

Розрахункова робота №4
студента КА-96
Терещенко Дениса
Варіант-26

1.26 Дослідити на збіжність ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}$$

Скористаємося ознакою Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{10+7n}{5 \cdot 5^n + n + 1}}{\frac{3+7n}{5^n + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n * n * (1 + \frac{n}{5^n})(7 + 10/n)}{5^n * n * (5 + \frac{n+1}{5^n})(7 + 3/n)} = \left| \begin{array}{cc} \frac{n}{5^n} \rightarrow 0 & \frac{n+1}{5^n} \rightarrow 0 \\ 3/n \rightarrow 0 & 10/n \rightarrow 0 \end{array} \right| =$$

$= 0.2 < 1$ - тому за ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}$ - збіжний.

2.26 Знайти область збіжності функціонального ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n - |x|^n}{2}$$

Застосуємо радикальна ознака Коши для $|a_n|$:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{|x|^n - |x|^n}{2} \right|} = |x|$$

Тоді ряд є абсолютно збіжним за умови $|x| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

Із зауваження до ознак Даламбера і Коші: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ - ряд є розбіжним. Розглянемо точки $x = 1, x = -1$:

$$x = -1 : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+1}{2} - \text{розбіжний}$$

$$x = 1 : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+1}{2} - \text{розбіжний}$$

Остаточно: $x \in (-1; 1)$ - абсолютно збіжний.

$x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$ - розбіжний.

3.26 Знайти область збіжності функціонального ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \sin^n(3x) \Rightarrow a_n = \frac{2^n}{n^4} \sin^n(3x)$$

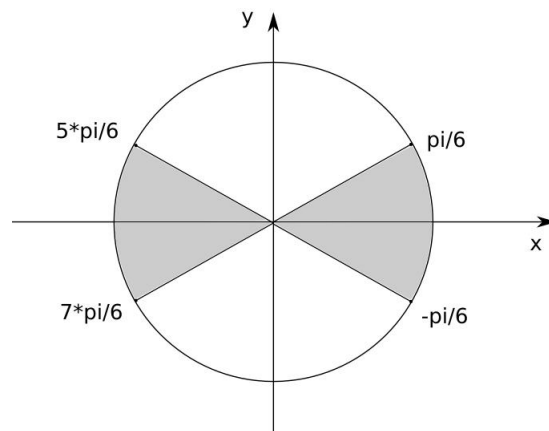
Дослідимо абсолютну збіжність (за ознакою Коші): $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2^n}{n^4} \sin^n(3x) \right|} = \sqrt[n]{\left| \frac{2^n}{n^4} \sin^n(3x) \right|} = |2 \sin(3x)| \Rightarrow 2 |\sin(3x)| < 1$ - ряд абсолютно збіжний.

Перевіримо у крайніх точках (де $|\sin(3x)| = 1$):

$$\frac{2^n}{n^4} > 0 \Rightarrow |a_n| = \left| \frac{2^n}{n^4} \sin(3x) \right| = \frac{2^n}{n^4} |\sin(3x)|$$

Підставимо $|\sin(3x)| = 1/2 \Rightarrow |a_n| = \frac{2^n}{n^4} * \frac{1}{2^n} \Rightarrow$ Озн. порівняння в границях з еталонним $\frac{1}{n^4} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = 1 \Rightarrow$ Ряд збігається абсолютно при $\sin(3x) = \pm 1/2$.

Розв'яжемо тригонометричне рівняння: $|\sin(3x)| \leq 1/2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(3x) \leq 1/2 \\ \sin(3x) \geq -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2n\pi \leq 3x \leq \frac{\pi}{6} + 2n\pi \\ \frac{7\pi}{6} + 2n\pi \leq 3x \leq \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{18} + 2n\pi/3 \leq x \leq \frac{\pi}{18} + 2n\pi/3 \\ \frac{7\pi}{18} + 2n\pi/3 \leq x \leq \frac{5\pi}{18} + 2n\pi/3 \end{cases}$$

Остаточно запишемо: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \sin^n(3x)$ є абсолютно збіжним при

$-\frac{\pi}{18} + n\pi/3 \leq x \leq \frac{\pi}{18} + n\pi/3, n \in \mathbb{Z}$. За зауваженням до признаков Коші та Даламбера на решті проміжку $\frac{\pi}{18} + \frac{n\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{18} + \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$ ряд є розбіжним.

4.26 Для заданого функціонального ряду побудувати мажоруючий ряд та довести рівномірну збіжність на вказаному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)(x-2)^n \quad [1; 3]$$

Використаємо признак Вейерштрасса. На заданому відрізку виконується: $|x-2| \leq 1$. Тоді:

$$|a_n| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)(x-2)^n \right| \leq \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) * 1^n \leq \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - \text{I умова озн. В.}$$

Доведемо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\pi}{2^n}} = 1/2 \Rightarrow$ Збіжний за озн. Коши. - 2-га умова ознаки Вейерштрасса. Отже, за ознакою Вейерштрасса ряд є рівномірно збіжним на проміжку $[1, 3]$.

5.26 Знайти суму ряду.

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} = S_1(x) - S_2(x)$$

Використаємо властивості почленного інтегрування та дифференціювання суми ряду на області збіжності.

$$S_1(x) = x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x \tilde{S}_1(x)$$

Зауважемо, що отримали суму нескінченної геом. прогресії:

$$\tilde{S}_1'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{1}{x^2} * \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\tilde{S}_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) \Rightarrow S_1(x) = -x \ln(1-x)$$

$$S_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad S_2'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow S_2(x) = \int_0^x \frac{x}{1-x} dx = -\ln(1-x) - x$$

Таким чином, отримали: $S(x) = x + \ln(1-x) - x \ln(1-x)$.

6.26 Розкласти функцію в ряд Тейлора за степенями x .

$$f(x) = \frac{5}{6 - x - x^2} = \frac{-5}{(x + 3)(x - 2)}$$

За методом невизначених коефіцієнтів:

$$f(x) = \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{3(1 + \frac{x}{3})} + \frac{1}{2(1 - \frac{x}{2})}$$

За розкладом $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots$

$$\begin{aligned} \text{Отже, } f(x) &= \frac{1}{3}(1 - x/3 + x^2/9 - x^3/27 + \dots + (-1)^n * (\frac{x^n}{3^n} + \dots) + \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{2} + \\ &\frac{x^2}{4} + \dots + \frac{x^2}{2^n} + \dots) = \\ &= \frac{5}{6} + \frac{5}{36}x + \dots + \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right) x^n + \dots \end{aligned}$$

7.26 Обчислити інтеграл з точністю до 0,001.

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$

Розкладемо: $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{9}x^6 - \frac{14}{81}x^9 + \frac{35}{243}x^{12} - \dots$

За властивістю почленного інтегрування степеневого ряду, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} &= x \Big|_0^{0.5} - \frac{x^4}{12} \Big|_0^{0.5} + \frac{2}{63} x^7 \Big|_0^{0.5} - \frac{7}{405} x^{10} \Big|_0^{0.5} + \frac{35}{3159} x^{13} \Big|_0^{0.5} - \dots = \\ &= 0.5 - \frac{2^{-4}}{12} + \frac{2^{-6}}{63} - \frac{7}{405} * 2^{-10} + \frac{35}{3159} 2^{-13} - \dots \end{aligned}$$

Цей знакопочерговий ряд задовільняє ознаки Лейбниця (знакопочерговий ряд, $a_n \geq 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$) , тому з наслідку до озн. Лейбниця маємо: $|S - S_k| \leq a_{k+1}$.

Обчисливши перші члени ряду, маємо: $a_3 < 0.001 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} \approx 0.5 - 0.005208 \approx 0.495$

8.26 Дослідити на збіжність ряд.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2) \ln(n)}$$

Спочатку порівняємо заданий ряд з рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{(n^2) \ln(n)}}{\frac{1}{n \ln n}} = 1 \neq 0 \neq \infty$$

А отже, за ознакою порівняння в границях обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно. Дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Скористаємося інтегральною ознакою Коші:

1. $a_n = \frac{1}{n \ln n} > 0$
2. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}, x \in [2, \infty]$ $f(n) = a_n \quad \forall n \geq 1$
3. $f(x)$ - монотонно спадає, а одже:

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ та $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}$ збігаються або розбігаються одночасно.

Дослідимо на збіжність інтеграл:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} = \left| \begin{array}{ll} t = t(x) = \ln x & t(2) = \ln 2 \\ dt = \frac{1}{x} dx & t(\infty) = \infty \end{array} \right| = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t}$$

Інтеграл є розбіжним, оскільки показник $t = 1$. З інтегральної ознаки Коші випливає, що ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ є розбіжним, а одже і **початковий ряд розбігається** за ознакою порівняння в границях.