Розрахункова робота №4
студента КА-96
Терещенка Дениса
Варіант-26

1.26 Дослідити на збіжність ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}$$

Скористаємося ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10+7n}{5*5^n+n+1}}{\frac{3+7n}{5^n+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n * n * (1+\frac{n}{5^n})(7+10/n)}{5^n * n * (5+\frac{n+1}{5^n})(7+3/n)} = \begin{vmatrix} \frac{n}{5^n} \to 0 & \frac{n+1}{5^n} \to 0 \\ 3/n \to 0 & 10/n \to 0 \end{vmatrix} =$$

$= 0.2 < 1$ - тому за ознакою Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}$ - збіжний.

2.26 Знайти область збіжності функціонального ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n + |x|^{-n}}{2}$$

Застосуємо радикальна ознака Коши для $|a_n|$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{|x|^n + |x|^{-n}}{2}\right|} = |x|$$

Тоді ряд є абсолютно збіжним за умови $|x| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$
Із зауваження до ознак Даламбера і Коші: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ - ряд є розбіжним. Розглянемо точки $x = 1, x = -1$:

$$x = -1 : \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+1}{2} - \text{розбіжний}$$

$$x = 1 : \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+1}{2} - \text{розбіжний}$$

Остаточно: $x \in (-1; 1)$ - абсолютно збіжний.
$x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$ - розбіжний.

3.26 Знайти область збіжності функціонального ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \sin^n(3x) \Rightarrow a_n = \frac{2^n}{n^4} \sin^n(3x)$$

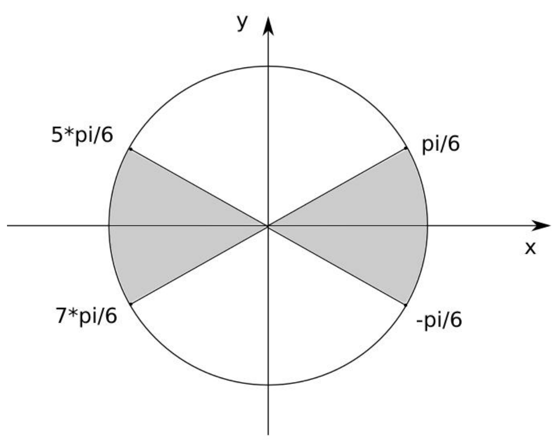
Дослідимо абсолютну збіжність(за ознакою Коші): $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n^4} \sin^n(3x)\right|} = \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n^4} \sin^n(3x)\right|} = |2\sin(3x)| \Rightarrow 2|\sin(3x)| < 1$ - ряд абсолютно збіжний.

Перевіримо у крайніх точках(де $|\sin(3x)|$):

$$\frac{2^n}{n^4} > 0 \Rightarrow |a_n| = \left|\frac{2^n}{n^4} \sin(3x)\right| = \frac{2^n}{n^4} |\sin(3x)|$$

Підставимо $|\sin(3x)| = 1/2 \Longrightarrow |a_n| = \frac{2^n}{n^4} * \frac{1}{2^n} \Longrightarrow$ Озн. порівняння в границях з еталонним $\frac{1}{n^4} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = 1 \Rightarrow$ Ряд збігається абсолютно при $\sin(3x) = \pm 1/2$.

Розв'яжемо тригонометричне рівняння: $|\sin(3x)| \leq 1/2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(3x) \leq 1/2 \\ \sin(3x) \geq -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-\pi}{6} + 2n\pi \leq 3x \leq \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi \\ \dfrac{7\pi}{6} + 2n\pi \leq 3x \leq \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-\pi}{18} + 2n\pi/3 \leq x \leq \dfrac{\pi}{18} + 2n\pi/3 \\ \dfrac{7\pi}{18} + 2n\pi/3 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{18} + 2n\pi/3 \end{array}\right.$$

Остаточно запишемо: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \sin^n(3x)$ є абсолютно збіжним при $\frac{-\pi}{18} + n\pi/3 \leq x \leq \frac{\pi}{18} + n\pi/3, n \in \mathbb{Z}$. За зауваженням до признаків Коші та Даламбера на решті проміжку $\frac{\pi}{18} + \frac{n\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{18} + \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$ ряд є розбіжним.

4.26 Для заданого функціонального ряду побудувати мажоруючий ряд та довести рівномірну збіжність на вказаному відрізку.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)(x-2)^n \qquad [1;3]$$

Використаємо признак Вейерштрасса. На заданому відрізку виконується: $|x-2| \leq 1$. Тоді:

$$|a_n| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)(x-2)^n\right| \leq \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) * 1^n \leq \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - \text{I умова озн. В.}$$

Доведемо збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{\pi}{2^n}} = 1/2 \Rightarrow$ Збіжний за озн. Коши. - 2-га умова ознаки Вейерштрасса.
Отже, за ознакою Вейерштрасса ряд є рівномірно збіжним на проміжку $[1,3]$.

5.26 Знайти суму ряду.

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} = S_1(x) - S_2(x)$$

Використаємо властивості почленного інтегрування та дифференціювання суми ряду на області збіжності.

$$S_1(x) = x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x\tilde{S}_1(x)$$

Зауважемо, що отримали суму нескінченої геом. прогресії:

$$\tilde{S_1}'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{1}{x^2} * \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\tilde{S}_1(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x) \Rightarrow S_1(x) = -x\ln 1 - x$$

$$S_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{n} \qquad S_2'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow S_2(x) = \int\limits_0^x \frac{x}{1-x}dx = -\ln(1-x) - x$$

Таким чином, отримали: $S(x) = x + \ln(1-x) - x\ln(1-x)$.

6.26 Розкласти функцію в ряд Тейлора за степенями x.

$$f(x) = \frac{5}{6-x-x^2} = \frac{-5}{(x+3)(x-2)}$$

За методом невизначених коефіцієнтів:

$$f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3(1+\frac{x}{3})} + \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})}$$

За розкладом $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ...$
Отже, $f(x) = \frac{1}{3}(1 - x/3 + x^2/9 - x^3/27 + ... + (-1)^n * (\dfrac{x^n}{3^n}) + ...) + \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + ... + \dfrac{x^2}{2^n} + ...) =$

$$= \frac{5}{6} + \frac{5}{36}x + ... + \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)x^n + ...$$

7.26 Обчислити інтеграл з точністю до 0,001.

$$\int\limits_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$

Розкладемо: $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{9}x^6 - \frac{14}{81}x^9 + \frac{35}{243}x^{12} - ...$
За властивістю почленного інтегрування степеневого ряду, отримаємо:

$$\int\limits_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} = x\Big|_0^{0.5} - \frac{x^4}{12}\Big|_0^{0.5} + \frac{2}{63}x^7\Big|_0^{0.5} - \frac{7}{405}x^{10}\Big|_0^{0.5} + \frac{35}{3159}x^{13}\Big|_0^{0.5} - ... =$$

$$= 0.5 - \frac{2^{-4}}{12} + \frac{2^{-6}}{63} - \frac{7}{405} * 2^{-10} + \frac{35}{3159}2^{-13} - ...$$

Цей знакопочерговий ряд задовільняє ознаки Лейбниця (знакопочерговий ряд, $a_n \geq 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) , тому з наслідку до озн. Лейбниця маємо: $|S - S_k| \leq a_{k+1}$.

Обчисливши перші члени ряду, маємо: $a_3 < 0.001 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \int\limits_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} \approx 0.5 - 0.005208 \approx 0.495$

8.26 Дослідити на збіжність ряд.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2)\ln(n)}$$

Спочатку порівняємо заданий ряд з рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{(n^2)\ln(n)}}{\frac{1}{n\ln n}} = 1 \neq 0 \neq \infty$$

А отже, за ознакою порівняння в границях обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно. Дослідимо на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$. Скористаємося інтегральною ознакою Коші:
1. $a_n = \frac{1}{n\ln n} > 0$
2. $f(x) = \frac{1}{n\ln n}, x \in [2, \infty] \quad f(n) = a_n \quad \forall n \geq 1$
3. $f(x)$ - монотонно спадає, а одже:
Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ та $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}$ збігаються або розбігаються одночасно.
Дослідимо на збіжність інтеграл:

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x\ln x} = \begin{vmatrix} t = t(x) = \ln x & t(2) = \ln 2 \\ dt = \dfrac{1}{x}dx & t(\infty) = \infty \end{vmatrix} = \int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t}$$

Інтеграл є розбіжним, оскільки показник $t = 1$. З інтегральної ознаки Коші випливає, що ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ є розбіжним, а одже і **початковий ряд розбігається** за ознакою порівняння в границях.