

ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ ТА ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

За лекціями Горбань Н.

Редактори: Терещенко Д.

Людомирський Ю.

2021

Зміст

1. Лекція 1	3
1.1. Нормальні системи диференціальних рівнянь	3
1.2. Основні поняття теорії стійкості.	5
1.3. Приклади дослідження на стійкість за означенням.	7

1. Лекція 1

1.1. Нормальні системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x'_2(t) = f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (1)$$

Системою диф. рівнянь n -го порядку в нормальній формі називається система вигляду (1), де $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $i = \overline{1, n}$.

Позначення.

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} - \text{невідома вектор-функція,} \quad \bar{f}(t, \bar{x}(t)) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}, \text{ що}$$

$D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тоді (1) : $\bar{x}'(t) = \bar{f}(t, \bar{x}(t))$.

Означення. Розв'язком системи (1) на (α, β) називається така вектор-функція $\bar{x}(t) \in C^1(\alpha, \beta)$, що:

1) $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$;

2) $\bar{x}(t)$ перетворює (1) на тотожність на інтервалі (α, β) .

Загальним розв'язком системи (1) називається n -параметрична сім'я розв'язків (1), що охоплює всі розв'язки системи.

Задача Коші. Для заданих $t_0, \bar{x}^0 \in D$ знайти такий розв'язок (1), що $\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$.

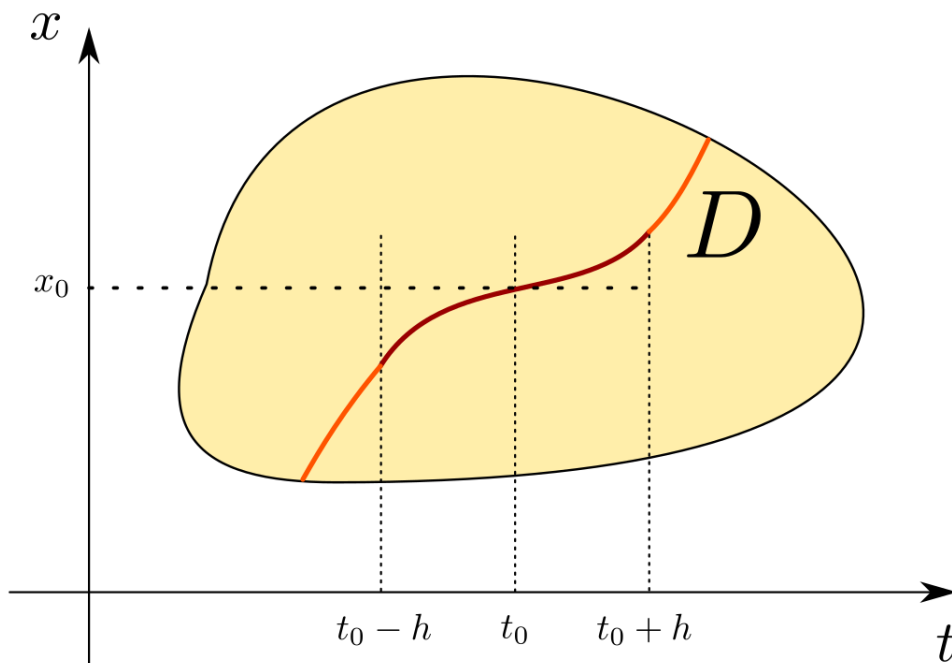
Нехай $\Pi = \{(t, \bar{x}) \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq a, \quad \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq b\}$.

Теорема 1.1 (Теорема Пеано). Нехай $\vec{f} \in C(\Pi)$. Тоді розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}) \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

існує принаймні на проміжку $I_h = (t_0 - h, t_0 + h)$, де $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$,
 $M = \max_{(t,x) \in \Pi} \|\bar{f}(t, \bar{x})\|$.

Теорема 1.2 (про продовження). Нехай для системи (1) виконується, що $\bar{f} \in C(D)$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область. Тоді $\forall t : (t_0, \bar{x}_0) \in D$ існують такі $t^-, t^+ : t^- < t_0 < t^+$, що розв'язок системи (1) з початкової умови $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ існує на інтервалі (t^-, t^+) , причому $(t^-, \bar{x}(t^-))$ та $(t^+, \bar{x}(t^+))$ належать межі області D .



Теорема 1.3 (Теорема Пікара). Нехай

- 1) $\bar{f} \in C(\Pi)$;
- 2) $\exists! L > 0 : \forall (t_1, \bar{x}_1), (t_2, \bar{x}_2) \in \Pi$ справедливо, що $\|f(t_1, \bar{x}_1) - f(t_2, \bar{x}_2)\| \leq L\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$ (умова Ліпшиця).

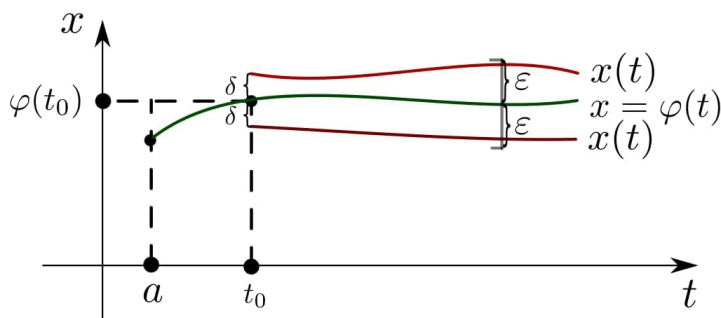
Тоді $\exists!$ розв'язок задачі Коші з початкової умови $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0(t)$, визначений принаймні на $I_h = (t_0 - h, t_0 + h)$, $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M = \max_{\Pi} \|f(t, \bar{x})\|$.

1.2. Основні поняття теорії стійкості.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь $\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})$ (1), де $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ та $D = [a, +\infty] \times G$, $G \subset \mathbb{R}^n$. Нехай при цьому \bar{f} задовольняє умовам існування та єдиності розв'язку задачі Коші в будь-якій точці $(t_0, \bar{x}_0) \in D$

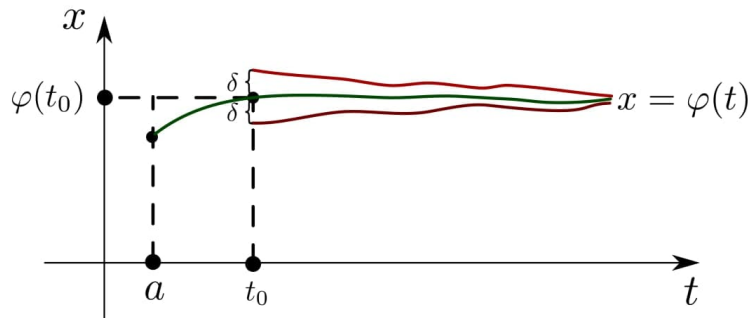
Означення. Розв'язок $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ системи (1) називається **стійким** за Ляпуновим, якщо

- 1) $\bar{x} = \bar{\varphi}(t) \quad \exists$ на $[a, +\infty]$ (відсутність вертикальних асимптот)
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$ розв'язку $\bar{x}(t)$ системи (1) такого, що $\|\bar{x}(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)\| < \delta$ виконується наступне, що $\bar{x}(t)$ існує на $[t_0, +\infty]$ та $\|\bar{x}(t) - \bar{\varphi}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$.



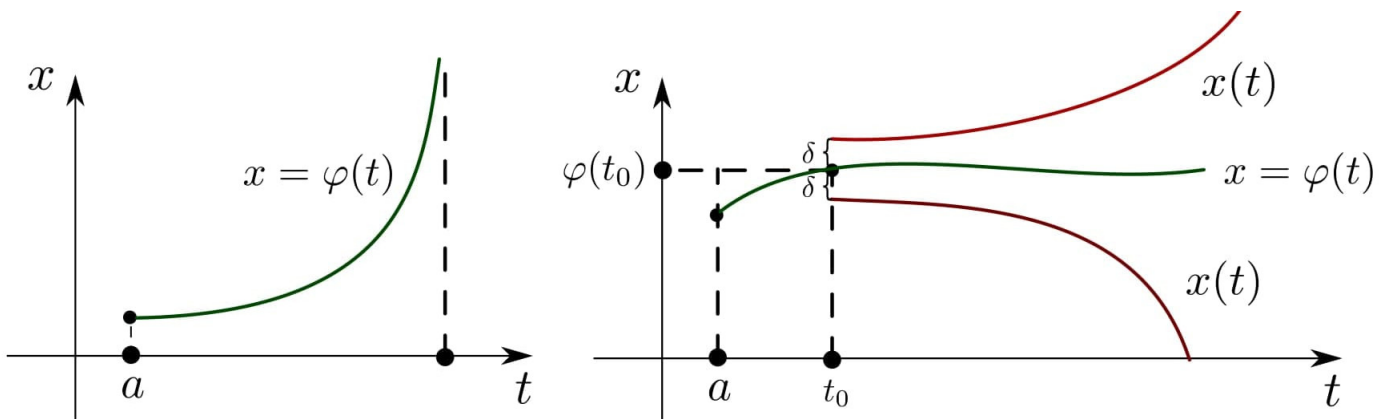
Означення. Розв'язок $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ системи (1) називається **асимптотично стійким** за Ляпуновим, якщо

- 1) $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ стійкий;
- 2) $\forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$ розв'язку $\vec{x}(t)$ с-ми (1) такого, що $\|\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)\| < \delta$ справедливо, що $\|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.



Розв'язок $\vec{\varphi}(t)$ називається **нестійким** за Ляпуновим, якщо він не є стійким, тобто:

- 1) Або $\bar{x} = \bar{\varphi}(t) \nexists$ на $[a, +\infty]$ (вертикальні асимптоти);
- 2) Або $\exists \varepsilon > 0 : \exists t_0 \geq a : \forall \delta > 0$ існує розв'язок $\vec{x}(t)$ системи (1) такий, що $\|\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)\| < \delta$, але $\|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\| > \varepsilon$



1.3. Приклади дослідження на стійкість за означенням.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} x' = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Знайдемо розв'язок заданої задачі Коші: $x' = 1 \Rightarrow x = t + C$ - загальний розв'язок. Підставимо: $x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$ - розв'язок, який будемо досліджувати. Зазначений розв'язок не має вертикальних асимптот та \exists на \mathbb{R} .

- 2) Знайдемо розв'язок довільної задачі Коші $x(t_0) = x_0$.

$$x_0 = t_0 + C \Rightarrow C = x_0 - t_0 \Rightarrow x(t) = t + x_0 - t_0$$

- 3) Нехай $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$, тоді $|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - t_0| < \varepsilon = \delta$.

Таким чином, розв'язок є стійким, але не є асимптотично стійким.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} x' = 1 + t - x - \text{лінійне неоднорідне рівняння першого порядку} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Знайдемо розв'язок даної задачі Коші:

$$x' = -x + 1 + t = | \text{метод Бернуллі, } x = uv | = t + Ae^{-t}$$

Знайшли загальний розв'язок. Із умови задачі Коші: $A = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$

2) Знайдемо розв'язок довільної задачі Коші:

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 = t_0 + Ae^{-t_0} \quad \Rightarrow \quad A = (x_0 - t_0)e^{t_0}$$

Отримали: $x(t) = t + (x_0 - t_0)e^{t_0-t}$ – загальний розв'язок задачі Коші

3) Беремо $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |t_0 - x_0| < \delta$ і розглянемо:

$$|x(t) - \varphi(t)| = |t - t - (x_0 - t_0)e^{t_0-t}| < \delta e^{t_0-t} \rightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow +\infty$$

Отже, $\forall t_0 \quad \exists \delta > 0$: для будь-якого розв'язку $x(t)$: $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$ справедливо, що $|x(t) - \varphi(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Отримали, що розв'язок даної задачі Коші $\varphi(t) = t$ є асимптотично стійким.

Зауваження. Очевидно, що простіше досліджувати на стійкість розв'язок типу $\varphi(t) = 0$. Нехай (1) $\vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x})$, а $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ – розв'язок, який потрібно дослідити на стійкість. Застосуємо заміну: $\vec{z} = \vec{x} - \vec{\varphi}(t)$, де \vec{z} – н. н. ф.