Зміст

1. Лекція 1. 2
1.1. Поява. Передмова. 2
1.2. Комплексна форма ряду Фур'є. 2
1.3. Випадок дійснозначної функції. 3
1.4. Не 2π-періодичні функції. 4

2. Лекція 2. 5
2.1. Аналіз збіжності ряду. 5
2.2. Збіжність часткових сум. 6

3. Лекція 3. 7
3.1. Рівномірна збіжність ряду Фур'є. 7
3.2. Середні по Чезаре 7

4. Лекція 4. 9

Ряд Фур'є

1. Лекція 1.

1.1. Поява. Передмова.

Нехай $g(z)$ – аналітична в кільці $K = \left\{z \,\middle|\, 1-\varepsilon_1 < |z| < 1+\varepsilon_2\right\}$; $\left\{z \,\middle|\, |z| = 1\right\} \subset K$.

Розкладаємо $g(z)$ в ряд Лорана за степенями z в цьому кільці:

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot z^n \text{ , де } C_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z$$

$$z : |z| = 1 \implies z = e^{ix} \implies x \in [0, 2\pi] \implies g(z) = g(e^{ix}) = f(x)$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z = \begin{vmatrix} z = e^{ix} \\ \mathrm{d}z = ie^{ix}\mathrm{d}x \\ x \in [0, 2\pi] \end{vmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$$

Отримали *комплексну форму ряду Фур'є*:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{inx},\ C_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$$

1.2. Комплексна форма ряду Фур'є.

$f \in D[0, 2\pi]$ – періодична, інтегрова на $[0, 2\pi]$. За функцією $f(x)$ будуємо ряд Фур'є:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{inx},\ C_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$$

Питання:

1) Збіжність ряду.
2) Якщо збігається, то зв'язок між $S(x)$ та $f(x)$.

1.3. Випадок дійснозначної функції.

Розглянемо ряд Фур'є:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n \cdot e^{inx} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} = \begin{vmatrix} \text{в I сумі:} \\ n=-k \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} \cdot e^{-ikx} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} \;=$$

Окремо розглянемо $C_{-k}e^{-ikx}$: $C_{-k}e^{-ikx} = \overline{C_k e^{ikx}}$:

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(C_n e^{inx} + \overline{C_n e^{inx}}\right)}_{=2\Re(C_n e^{inx})\in\mathbb{R}} \boxed{=}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot(\cos(nx) - i\sin(nx))\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\mathrm{d}x - i\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\mathrm{d}x$$

$$\Re C_n e^{inx} = \Re\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x - i\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right]\cdot(\cos(nx) + i\sin(nx)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cos(nx)\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\sin(nx)\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\mathrm{d}x$$

$$\boxed{=}\; C_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\mathrm{d}x + \sin(nx)\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\mathrm{d}x$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$$

Отримали *дійсну форму ряда Фур'є.*

$$f(x) \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx),$$

де $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$; $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

1.4. Не 2π-періодичні функції.

f – $2l$ періодична, або задана на $[0,2l]$, інтегрована. Розглянемо відображення:

$$[0,2\pi] \leftarrow [0,2l] \qquad x \in [0,2\pi] \qquad x = \frac{t}{l}\pi \qquad t \in [0,2\pi]$$

Тоді $f(x) = f(\frac{t}{l}\pi) = g(t)$. $g(t)$ - задана на $[0,2l]$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} g(t)\cos\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} g(t)\sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\mathrm{d}t$$

$$g(t) = f(x) \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{\pi nt}{l} + b_n\sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} g(t)\cos\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} g(t)\sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\mathrm{d}t$$

Частіше всього, зручно обчислювати коефіцієнти ряду інакше:

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(t)\cos\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(t)\sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\mathrm{d}t$$

2. Лекція 2.

2.1. Аналіз збіжності ряду.

Лема (Рімана)**.** f – інтегрована на $[a, b]$ навіть в невласному сенсі.

Тобто $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ – збігається. Тоді:

1) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\cos{(\lambda x)}\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$

2) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\sin{(\lambda x)}\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$

Надалі розглядаємо:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n\cos{(nx)} + b_n\sin{(nx)}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos{(nt)}\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin{(nt)}\mathrm{d}t$$

Теорема 2.1. $f(x)$ – 2π-періодична, інтегрована. Тоді:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n\cos{(nx)} + b_n\sin{(nx)}$$

Часткова сума ряду Фур'є дорівнює:

$$S_k(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \cdot \frac{\sin\frac{2k+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

Підінтегральний множник $\dfrac{\sin\frac{2k+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}} = D_k(u)$ називається *ядром Діріхле.*

Властивості ядра Діріхле:

1) $D_k(u)$ — парна, 2π період функції;
2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_k(u)\mathrm{d}u = 1$;

2.2. Збіжність часткових сум.

Розглядаємо:

$$S_k(x) - C = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \cdot D_k(u)\mathrm{d}u - C \cdot \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_k(u)\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [f(x+u) + f(x-u) - 2C] \cdot D_k(u)\mathrm{d}u$$

Позначимо: $f(x+u) + f(x-u) - 2C = g_{C,x}(u)$. Отже:

$$S_k(x) - C = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi g_{C,x}(u) D_k(u)\mathrm{d}u$$

Теорема 2.2 (Ознака Діні для рядів Фур'є)**.** $f(x)$ – 2π-періодична, інтегрована. Якщо $\exists \delta > 0 : \int\limits_0^\delta \frac{|g_{C,x}(u)|}{u}\mathrm{d}u$ – збігається, то: $S_\delta(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} C$.

Наслідок. $f(x)$ – диференційована в т. x_0, тоді:

$$S_k(x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)$$

Наслідок. $f(x)$ – 2π-періодична, інтегрована. x_0 – точка розриву 1го роду ("стрибок"). $f(x)$ має в т. x_0 ліву та праву похідні. Тоді:

$$S_k(x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2}\left(f(x_0+) + f(x_0-)\right)$$

Означення. $f(x)$ задовольняє умові Ліпшиця в околі т. x_0, якщо:

$$\forall x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\, |f(x_1) - f(x_2)| \le L\,|x_1 - x_2|$$

Наслідок. $f(x)$ – 2π-період., інтегрована та задов. ум. Ліпшиця в околі т. x_0. Тоді:

$$S_k(x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$$

3. Лекція 3.

3.1. Рівномірна збіжність ряду Фур'є.

Теорема 3.1. $f(x)$ – 2π-періодична та кусково-неперервно диференційована. Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ *рівномірно збігається.*

Доведення. Дуже велике доведення – дивіться в конспекті:) ■

3.2. Середні по Чезаре

Означення. $f(x)$ – 2π-періодична, інтегрована.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos{(nx)} + b_n \sin{(nx)} \text{ – ряд Фур'є для } f(x);$$

$$S_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos{(nx)} + b_n \sin{(nx)} \text{ – часткові суми;}$$

$$\mathcal{G}_n(x) = \frac{1}{n}(S_1(x), S_2(x), \ldots, S_{n-1}(x)) \text{ — \textit{середні по Чезаро.}}$$

Отримаємо інтегральний вид середніх по Чезаро. Отримали:)

Лема. $f(x)$ – 2π-періодична, інтегрована.

$$S_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos{(nx)} + b_n \sin{(nx)} \text{ – часткові суми;}$$

$$\mathcal{G}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) \text{ — середні по Чезаре;}$$

Тоді $\mathcal{G}_n(x)$ має інтегральний вигляд:

$$\mathcal{G}_n(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x+2v) + f(x-2v)\right] F_n(v) \mathrm{d}v,$$

де $F_n(v) = \dfrac{\sin^2(nv)}{\pi n \sin^2 v}$ — *ядро Фейера.*

Властивості ядра Фейера:

1) $F_n(-v) = F_n(v)$;
2) $F_n(v)$ – π-періодична;
3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} F_n(v)\mathrm{d}v = \dfrac{1}{2}$.

Властивості коефіцієнтів ряда Фур'є.

1) $f(x)$ – непарна, задана на $(-l; l)$. Тоді:

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\mathrm{d}x = 0;$$

2) $f(x)$ – парна, задана на $(-l; l)$. Тоді:

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

3) $f(x)$ – парна, з періодом $2l$.

   Якщо функція неперервна на $(-l, l)$, то вона неперервна на $\mathbb{R}$.

4) $f(x)$ – непарна. Тоді:

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\mathrm{d}x$$

5) $f(x)$ – парна. Тоді:

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\mathrm{d}x$$

4. Лекція 4.

Теорема 4.1 (Фейера)**.** Задана функція $f \in C[0, 2\pi]$. Тоді:

$$\mathcal{G}_n(f) \rightrightarrows f \text{ на } [0, 2\pi] \quad n \to \infty$$