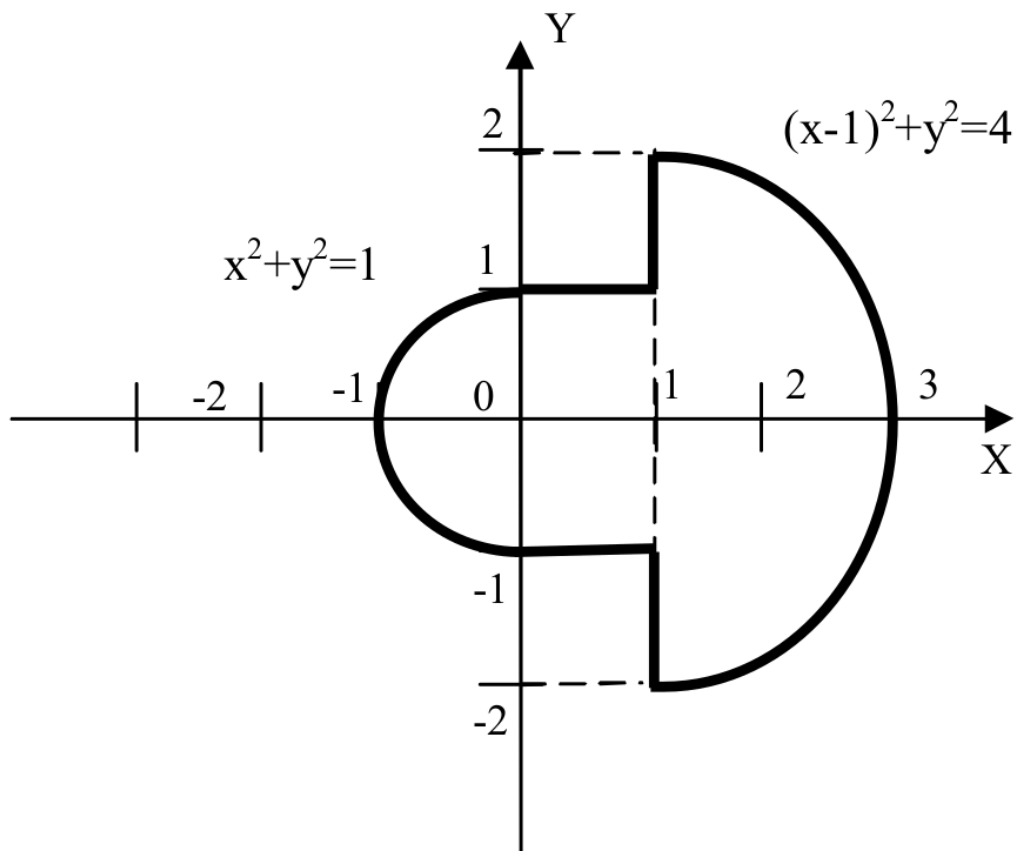
$\mathbb{E}(\xi_2 \xi_1)$	22/19	129/32	128/49
P	0.19	0.32	0.49

$\mathbb{E}(\xi_1 \xi_2)$	18/19	12/15	0	48/35
P	0.19	0.3	0.16	0.35

2. Завдання 2

Нехай неперервний випадковий вектор $\bar{\xi} = [\xi_1, \xi_2]$ рівномірно розподілений в області G .

Варіант 93



Центр півкола $x^2 + y^2 = 1$ - $(0,0)$. Центр півкола $(x-1)^2 + y^2 = 4$ - $(1, 0)$. Усі рівняння кривих вказано на рисунку.

Задану область можна розбити наступним чином:

$$G = \left\{ (x, y) \mid \begin{aligned} & \left((-1 \leq x < 0) \wedge (-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}) \right) \vee \\ & \vee ((0 \leq x \leq 1) \wedge (-1 \leq y \leq 1)) \vee \\ & \vee \left((1 \leq x \leq 3) \wedge (-\sqrt{4-(x-1)^2} \leq y \leq \sqrt{4-(x-1)^2}) \right) \end{aligned} \right\}$$

2.1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Спочатку, знайдемо в загальному вигляді інтеграл:

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{a^2 - t^2} dt &= \left| \begin{array}{c} \text{Заміна:} \\ t = a \sin(s) \\ dt = a \cos(s) ds \end{array} \right| = a^2 \cdot \int \cos^2(s) ds = a^2 \cdot \int \frac{\cos(2s) + 1}{2} ds = \\
 &= a^2 \cdot \frac{\frac{\sin(2s)}{2} + s}{2} + C = \frac{t\sqrt{a^2 - t^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{t}{a}\right)}{2} + C \\
 S_G &= \iint_G dx dy = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy + \int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy + \int_1^3 dx \int_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}} dy = \\
 &= 2 \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx + 2 + 2 \int_1^3 \sqrt{4-(x-1)^2} dx = \\
 &= \left| \begin{array}{cc} \text{У I інтегралі:} & \text{У II інтегралі:} \\ x = \sin(t) \Rightarrow dx = \cos(t) dt & x-1 = 2 \sin(t) \Rightarrow dx = 2 \cos(t) dt \\ t_2(0) = 0 \quad t_1 = -\frac{\pi}{2} & t_2 = \frac{\pi}{2} \quad t_1(0) = 0 \end{array} \right| = \\
 &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2(t) dt + 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \left(\frac{\sin(2t)}{2} + t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + 2 + 4 \cdot \left(\frac{\sin(2t)}{2} + t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= 2\pi + \frac{\pi}{2} + 2 = 2.5\pi + 2
 \end{aligned}$$

Тоді щільність вектора рівномірно розподіленого в області G :

$$f_{\bar{\xi}}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2.5\pi + 2}, & (x, y) \in G; \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases}$$

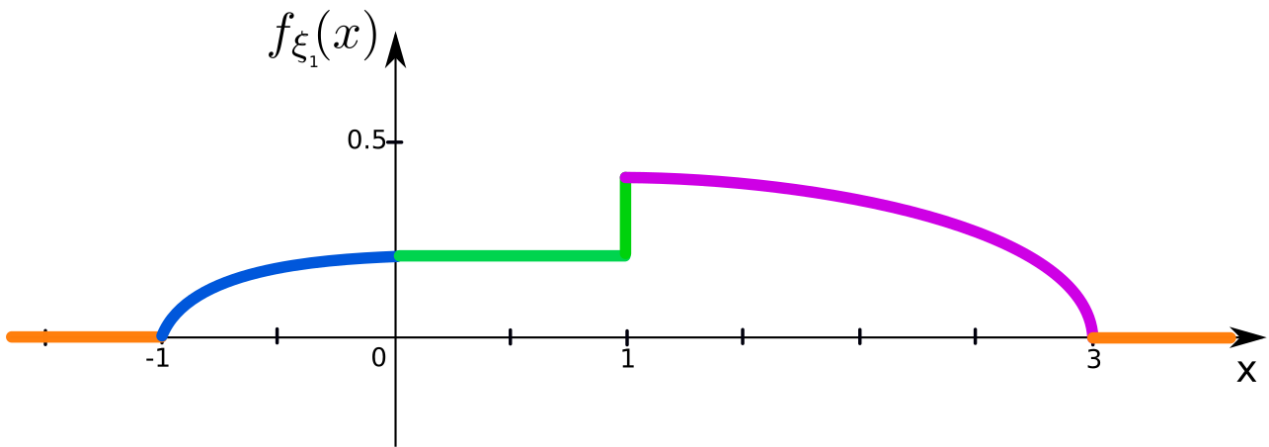
Із визначення рівномірного розподілу випливає, що умова нормування для $f_{\bar{\xi}}(x, y)$ виконана $\left(\frac{1}{S_G} * \iint_G dx dy = (2.5\pi + 2) \cdot \frac{1}{2.5\pi + 2} = 1 \right)$.

Обчислимо щільності координат вектора $\bar{\xi}$:

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy \quad f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{1}{2.5\pi + 2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2}{2.5\pi + 2} \sqrt{1-x^2}, & -1 < x \leq 0; \\ \frac{1}{2.5\pi + 2} \int_{-1}^1 dy = \frac{2}{2.5\pi + 2}, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{1}{2.5\pi + 2} \int_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}} dy = \frac{2}{2.5\pi + 2} \sqrt{4-(x-1)^2}, & 1 < x \leq 3; \\ 0, & x > 3; \end{cases}$$

Графік отриманої функції щільності:



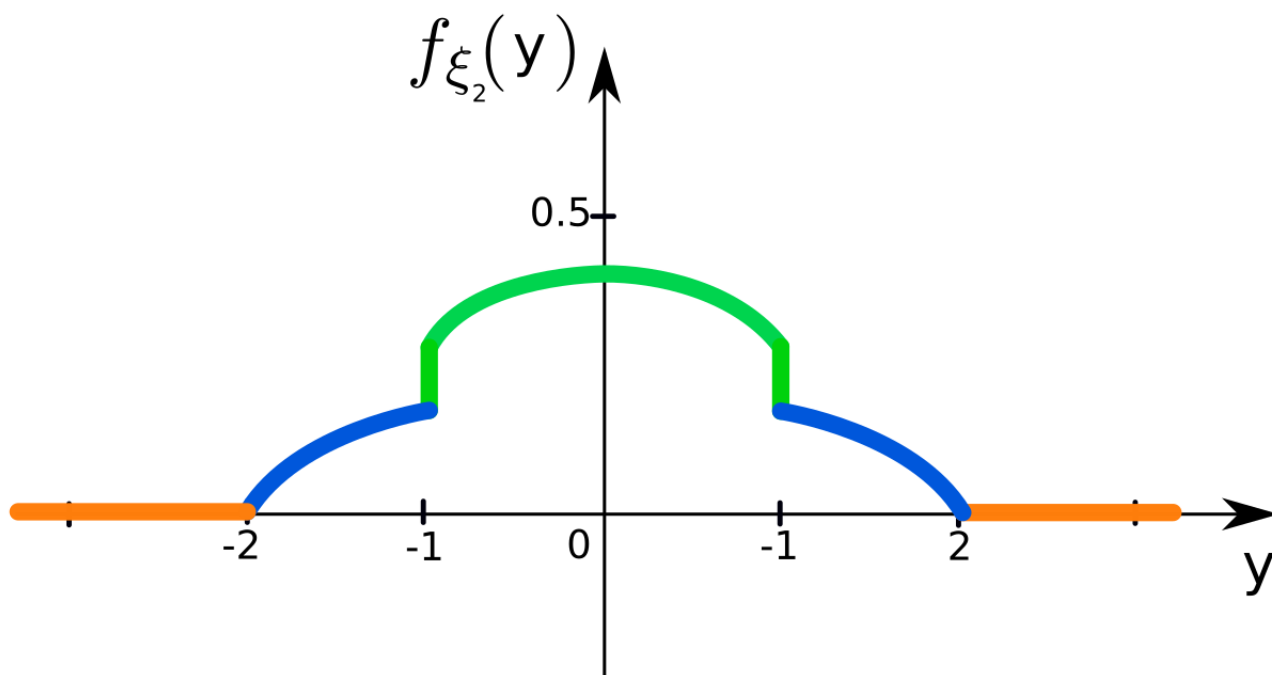
Перевірка умови нормування:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) dx &= 0 + \frac{2}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^1 dx + \int_1^3 \sqrt{4-(x-1)^2} dx \right) = \\ &= \frac{2}{2.5\pi + 2} \cdot \frac{(2.5\pi + 2)}{2} = 1 \end{aligned}$$

Зауваження. Вже знаходили ці інтеграли під час пошуку площі фігури.

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -2; \\ \frac{1}{2.5\pi + 2} \int_1^{1+\sqrt{4-y^2}} dx = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \sqrt{4-y^2}, & -2 < y \leq -1; \\ \frac{1}{2.5\pi + 2} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{4-y^2}} dx = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\sqrt{4-y^2} + \sqrt{1-y^2} + 1 \right), & -1 < y \leq 1; \\ \frac{1}{2.5\pi + 2} \int_1^{1+\sqrt{4-y^2}} dx = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \sqrt{4-y^2}, & 1 < y \leq 2; \\ 0, & y > 2; \end{cases}$$

Графік отриманої функції щільності:



Перевірка умови нормування:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y) dy &= 0 + \frac{1}{2.5\pi + 2} \left(\int_{-2}^{-1} \sqrt{4 - y^2} dy + \int_{-1}^1 \left(\sqrt{4 - y^2} + \sqrt{1 - y^2} + 1 \right) dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_{1}^2 \sqrt{4 - y^2} dy \right) = \frac{1}{2.5\pi + 2} \left(\int_{-1}^1 dy + \int_{-2}^2 \sqrt{4 - y^2} dy + \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} dy \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left| \begin{array}{l} \text{Вже знаходили такі інтеграли за змінною } x \\ \int_{-1}^1 dy = y \Big|_{-1}^1 = 2 \\ \int_{-2}^2 \sqrt{4 - y^2} dy = 2 \left(\frac{\sin(2t)}{2} + t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \\ \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2t)}{2} + t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \left(2 + \frac{\pi}{2} + 2\pi \right) \cdot \frac{1}{2 + 2.5\pi} = 1 \end{aligned}$$

2.2. Функції розподілу координат ξ_1 та ξ_2 .

Нехай $F_{\xi_1}(x), F_{\xi_2}(y)$ функції розподілу координат вектора $\bar{\xi}$. Застосуємо формули:

$$F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi_1}(t) dt \quad F_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^y f_{\xi_2}(s) ds$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \int_{-1}^x \frac{2}{2.5\pi + 2} \sqrt{(1-s^2)} ds, & -1 < x \leq 0; \\ \frac{2}{2.5\pi + 2} \left(\int_{-1}^0 \sqrt{(1-s^2)} ds + \int_0^x ds \right), & 0 < x \leq 1; \\ \frac{2}{2.5\pi + 2} \left(\int_{-1}^0 \sqrt{(1-s^2)} ds + \int_0^1 ds + \int_1^x \sqrt{4-(s-1)^2} ds \right), & 1 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3; \end{cases}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{2}{2.5\pi + 2} \cdot \frac{s\sqrt{1-s^2} + \arcsin(s)}{2} \Big|_{-1}^x, & -1 < x \leq 0; \\ \frac{2}{2.5\pi + 2} \left(\frac{s\sqrt{1-s^2} + \arcsin(s)}{2} \Big|_{-1}^0 + x \right), & 0 < x \leq 1; \\ \frac{2}{2.5\pi + 2} \left(\frac{s\sqrt{1-s^2} + \arcsin(s)}{2} \Big|_{-1}^0 + 1 + \frac{(s-1)\sqrt{4-(s-1)^2} + 4 \arcsin\left(\frac{s-1}{2}\right)}{2} \Big|_1^x \right), & 1 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3; \end{cases}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi + 2}, & -1 < x \leq 0; \\ \frac{\frac{\pi}{2} + 2x}{2.5\pi + 2}, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{(x-1)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} + 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2}, & 1 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3; \end{cases}$$

Перевіримо на неперервність у точках стику:

$$\lim_{x \rightarrow -1-} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi + 2} = \frac{0 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi + 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi + 2} = \frac{0 + 0 + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi + 2} = \frac{\pi}{5\pi + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\pi}{2} + 2x}{2.5\pi + 2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2.5\pi + 2} = \frac{\pi}{5\pi + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{\pi}{2} + 2x}{2.5\pi + 2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} =$$

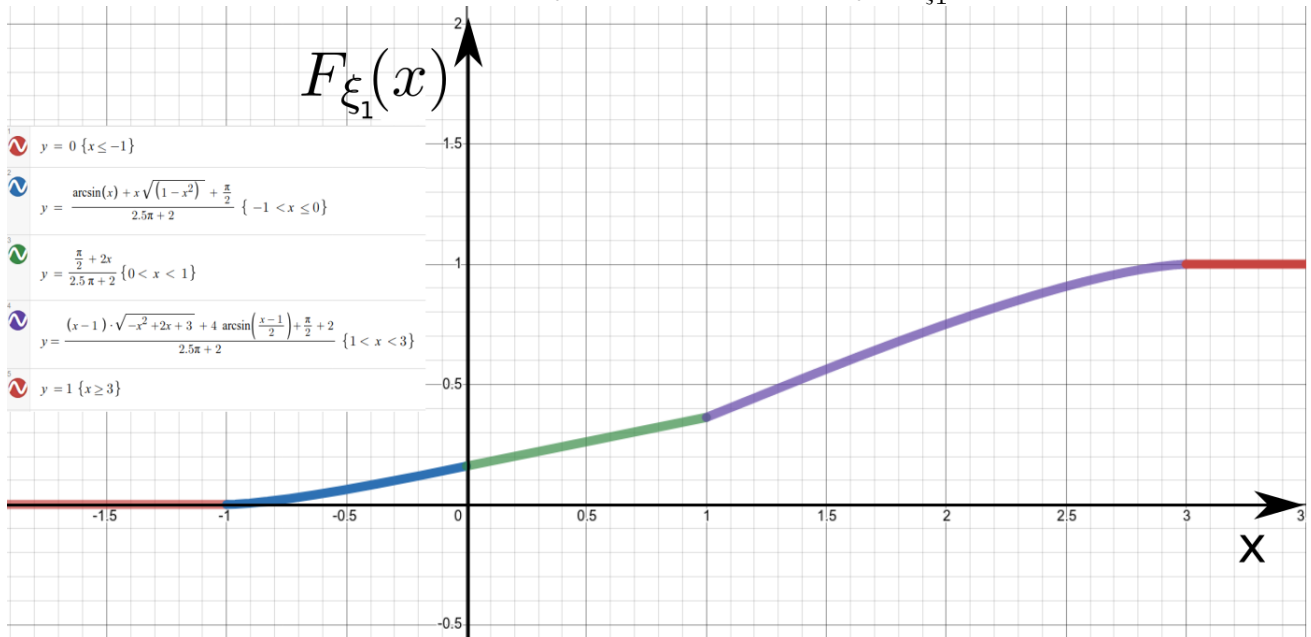
$$= \frac{0 \cdot \sqrt{-s^2+2s+3} - 4\arcsin(0) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{0} - 4\arcsin\left(\frac{-4}{4}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} = \frac{0 - 4 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} 1 = 1$$

Графік функції розподілу F_{ξ_1}



$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -2; \\ \int_{-2}^y \frac{\sqrt{4-s^2}}{2.5\pi+2} ds, & -2 < y \leq -1; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\int_{-2}^{-1} \sqrt{4-s^2} ds + \int_{-1}^y \sqrt{4-s^2} + \sqrt{1-s^2} + 1 ds \right), & -1 < y \leq 1; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\int_{-2}^{-1} \sqrt{4-s^2} ds + \int_{-1}^1 \left(\sqrt{4-s^2} + \sqrt{1-s^2} + 1 ds \right) + \right. \\ \left. + \int_1^y \sqrt{4-s^2} ds \right), & 1 < y \leq 2; \\ 1, & y > 2; \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -2; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2} + 2 \arcsin\left(\frac{s}{2}\right) \right) \Big|_{-2}^y, & -2 < y \leq -1; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \left[\left(\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2} + 2 \arcsin\left(\frac{s}{2}\right) \right) \Big|_{-2}^y + \right. \\ \left. + \left(\frac{\arcsin(s)}{2} + \frac{s\sqrt{1-s^2}}{2} + s \right) \Big|_{-1}^y \right], & -1 < y \leq 1; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \left[\left(\frac{s\sqrt{4-s^2}}{2} + 2 \arcsin\left(\frac{s}{2}\right) \right) \Big|_{-2}^y + \right. \\ \left. + \left(\frac{\arcsin(s)}{2} + \frac{s\sqrt{1-s^2}}{2} + s \right) \Big|_{-1}^1 \right], & 1 < y \leq 2; \\ 1, & y > 2; \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -2; \\ \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + \pi \right), & -2 < y \leq -1; \\ \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{2 \arcsin(y) + 2y\sqrt{1-y^2}}{4} + \right. \\ \left. + \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + 1.25\pi + y + 1 \right), & -1 < y \leq 1; \\ \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{\pi + 4}{2} + \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + \pi \right), & 1 < y \leq 2; \\ 1, & y > 2; \end{cases}$$

Перевіримо на неперервність у точках стику:

$$\lim_{y \rightarrow -2-} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y \rightarrow -2-} 0 = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow -2+} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y \rightarrow -2+} \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2\pi}{5\pi + 4} = \frac{-2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{\pi}{2} + 2\pi}{5\pi + 4} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow -1-} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y \rightarrow -1-} \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2\pi}{5\pi + 4} = \frac{-\sqrt{3} - 4 \cdot \frac{\pi}{6} + 2\pi}{5\pi + 4} = \frac{-\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}}{5\pi + 4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -1+} F_{\xi_2}(y) &= \lim_{y \rightarrow -1+} \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{2 \arcsin(y) + 2y\sqrt{1-y^2}}{4} + \right. \\ &+ \left. \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + 1.25\pi + y + 1 \right) = \frac{-\frac{\pi}{2} - 1 \cdot 0 - 1 \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot \frac{\pi}{6} + 2.5\pi}{5\pi + 4} = \\ &= \frac{-\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}}{5\pi + 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 1-} F_{\xi_2}(y) &= \lim_{y \rightarrow 1-} \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{2 \arcsin(y) + 2y\sqrt{1-y^2}}{4} + \right. \\ &+ \left. \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + 1.25\pi + y + 1 \right) = \frac{\frac{\pi}{2} + 1 \cdot 0 + \sqrt{3} + \frac{4\pi}{6} + 2.5\pi + 4}{5\pi + 4} = \\ &= \frac{\sqrt{3} + \frac{11\pi}{3} + 4}{5\pi + 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 1+} F_{\xi_2}(y) &= \lim_{y \rightarrow 1+} \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{\pi + 4}{2} + \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + \pi \right) = \\ &= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \frac{\pi + 4}{2} + \frac{\sqrt{3} + \frac{4\pi}{6} + 2\pi}{2} = \frac{\sqrt{3} + \frac{11\pi}{3} + 4}{5\pi + 4} \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow 2-} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y \rightarrow 2-} \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{\pi + 4}{2} + \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + \pi \right) = \frac{1}{2.5\pi + 2}.$$

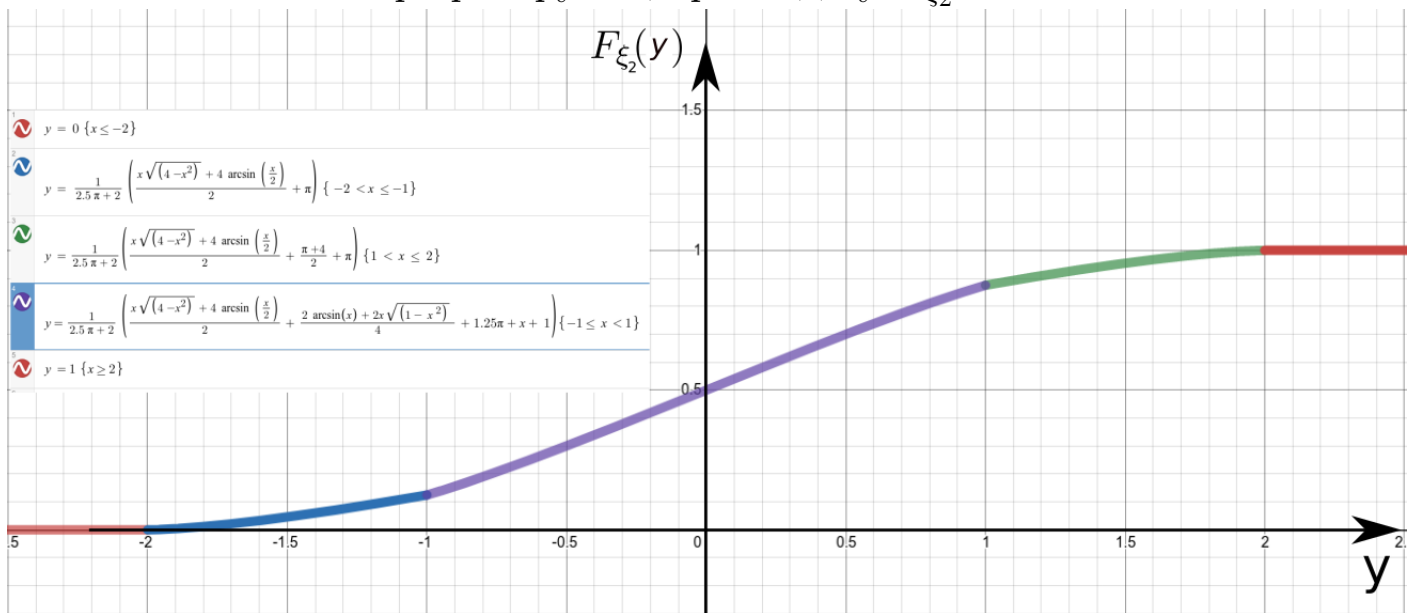
$$\frac{\pi + 4 + 2 \cdot 0 + \frac{4\pi}{2} + 2\pi}{2} = \frac{5\pi + 4}{4\pi + 4} = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 2+} F_{\xi_2}(y) = 1$$

Тож, знайдені функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$, $F_{\xi_2}(y)$ задовольняють умові неперервності. Але, можемо дещо спростити $F_{\xi_2}(y)$ виконавши алгебраїчні перетворення:

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -2; \\ \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2\pi}{10\pi + 4}, & -2 < y \leq -1; \\ \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi + 4}, & -1 < y \leq 1; \\ \frac{3\pi + 4 + y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi + 4}, & 1 < y \leq 2; \\ 1, & y > 2; \end{cases}$$

Графік функції розподілу F_{ξ_2}

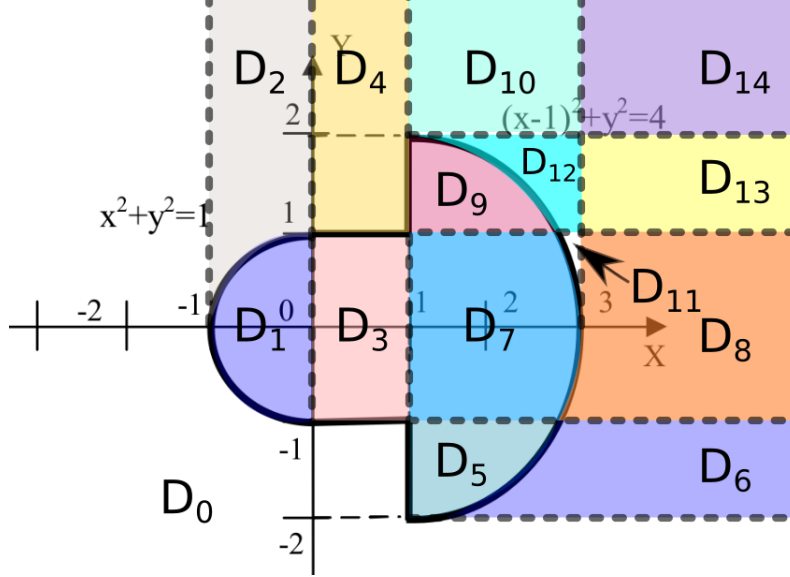


2.3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\bar{\xi}$

Згідно означення $F_{\bar{\xi}}(x, y) = \mathbb{P} \{ \xi_1 < x, \xi_2 < y \}$. Скористаємося формулою:

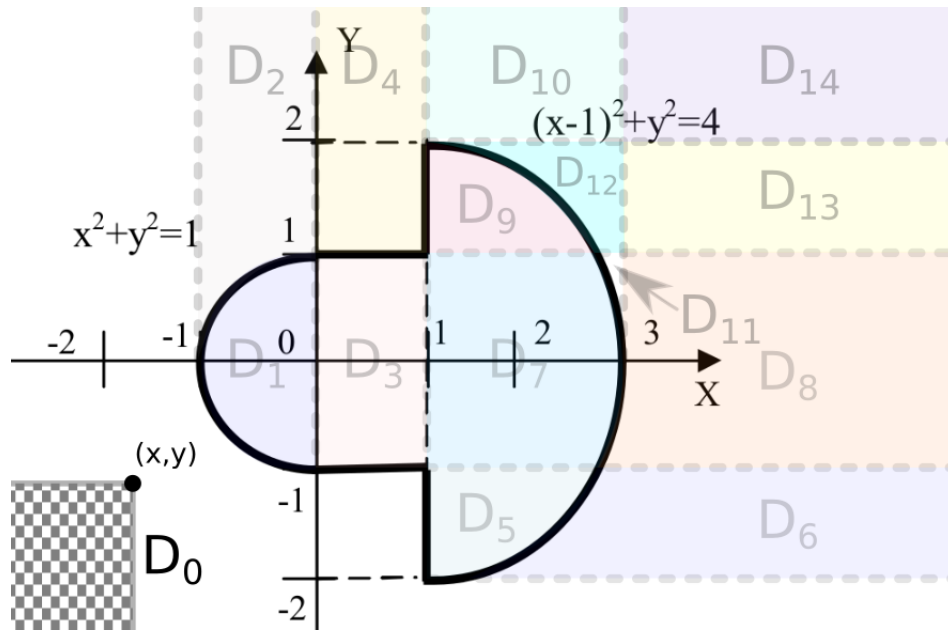
$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = \int_{-\infty}^x dt \int_{-\infty}^y f_{\bar{\xi}}(t, s) ds$$

Координатну площину XOY розіб'ємо на області D_1, D_2, \dots, D_{14} .



1. $D_0 = \left\{ (x, y) \left| \begin{aligned} &(x \leq -1) \vee \left((x \leq -\sqrt{1-y^2}) \wedge (y \leq -\sqrt{1-x^2}) \right) \vee \right. \\ &\left. \vee ((0 \leq x \leq 1) \wedge (-2 \leq y \leq -1)) \vee (y \leq -2) \right. \end{aligned} \right\}$
2. $D_1 = \{ (x, y) \mid (x \leq 0) \wedge (x^2 + y^2 < 1) \}$
3. $D_2 = \left\{ (x, y) \mid \left((-1 < x \leq 0) \wedge (1 < y) \right) \vee \left((x \leq -\sqrt{1-y^2}) \wedge (y \geq \sqrt{1-x^2}) \right) \right\}$
4. $D_3 = \{ (x, y) \mid (0 < x \leq 1) \wedge (-1 < y \leq 1) \}$
5. $D_4 = \{ (x, y) \mid (0 < x \leq 1) \wedge (1 < y) \}$
6. $D_5 = \{ (x, y) \mid ((x-1)^2 + y^2 < 2) \wedge (y \leq -1) \wedge (x > 1) \}$
7. $D_6 = \{ (x, y) \mid (-2 < y \leq -1) \wedge ((x-1)^2 + y^2 \geq 2) \wedge (x > 1) \}$
8. $D_7 = \{ (x, y) \mid ((x-1)^2 + y^2 < 2) \wedge (-1 < y \leq 1) \wedge (x > 1) \}$
9. $D_8 = \left\{ (x, y) \mid \begin{aligned} &((-1 < y \leq 0) \wedge ((x-1)^2 + y^2 \geq 2) \wedge (x > 1)) \vee \\ &\vee ((3 < x) \wedge (0 < y \leq 1)) \end{aligned} \right\}$
10. $D_9 = \{ (x, y) \mid (1 < y \leq 2) \wedge ((x-1)^2 + y^2 \geq 2) \wedge (x > 1) \}$
11. $D_{10} = \{ (x, y) \mid (1 < x \leq 3) \wedge (2 < y) \}$
12. $D_{11} = \{ (x, y) \mid (0 < y \leq 1) \wedge ((x-1)^2 + y^2 \geq 2) \wedge (0 < x \leq 3) \}$
13. $D_{12} = \{ (x, y) \mid (1 < y \leq 2) \wedge ((x-1)^2 + y^2 \geq 2) \wedge (0 < x \leq 3) \}$
14. $D_{13} = \{ (x, y) \mid ((3 < x) \wedge (1 < y \leq 2)) \}$
15. $D_{14} = \{ (x, y) \mid ((3 < x) \wedge (2 < y)) \}$

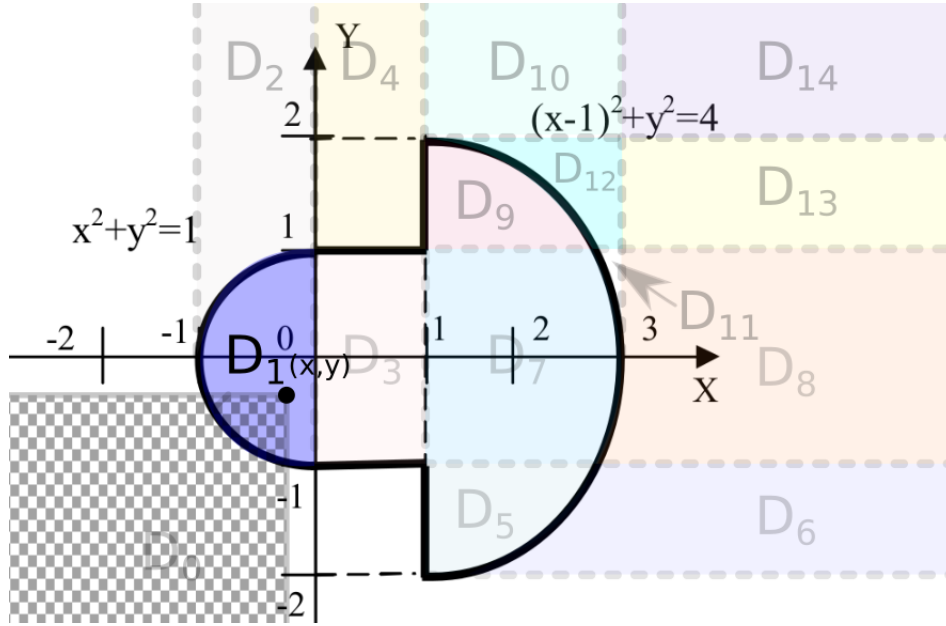
1. $(x, y) \in D_0$



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = 0$$

Перевірка: $\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 = f_{\bar{\xi}}(x, y)$

2. $(x, y) \in D_1$



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_{-\sqrt{1-x^2}}^y ds \int_{-\sqrt{1-s^2}}^x dt = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^y x + \sqrt{1-s^2} ds =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + 2xy + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) + 3x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + 2xy + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) + 3x\sqrt{1-x^2}}{5\pi + 4} \right) =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x\sqrt{1-y^2} - y^2 + 1}{\sqrt{1-y^2}} \right) = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot 1 = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

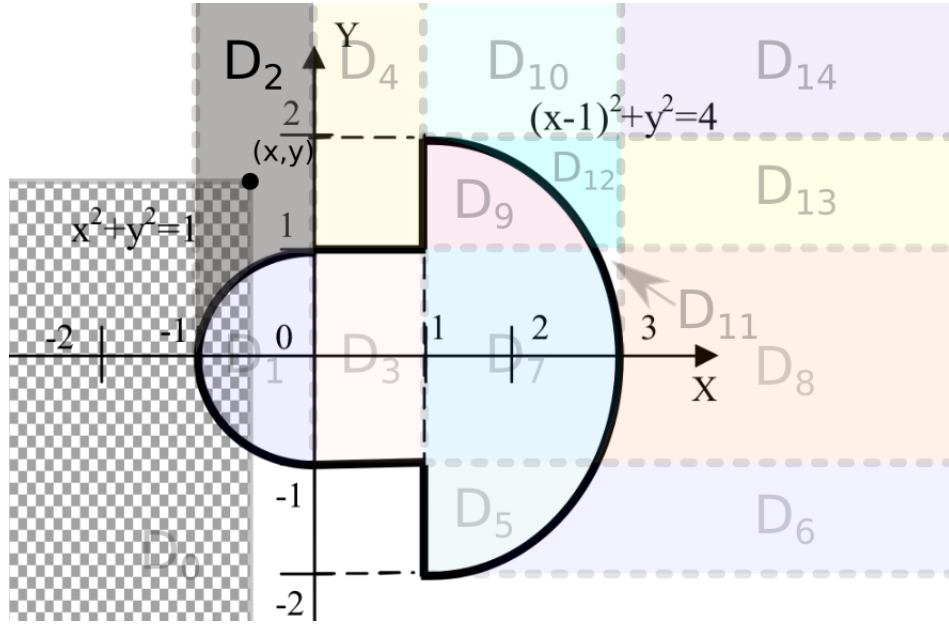
$$D_0 - D_1 : y = -\sqrt{1-x^2}, (y \leq 0)$$

$$F_{\bar{\xi}}(x, -\sqrt{1-x^2})^{D_1} =$$

$$= \frac{\arcsin(-\sqrt{1-x^2}) - x\sqrt{1-x^2} - 2x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) + 3x\sqrt{1-x^2}}{5\pi + 4} =$$

$$= 0 = F_{\bar{\xi}}(x, -\sqrt{1-x^2})^{D_0} = 0$$

3. $(x, y) \in D_2$



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} ds \int_{-\sqrt{1-s^2}}^x dt = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-s^2} + x ds$$

$$= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\arcsin(\sqrt{1-x^2}) + x\sqrt{1-x^2} \right)$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \arcsin(\sqrt{1-x^2}) + x\sqrt{1-x^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} 0 = 0 = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

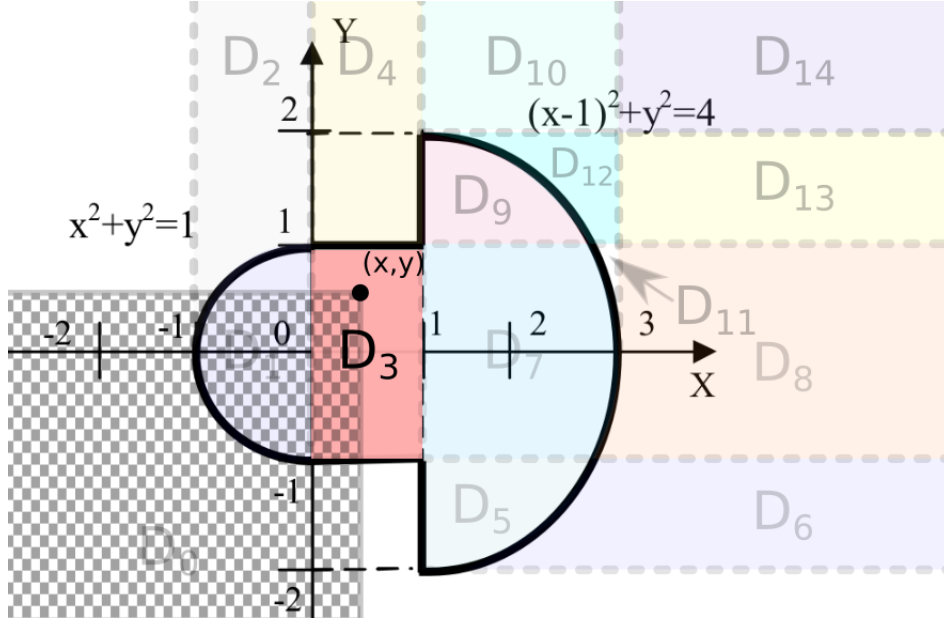
$$D_1 - D_2 : y = \sqrt{1-x^2}$$

$$F_{\bar{\xi}}(x, \sqrt{1-x^2})^{D_1} =$$

$$= \frac{\arcsin(\sqrt{1-x^2}) - x\sqrt{1-x^2} + 2x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) + x\sqrt{1-x^2}}{5\pi + 4} =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\arcsin(\sqrt{1-x^2}) + x\sqrt{1-x^2} \right) = F_{\bar{\xi}}(x, -\sqrt{1-x^2})^{D_2}$$

4. $(x, y) \in D_3$



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = F_{\bar{\xi}}(0, y)^{D_1} + \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_0^x dt \int_{-1}^y ds =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + \frac{\pi}{2}}{2} + x(y+1) \right)$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + \frac{\pi}{2}}{2} + x(y+1) \right) \right) =$$

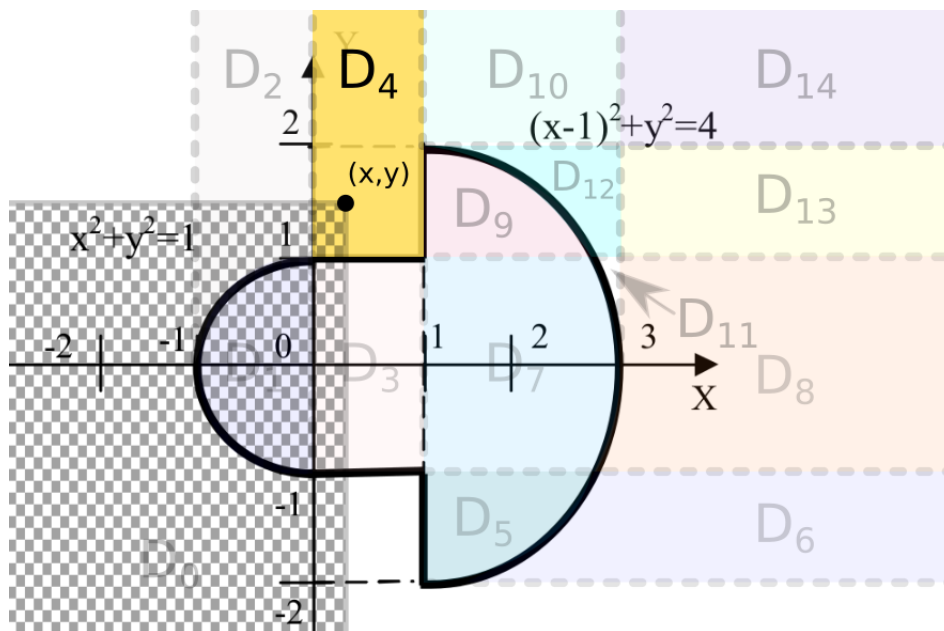
$$= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y+1) = \frac{1}{2.5\pi + 2} = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

$D_2 - D_3 : x = 0$

$$F_{\bar{\xi}}(0, y)^{D_1} = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + \frac{\pi}{2}}{2} = F_{\bar{\xi}}(0, y)^{D_3}$$

5. $(x, y) \in D_4$



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = F_{\bar{\xi}}(x, 1)^{D_3} = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right)$$

Перевірка:

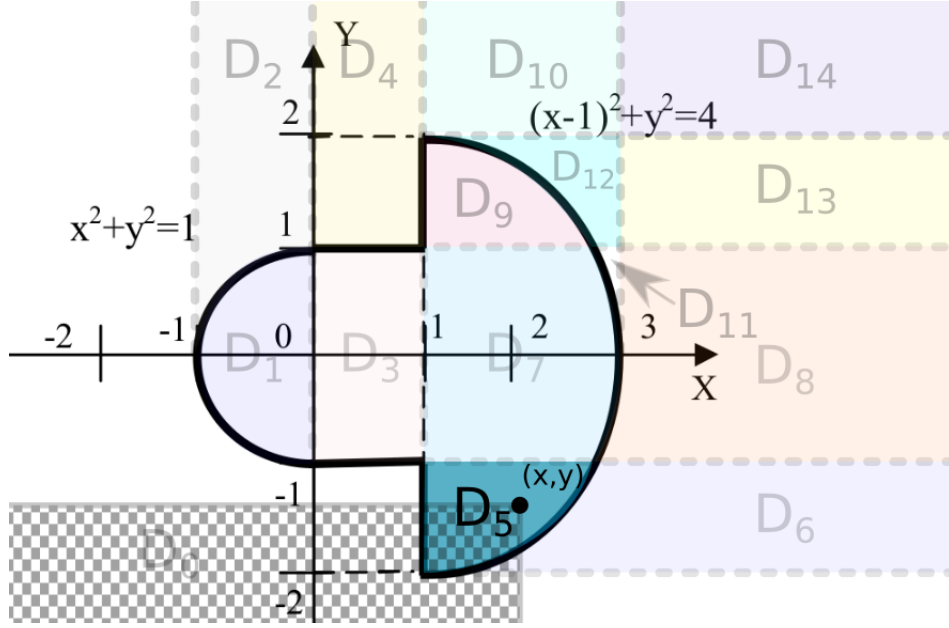
$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) \right) = 0 = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

$$D_2 - D_4 : x = 0$$

$$F_{\bar{\xi}}(0, y)^{D_2} = \frac{\arcsin(1)}{2.5\pi + 2} = \frac{\pi}{5\pi + 4} = F_{\bar{\xi}}(0, y)^{D_3}$$

6. $(x, y) \in D_5$



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_1^x dt \int_{-\sqrt{4-(t-1)^2}}^y ds = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_1^x \sqrt{4 - (t-1)^2} + y dt =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \frac{(2x-2)y + (x-1)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} + 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{2}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{(2x-2)y + (x-1)\sqrt{-x^2 + 2x + 3} + 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi + 4} \right) =$$

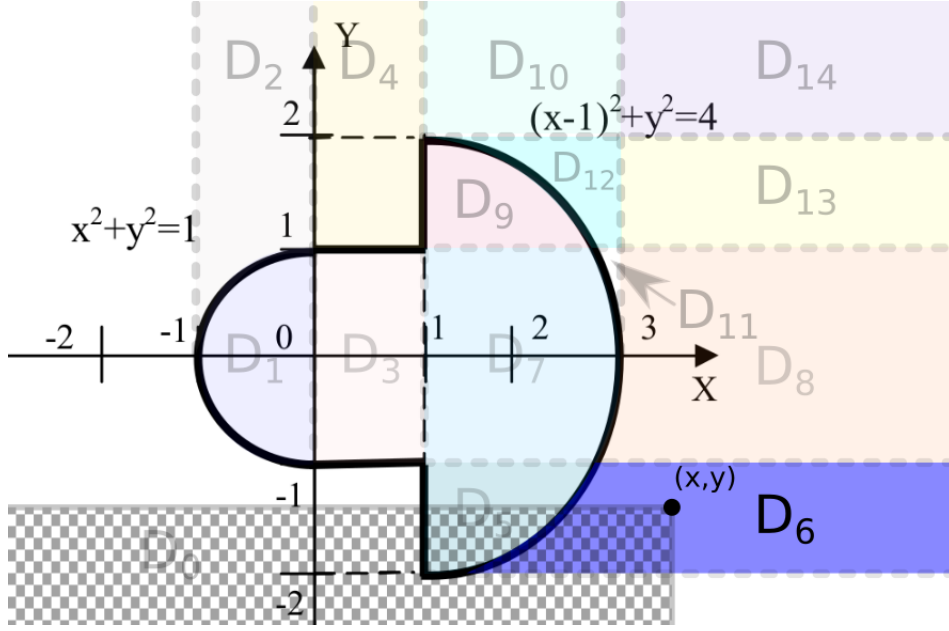
$$= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{2x-2}{2} = \frac{1}{2.5\pi + 2} = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

$$D_0 - D_5 : x = 1$$

$$F_{\bar{\xi}}(1, y)^{D_0} = 0 = F_{\bar{\xi}}(1, y)^{D_5} = \frac{0*y + 0*\sqrt{3} + 4*0}{5\pi + 4} = 0$$

7. $(x, y) \in D_6$



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = F_{\bar{\xi}}(1 + \sqrt{4 - y^2}, y)^{D_5} = \frac{2 \left(y \sqrt{4 - y^2} \right) - y \sqrt{4 - y^2} + 4 \arcsin \left(\frac{\sqrt{4 - y^2}}{2} \right)}{5\pi + 4} =$$

$$= \frac{\left(y \sqrt{4 - y^2} \right) + 4 \arcsin \left(\frac{\sqrt{4 - y^2}}{2} \right)}{5\pi + 4} = \frac{y \sqrt{4 - y^2} + 4 \arcsin \left(\frac{y}{2} \right) + 2\pi}{5\pi + 4}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{y \sqrt{4 - y^2} + 4 \arcsin \left(\frac{y}{2} \right) + 2\pi}{5\pi + 4} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (0) = 0 = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

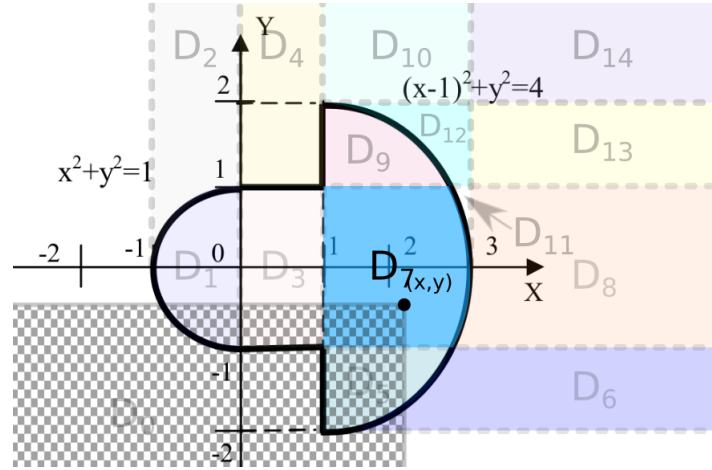
$$D_6 - D_5 : x = 1 + \sqrt{4 - y^2}$$

$$F_{\bar{\xi}}(1 + \sqrt{4 - y^2}, y)^{D_5} = \frac{y \sqrt{4 - y^2} + 4 \arcsin \left(\frac{y}{2} \right) + 2\pi}{5\pi + 4} = F_{\bar{\xi}}(1 + \sqrt{4 - y^2}, y)^{D_6}$$

$$D_6 - D_0 : y = -2$$

$$F_{\bar{\xi}}(x, -2)^{D_5} = \frac{0 \cdot (-2) + 4 \cdot \frac{-\pi}{2} + 2\pi}{5\pi + 4} = 0 = F_{\bar{\xi}}(x, -2)^{D_0} = 0$$

8. $(x, y) \in D_7$



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = F_{\bar{\xi}}(1, y)^{D_3} + F_{\bar{\xi}}(x, -1)^{D_5} + \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_1^x ds \int_{-1}^y dt =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + \frac{\pi}{2}}{2} + (y+1) + \right.$$

$$\left. + \frac{(2-2x) + (x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{2} + (x-1)(y+1) \right) =$$

$$= \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + \frac{\pi}{2} + (2-2x) + (x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2x(y+1)}{5\pi+4}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + \frac{\pi}{2} + (2-2x) + (x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2x(y+1)}{5\pi+4} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{(x\sqrt{1-y^2} - y^2 + 1)}{(2.5\pi + 2)\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2.5\pi+2} = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

$$D_7 - D_5 : y = -1$$

$$F_{\bar{\xi}}(x, -1)^{D_7} = \frac{0+0+(2-2x)+(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+0}{5\pi+4} =$$

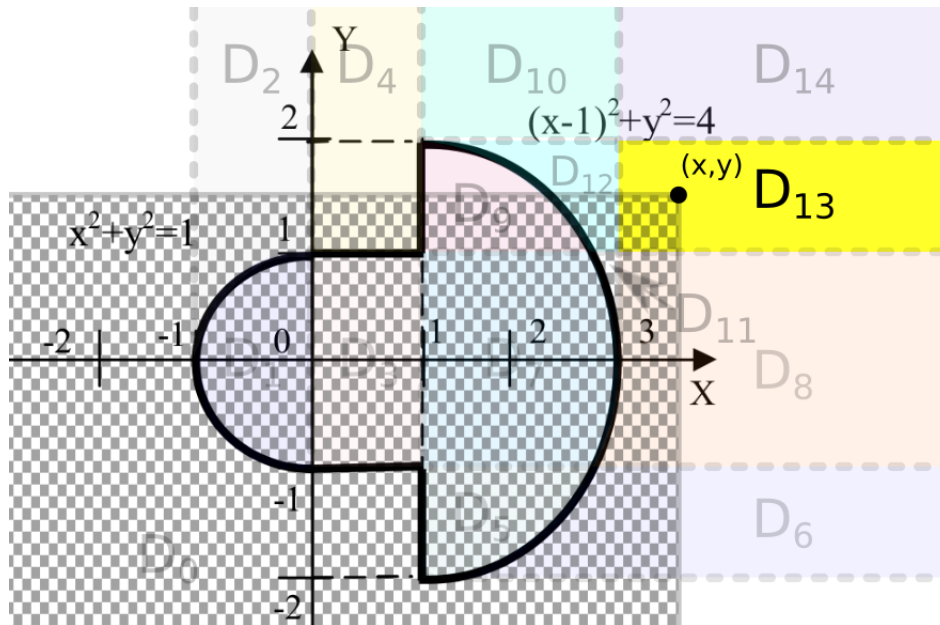
$$= F_{\bar{\xi}}(x, -1)^{D_5} = \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \frac{(2-2x)+(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{2} =$$

$$D_7 - D_3 : x = 1$$

$$F_{\bar{\xi}}(1, y)^{D_7} = \frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{2}+0+0+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+2(y+1)}{5\pi+4} =$$

$$= F_{\bar{\xi}}(1, y)^{D_3} = \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{2}}{2} + (y+1) \right)$$

9. $(x, y) \in D_{13}$



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = 1 - \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_y^2 dt \int_1^{1+\sqrt{4-t^2}} ds = \frac{3\pi + 4 + y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi + 4}$$

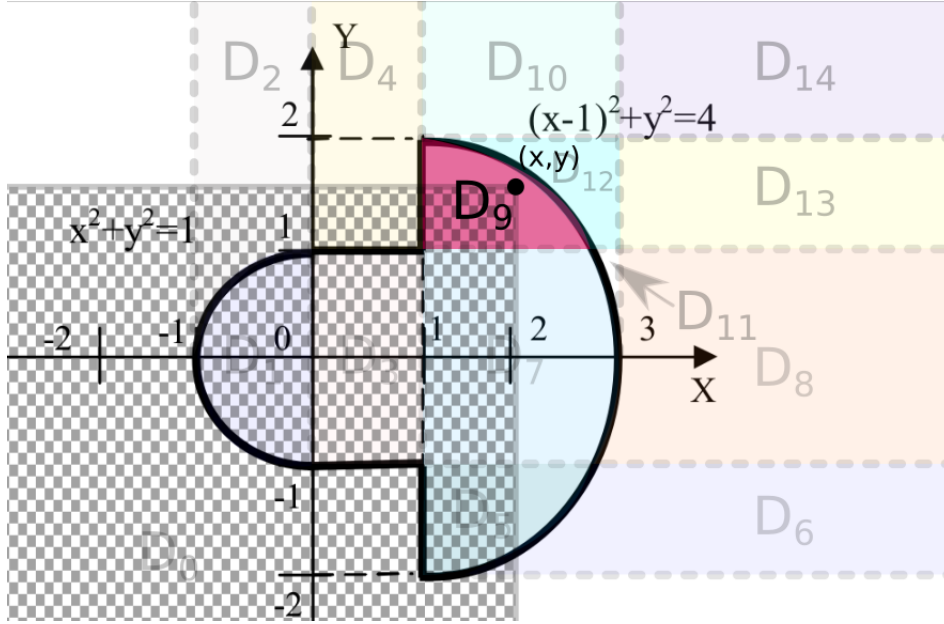
Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{3\pi + 4 + y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi + 4} \right) = \frac{\partial}{\partial y} 0 = 0 = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

Зробимо пізніше, коли знайдемо функції розподілу у інших зонах.

10. $(x, y) \in D_9$



$$\begin{aligned}
 F_{\bar{\xi}}(x, y) &= F_{\bar{\xi}}(x, 1)^{D_7} + \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_1^x ds \int_1^y dt = \\
 &= \frac{(2-2x) + (x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + 4x + \pi}{5\pi + 4} + \frac{2(x-1)(y-1)}{5\pi + 4} = \\
 &= \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + 4 + 2y(x-1) + \pi}{5\pi + 4}
 \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + 4 + 2y(x-1) + \pi}{5\pi + 4} \right) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{2x - 2}{5\pi + 4} = \frac{1}{2.5\pi + 2} = f_{\bar{\xi}}(x, y)
 \end{aligned}$$

Перевірка ліній стику областей:

$D_9 - D_7 : y = 1$

$$F_{\bar{\xi}}(x, 1)^{D_9} = \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + 4 + 2(x-1) + \pi}{5\pi + 4} =$$

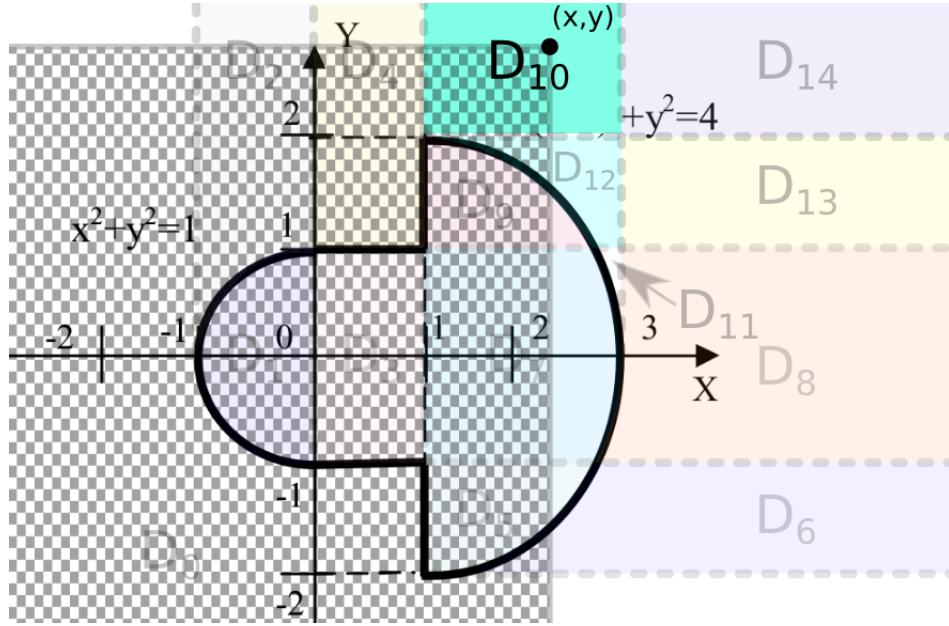
$$F_{\bar{\xi}}(x, 1)^{D_7} = \frac{\pi + 0 + 2 - 2x + (x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + 4x}{5\pi + 4}$$

$D_9 - D_4 : x = 1$

$$F_{\bar{\xi}}(1, y)^{D_9} = \frac{0 + 4 \arcsin(0) + 4 + \pi}{5\pi + 4} =$$

$$= F_{\bar{\xi}}(1, y)^{D_4} = \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right)$$

11. $(x, y) \in D_{10}$



$$\begin{aligned}
 F_{\bar{\xi}}(x, y) &= 1 - \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_x^3 dt \int_{\sqrt{4-(t-1)^2}}^{-\sqrt{4-(t-1)^2}} ds = 1 + \frac{2}{2.5\pi + 2} \cdot \int_3^x \sqrt{4-(t-1)^2} dt = \\
 &= \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) - 2\pi}{2.5\pi + 2} + 1 = \\
 &= \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2}
 \end{aligned}$$

Перевірка:

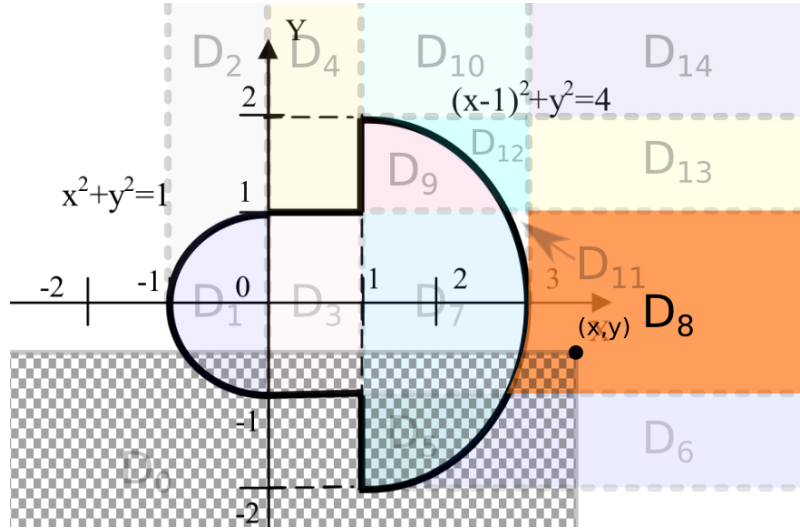
$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} 0 = 0 = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Перевірка ліній стику областей:

$$D_{10} - D_4 : x = 1$$

$$F_{\bar{\xi}}(1, y)^{D_{10}} = \frac{0 + 4 \arcsin(0) + 4 + \pi/2 + 2}{2.5\pi + 2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_4}$$

12. $(x, y) \in D_8$. З малюнку та інтегралу видно, що зону D_8 доведеться розбити ще на 2: $-1 < y \leq 0$ та $0 < y < 1$, але функції розподілу виявилися однаковими. Для $-1 < y \leq 0$ можемо скористатися вже знайденим виразом (при обчисленні виникає модуль, який розкриваємо з -):



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = F_{\bar{\xi}}(1 + \sqrt{4 - y^2}, y)_{-}^{D_7} =$$

$$= \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1 - y^2} - |y|\sqrt{4 - y^2} - 4 \arcsin\left(\frac{|y|}{2}\right) + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi + 4}$$

Перевірка:

$$\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{4 - y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi + 4} = \frac{\partial}{\partial y} 0 = 0 = f_{\bar{\xi}}(x, y)$$

Далі, знайдемо $F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_8}$ для $0 < y < 1$:

$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = F_{\bar{\xi}}(1 + \sqrt{4 - y^2}, y)_{+}^{D_7} + \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_{-y}^y ds \int_{1 + \sqrt{4 - y^2}}^{1 + \sqrt{4 - s^2}} dt =$$

$$= \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{4 - y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi + 4}$$

Перевірка ліній стику областей:

$$D_8 - D_7 : x = 1 + \sqrt{4 - y^2}$$

Вже знаходили під час пошуку площі зони:

$$F_{\bar{\xi}}(1 + \sqrt{4 - y^2}, y)^{D_7} = \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1 - y^2} + \sqrt{4 - y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi + 4} = F_{\bar{\xi}}(1 + \sqrt{4 - y^2}, y)^{D_8}$$

$$D_8 - D_6 : y = -1$$

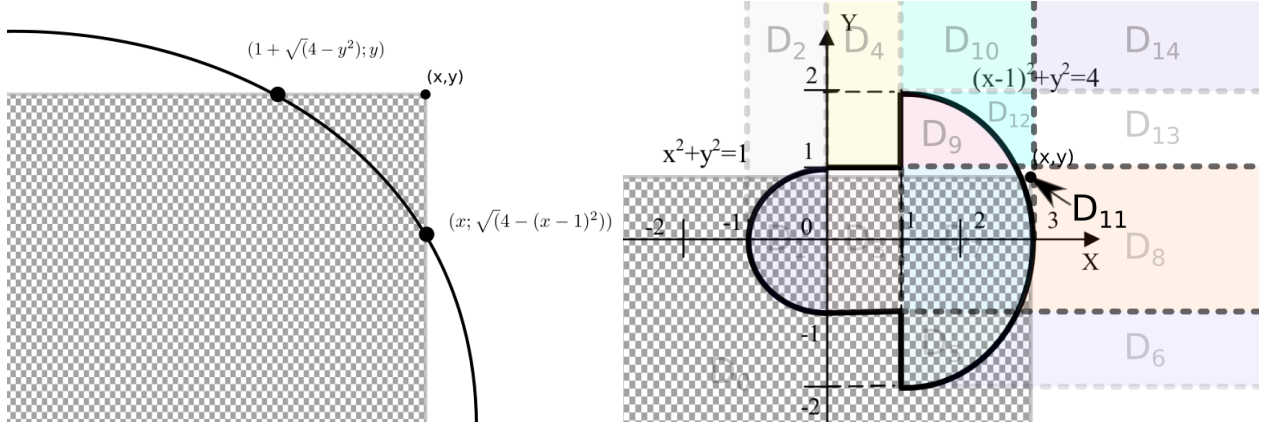
$$F_{\bar{\xi}}(x, -1)^{D_8} = \frac{-\frac{\pi}{2} + 0 - \sqrt{3} - 4\frac{\pi}{6} + 2.5\pi}{5\pi + 4} = F_{\bar{\xi}}(x, -1)^{D_6} = \frac{-\sqrt{3} + 4\frac{-\pi}{2} + 2\pi}{5\pi + 4}$$

Повертаємося до зони D_{13} :

$$D_8 - D_{13} : y = 1$$

$$F_{\bar{\xi}}(x, 1)^{D_8} = \frac{\frac{\pi}{2} + 0 + \sqrt{3} + 4\frac{\pi}{6} + 2.5\pi + 4}{5\pi + 4} = F_{\bar{\xi}}(x, 1)^{D_{13}} = \frac{3\pi + 4 + \sqrt{3} + 4\frac{\pi}{6}}{5\pi + 4}$$

13. $(x, y) \in D_{11}$



$$\begin{aligned}
 F_{\bar{\xi}}(x, y) &= F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_8} - \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_x^3 ds \int_{-\sqrt{4-(s-1)^2}}^{\sqrt{4-(s-1)^2}} dt = \\
 &= \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi + 4} - \\
 &\quad - \frac{(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3} - 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2\pi}{2.5\pi + 2} = \\
 &= \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) - 1.5\pi + 2y + 2 + 2(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3} + 8\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi + 4}
 \end{aligned}$$

Перевірка:

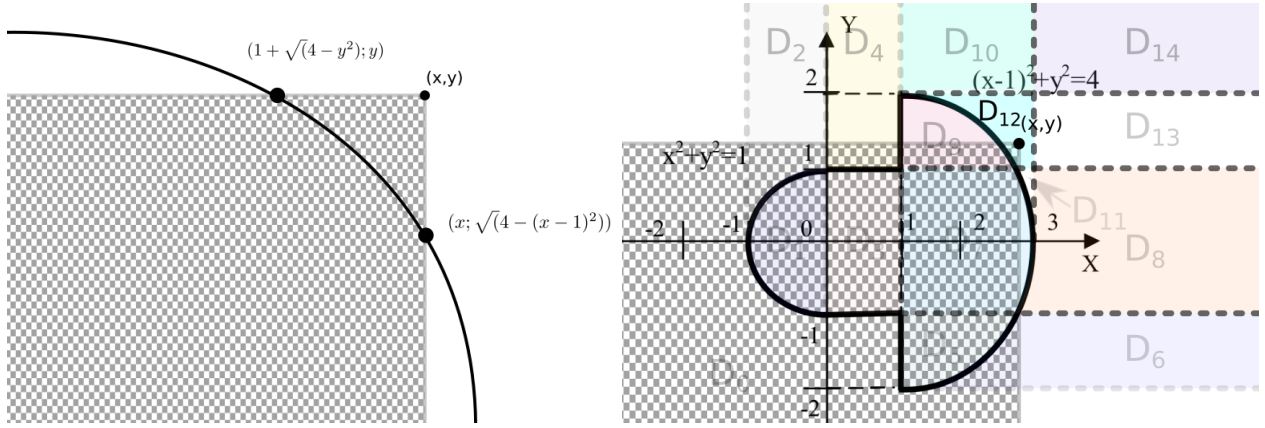
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) - 1.5\pi + 2y + 2 + 2(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3} + 8\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi + 4} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-2\sqrt{-x^2+2x+3} - \frac{(2-2x)(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+3}} - \frac{4}{\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}}}{2} \right) = 0 = f_{\bar{\xi}}(x, y)
 \end{aligned}$$

Перевірка ліній стику областей:

$D_{11} - D_6 : x = 3$

$$F_{\bar{\xi}}(3, y)^{D_{11}} = \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi + 4} = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_6}$$

14. $(x, y) \in D_{12}$



$$\begin{aligned}
 F_{\bar{\xi}}(x, y) &= F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_{13}} - \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \int_x^3 ds \int_{-\sqrt{4-(s-1)^2}}^{\sqrt{4-(s-1)^2}} dt = \\
 &= \frac{3\pi + 4 + y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi + 4} - \\
 &\quad - \frac{(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3} - 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2\pi}{2.5\pi + 2} = \\
 &= \frac{4 - \pi + y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3} + 8 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi + 4}
 \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) - 1.5\pi + 2y + 2 + 2(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3} + 8 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi + 4} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-2\sqrt{-x^2+2x+3} - \frac{(2-2x)(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+3}} - \frac{4}{\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{4}}}}{2} \right) = 0 = f_{\bar{\xi}}(x, y)
 \end{aligned}$$

Перевірка ліній стику областей:

$$D_{12} - D_{13} : x = 3$$

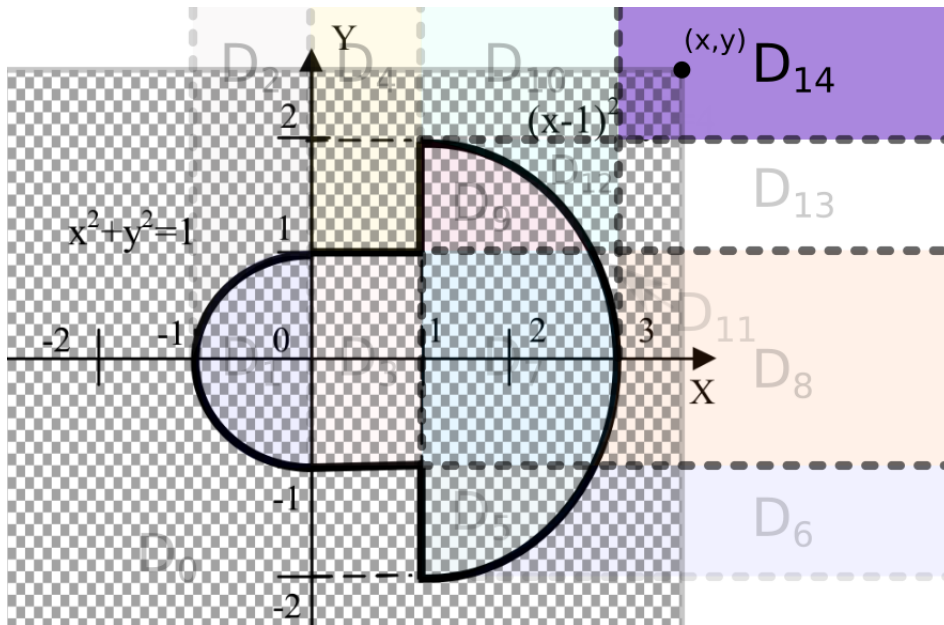
$$F_{\bar{\xi}}(3, y)^{D_{11}} = \frac{3\pi + 4 + y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi + 4} = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_{13}}$$

$$D_{12} - D_{13} : y = 2$$

$$F_{\bar{\xi}}(x, 2)^{D_{11}} = \frac{4 - \pi + 0 + 2\pi + 2(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3} + 8 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{5\pi + 4} = \frac{2 + \pi/2 + (1-x)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{2.5\pi + 2} =$$

$$= F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_{10}}$$

15. $(x, y) \in D_{14}$



$$F_{\bar{\xi}}(x, y) = 1$$

Перевірка: $\frac{\partial^2 F_{\bar{\xi}}}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 = f_{\bar{\xi}}(x, y)$

Перевірка ліній стику областей:

$$D_{14} - D_{10} : x = 3$$

$$F_{\xi}^-(3, y)^{D_{10}} = \frac{\pi/2 + 2\pi + 2}{2.5\pi + 2} = 1 = F_{\xi}^-(3, y)^{D_{14}}$$

$$D_{14} - D_{13} : y = 1$$

$$F_{\xi}^-(x, 1)^{D_{13}} = \frac{\pi/2+2\pi+2}{2.5\pi+2} = 1 = F_{\xi}^-(x, 1)^{D_{14}}$$

$$D_{14} - D_{12} : x = 3, y = 2$$

$$F_{\xi}^{-}(3, 2)^{D_{12}} = \frac{4-\pi+2\pi+4\pi}{5\pi+4} = 1 = F_{\xi}^{-}(3, y)^{D_{14}}$$

Остаточно отримали відповідь у вигляді системи:

$$F_{\xi}^{-}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in D_0; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+2xy+\arcsin(\sqrt{1-x^2})+3x\sqrt{1-x^2}}{2}, & (x, y) \in D_1; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\arcsin(\sqrt{1-x^2}) + x\sqrt{1-x^2} \right), & (x, y) \in D_2; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{2}}{2} + x(y+1) \right), & (x, y) \in D_3; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right), & (x, y) \in D_4; \\ \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \frac{(2x-2)y+(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin(\frac{x-1}{2})}{2}, & (x, y) \in D_5; \\ \frac{y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin(\frac{y}{2})+2\pi}{5\pi+4}, & (x, y) \in D_6; \\ \frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{2}+(2-2x)+(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin(\frac{x-1}{2})+2x(y+1)}{5\pi+4}, & (x, y) \in D_7; \\ \frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin(\frac{y}{2})+2.5\pi+2y+2}{5\pi+4}, & (x, y) \in D_8; \\ \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin(\frac{x-1}{2})+4+2y(x-1)+\pi}{5\pi+4}, & (x, y) \in D_9; \\ \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin(\frac{x-1}{2})+\frac{\pi}{2}+2}{2.5\pi+2}, & (x, y) \in D_{10}; \\ \frac{\arcsin(y)+y\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin(\frac{y}{2})-1.5\pi+2y+2}{5\pi+4} + \\ + \frac{2(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3}+8\arcsin(\frac{x-1}{2})}{5\pi+4}, & (x, y) \in D_{11}; \\ \frac{4-\pi+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin(\frac{y}{2})+2(1-x)\sqrt{-x^2+2x+3}+8\arcsin(\frac{x-1}{2})}{5\pi+4}, & (x, y) \in D_{12}; \\ \frac{3\pi+4+y\sqrt{4-y^2}+4\arcsin(\frac{y}{2})}{5\pi+4}, & (x, y) \in D_{13}; \\ 1, & (x, y) \in D_{14}; \end{cases}$$

Нагадаємо маргінальні функції розподілу:

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi+2}, & -1 < x \leq 0; \\ \frac{\frac{\pi}{2} + 2x}{2.5\pi+2}, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}+4\arcsin(\frac{x-1}{2})+\frac{\pi}{2}+2}{2.5\pi+2}, & 1 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3; \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -2; \\ \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2\pi}{10\pi + 4}, & -2 < y \leq -1; \\ \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi + 4}, & -1 < y \leq 1; \\ \frac{3\pi + 4 + y\sqrt{4-y^2} + 4 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi + 4}, & 1 < y \leq 2; \\ 1, & y > 2; \end{cases}$$

Таким чином, за функції розподілу $F_{\bar{\xi}}(x, y)$ бачимо, що виконується властивість:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\bar{\xi}}(x, y) = F_{\xi_2}(y) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} F_{\bar{\xi}}(x, y) = F_{\xi_1}(x)$$

$$\begin{cases} F_{\xi_1}(x) = 0 = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_0}, & x \leq -1; \\ F_{\xi_1}(x) = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_2}, & -1 < x \leq 0; \\ F_{\xi_1}(x) = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_4}, & 0 < x \leq 1; \\ F_{\xi_1}(x) = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_{10}}, & 1 < x \leq 3; \\ F_{\xi_1}(x) = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_{14}}, & 3 < x; \end{cases} \quad \begin{cases} F_{\xi_2}(y) = 0 = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_0}, & y \leq -2; \\ F_{\xi_2}(y) = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_6}, & -2 < y \leq -1; \\ F_{\xi_2}(y) = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_8}, & -1 < y \leq 1; \\ F_{\xi_2}(y) = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_{13}}, & 1 < y \leq 2; \\ F_{\xi_2}(y) = F_{\bar{\xi}}(x, y)^{D_{14}}, & y > 2; \end{cases}$$

2.4. Математичні сподівання координат. Кореляційна матриця.

а) Обчислимо математичні сподівання координат.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{\xi_1}(x) dx = \frac{2}{2.5\pi+2} \cdot \left(\int_{-1}^0 x \sqrt{(1-x^2)} dx + \int_0^1 x dx + \int_1^3 x \sqrt{4-(x-1)^2} dx \right) = \\ &= \frac{2}{2.5\pi+2} \cdot \left(-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} + \frac{8}{3} + \pi \right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{8}{3} + \pi = \frac{17+6\pi}{3(2.5\pi+2)} \approx 1.213 \\ \mathbb{E}\xi_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y) dy = \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\int_{-2}^{-1} y \sqrt{4-y^2} dy + \int_{-1}^1 y \sqrt{4-y^2} + y \sqrt{1-y^2} + y dy + \right. \\ &+ \left. \int_1^2 y \sqrt{4-y^2} \right) = \int_{-2}^2 y \sqrt{4-y^2} dy + \int_{-1}^1 y \sqrt{1-y^2} + y dy = -\frac{(4-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_{-2}^2 + \\ &+ \left(\frac{y^2}{2} - \frac{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 0 + 0 = 0 - \text{фігура симетрична відносно } OY. \end{aligned}$$

Окремо розглянемо інтеграли в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \int t^2 \sqrt{a^2 - (t-b)^2} dt &= \left| \begin{array}{l} s = t - b \\ dt = ds \end{array} \right| = \\ &= \int s^2 \sqrt{a^2 - s^2} ds - 2b \int s \sqrt{a^2 - s^2} ds + b^2 \int \sqrt{a^2 - s^2} ds \end{aligned}$$

Вже розглядали в загальному вигляді:

$$1. \int \sqrt{a^2 - s^2} ds = \frac{(t-b) \sqrt{a^2 - (t-b)^2} + a^2 \arcsin \frac{(t-b)^2}{a}}{2}$$

$$2. \int s \sqrt{a^2 - s^2} ds = \frac{(a^2 - (t-b)^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

Знайдемо підстановкою Чебишева(III):

$$\begin{aligned} \int s^2 \sqrt{a^2 - s^2} ds &= \left| \begin{array}{l} p^2 = \frac{a^2 - s^2}{s^2} \\ \frac{-2a^2}{s^3} ds = 2p dp \\ s ds = \frac{a^2 p dp}{(p^2 + 1)^2} \end{array} \right| = \int \frac{a^2 p^2}{(p^2 + 1)^2} dp = \\ &= \frac{\arctan \left(\sqrt{\frac{a^2 - (t-b)^2}{(t-1)^2}} \right)}{2} - \frac{\sqrt{\frac{a^2 - (t-b)^2}{(t-1)^2}}}{\frac{a^2 - (t-b)^2}{(t-b)^2} + 2} \end{aligned}$$

Збираємо разом: $\int t^2 \sqrt{a^2 - (t-b)^2} dt =$

$$= \frac{\arctan \left(\sqrt{\frac{a^2 - (t-b)^2}{(t-1)^2}} \right)}{2} - \frac{\sqrt{\frac{a^2 - (t-b)^2}{(t-1)^2}}}{\frac{a^2 - (t-b)^2}{(t-b)^2} + 2} - \frac{(a^2 - (t-b)^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + b^2 \frac{(t-b) \sqrt{a^2 - (t-b)^2} + a^2 \arcsin \frac{(t-b)^2}{a}}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \xi_1^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi_1}(x) dx = \frac{2}{2.5\pi+2} \cdot \left(\int_{-1}^0 x^2 \sqrt{(1-x^2)} dx + \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 x^2 \sqrt{4-(x-1)^2} dx \right) = \\ &= (*) = \frac{2}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{\pi}{16} + 1 + 2\pi + \frac{16}{3} \right) = \frac{2}{2.5\pi+2} \cdot \left(2\frac{1}{16}\pi + \frac{19}{3} \right) \approx 2,1946 \end{aligned}$$

(*) - підстановка чисельних значень в знайдений інтеграл занадто громіздка.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \xi_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\xi_2}(y) dy = \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\int_{-2}^{-1} y^2 \sqrt{4-y^2} dy + \int_{-1}^1 y^2 \sqrt{4-y^2} + y^2 \sqrt{1-y^2} + y^2 dy + \right. \\ &\left. + \int_1^2 y^2 \sqrt{4-y^2} \right) = \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{8\pi+3\frac{3}{2}}{12} + \frac{19\pi-4\cdot 3\frac{3}{2}+16}{24} + \frac{8\pi+3\frac{3}{2}}{12} \right) = \frac{51\pi+16}{12(5\pi+4)} \approx 0,7450 \end{aligned}$$

Знайдемо дисперсію:

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = \frac{2}{2.5\pi+2} \cdot \left(2\frac{1}{16}\pi + \frac{19}{3}\right) - \frac{144\pi^2+816\pi+1156}{225\pi^2+360\pi+144} = \frac{909\pi^2+2484\pi-976}{900\pi^2+1440\pi+576} \approx 1.1299$$

$$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = \frac{51\pi+16}{12(5\pi+4)} - 0 \approx 0,7451$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_1\xi_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{\xi} dx dy = \\ &= \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\int_{-1}^0 x dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} y dy + \int_0^1 x dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} y dy + \int_1^3 x dx \int_{\sqrt{4-(x-1)^2}}^{-\sqrt{4-(x-1)^2}} y dy \right) = \\ &= \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\int_{-1}^0 0 \cdot x dx + \int_0^1 0 \cdot x dx + \int_1^3 0 \cdot x dx \right) = 0 \end{aligned}$$

Отримали 0, адже фігура симетрична за OY .

Знайдемо коваріацію та коваріаційну матрицю вектора: $cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}_{\xi_1, \xi_2} - \mathbb{E}_{\xi_1} \mathbb{E}_{\xi_2} = 0 * 0 = 0$

$$C_{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{909\pi^2+2484\pi-976}{900\pi^2+1440\pi+576} & 0 \\ 0 & \frac{51\pi+16}{12(5\pi+4)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.1299 & 0 \\ 0 & 0,7451 \end{bmatrix}$$

Очевидно, що матриця додатньовизначена та невироджена.

Оскільки коваріація дорівнює 0 \Rightarrow величини ξ_1, ξ_2 - некорельовані, слід перевірити координати вектора $\bar{\xi}$ на залежність. Згідно теореми:

Теорема 2.4. Для абсолютно неперервного вектора $[\xi \ \eta]^T$

$$\xi \perp \eta \Leftrightarrow f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Контр-приклад: $0 < x \leq 1, -1 < y \leq 1$, в точці (1;1) отримаємо:

$$f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y) = \frac{2}{(2.5\pi+2)^2} \sqrt{(1-x^2)} \cdot \left(\sqrt{4-y^2} + \sqrt{1-y^2} + 1 \right) =$$

$$f_{\xi_1}(1) \cdot f_{\xi_2}(1) = \frac{2}{(2.5\pi+2)^2} \sqrt{(1-x^2)} \cdot \left(\sqrt{4-y^2} + \sqrt{1-y^2} + 1 \right) = 0 \neq \frac{2}{(2.5\pi+2)^2}$$

Тобто, з теореми випливає, що величини залежні.

2.5. Умовні щільності розподілу.

Нагадаємо:

$$f_{\bar{\xi}}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2.5\pi + 2}, & (x, y) \in G; \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{2}{2.5\pi + 2} \sqrt{(1 - x^2)}, & -1 < x \leq 0; \\ \frac{2}{2.5\pi + 2}, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{2}{2.5\pi + 2} \sqrt{4 - (x - 1)^2}, & 1 < x \leq 3; \\ 0, & x > 3; \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -2; \\ \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \sqrt{4 - y^2}, & -2 < y \leq -1; \\ \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\sqrt{4 - y^2} + \sqrt{1 - y^2} + 1 \right), & -1 < y \leq 1; \\ \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \sqrt{4 - y^2}, & 1 < y \leq 2; \\ 0, & y > 2; \end{cases}$$

Скористаємося формулами:

$$f_{\xi_1}(x|y) = \frac{f_{\bar{\xi}}(x, y)}{f_{\xi_2}(y)} \quad f_{\xi_2}(y|x) = \frac{f_{\bar{\xi}}(x, y)}{f_{\xi_1}(x)}$$

$$f_{\xi_1|\xi_2}(x|y) = \begin{cases} \text{Не визначено}, & y \leq -2; \\ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4 - y^2}}, & -2 < y \leq -1, x \in [1, 1 + \sqrt{4 - y^2}]; \\ 0, & -2 < y \leq -1, x \notin [1, 1 + \sqrt{4 - y^2}]; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4 - y^2} + \sqrt{1 - y^2} + 1}, & -1 < y \leq 1, x \in [-\sqrt{1 - y^2}, 1 + \sqrt{4 - y^2}]; \\ 0, & -1 < y \leq 1, x \notin [-\sqrt{1 - y^2}, 1 + \sqrt{4 - y^2}]; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4 - y^2}}, & 1 < y \leq 2, x \in [1, 1 + \sqrt{4 - y^2}]; \\ 0, & 1 < y \leq 2, x \notin [1, 1 + \sqrt{4 - y^2}]; \end{cases} \\ \text{Не визначено}, & y > 2; \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y|x) = \begin{cases} \text{Не визначено,} & x \leq -1; \\ \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)}}, & -1 < x \leq 0, y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]; \\ 0, & -1 < x \leq 0, y \notin [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1, y \in [-1, 1]; \\ 0, & 0 < x \leq 1, y \notin [-1, 1]; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{4-(x-1)^2}}, & 0 < x \leq 1, y \in [-\sqrt{4-(x-1)^2}, \sqrt{4-(x-1)^2}]; \\ 0, & 0 < x \leq 1, y \notin [-\sqrt{4-(x-1)^2}, \sqrt{4-(x-1)^2}]; \end{cases} \\ \text{Не визначено,} & x > 3; \end{cases}$$

Перевірка. Очевидними є наступні рівності:

$$\int_{-1+\sqrt{4-y^2}}^{1+\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{4-y^2}} dx = 1$$

$$\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{4-y^2} + \sqrt{1-y^2} + 1} dx = 1$$

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)}} dy = 1$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} dy = 1$$

$$\int_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}} \frac{1}{2\sqrt{4-(x-1)^2}} dy = 1 \quad \text{Тоді:}$$

Умови нормування для умовних щільностей виконуються, оскільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x/y) dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x,y) dx}{f_{\xi_2}(y)} = \frac{f_{\xi_2}(y)}{f_{\xi_2}(y)} = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y/x) dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x,y) dy}{f_{\xi_1}(x)} = \frac{f_{\xi_1}(x)}{f_{\xi_1}(x)} = 1.$$

2.6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{\xi_1|\xi_2}(x|y)dx =$$

$$= \begin{cases} \text{Не визначено, } y \leq -2; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4-y^2}}, & -2 < y \leq -1, x \in [1, 1 + \sqrt{4-y^2}]; \\ 0, & -2 < y \leq -1, x \notin [1, 1 + \sqrt{4-y^2}]; \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4-y^2} + \sqrt{1-y^2} + 1}, & -1 < y \leq 1, x \in [-\sqrt{1-y^2}, 1 + \sqrt{4-y^2}]; \\ 0, & -1 < y \leq 1, x \notin [-\sqrt{1-y^2}, 1 + \sqrt{4-y^2}]; \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4-y^2}}, & 1 < y \leq 2, x \in [1, 1 + \sqrt{4-y^2}]; \\ 0, & 1 < y \leq 2, x \notin [1, 1 + \sqrt{4-y^2}]; \end{cases} \\ \text{Не визначено, } y > 2; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \text{Не визначено, } y \leq -2; \\ \int_1^{1+\sqrt{4-y^2}} x \cdot \frac{1}{\sqrt{4-y^2}} dx, & -2 < y \leq -1; \\ \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{4-y^2}} x \cdot \frac{1}{\sqrt{4-y^2} + \sqrt{1-y^2} + 1} dx, & -1 < y \leq 1; \\ \int_1^{1+\sqrt{4-y^2}} x \cdot \frac{1}{\sqrt{4-y^2}}, & 1 < y \leq 2; \\ \text{Не визначено, } y > 2; \end{cases} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \text{Не визначено, } y \leq -2; \\ \frac{x^2}{2\sqrt{4-y^2}} \Big|_1^{1+\sqrt{4-y^2}}, & -2 < y \leq -1; \\ \frac{x^2}{2(\sqrt{4-y^2} + \sqrt{1-y^2} + 1)} \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{4-y^2}}, & -1 < y \leq 1; \\ \frac{x^2}{2\sqrt{4-y^2}} \Big|_1^{1+\sqrt{4-y^2}}, & 1 < y \leq 2; \\ \text{Не визначено, } y > 2; \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{Не визначено, } y \leq -2; \\ \frac{\sqrt{4-y^2} + 2}{2}, & -2 < y \leq -1; \\ \frac{\sqrt{4-y^2} - \sqrt{1-y^2} + 1}{2}, & -1 < y \leq 1; \\ \frac{\sqrt{4-y^2} + 2}{2}, & 1 < y \leq 2; \\ \text{Не визначено, } y > 2; \end{cases}
\end{aligned}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(\xi_1|\xi_2) f_{\xi_2} dy = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \sqrt{4-y^2} \frac{\sqrt{4-y^2} + 2}{2} dy + \\
&+ \int_{-1}^1 \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot (\sqrt{4-y^2} + \sqrt{1-y^2} + 1) \frac{\sqrt{4-y^2} - \sqrt{1-y^2} + 1}{2} dy + \\
&+ \int_1^2 \frac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \sqrt{4-y^2} \frac{\sqrt{4-y^2} + 2}{2} dy = \\
&= \int_{-2}^{-1} \frac{2\sqrt{4-y^2} + 4 - y^2}{5\pi + 4} dy + \int_{-1}^1 \frac{2\sqrt{4-y^2} + 4}{5\pi + 4} dy + \int_1^2 \frac{2\sqrt{4-y^2} + 4 - y^2}{5\pi + 4} dy = \\
&= 2 \cdot \frac{4\pi - 3^{\frac{3}{2}} + 5}{15\pi + 12} + \frac{4\pi + 2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} + 24}{3(5\pi + 4)} = \frac{12\pi + 34}{3(5\pi + 4)} = \frac{3\pi + 17}{3(2.5\pi + 2)} = \mathbb{E}\xi_1
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_{\xi_2|\xi_1}(y|x)dy =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Не визначено , } \quad x \leq -1; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)}}, -1 < x \leq 0, y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]; \\ 0, -1 < x \leq 0, y \notin [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]; \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \begin{cases} \frac{1}{2}, 0 < x \leq 1, y \in [-1, 1]; \\ 0, < x \leq 1, y \notin [-1, 1]; \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{4-(x-1)^2}}, 0 < x \leq 1, y \in [-\sqrt{4-(x-1)^2}, \sqrt{4-(x-1)^2}]; \\ 0, 0 < x \leq 1, y \notin [-\sqrt{4-(x-1)^2}, \sqrt{4-(x-1)^2}]; \end{cases} \\ \text{Не визначено , } \quad x > 3; \end{array} \right. =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Не визначено , } \quad x \leq -1; \\ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)}}, \quad -1 < x \leq 0; \\ \int_{-1}^{+1} y \cdot \frac{1}{2}, \quad 0 < x \leq 1; \\ \int_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}} y \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-(x-1)^2}}, \quad 1 < x \leq 3; \\ \text{Не визначено , } \quad x > 3; \end{array} \right. =$$

$$= \begin{cases} \text{Не визначено ,} & x \leq -1; \\ \frac{y^2}{4\sqrt{1-x^2}} \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x \leq 0; \\ \frac{y^2}{4} \Big|_{-1}^{+1}, & 0 < x \leq 1; \\ \frac{y^2}{4\sqrt{4-(x-1)^2}} \Big|_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}}, & 1 < x \leq 3; \\ \text{Не визначено ,} & x > 3; \end{cases} = \boxed{\begin{cases} \text{Не визначено ,} & x \leq -1; \\ 0, & -1 < x \leq 3; \\ \text{Не визначено ,} & x > 3; \end{cases}}$$

Перевірка:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(\xi_2|\xi_1) f_{\xi_1} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot f_{\xi_1} dy = 0 = \mathbb{E}\xi_2$$

