

Зміст

1. Означення.	2
2. Методи знаходження лишків.	2
2.1. Часткові випадки.	3
3. Нескінчена особлива точка. Ряд Лорана в околі $z = \infty$.	3
3.1. Характеристика ізольованої особливої точки $z_0 = \infty$ за розкладом в ряд Лорана.	4
3.2. Пошук лишків. Зв'язок з рядом Лорана.	4
4. Застосування лишків для обчислення інтегралів.	5
4.1. Застосування теорії лишків для дійсних інтегралів.	5

Лишки (вычеты)

1. Означення.

$f(z)$ – аналітична в околі т. z_0 за виключенням самої z_0 :

$$\left\{ z \mid 0 < |z - z_0| < \delta \right\}$$

γ – контур, що охоплює z_0 та належить проколотому околу z_0 .

Лишком $f(z)$ в точці z_0 називають:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} f(z) dz$$

Зауваження. З теореми Коши для неозв'язної області випливає, що $\forall \gamma_1, \gamma_2$, що охоплюють т. z_0 та належать $\left\{ z \mid 0 < |z - z_0| < \delta \right\}$, виконується рівність:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Таким чином, $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$ не залежить від γ .

Теорема 1.1. $f(z)$ – аналітична в $\left\{ z \mid 0 < |z - z_0| < \delta \right\}$. Тоді:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1},$$

де C_{-1} – коефіцієнт головної частини ряду Лорана при $\frac{1}{z-z_0}$.

2. Методи знаходження лишків.

Лема. z_0 – *усувна* особлива точка $f(z)$. Тоді:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0$$

Лема. z_0 – *суттєва* особлива точка. Тоді:

$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$ рахується **тільки за розкладом** в ряд Лорана.

Лема. z_0 – полюс порядку k . Тоді:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(f(z) * (z - z_0)^k \right)^{(k-1)}$$

2.1. Часткові випадки.

1) z_0 – полюс першого порядку. Тоді:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) =$$

2) $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ така, що: $\varphi(z_0) \neq 0$ $\psi(z_0) = 0$ $\psi'(z_0) \neq 0$. Тоді:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

3. Нескінчена особлива точка. Ряд Лорана в околі $z = \infty$.

Перетворення $\omega = \frac{1}{z}$ переводить $z = \infty$ в т. $\omega = 0$.

Розглядаємо: $\omega = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{\omega} \quad z_0 = \infty \iff \omega_0 = 0$.

$$f(z) = \dots = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} z^k}_{\text{головна}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{z^n}}_{\text{правильна}}$$

Коефіцієнт ряду обчислюється за формулою:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) z^{n-1} dz$$

Означення. Точка $z_0 = \infty$ є ізольованою, якщо:

$$\exists R \forall z \in \left\{ z \mid R < |z| \right\} : f(z) - \text{аналітична.}$$

Означення. Точка $z_0 = \infty$ – ізольована, називається:

- *усувною*, якщо $\exists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \pm \infty$.
- *полюсом*, якщо $\exists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.
- *суттєвою*, якщо $\nexists \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

Порядок полюса $z_0 = \infty$:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \iff \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Тоді порядок полюса $z_0 = \infty$ є кратність нуля $z_0 = \infty$ для $h(z) = \frac{1}{f(z)}$

3.1. Характеристика ізольованої особливої точки $z_0 = \infty$ за розкладом в ряд Лорана.

Твердження. $z_0 = \infty$ – ізольована, особлива точка для $f(z)$. Тоді:

- 1) $z_0 = \infty$ – *усувна*: ряд Лорана не містить головної частини.
- 2) $z_0 = \infty$ – *полос* кр. k : ряд Лорана містить k доданків головної частини.
- 3) $z_0 = \infty$ – *суттєва*: ряд Лорана містить безліч доданків головної частини.

Означення. z_0 – ізольована особлива точка функції $f(z)$.

Лишком функції $f(z)$ в т. $z_0 = \infty$ називають:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma^-} f(z) dz$$

3.2. Пошук лишків. Зв'язок з рядом Лорана.

Теорема 3.1. $z_0 = \infty$ – ізольована, особлива точка для $f(z)$. Тоді:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = -C_1$$

де C_1 – коефіцієнт головної частини ряду Лорана $f(z)$ в околі $z_0 = \infty$, тобто коефіцієнт при доданку $\frac{1}{z}$.

Зауваження. Навіть у усувної точки $z_0 = \infty$ лишок може бути ненульовим.

4. Застосування лишків для обчислення інтегралів.

Теорема 4.1 (Коші, для лишків I). Задана $f(x)$ – аналітична в області D за винятком скінченної кількості особливих точок z_1, \dots, z_n .

γ – замкнений контур в D , який охоплює z_1, \dots, z_n . Тоді:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z)$$

Теорема 4.2 (Коші, для лишків II). Задана $f(x)$ – аналітична в області D за винятком скінченної кількості особливих точок z_1, \dots, z_n . Тоді:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

Зауваження. Ми розглядаємо випадок скінченної кількості особливих точок, бо в випадку нескінченної кількості з'являється гранична точка(точки) із множини особливих, що не будуть ізольованими.

4.1. Застосування теорії лишків для дійсних інтегралів.

I. $R(x, y)$ – дробово-раціональна функція від x, y :

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \text{ де } P, Q - \text{многочлени.}$$

Тоді, шляхом заміни в інтегралі отримаємо:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(x), \sin(x)) dx = \left| \begin{array}{ll} e^{ix} = z & \cos x = \frac{z^2 + 1}{2z} \\ -i \frac{dz}{z} = dx & \sin x = \frac{z^2 - 1}{2iz} \end{array} \right| = - \int_{|z|=1} i R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}; \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) \frac{dz}{z} \ominus$$

Підінтегральна функція – дробово-раціональна від z , тому має скінчену кількість особливих точок в колі $|z| = 1$, таким чином:

$$\ominus 2\pi \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=z_j} \left[R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}; \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) \frac{1}{z} \right]$$

II. Невласні дійсні інтеграли.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(x)dx$$

Теорема 4.3. $f(x)$ задана на \mathbb{R} така, що вона продовжується аналітично на верхню півплощину $\mathbb{C}(\Im z > 0)$ за виключенням скінченної кількості особливих точок z_1, \dots, z_n .

$f(x)$ така, що $\exists \lim_{|z| \rightarrow \infty} |z \cdot f(z)| = 0$. Тоді: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res } f(z)$

III. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x dx$ або $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin x dx$.

Зауважемо, що: $\cos(\alpha x) = \Re e^{i\alpha x}$, $\sin(\alpha x) = \Im e^{i\alpha x}$. Тому:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x dx &= \Re \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin x dx &= \Im \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx \end{aligned}$$

Тому далі будемо розглядати:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{i\alpha x} dx$$

Лема (Жордана). $f(x)$ – аналітична в верхній півплощині \mathbb{C} за виключенням скінченної кількості особливих точок z_1, \dots, z_n .

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \max_{\substack{|z|=R \\ \Im z \geq 0}} (f(z)) = 0$$

Тоді:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\substack{|z|=R \\ \Im z \geq 0}} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0$$

Теорема 4.4. $f(x)$ задана на \mathbb{R} така, що вона продовжується аналітично на верхню півплощину $\mathbb{C}(\Im z > 0)$ за виключенням скінченної кількості особливих точок z_1, \dots, z_n .

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \max_{\substack{|z|=R \\ \Im z \geq 0}} (f(z)) = 0$$

Тоді:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=z_j} f(z) e^{i\alpha z}$$

Теорема 4.5. $f(x)$ – парна. γ – симетричний відносно OX . **Тоді:**

$$\int_{\gamma} f(x) dx = 0$$