

# ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ

За лекціями Горбань Н.

Редактори: Терещенко Д.

Людомирський Ю.

# Зміст

<b>1. Лекція 1</b>	<b>3</b>
1.1. Нормальні системи диференціальних рівнянь . . . . .	3
1.2. Основні поняття теорії стійкості. . . . .	5
1.3. Приклади дослідження на стійкість за означенням. . . . .	7
1.4. Стійкість розв'язків лінійних систем . . . . .	8
1.5. Стійкість ЛОС зі сталою матрицею. . . . .	11

# 1. Лекція 1

## 1.1. Нормальні системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x'_2(t) = f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (1)$$

Системою диф. рівнянь  $n$ -го порядку в нормальній формі називається система вигляду (1), де  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

**Позначення.**

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} - \text{невідома вектор-функція,} \quad \bar{f}(t, \bar{x}(t)) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}, \text{ що}$$

$D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , тоді (1) :  $\bar{x}'(t) = \bar{f}(t, \bar{x}(t))$ .

**Означення. Розв'язком системи (1) на  $(\alpha, \beta)$**  називається така вектор-функція  $\bar{x}(t) \in C^1(\alpha, \beta)$ , що:

1)  $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$ ;

2)  $\bar{x}(t)$  перетворює (1) на тотожність на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .

**Загальним розв'язком системи (1)** називається  $n$ -параметрична сім'я розв'язків (1), що охоплює всі розв'язки системи.

**Задача Коші.** Для заданих  $t_0, \bar{x}^0 \in D$  знайти такий розв'язок (1), що  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$ .

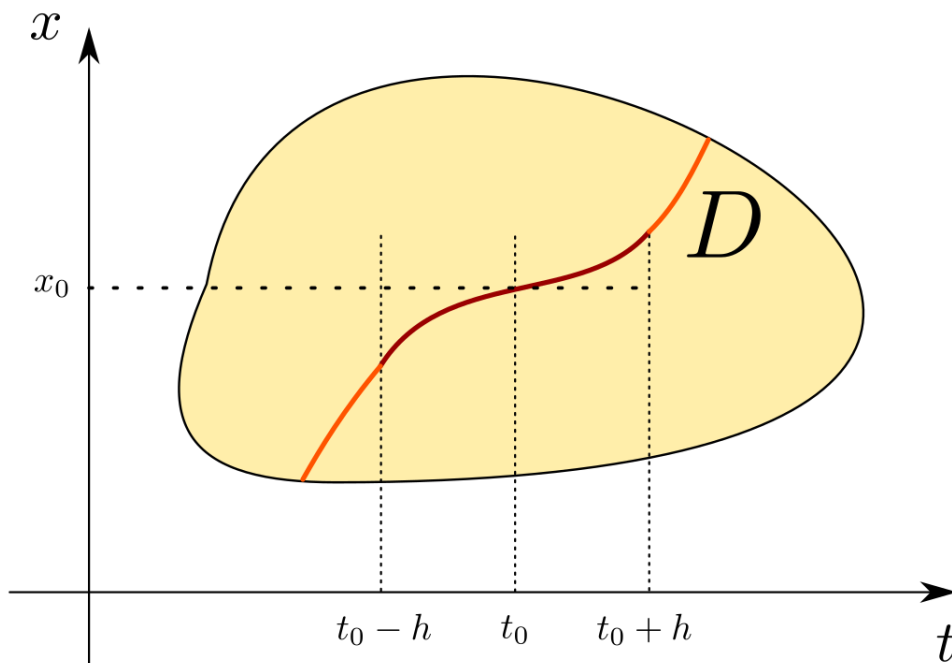
Нехай  $\Pi = \{(t, \bar{x}) \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq a, \quad \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq b\}$ .

**Теорема 1.1** (Теорема Пеано). Нехай  $\vec{f} \in C(\Pi)$ . Тоді розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}) \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

існує принаймні на проміжку  $I_h = (t_0 - h, t_0 + h)$ , де  $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ ,  
 $M = \max_{(t,x) \in \Pi} \|\bar{f}(t, \bar{x})\|$ .

**Теорема 1.2** (про продовження). Нехай для системи (1) виконується, що  $\bar{f} \in C(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  – обмежена область. Тоді  $\forall t : (t_0, \bar{x}_0) \in D$  існують такі  $t^-, t^+ : t^- < t_0 < t^+$ , що розв'язок системи (1) з початкової умови  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$  існує на інтервалі  $(t^-, t^+)$ , причому  $(t^-, \bar{x}(t^-))$  та  $(t^+, \bar{x}(t^+))$  належать межі області  $D$ .



**Теорема 1.3** (Теорема Пікара). Нехай

- 1)  $\bar{f} \in C(\Pi)$ ;
- 2)  $\exists! L > 0 : \forall (t_1, \bar{x}_1), (t_2, \bar{x}_2) \in \Pi$  справедливо, що  $\|f(t_1, \bar{x}_1) - f(t_2, \bar{x}_2)\| \leq L\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$  (умова Ліпшиця).

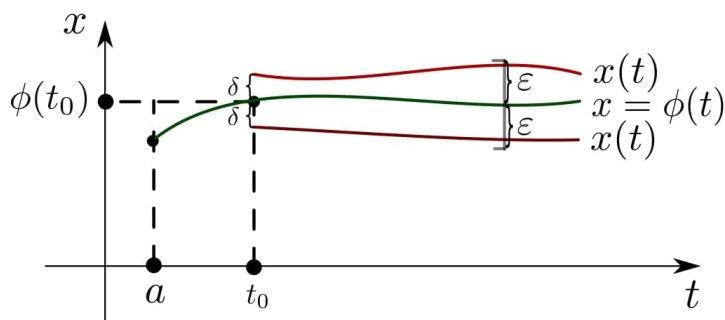
Тоді  $\exists!$  розв'язок задачі Коші з початкової умови  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0(t)$ , визначений принаймні на  $I_h = (t_0 - h, t_0 + h)$ ,  $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ ,  $M = \max_{\Pi} \|f(t, \bar{x})\|$ .

## 1.2. Основні поняття теорії стійкості.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь  $\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})$  (1), де  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  та  $D = [a, +\infty] \times G$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Нехай при цьому  $\bar{f}$  задовольняє умовам існування та єдиності розв'язку задачі Коші в будь-якій точці  $(t_0, \bar{x}_0) \in D$

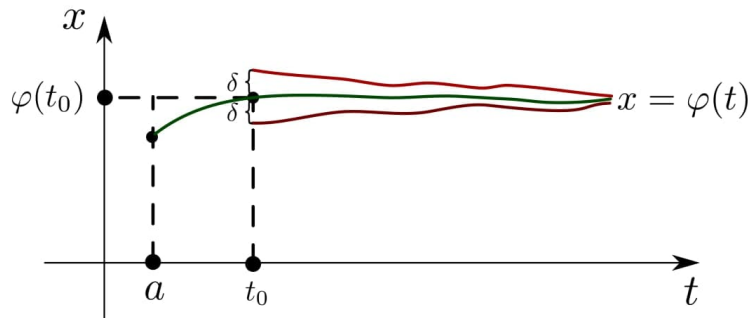
**Означення.** Розв'язок  $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$  системи (1) називається **стійким** за Ляпуновим, якщо

- 1)  $\bar{x} = \bar{\varphi}(t) \quad \exists$  на  $[a, +\infty]$  (відсутність вертикальних асимптот)
- 2)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$  розв'язку  $\bar{x}(t)$  системи (1) такого, що  $\|\bar{x}(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)\| < \delta$  виконується наступне, що  $\bar{x}(t)$  існує на  $[t_0, +\infty]$  та  $\|\bar{x}(t) - \bar{\varphi}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$ .



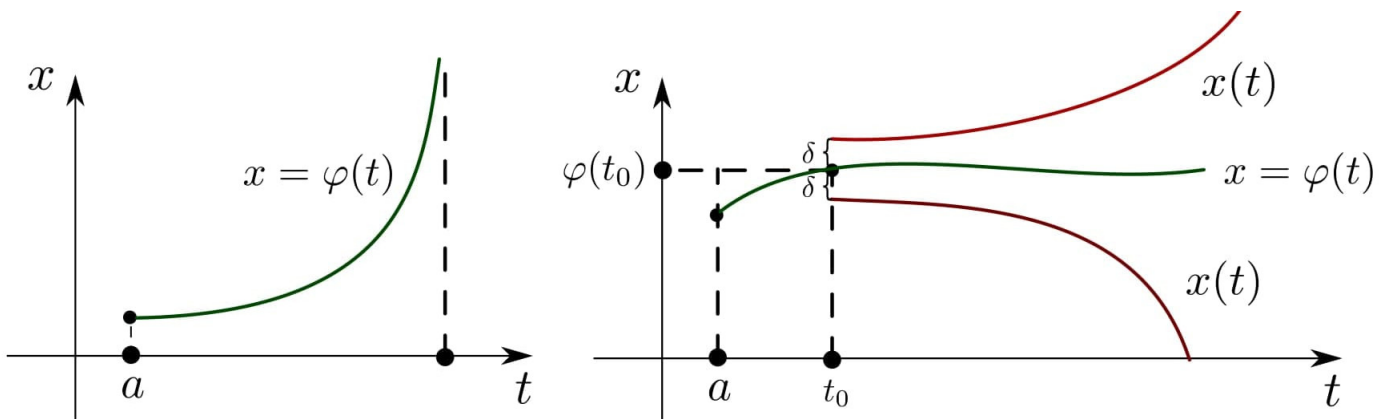
**Означення.** Розв'язок  $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$  системи (1) називається **асимптотично стійким** за Ляпуновим, якщо

- 1)  $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$  стійкий;
- 2)  $\forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$  розв'язку  $\vec{x}(t)$  с-ми (1) такого, що  $\|\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)\| < \delta$  справедливо, що  $\|\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .



Розв'язок  $\vec{\varphi}(t)$  називається **нестійким** за Ляпуновим, якщо він не є стійким, тобто:

- 1) Або  $\bar{x} = \bar{\varphi}(t) \nexists$  на  $[a, +\infty]$  (вертикальні асимптоти);
- 2) Або  $\exists \varepsilon > 0 : \exists t_0 \geq a : \forall \delta > 0$  існує розв'язок  $\vec{x}(t)$  системи (1) такий, що  $\|\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)\| < \delta$ , але  $\|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\| > \varepsilon$



### 1.3. Приклади дослідження на стійкість за означенням.

**Приклад.** Дослідити на стійкість розв'язок З.К.:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Знайдемо розв'язок заданої З.К.:  $x = 1 \Rightarrow x = t + C$  - заг. розв.

Підставимо:  $0 = 0 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$  - будемо досліджувати.

Зазначений розв'язок не має вертикальних асимптот та існує на всьому  $\mathbb{R}$ . 2.

Знайдемо розв'язок довільної З.К.  $x(t_0) = x_0$ .

$$x_0 = t_0 + C \Rightarrow C = x_0 - t_0 \Rightarrow x(t) = t + x_0 - t_0$$

3. Нехай  $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$  ;

Тоді  $|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - t_0| < \varepsilon = \delta$ .

Таким чином, розв'язок є стійким, але не є асимптотично стійким.

**Приклад.** Дослідити на стійкість розв'язок З.К.:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + t - x \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Знайдемо розв'язок даної задачі Коші:

$$\dot{x} = -x + 1 + t = | \text{методом Бернуллі} | = t + Ae^{-t}$$

Знайшли загальний розв'язок. Підставимо умову із з. К.:  $A = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$

2. Знайдемо розв'язок довільної З.К.:

$$x(t_0) = x_0 \quad x_0 = t_0 + Ae^{-t_0} \quad A = (x_0 - t_0)e^{t_0}$$

$$x(t) = t + (x_0 - t_0)e^{t_0-t} - \text{загальний розв'язок з. К.}$$

3. Нехай  $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$ . Розглядаємо:  $\forall t \geq t_0$  :

$$|x(t) - \varphi(t)| = |t + (x_0 - t_0) \cdot e^{t_0-t} - t| = |x_0 - t_0| < \delta \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$$

Отримали, що знайдений розв'язок є асимптотично стійким.

Перейдемо знов до систем диф. рівнянь:  $\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})$  (1).

$\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$  - розв'язок, який ми маємо дослідити на стійкість.

Заміна  $\bar{z}(t) = \bar{x}(t) - \bar{\varphi}(t)$ . Отримаємо систему:

$$\bar{z}' + \bar{\varphi}' = \bar{f}(t, \bar{z} + \bar{\varphi})(t)$$

$$\bar{f}'(t) = \bar{f}(t, \bar{\varphi}) \implies \boxed{\bar{z}' = \bar{\varphi}(t, \bar{z} + \bar{\varphi}(t)) - \bar{f}(t, \varphi(t))}$$

## 1.4. Стійкість розв'язків лінійних систем

Лінійна неоднорідна система рівнянь має вигляд (далі ЛНС):

$$\bar{x}' = A(t)\bar{x} + \bar{f}(t), \text{ де} \quad (2)$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A(t) \in C[a, +\infty]$ ,  $\bar{f} \in C[a, +\infty]$  Застосуємо заміну:  $\bar{z}(t) = \bar{x} - \bar{\varphi}(t)$ ,

де

$\bar{z}(t)$  - нова невідома вектор-функція, а  $\bar{\varphi}(t)$  - розв'язок, який ми маємо дослід-



дити на стійкість.

Отримали лінійну однорідну систему першого порядку (далі ЛОС):

$$\begin{aligned}\bar{z}' + \bar{\varphi} &= A(t)\bar{z} + A(t)\bar{\varphi} + \bar{f}(t) \\ \bar{z}' &= A(t)\bar{z}\end{aligned}\tag{3}$$

Заміною ми звели дослідження довільного розв'язку лінійної неоднорідної системи до дослідження нульового розв'язку відповідної ЛОС. Таким чином, приходимо до висновку, що усі розв'язки є одночасно стійкими або не стійкими, або асимптотично стійкими. А отже, розглядаючи будь-яку лінійну систему, можемо говорити про стійкість не окремого розв'язку, а системи в цілому.

Розв'яжемо ЛОС (3) (перейдемо для зручності до змінної  $x$ ):  $\bar{x}' = A(t)\bar{x}$  - ЛОС (3).

$X(t)$  - її фундаментальна матриця (далі ФМ). Тоді з.р:  $\bar{x}(t) = X(t) \cdot \bar{C}$ , де  $\bar{C} \in \mathbb{R}^n$ . Розв'язок з. К. з початковими умовами  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ :

$$\bar{x}_0 = X(t_0) \cdot C \Rightarrow \bar{C} = X^{-1}(t_0) \cdot \bar{x}_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\bar{x}_0}$$

**Теорема 1.4** (Про стійкість ЛОС).

а) (3) - ст.  $\iff \exists K > 0 : \sup_{t \geq a} \|X(t)\| \leq K$ .

б) (3) - ас. ст.  $\iff \|X(t)\| \rightarrow 0$ , при  $t \rightarrow +\infty$ .

в) (3) - нест.  $\iff \exists \{t_n\}_{n=1}^{\infty} : \|X(t_n)\| \rightarrow +\infty$ , при  $n \rightarrow \infty$

*Доведення.* а)  $\boxed{\Leftarrow}$  Нехай  $\exists K > 0 : \sup_{t \geq a} \|X(t)\| \leq K$ .

Доведемо стійкість розв'язку  $\bar{x}(t) = \vec{0}$ .

За означенням, візьмемо розв'язок довільної задачі Коші з початковими умовами  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ .

Нехай  $\|\bar{x}_0\| < \delta$  і розглянемо  $\|\bar{x}(t)\| = \|X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot \bar{x}_0\| \leq \|X(t)\| \cdot \|X^{-1}(t_0)\| \cdot \|\bar{x}_0\| \leq K \cdot \|X^{-1}(t_0)\| \cdot \|\bar{x}_0\| < K\|X^{-1}(t_0)\|\delta < \varepsilon$  при  $\delta = \frac{\varepsilon}{K\|X^{-1}(t_0)\| + 1}$ .

Отже,  $\forall t_0 \geq a \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left( \delta = \frac{\varepsilon}{K\|X^{-1}(t_0)\| + 1} \right)$  для довільного розв'язку з  $\|\bar{x}_0\| < \delta$  справедливо  $\|\bar{x}(t)\| < \varepsilon \implies$  стійкість розв'язку (системи).

$\boxed{\implies}$  Нехай (3) - стійка. Припустимо від супротивного, що  $\exists \{t_n\}_{n \geq 1}^\infty : \|X(t_n)\| \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Тоді  $\exists j = \overline{1, n} : \|\bar{x}^j(t_n)\| \rightarrow \infty$ , де  $\bar{x}^j$  - це  $j$ -тий стовпчик ФМ.

Покладемо  $\forall \delta > 0$  :

$$\bar{x}_0^\delta = \frac{\delta X(t_0) \bar{e}_j}{2\|X(t_0)\|}, \text{ де } \bar{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - j$$

Тоді  $\|\bar{x}_0^\delta\| = \frac{1}{2\|X(t_0)\|} \cdot \delta \|X(t_0) \cdot \bar{e}_j\| < \delta$ .

Розглядаємо розв'язок з.К. з початковими умовами  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0^\delta$ . Маємо:

$$\bar{x}(t) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot \bar{x}_0^\delta = X(t) X^{-1}(t_0) \cdot \frac{\delta X(t_0) \bar{e}_j}{2\|X(t_0)\|} = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{X(t) \bar{e}_j}{\|X(t_0)\|} = \frac{\delta}{2\|X(t_0)\|} \cdot \bar{x}^j(t)$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \forall n \geq n_0$$

$$\|\bar{x}(t_n)\| = \frac{\delta}{2\|X(t_0)\|} \cdot \|\bar{x}^j(t_n)\| \rightarrow \infty > \varepsilon -$$

З попереднього випливає нестійкість  $\Rightarrow$  суперечність початковій побудові  $\Rightarrow$  а).

Пункт б) доводиться аналогічно а).

Пункт в) випливає із пункта а). ■

## 1.5. Стійкість ЛОС зі сталою матрицею.

$$\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t), \text{ де } A - \text{ стала матриця } n \times n \quad (4)$$

**Теорема 1.5.**