КА-96 Терещенко Д.
РР#3 Вариант - 26

1.26 $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \quad y = 0 \quad x = 2 \quad x = 1$

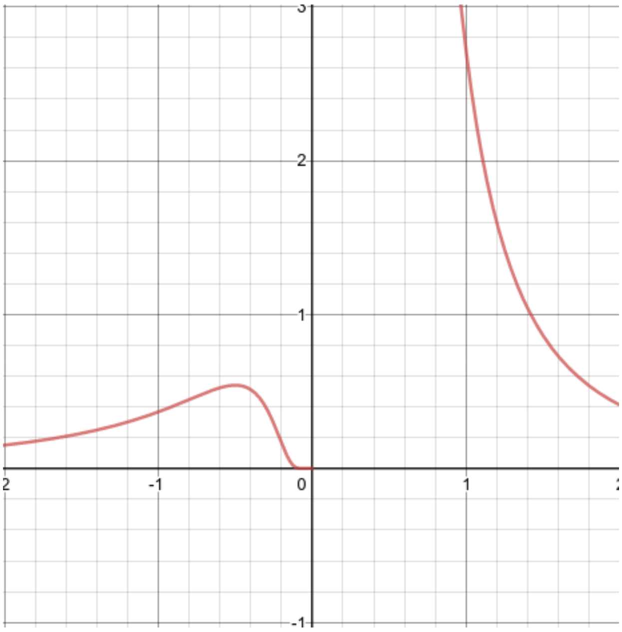
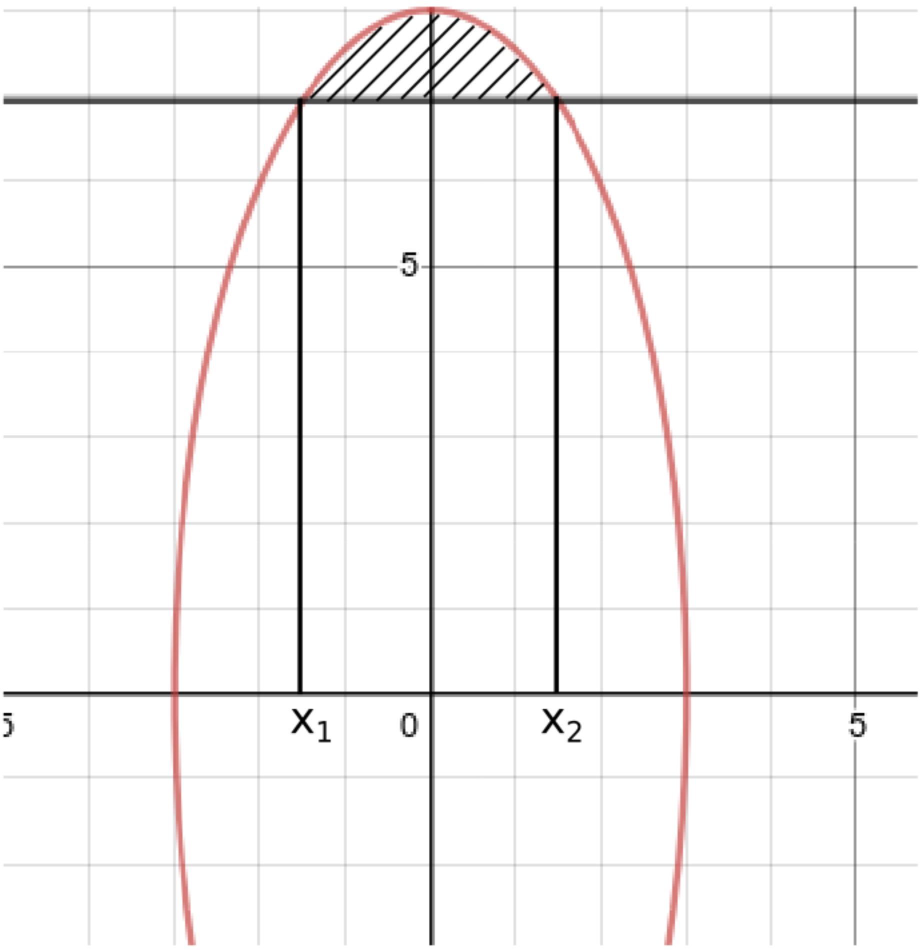


Рис. 1. $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

$$S = \int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \begin{vmatrix} t = \dfrac{1}{x} & t(2) = \dfrac{1}{2} \\ dt = -\dfrac{1}{x^2} & t(1) = 1 \end{vmatrix} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} e^t dt = e^t \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = e - \sqrt{e}$$

2.26 Параметрически заданная функция:

$$\begin{cases} x = 3\cos(t); \\ y = 8\sin(t); \end{cases} \qquad y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3})$$



$$S_\varphi = S_y - 4\sqrt{3}(x_2 - x_1) = \begin{vmatrix} x_1 = x(t_1); x_2 = x(t_2) \\ t_2 = \dfrac{\pi}{3}; t_1 = \dfrac{2\pi}{3} \\ x_2 = 1,5; x_1 = -1,5 \end{vmatrix} = S_y - 12\sqrt{3}$$

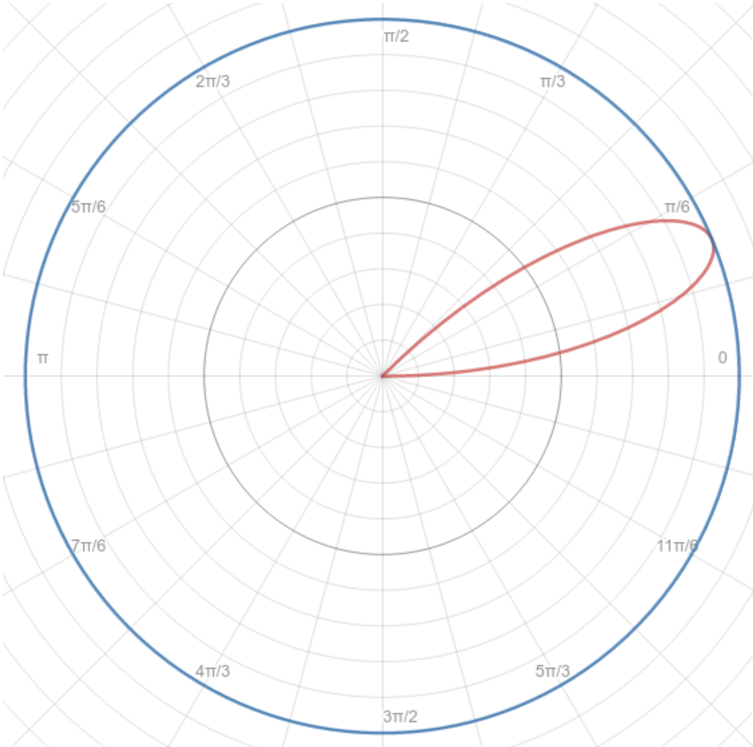
$$S_y = \int\limits_{x_1}^{x_2} y(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = -24\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(t)dt = 12\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2pi}{3}} 1 - \cos(2t)dt$$

$$S_y = \left(t - \frac{\sin^2(2t)}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = 4\pi + 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_\varphi = S_y - 12\sqrt{3} = \mathbf{4}\pi - \mathbf{6\sqrt{3}}$$

3.26

$$r = 2\sin(4\varphi) \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$$



$$S_\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2(4\varphi)d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(8\varphi)d\varphi$$

$$S_\varphi = \left(1 - \frac{\sin(8\varphi)}{8}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\mathbf{4}}$$

4.26

$$y = e^x + 26 \quad \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}$$

График $y(x)$ - экспонента, "поднятая" на 26 едениц вверх.

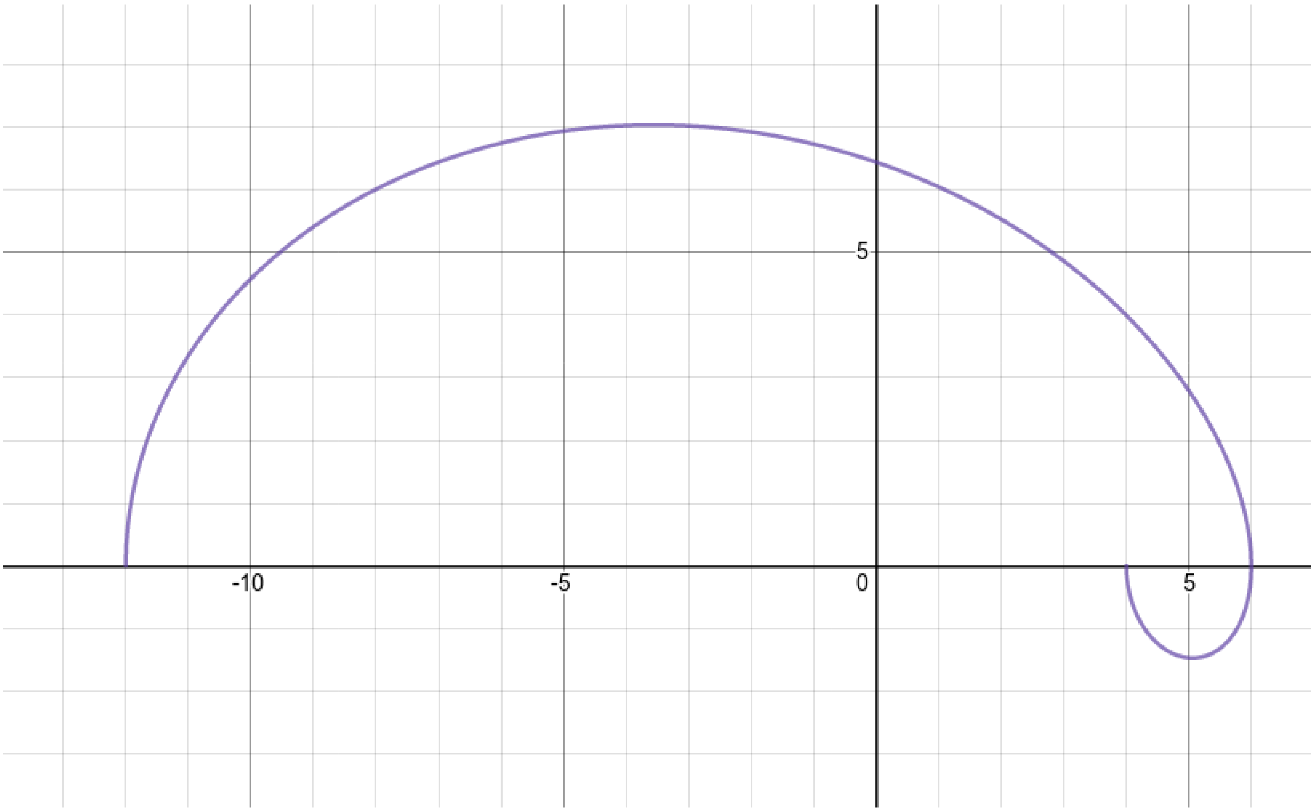
Так как мы ищем длинну дуги графика функции, стандартные геометрические превращения не влияют на результат. Поэтому l_y - длинна дуги заданной функции будет: $l_y = l_{e^x}$. Таким образом, получим:

$$l_y = \int\limits_{\ln\sqrt{8}}^{\ln\sqrt{24}} \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx = \int\limits_{\ln\sqrt{8}}^{\ln\sqrt{24}} \sqrt{1 + e^{2x}}dx = \begin{vmatrix} 1 + e^{2x} = t^2 & t = \sqrt{1 + e^{2x}} \\ 2x = \ln(t^2 - 1) & t_1 = \sqrt{9} = 3 \\ dx = \dfrac{t}{t^2 - 1}dt & t_2 = \sqrt{25} = 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_3^5 \frac{t^2}{t^2 - 1}dt = \int\limits_3^5 1 - \frac{1}{1 - t^2}dt = \left(t - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right|\right)\Bigg|_3^5 = \mathbf{2} + \ln\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

5.26

$$\begin{cases} x = 4(2\cos(t) - \cos(2t)) \\ y = 4(2\sin(t) - \sin(2t)) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \pi$$



$$\begin{matrix} x'(t) = 8(\sin(2t) - \sin(t)) \\ y'(t) = 8(\cos(t) - \cos(2t)) \end{matrix} \Longrightarrow (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 64(2 - 2\cos t) = 256 * \sin\frac{t}{2}$$

$$l_\varphi = \int\limits_0^\pi \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 16 \int\limits_0^\pi \sin\frac{t}{2} dt = \mathbf{32}$$

6.26

$$\rho = 2\cos\varphi \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$$

$$l_\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2} d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2} d\varphi = 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$$

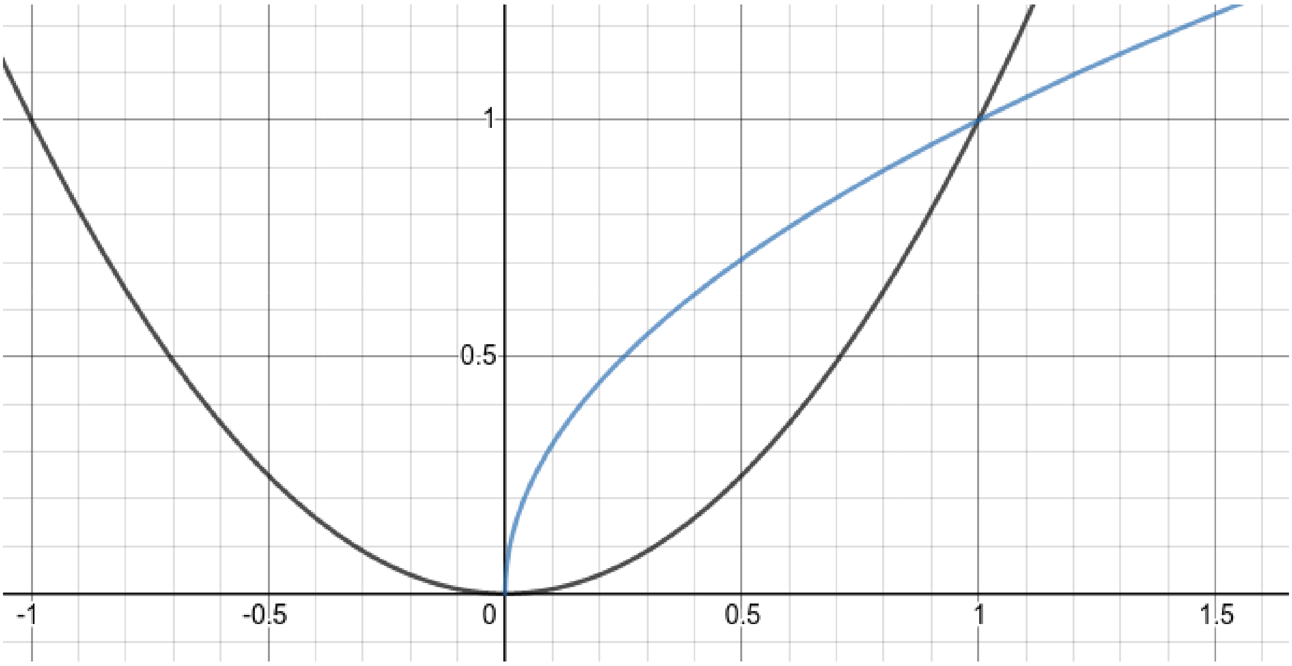
7.26

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Вращение вокруг оси OX. Пусть $\exists! x_0 : f(x_0) = g(x_0)$ Значит:

$$V = \pi \left(\int\limits_0^{x_0} g^2(x)dx - \int\limits_0^{x_0} f^2(x)dx \right) = \pi \int\limits_0^{x_0} g^2(x) - f^2(x)dx$$

Соответствующую точку x_0 найдём графически или из уравнения $x^2 = \sqrt{x}$:



$$x_0 = 1 \Longrightarrow V = \pi \int_0^1 x - x^4 dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \mathbf{0.3}\pi$$