

Собственно, теорвер...

Зміст

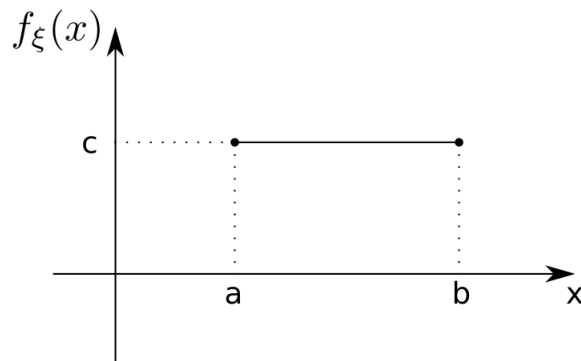
1. Абсолютно неперервні розподіли.	3
1.1. Рівномірний розподіл.	3
1.2. Експоненціальний розподіл.	4
1.3. Гаусівський (нормальний) розподіл.	6
2. Випадкові вектори	8
2.1. Властивості функції розподілу.	9
2.2. Дискретні та неперервні випадкові вектори.	11
2.2.1. Дискретні випадкові вектори.	11
2.2.2. Неперервні випадкові вектори.	11
2.2.3. Властивості щільності розподілу:	12
2.3. Рівномірний розподіл на площині.	12
2.4. Маргінальна щільність	13
2.5. Числові характеристики випадкових векторів.	14
2.6. Коваріація та її властивості.	15
2.7. Коваріаційна матриця вектора та її властивості	16
2.8. Незалежність випадкових величин	18
2.9. Умовні розподіли та умовні математичні сподівання.	19
2.9.1. Дискретний вектор.	19
2.9.2. Абсолютно неперервний вектор.	20
3. Характеристичні функції.	21
3.1. Властивості характеристичних функцій.	21
3.2. Основні "проблеми" характеристичних функцій.	23
3.3. Характеристичні функції головних ймовірнісних розподілів. . .	23
3.3.1. Дискретні розподіли.	23
3.3.2. Абсолютно неперервні розподіли.	24
3.4. Ймовірнісні розподіли, стійкі відносно додавання.	25
3.5. Характеристичні функції випадкових векторів.	26
3.5.1. Означення.	26
3.5.2. Властивості характеристичної функції випадкового вектора.	26
3.6. Гаусівські випадкові вектори.	27
3.6.1. Характеристики стандартного гаусівського розподілу. . .	27
3.6.2. Характеристика загального гаусівського розподілу. . . .	27
3.6.3. Властивості гаусівських векторів.	29
3.6.4. Гаусівський вектор на площині.	30

4. Функції від випадкових величин (векторів)	31
4.1. Функції від випадкових векторів.	32
4.2. Загальний алгоритм знаходження PDF	32
4.3. Щільності розподілу максимума, мінімуму, порядкових статистик.	35
4.3.1. Максимум.	35
4.3.2. Мінімум.	35
4.3.3. Порядкові статистики.	35
4.4. Знаходження числових характеристик функцій від випадкових величин.	37
5. Деякі додаткові ймовірнісні розподіли.	39
5.1. Гамма-розподіл.	39
5.1.1. PDF.	39
5.1.2. Числові характеристики.	39
5.1.3. Стійкість відносно додавання.	40
5.2. Chi-square distribution with n degrees of freedom.	41
5.2.1. PDF.	41
5.2.2. Числові характеристики.	42
5.3. t-розподіл Стюдента з n степенями вільності.	42
5.4. Розподіл Фішера(-Снедекора)	43
6. Граничні теореми теорії ймовірностей	44
6.1. Нерівність Чебишова.	44
6.2. Види збіжності випадкових величин	45
6.2.1. Збіжність з імовірністю 1.	45
6.2.2. Збіжність в середньому квадратичному.	45
6.2.3. Збіжність в середньому.	45
6.2.4. Збіжність за імовірністю.	46
6.2.5. Взаємозв'язок збіжностей.	46
6.2.6. Збіжність за розподілом (слабка збіжність).	47
6.2.7. Критерій середньоквадратичної збіжності до константи.	48
6.3. Закон великих чисел (ЗВЧ).	49
6.4. ЗВЧ для різнорозподілених випадкових величин.	51
6.4.1. Формулювання.	51
6.4.2. ЗВЧ для схеми Бернуллі.	51
6.4.3. Методи Монте-Карло.	52
6.5. Центральна гранична теорема та її застосування.	53
6.5.1. Формулювання.	53
6.5.2. Використання ЦГТ у схемі Бернуллі.	55
6.5.3. Локальна формула Муавра-Лапласа.	55
6.5.4. Теорема Пуассона	56
6.5.5. Наближена формула Пуассона у схемі Бернуллі.	56

1. Абсолютно неперервні розподіли.

1.1. Рівномірний розподіл.

Рівномірний розподіл на $[a, b]$. Графік функції щільності розподілу:



Позначення: $\xi \sim U(a, b)$. Функція щільності має наступний вигляд:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} c, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}, \text{ де } c = \frac{1}{b-a}$$

Визначимо функцію розподілу:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; a] \\ \int_a^x f_{\xi}(t) dt = \frac{1}{b-a}x - \frac{a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b] \\ 1, & x \in (b; +\infty) \end{cases}$$

Числові характеристики:

$$\mathbb{E}\xi = \int_a^b x f_{\xi}(x) dx = \frac{b^2-a^2}{2b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_a^b x^2 f_{\xi}(x) dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\mathbb{D}\xi = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Величини залежать лише від довжини проміжку.

Нехай $[c, d] \subset [a, b]$, тоді знайдемо:

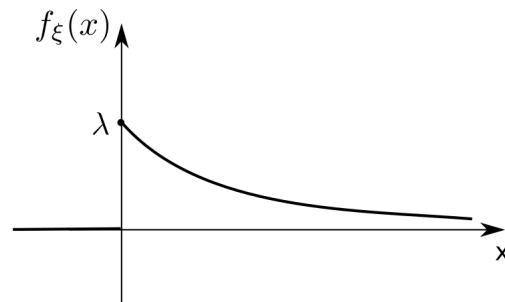
$$\mathbb{P}\{\xi \in [c, d]\} = F_{\xi}(d) - F_{\xi}(c) = \frac{d-c}{b-a}$$

1.2. Експоненціальний розподіл.

Розглядаємо $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

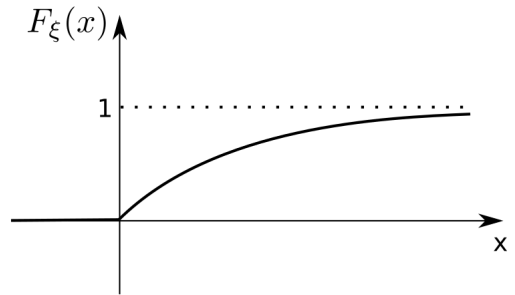
Щільність розподілу:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Запишемо функцію розподілу:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dt = 0, & x < 0 \\ F(0) + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



Знайдемо: $\mathbb{P}\{\xi \in [x, d]\} = (1 - e^{-\lambda x}) \Big|_c^d = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

Виведемо числові характеристики. Спочатку виведемо формулу $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{E}\xi^k$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k * f_{\xi}(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^k} * \Gamma(k+1) = \frac{k!}{\lambda^k}$$

Користуючись цією формулою, отримаємо числові характеристики розподілу:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi &= (k=1) = \frac{1}{\lambda} \\ \mathbb{E}\xi^2 &= (k=2) = \frac{2}{\lambda^2} \\ \mathbb{D}\xi &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Властивості Гамма-функції:

$$1. \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$2. \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$3. \Gamma(\alpha+1) = \alpha * \Gamma(\alpha)$$

$$4. \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Експоненціальна величина описує час безвідмовної роботи приладу до моменту першої відмови. Це твердження не є повністю вірним. Чому?

Властивості експоненціального розподілу.

1. Відсутність післядії.

$$\xi \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow \forall t, h > 0 \quad \mathbb{P}\{\xi > t + h | \xi > t\} = \mathbb{P}\{\xi > h\}$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi > t + h | \xi > t\} &= \frac{\mathbb{P}\{\xi > t + h, \xi > t\}}{\mathbb{P}\{\xi > t\}} = \frac{\mathbb{P}\{\xi > t + h\}}{\mathbb{P}\{\xi > t\}} = \frac{e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda\infty}}{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda\infty}} = \\ &= e^{-\lambda h} - e^{-\lambda\infty} = \mathbb{P}\{\xi > h\} \end{aligned}$$

■

2. Стійкість відносно min.

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n - \text{незалежні.} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1) \\ \xi_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2) \\ \dots \\ \xi_n \sim \text{Exp}(\lambda_n) \end{pmatrix} \Rightarrow \min\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \sim \text{Exp}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} F_{\min(\xi_1, \dots, \xi_n)}(x) &= \mathbb{P}\{\min(\xi_1, \dots, \xi_n) < x\} = 1 - \mathbb{P}\{\min(\xi_1, \dots, \xi_n) \geq x\} = \\ &= 1 - \mathbb{P}\{\xi_1 \geq x, \dots, \xi_n \geq x\} = 1 - \mathbb{P}\{\xi_1 \geq x\} \cdot \dots \cdot \mathbb{P}\{\xi_n \geq x\} = 1 - e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda_n x} = \\ &= F_{\text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}(x), \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

■

Використання: нехай є прилад, що складається з n блоків. Для коректної роботи приладу необхідно коректна робота всіх блоків.

Позначимо: ξ_i - час роботи блоку $i, i = 1, \dots, n$.

Час роботи всього приладу: $\xi = \min\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$.

Приклад. Прилад - 10 блоків. Кожний з них з ймовірністю 0.99 може пропрацювати 1000 годин. Знайти середній час роботи всього приладу та ймовірність того, що він пропрацює 500 год.

Розглянемо блок i -тий:

$$\xi_i \sim \text{Exp}(\lambda_i).$$

$$\mathbb{P}\{\xi_i \geq 1000\} = 0.99 = e^{-1000\lambda} \implies \lambda = \frac{\ln 0.99}{-1000} \approx 10^{-5}$$

$$\mathbb{E}\xi_i = \frac{1}{\lambda} = 10^5$$

Для всього приладу:

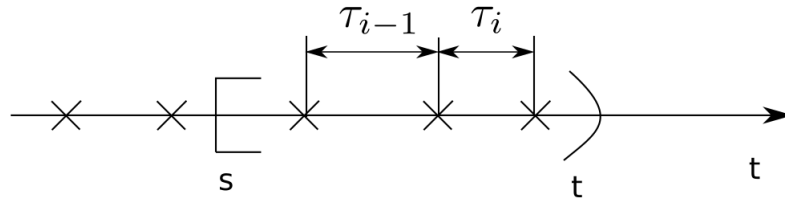
$$\xi = \min\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \sim \text{Exp}\left(\sum_{i=1}^{10} \lambda_i\right) = \text{Exp}(10^{-4})$$

$$\mathbb{E}\xi = 10^4 \quad \mathbb{P}\{\xi \geq 500\} = e^{-500 \cdot 10^{-4}} = e^{-0.005} \approx 0.95$$

3. Inter-arrival times dependency.

Теорема 1.1. Розглянемо потік Пуассона з інтенсивністю

$$\lambda \Rightarrow N(s, t) \sim Pois(\lambda(t - s))$$



τ_i — inter-arrival times. $\Rightarrow (\tau_i, i \in \mathbb{Z})$ — незалежні, та $Exp(\lambda)$.

1.3. Гаусівський (нормальний) розподіл.

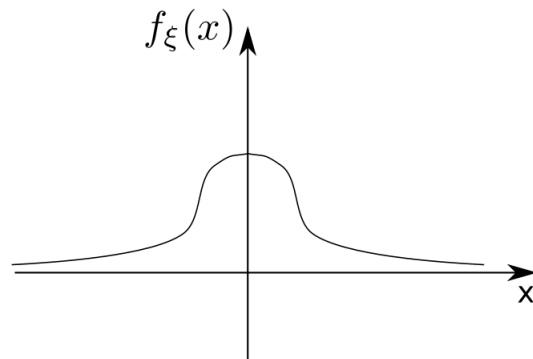
Стандартний Гаусівський розподіл. Позначення:

$$\xi \sim N(0, 1^2)$$

Щільність розподілу: $f_\xi(x) = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. З умови нормування та властивостей Гамма-функції:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = 2C \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x^2}{2} = t \\ x = \sqrt{2t} \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{2t}} \end{array} \right| = 2C \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{t}} = \\ &= \sqrt{2}C \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \sqrt{2}C \Gamma(1/2) = \sqrt{2\pi}C \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Остаточно,
щільність розподілу:
$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Знайдемо числові характеристики розподілу:

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \quad (\text{Функція щільності парна})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\xi &= \mathbb{E}\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} 2te^{-t} \frac{dt}{\sqrt{2t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{1/2} e^{-t} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(3/2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Для гаусівського розподілу: $N(a, \sigma^2)$, де $a = \mathbb{E}\xi$ $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi(x)$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функція Лапласа aka **CDF** (cumulative distr. function).

$\xi \sim N(0, 1)$. Знайдемо $\mathbb{P}\{\xi \in [b, c]\}$, $\mathbb{E}\xi^k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\{\xi \in [b, c]\} = F_{\xi}(c) - F_{\xi}(b) = \Phi(c) - \Phi(b)$$

$$k = 2n, n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}\xi^k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2/2} dx = \frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{k-1}{2}} e^{-t} dt = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{(\pi)}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{k-1}{2} \cdot \frac{k-3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(k-1)!!}{2^{\frac{k}{2}}} \cdot \sqrt{\pi} = (k-1)!!$$

$$\mathbb{E}\xi^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} (k-1)!!, & k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2n+1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Перейдемо до загального гаусівського розподілу.

Загальний гаусівський розподіл.

Означення. Візьмемо, що $\xi_0 \sim N(0, 1)$ - стандартна гаусівська величина.

ξ називається гаусівською величиною: $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, якщо $\xi = a + \sigma\xi_0$ - існує та справедливе перетворення стандартної гаусівської величини.

Числові характеристики гаусівського розподілу:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(a + \sigma\xi_0) = a$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}(a + \sigma\xi) = \sigma^2 \mathbb{D}\xi = \sigma^2$$

$$F_{\xi}(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\} = \mathbb{P}\{a + \sigma\xi < x\} = \mathbb{P}\{\xi_0 < \frac{x-a}{\sigma}\} = F_{\xi_0}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}\{\xi \in [b, c]\} = F_{\xi}(c) - F_{\xi}(b) = \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b-a}{\sigma}\right)$$

Знаючи $F_\xi(x)$ знайдемо вираз для щільності розподілу:

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E_{N(a,\sigma^2)} = \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^4}{(\mathbb{D}\xi)^2} - 3 = \left| \begin{matrix} \xi = a\sigma\xi_0 \\ \mathbb{E}\xi = a \end{matrix} \right| = \frac{\sigma^4 \mathbb{E}\xi_0^4}{\sigma^4} - 3 = \mathbb{E}\xi_0^4 - 3 = 0$$

Правило “3σ”. $\xi \sim (a, \sigma^2)$ Знайдемо: $\mathbb{P}\{|\xi - a| < 3\sigma\} = \mathbb{P}\{\xi \in (a - 3\sigma; a + 3\sigma)\} = \Phi\left(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) \approx 0.9974$

Тобто, у багатьох практичних випадках, гаусівська величина відповідає нерівності $|\xi - a| < 3\sigma$ з великою вірогідністю.

Теорема 1.2 (Центральна гранична теорема). Розглянемо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - незалежні, мають однаковий розподіл. Якщо $\mathbb{E}\xi_i = 0$ та $\mathbb{D}\xi_1 = 1$:

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 1)$$

Гаусівська випадкова величина добре описує результат дії великої кількості випадкових факторів, дія кожного з яких окремо є досить малою.

2. Випадкові вектори

Розглядаємо:

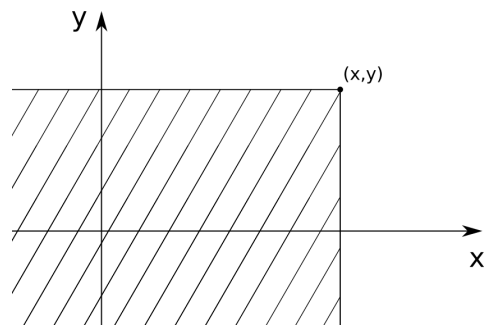
$$\vec{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

Означення. Випадковий вектор - система випадкових величин $\xi_1 \dots \xi_n$, що задані на спільному ймовірністному просторі (Ω, F, \mathbb{P}) .

Функція розподілу: $F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n\}$.

$$\vec{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$$



2.1. Властивості функції розподілу.

1. $F_{\bar{\xi}}(x, y) \in [0, 1] \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

2. $F_{\bar{\xi}}$ - неспадна для кожного аргументу. Тобто:

$$\begin{aligned} F_{\bar{\xi}}(x_1, y) &\leq F_{\bar{\xi}}(x_2, y) \text{ при } x_1 \leq x_2; \\ F_{\bar{\xi}}(x, y_1) &\leq F_{\bar{\xi}}(x, y_2) \text{ при } y_1 \leq y_2. \end{aligned}$$

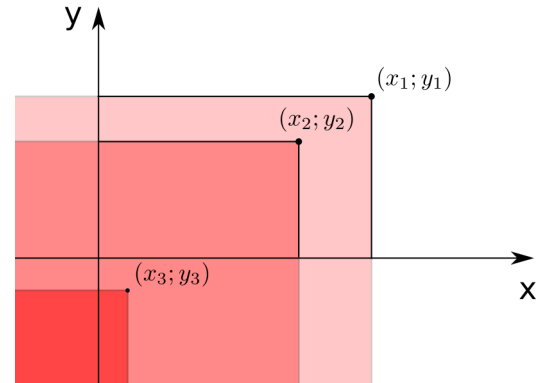
$$\mathbb{P}\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < y\} \leq \mathbb{P}\{\xi_1 < x_2, \xi_2 < y\}$$

3, $F_{\bar{\xi}}$ - неперервна зліва за кожним аргументом.

4а.

В одновимірному: В багатовимірному:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi} &= 0 & \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\bar{\xi}}(x, y) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi} &= 1 & & \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{\bar{\xi}}(x, y) = 0 \end{aligned}$$

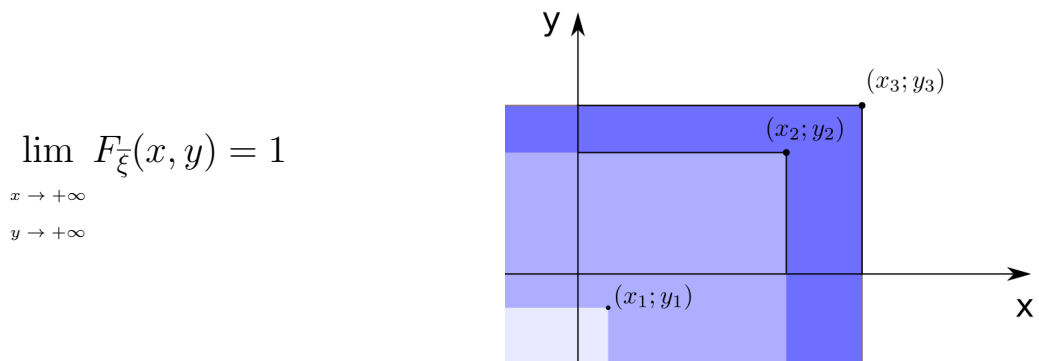


Доведення. $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\bar{\xi}}(x_n, y_n) = 0$, якщо $x_n \rightarrow \infty$ або $y_n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\bar{\xi}}(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n\} = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{n \geq 1} (\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n)\right\} = \mathbb{P}\{\emptyset\} = 0$$

■

4b.



$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F_{\bar{\xi}}(x, y) = 1$$

Доведення.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\bar{\xi}}(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{n \geq 1} (\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n)\right\} = \mathbb{P}\{\Omega\} = 1$$

■

4с.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \in \mathbb{R}}} F_{\bar{\xi}}(x, y) = \mathbb{P} \{ \xi_2 < y \} = F_{\xi_2}(y)$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ x \in \mathbb{R}}} F_{\bar{\xi}}(x, y) = \mathbb{P} \{ \xi_1 < x \} = F_{\xi_1}(x)$$

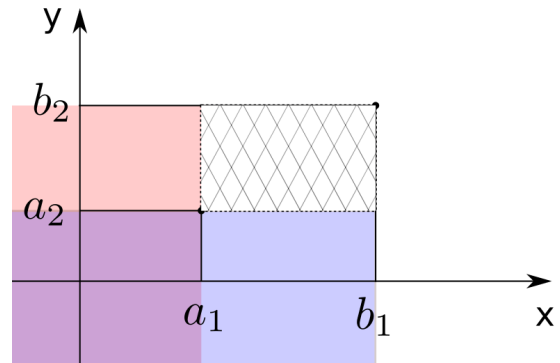
Означення. $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ $F_{\bar{\xi}}(x, y)$ – сумісна функція розподілу.

ξ_1 - випадкова величина. F_{ξ_1} - маргінальна функція розподілу ξ_1 .

Щоб отримати маргінальну функцію розподілу, потрібно відправили "зайві" аргументи до $+\infty$.

5. В одновимірному випадку:

$$\mathbb{P} \{ \xi \in [a, b) \} = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)$$

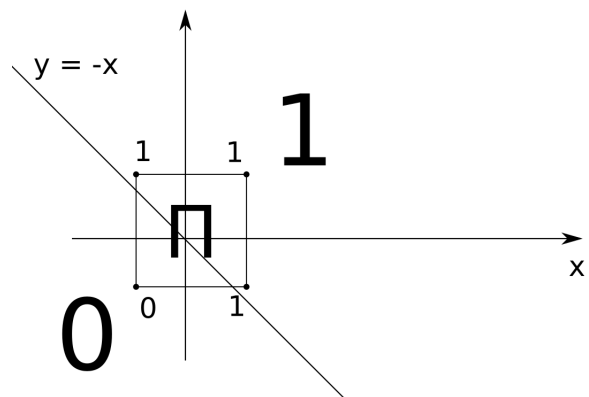


У багатовимірному випадку нас цікавить вірогідність $\mathbb{P} \{ \xi_1 \in [a_1, b_1), \xi_2 \in [a_2, b_2) \}$ (користуємося правилом знаходження приросту функції 2-ох змінних):

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{ \xi_1 \in [a_1, b_1), \xi_2 \in [a_2, b_2) \} &= \mathbb{P} \{ \bar{\xi} \in \Pi \} = \\ &= F_{\bar{\xi}}(b_1, b_2) - F_{\bar{\xi}}(b_1, a_2) - F_{\bar{\xi}}(a_1, b_2) + F_{\bar{\xi}}(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Приклад.

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 0 \\ 1, & x + y > 0 \end{cases}$$



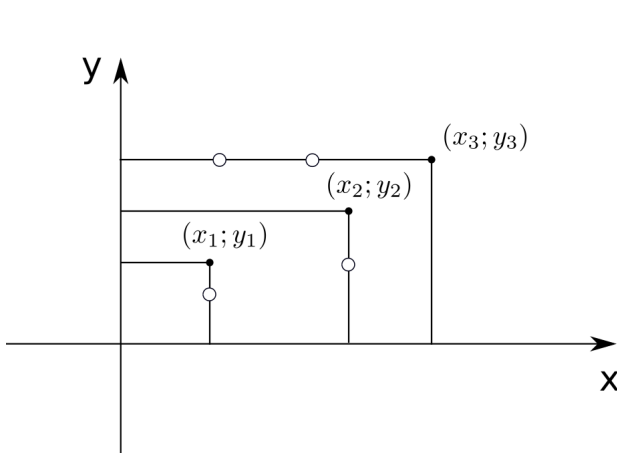
Задана функція не є функцією розподілу. Розглянемо прямокутник П.

2.2. Дискретні та неперервні випадкові вектори.

2.2.1. Дискретні випадкові вектори.

Означення. $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ називають дискретним(неперервним), якщо усі його координати - дискретні(неперервні) випадкові величини.

$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ - дискретний вектор. $p_{ij} = \mathbb{P} \{ \xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j \}$



$\xi_1 \backslash \xi_2$	y_1	\dots	y_j	\dots	y_n
x_1	p_{11}	\dots	p_{1j}	\dots	p_{1n}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_i	p_{i1}	\dots	p_{ij}	\dots	p_{in}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_m	p_{m1}	\dots	p_{mj}	\dots	p_{mn}

2.2.2. Неперервні випадкові вектори.

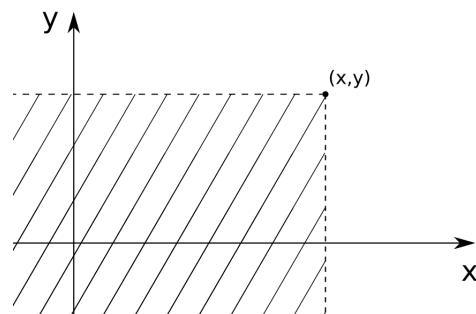
ξ - неперервна $\Leftrightarrow F_\xi$ - неп. функція $\Leftrightarrow \mathbb{P} \{ \xi = x \} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Означення. $\bar{\xi}$ - неперервний вектор, якщо $\mathbb{P} \{ \xi = \bar{x} \} = 0 \quad \forall \bar{x}$

Означення. $\bar{\xi}$ - абсолютно неперервний вектор, якщо

$$\exists f : F_\xi = \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \mathbb{P} \{ \xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n \}$$

$$F_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi_1, \xi_2}(s, t) ds dt$$



2.2.3. Властивості щільності розподілу:

1. $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi_1, \xi_2}(x, y)}{\partial x \partial y}$ - в точках, де похідна існує.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) dx dy = 1$

Доведення.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow -\infty}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) dx dy = 1$$

$$F_{\xi_1, \xi_2}(x, y) \xrightarrow{x, y \rightarrow \infty} 1$$

■

3. $\mathbb{P}\{\bar{\xi} \in B\} = \iint_B f_{\bar{\xi}} dx dy$, якщо B - квадрована множина.

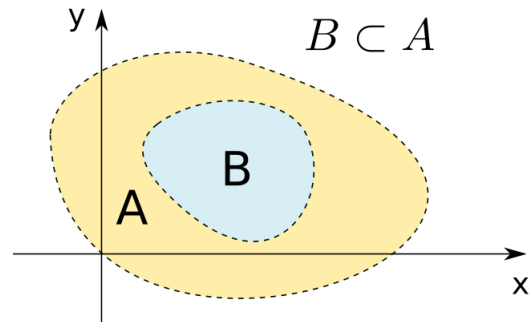
Доведення. Доведемо спочатку для прямокутників $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

$$\mathbb{P}\{\bar{\xi} \in B\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = \iint_B f_{\bar{\xi}} dx dy$$

■

2.3. Рівномірний розподіл на площині.

$$\bar{\xi} \sim U(A) \Leftrightarrow f_{\bar{\xi}} = \begin{cases} c, & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \notin A \end{cases}$$



$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy = c \cdot S(A) \Rightarrow c = \frac{1}{S(A)}$$

$$f_{\bar{\xi}} = \begin{cases} \frac{1}{S(A)}, & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \notin A \end{cases}$$

$$\mathbb{P}\{\bar{\xi} \in B\} = \iint_B f_{\bar{\xi}(x, y)} dx dy = \iint_B \frac{1}{S(A)} dx dy = \frac{S(B)}{S(A)}$$

2.4. Маргінальна щільність

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad f_{\bar{\xi}} - \text{щільність} \quad f_{\bar{\xi}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy$$

Доведення.

$$\int_C f_{\xi_1} dx = \mathbb{P} \{ \xi_1 \in C \} = \mathbb{P} \{ (\xi_1, \xi_2) \in C \times \mathbb{R} \} = \int_C \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy$$

■

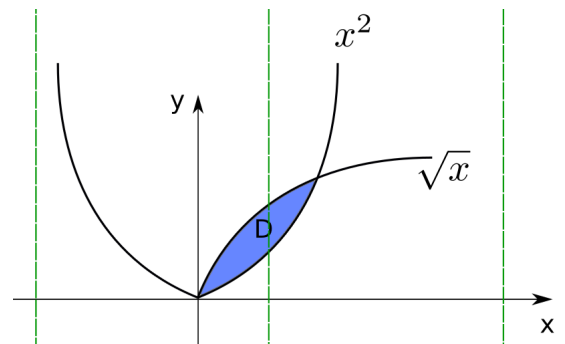
Приклад.

$$f_{\bar{\xi}}(x, y) = \begin{cases} 3, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

За умовою нормування:

$$S(D) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}} dy$$



$$1. \begin{matrix} x \in (-\infty; 0) \\ x \in (1; +\infty) \end{matrix} \quad f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy = 0$$

$$2. x \in [0, 1] \quad f_{\xi_1}(x) = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3 dy = 3(\sqrt{x} - x^2)$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ 3(\sqrt{x} - x^2), & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Перевірка: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1} dx = 3 \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = 1.$

Аналогічно для $f_{\xi_2}(y)$.

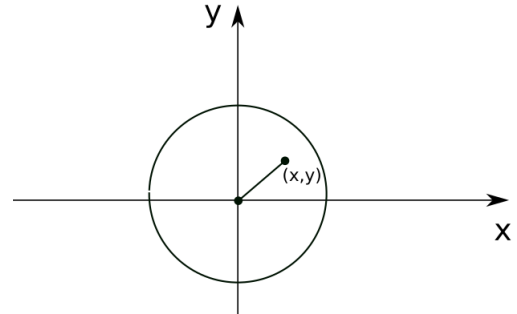
2.5. Числові характеристики випадкових векторів.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy \\ \mathbb{E}\xi_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\bar{\xi}}(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\bar{\xi}}(x, y) dy\end{aligned}$$

Таким чином, за подвійним інтегралом рахувати числові характеристики зручніше, адже ми можемо вибрати найпростіший вигляд.

Приклад. Точка розподілена в одиничному крузі, для якого $f_{\bar{\xi}}(x, y)$ пропорційна відстані до границі круга. Знайти $\mathbb{D}\xi_1, \mathbb{D}\xi_2$.

$$f_{\bar{\xi}}(x, y) = \begin{cases} (1 - \sqrt{x^2 + y^2})k, & (x, y) \in \bigcirc \\ 0, & (x, y) \notin \bigcirc \end{cases}$$



$$1 = k \iint_{\bigcirc} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - \rho) \rho d\rho = \frac{\pi k}{3} \implies k = \frac{3}{\pi}$$

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}\xi)^2 = \iint_{\bigcirc} x^2 \frac{3}{\pi} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

2.6. Коваріація та її властивості.

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad \mathbb{E}\xi_1, \mathbb{E}\xi_2, \mathbb{D}\xi_1, \mathbb{D}\xi_2$$



Маэстро, что с Вами?

Означення. Коваріація (кореляційний момент) - $cov(\xi_1, \xi_2)$.

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - \mathbb{E}\xi_1\xi_2$$

Коваріація дискретного випадкового вектора.

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} - \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i p_{ij} \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_j p_{ij} \right\}$$

Коваріація неперервного випадкового вектора.

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy \cdot f_{\bar{\xi}} dxdy - \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot f_{\bar{\xi}} dxdy \cdot \iint_{\mathbb{R}^2} y \cdot f_{\bar{\xi}} dxdy$$

Властивості коваріації.

1. $cov(\xi, \xi) = \mathbb{D}\xi$.
2. Якщо ξ_1, ξ_2 - незалежні, то $cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) = 0$

Означення. ξ_1 та ξ_2 наз. некорельованими, якщо $cov(\xi_1, \xi_2) = 0$.

3. $cov(\xi_1, \xi_2) = cov(\xi_2, \xi_1)$ (симетричність).
4. $cov(\xi, c) = 0$
5. $cov(\alpha\xi'_1 + \beta\xi''_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\alpha\xi'_1 + \beta\xi''_1 - \mathbb{E}(\alpha\xi'_1 + \beta\xi''_1))(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) = \alpha cov(\xi'_1, \xi_2) + \beta cov(\xi''_1, \xi_2)$

Отримали: Коваріація є білінійним симетричним функціоналом.

6. Якщо ξ_1, ξ_2 - незалежні, то $\mathbb{D}(\xi_1 \pm \xi_2) = \mathbb{D}\xi_1 \pm \mathbb{D}\xi_2$.
Якщо існує залежність: $\mathbb{D}(\xi_1 \pm \xi_2) = \mathbb{E}((\xi_1 \pm \xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1 \pm \xi_2))^2 = \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1) \pm (\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2))^2 = \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)^2 + (\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)^2 \pm 2(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)) = \mathbb{D}\xi_1 + \mathbb{D}\xi_2 \pm 2cov(\xi_1, \xi_2)$
7. $cov(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) - (\mathbb{E}\mathbb{I}_A)(\mathbb{E}\mathbb{I}_B) = \mathbb{P}\{A \cap B\} - \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}$
8. Нерівність Коші-Буняковського.

$$|cov(\xi_1, \xi_2)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2}$$

2.7. Коваріаційна матриця вектора та її властивості

ξ : дисперсія $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$

$\bar{\xi}$: коваріаційна матриця $C_{\bar{\xi}} = \mathbb{E}(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T$

$$C_{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) & \cdots & cov(\xi_1, \xi_n) \\ cov(\xi_2, \xi_1) & \mathbb{D}\xi_2 & \cdots & cov(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\xi_n, \xi_1) & cov(\xi_n, \xi_2) & \cdots & \mathbb{D}\xi_n \end{bmatrix}$$

1. $C_{\bar{\xi}}$ - симетрична матриця.

2. A - квадратна матриця $n \times n$, симетрична.

A - невід'ємно визначена $\Leftrightarrow (A\bar{x}, \bar{x}) \geq \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $C_{\bar{\xi}}$ - невід'ємно визначена.

$(C_{\bar{\xi}}, \bar{\xi}) = (\mathbb{E}(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})(\mathbb{E}(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T \bar{x}, \bar{x}) = \mathbb{E} ||(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T \bar{x}||^2 \geq 0$.

Застосування невід'ємної визначеності.

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad C_{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) \\ cov(\xi_1, \xi_2) & \mathbb{D}\xi_2 \end{bmatrix} - \text{невід'ємно визначена}$$

Застосуємо критерій Сільвестра:

$$\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2 - cov^2(\xi_1, \xi_2) \geq 0 \implies |cov(\xi_1, \xi_2)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2}$$

Що означає виродженість коваріаційної матриці? $\Leftrightarrow \det C_{\bar{\xi}} = 0$:

$\det C_{\bar{\xi}} = 0 \Leftrightarrow \exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n : (C_{\bar{\xi}}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow C_{\bar{\xi}} - \text{не додатня, невід'ємно визначена}$

Доведення.

$$\det C_{\bar{\xi}} = 0 \Rightarrow \text{Ker} C_{\bar{\xi}} \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow \exists \bar{x} \neq 0 : C_{\bar{\xi}} \bar{x} = 0 \Rightarrow (C_{\bar{\xi}} \bar{x}, \bar{x}) = 0$$

$$\exists \bar{x} \neq 0 : (C_{\bar{\xi}} \bar{x}, \bar{x}) = 0 \Rightarrow \exists \bar{y} \neq 0 : \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

$$(C_{\bar{\xi}} \bar{x}, \bar{x}) = 0 = (\Omega \bar{y}, \bar{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \Leftrightarrow \exists \lambda_i = 0 \Rightarrow \det C_{\bar{\xi}} = 0$$

■

Теорема 2.1. $C_{\bar{\xi}}$ є виродженою т.т.т.к між ξ_1, \dots, ξ_n є афінна залежність. Тобто:

$$\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n \xi_n = c$$

Доведення.

$$\exists \bar{x} \neq 0 : (C_{\bar{\xi}} \bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \exists \bar{\xi} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n : (\mathbb{E}(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T \cdot \bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathbb{E}(\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi}) \cdot \bar{x}, (\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi}) \cdot \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E} \left\| (\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T \bar{x} \right\|^2 = 0 \Leftrightarrow \left\| (\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T \bar{x} \right\|^2 = 0 \quad \text{м.н.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\bar{\xi} - \mathbb{E}\bar{\xi})^T \bar{x} = 0 \Leftrightarrow (\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)x_1 + \dots + (\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)x_n = 0 \Leftrightarrow$$

$\exists x_1, \dots, x_n$ не всі з яких дорівнюють нулю:

$$\Leftrightarrow x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_n\xi_n = x_1\mathbb{E}\xi_1 + \dots + x_n\mathbb{E}\xi_n = c \Leftrightarrow$$

Візьмемо $x_i = \lambda_i$: $\lambda_1\xi_1 + \dots + \lambda_n\xi_n = c \Leftrightarrow$ афінна залежність. ■

Розглянемо $cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)$.

Застосуємо нерівність Коші-Буняковського: $|cov(\xi, \eta)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}$

$$r_{\xi, \eta} = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}} - \text{коефіцієнт кореляції між } \xi \text{ та } \eta.$$

$$-1 \leq r_{\xi, \eta} \leq 1$$

Коефіцієнт показує "силу" лінійної залежності між ξ та η .

$$r_{\xi, \eta} = 0 \Leftrightarrow cov(\xi, \eta) = 0 \Leftrightarrow \xi \text{ та } \eta - \text{некорельовані.}$$

$$r_{\xi, \eta} = \pm 1 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi & cov(\xi, \eta) \\ cov(\xi, \eta) & \mathbb{D}\eta \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det C_{\xi, \eta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta - cov(\xi, \eta)^2 = 0 \Leftrightarrow |r_{\xi, \eta}| = 1$$

Теорема 2.2. $r_{\xi, \eta} = \pm 1$ т.т.т.к. $\eta = k\xi + b$, де $k, b \in R$

При цьому $r_{\xi, \eta} + 1 \Rightarrow k > 0$
 $r_{\xi, \eta} - 1 \Rightarrow k < 0$

Доведення.

$$r_{\xi, \eta} = \frac{cov(\xi, k\xi + b)}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}(k\xi + b)} = \frac{k\mathbb{D}\xi}{\sqrt{k^2 \cdot \mathbb{D}^2\xi}} = \frac{k}{|k|} = \begin{cases} 1, k > 0 \\ -1, k < 0 \end{cases}$$

■

2.8. Незалежність випадкових величин

Означення. Випадкові величини ξ, η називають незалежними, якщо події $\{\xi \in [a, b]\}, \{\eta \in [a, b]\}$ є незалежними $\forall a \leq b, c \leq d$

Зокрема, якщо ξ, η - дискретні:

$$\begin{array}{ll} \xi \in \{x_1, \dots, x_n\} & \{\xi = x_i\} \perp \{\eta = y_j\} \quad \forall i = \overline{1, m} \\ \eta \in \{y_1, \dots, y_n\} & \forall j = \overline{1, n} \end{array}$$

Теорема 2.3. ξ, η - незалежні $\Leftrightarrow F_{\xi, \eta} = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)$

Доведення. Нехай ξ, η - незалежні $\Leftrightarrow \forall a \leq b, c \leq d : \mathbb{P}\{\xi \in [a, b], \eta \in [c, d]\} = \mathbb{P}\{\xi \in [a, b]\} \cdot \mathbb{P}\{\eta \in [c, d]\} \Rightarrow \mathbb{P}\{\xi \in [a, b), \eta \in [c, d]\} = \mathbb{P}\{\xi \in [a, b)\} \cdot \mathbb{P}\{\eta \in [c, d]\}$
 $\mathbb{P}\{\xi < b, \eta < d\} = \mathbb{P}\{\xi < b\} \cdot \mathbb{P}\{\eta < d\} \Leftrightarrow F_{\xi, \eta}(b, d) = F_{\xi}(b) \cdot F_{\eta}(d)$

Нехай навпаки: $F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi \in [a, b), \eta \in [c, d]\} &= F_{\xi, \eta}(d, b) - F_{\xi, \eta}(b, c) - F_{\xi, \eta}(a, d) + F_{\xi, \eta}(a, c) = \\ &= F_{\xi}(b)F_{\eta}(d) - F_{\xi}(b)F_{\eta}(c) - F_{\xi}(a)F_{\eta}(d) + F_{\xi}(a)F_{\eta}(c) = \\ &= (F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a))(F_{\eta}(d) - F_{\eta}(c)) = \mathbb{P}\{\xi \in [a, b)\} \cdot \mathbb{P}\{\eta \in [c, d)\} \end{aligned}$$

■

Теорема 2.4. Для абсолютно неперервного вектора $[\xi \quad \eta]^T$

$$\xi \perp \eta \Leftrightarrow f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x)f_{\eta}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Доведення.

1. $F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y) \Rightarrow f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y) \Rightarrow F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)$

2.

$$\begin{aligned} F_{\xi, \eta}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi, \eta}(s, t) ds dt = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi}(s) \cdot f_{\eta}(t) ds dt = \\ &= \int_{-\infty}^x f_{\xi}(s) ds \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\eta}(t) dt = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y) \end{aligned}$$

1.

$$f_{\xi, \eta}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)) = \frac{\partial}{\partial x}(F_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y)) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y)$$

■

2.9. Умовні розподіли та умовні математичні сподівання.

2.9.1. Дискретний вектор.

$\xi_1 \backslash \xi_2$	y_1	\dots	y_j	\dots	y_n
x_1	p_{11}	\dots	p_{1j}	\dots	p_{1n}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_i	p_{i1}	\dots	p_{ij}	\dots	p_{in}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_m	p_{m1}	\dots	p_{mj}	\dots	p_{mn}

Розподіли ξ_2 за ξ_1

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = x_i\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}}{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}}$$

$\xi_1 \backslash \xi_2$	y_1	\dots	y_j	\dots	y_n
$P\{\xi_2 \xi_1 = x_1\}$	$\frac{p_{11}}{\sum_{j=1}^n p_{1j}}$	\dots	$\frac{p_{1j}}{\sum_{j=1}^n p_{1j}}$	\dots	$\frac{p_{1n}}{\sum_{j=1}^n p_{1j}}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$P\{\xi_2 \xi_1 = x_m\}$	$\frac{p_{m1}}{\sum_{j=1}^n p_{mj}}$	\dots	$\frac{p_{mj}}{\sum_{j=1}^n p_{mj}}$	\dots	$\frac{p_{mn}}{\sum_{j=1}^n p_{mj}}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$P\{\xi_2 \xi_1 = x_i\}$	$\frac{p_{i1}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}}$	\dots	$\frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}}$	\dots	$\frac{p_{in}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}}$

-----> ряд розподілу ξ_2 за $\xi_1 = x_1$

-----> ряд розподілу ξ_2 за $\xi_1 = x_i$

-----> ряд розподілу ξ_2 за $\xi_1 = x_n$

$$\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x_i) = \sum_{j=1}^n y_j \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = x_i\} = \sum_{j=1}^n y_j \cdot \frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^n p_{ik}} = \frac{\sum_{j=1}^n y_j p_{ij}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}}$$

$$\mathbb{E}_{\xi_2 | \xi_1 = x_k} \begin{matrix} \xi_1 & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_m \\ \frac{\sum_{j=1}^n y_j p_{1j}}{\sum_{j=1}^n p_{1j}} & \dots & \frac{\sum_{j=1}^n y_j p_{ij}}{\sum_{j=1}^n p_{ij}} & \dots & \frac{\sum_{j=1}^n y_j p_{mj}}{\sum_{j=1}^n p_{mj}} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{ряд розподілу} \\ \mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1) \end{matrix}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k\} \begin{matrix} \sum_{j=1}^n p_{1j} & \dots & \sum_{j=1}^n p_{ij} & \dots & \sum_{j=1}^n p_{mj} \end{matrix}$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)] = \frac{\sum_{j=1}^n y_j \cdot p_{1j}}{\sum_{j=1}^n p_{1j}} \cdot \sum_{j=1}^n p_{1j} + \dots + \frac{\sum_{j=1}^n y_j \cdot p_{mj}}{\sum_{j=1}^n p_{mj}} \cdot \sum_{j=1}^n p_{mj} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_j p_{ij} = \mathbb{E}\xi_2$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)] = \mathbb{E}\xi_2$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_2)] = \mathbb{E}\xi_1$$

2.9.2. Абсолютно неперервний вектор.

$\bar{\xi} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ $f_{\bar{\xi}}(x, y)$ – сумісна щільність розподілу.

$f_{\xi_2|\xi_1}(y|x) = f_{\xi_2|\xi_1=x}(y)$ – умовна щільність другої координати за першою.

$F_{\xi_2|\xi_1=x}(y)$ – умовна функція розподілу ξ_2 за умови $\xi_1 = x$.

$$F_{\xi_2|\xi_1=x}(y) = \mathbb{P}\{\xi_2 < y | \xi_1 = x\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1=x, \xi_2 < y\}}{\mathbb{P}\{\xi_1=x\}} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} F_{\xi_2|\xi_1=x}(y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}\{\xi_2 | \xi_1 \in [x, x + \varepsilon)\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1 \in [x, x + \varepsilon), \xi_2 \in (-\infty, y)\}}{\mathbb{P}\{\xi_1 \in [x, x + \varepsilon)\}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\varepsilon} ds \int_{-\infty}^y f_{\bar{\xi}}(s, t) dt}{\int_x^{x+\varepsilon} f_{\xi_1}(s) ds} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \cdot \int_x^{x+\varepsilon} ds \int_{-\infty}^y f_{\bar{\xi}}(s, t) dt}{\varepsilon \cdot \int_x^{x+\varepsilon} f_{\xi_1}(s) ds} = \boxed{\frac{\int_{-\infty}^y f_{\bar{\xi}}(x, t) dt}{f_{\xi_1}(x)}} = F_{\xi_2|\xi_1=x}(y) \end{aligned}$$

Знаючи умовну функцію розподілу, можемо знайти умовну щільність:

$$f_{\xi_2|\xi_1=x} = F'_{\xi_2|\xi_1=x}(y) = \frac{f_{\bar{\xi}}(x, y)}{f_{\xi_1}(x)}$$

Знайдемо умовне математичне сподівання ξ_2 за ξ_1

$$\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_{\xi_2|\xi_1=x} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{f_{\bar{\xi}}(x, y)}{f_{\xi_1}(x)} dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_{\bar{\xi}}(x, y) dy}{f_{\xi_1}(x)}$$

$\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)$ – випадкова величина, яка спочатку визначає, куди попала умова (чому дорівнює $x \leftarrow \xi_1$), а далі визначає $\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x)$.

$\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)$ – набуває значення $\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x)$, коли ξ_1 набула значення x .

$$\xi_1 \longrightarrow x \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1) \longrightarrow \mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x)$$

$\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)$ є функцією від ξ_1 . Якою? $\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x)$

$$\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1) = \Psi(\xi_1), \text{ де } \Psi(x) = \mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1 = x)$$

Формула повного математичного сподівання ($?\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)] = \mathbb{E}\xi_2?$)

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1)] = \mathbb{E}\Psi(\xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) \cdot f_{\xi_1}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_{\bar{\xi}}(x, y) dy}{f_{\xi_1}(x)} \cdot f_{\xi_1}(x) dx = \mathbb{E}\xi_2$$

3. Характеристичні функції.

ξ - випадкова величина. Загальна характеристика такої величини - функція розподілу. Існує для кожної величини. Також є характеристики, такі як ряд розподілу та щільність розподілу - існують не завжди. Введемо ще одну характеристику, яка буде існувати для будь-якої випадкової величини.

Означення. Характеристична функція випадкової величини.

$$\chi_\xi(t) = \mathbb{E}(\cos(t\xi) + i \sin(t\xi)) = \mathbb{E}(e^{it\xi})$$

$$X_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

Як шукати? Дискретний випадок: $\sum_{i=1}^{n(\infty)} e^{itx_i} p_i$

Для абсолютно неперервної величини: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx$

3.1. Властивості характеристичних функцій.

ξ - випадкова величина. $\chi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx$

1. Характеристична функція є унікальною характеристикою ймовірнісного розподілу.

$$2. \chi_\xi(0) = 1 \quad \chi_\xi(0) = \mathbb{E}e^0 = 1.$$

$$3. |\chi_\xi(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$|\mathbb{E}e^{it\xi}| = |\mathbb{E} \cos(t\xi) + i \mathbb{E} \sin(t\xi)| = \sqrt{\mathbb{E} \cos^2(t\xi) + \mathbb{E} \sin^2(t\xi)} = 1$$

4. χ_ξ - неперервна за t для ξ - абсолютно неперервна випадкова величина.

$$\chi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx \quad \longleftarrow \quad \chi_\xi(t+h) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t+h)x} f_\xi(x) dx$$

$$(\chi_\xi - \text{неперервна в т. } t) \iff \lim_{h \rightarrow 0} \chi_\xi(t+h) = \chi_\xi(t)$$

Для $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t+h)x} f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx$, треба щоб $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx$ збігався

рівномірно на $t \in \mathbb{R}$. $|e^{itx} \cdot f_\xi(x)| = |f_\xi(x)| = f_\xi(x) = M(x)$ - мажорантний ряд.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = 1 < \infty$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_{\xi}(x) dx$ - збігається рівномірно за озн. Вейерштрасса.

5. $\xi_1 \perp \xi_2 \implies \chi_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \chi_{\xi_1}(t) \cdot \chi_{\xi_2}(t)$

6. Якщо $\exists \mathbb{E}\xi^n$, то $\mathbb{E}\xi^n = \frac{1}{i^n} \cdot \chi_{\xi}^{(n)}(0)$.

Доведення. В неперервному випадку.

$$\mathbb{E}\xi^n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_{\xi}(x) dx$$

$$\chi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_{\xi}(x) dx$$

$$\chi^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^n e^{itx} f_{\xi}(x) dx$$

Але потрібна рівномірна збіжність. Скористаємося озн. Вейерштрасса:

$$|(ix)^n e^{itx} f_{\xi}(x)| = |x|^n \cdot f_{\xi}(x) = M(x) :$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n \cdot f_{\xi}(x) dx < \infty$$

$$\chi^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_{\xi}(x) dx = i^n \cdot \mathbb{E}(\xi^n)$$

■

6*. Якщо існує $\exists \chi(t)^{(n)}$, то виконується попередня властивість. (n – парне.)

7. $\chi_{a\xi+b}(t) = \mathbb{E}e^{i(a\xi+b)t} = \mathbb{E}(e^{ia\xi t} \cdot e^{ibt}) = e^{ibt} \cdot \mathbb{E}e^{ai\xi t} = e^{ibt} \chi_{\xi}(at)$

8. $\chi_{-\xi}(t) = \chi_{\xi}(-t) = \mathbb{E}e^{i(-\xi)t} = \overline{\mathbb{E}e^{i\xi t}} = \overline{\chi_{\xi}(t)}$

9. Нехай випадкова величина ξ має симетричний розподіл.

$$\mathbb{P}\{\xi \in B\} = \mathbb{P}\{\xi \in -B\} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi - \text{ДВВ: Ряд розподілу симетричний відносно } 0. \\ \xi - \text{АНВВ: } f_{\xi}(x) = f_{\xi}(-x) \end{cases}$$

Тоді: $-\xi \equiv \xi \implies \overline{\chi_{\xi}(t)} = \chi_{\xi}(t) = \chi_{\xi}(-t)$.

Це означає, що $\chi_{\xi}(t)$ - парна, дійсного значення.

10. Нехай ξ не є обов'язково симетричною. Тоді $\overline{\chi_{\xi}(t)} = \chi_{-\xi}(t) = \chi_{\xi}(-t)$.

Інакше, парність $\chi_{\xi}(t)$ означає її дійснозначність.

3.2. Основні "проблеми" характеристичних функцій.

1. За функцією χ досить важко визначити, чи є вона характеристичною функцією деякої випадкової величини.
2. Якщо χ - дійсно характеристична функція деякої випадкової величини, то важко зрозуміти, чи буде ξ ДВВ або АНВВ.

Задача: Чи є функція характеристичною? Якщо є, то для якого розподілу? Основні критерії, яким має відповідати характеристична функція - це 4 властивості наведені нижче. Якщо одна з властивостей не виконується, то функція не є характеристичною. Інакше, потрібно навести конкретний розподіл, який описує задана функція.

1. $\chi(0) = 1$
2. $|\chi(t)| \leq 1$
3. Неперервна і визначена $\forall t \in \mathbb{R}$.
4. $\chi(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff \chi(-t) = \chi(t)$

3.3. Характеристичні функції головних ймовірнісних розподілів.

3.3.1. Дискретні розподіли.

З дискретними розподілами працювати легше. В загальному випадку, величина приймає невід'ємні цілі значення. Раніше вводили поняття генератрисси:

$$G_{\xi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot z^k$$

В данному розділі розглядаємо пов'язану функцію функцію:

$$\chi_{\xi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot (e^{it})^k = G_{\xi}(e^{it})$$

$$\begin{aligned} \xi \sim Bin(n, p) &\implies G_{\xi}(z) = (pz + q)^n \implies \chi_{\xi}(t) = (pe^{it} + q)^n \\ \xi \sim Geom_0(p) &\implies G_{\xi}(z) = \frac{p}{1-qz} \implies \chi_{\xi}(t) = \frac{p}{1-qe^{it}} \\ \xi \sim Geom_1(p) &\implies G_{\xi}(z) = \frac{pz}{1-qz} \implies \chi_{\xi}(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}} \\ \xi \sim Pois(\lambda) &\implies G_{\xi}(z) = e^{\lambda(z-1)} \implies \chi_{\xi}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} \end{aligned}$$

Таким чином, ми бачимо, що характеристичні функції напряму пов'язані з генератриссами. При роботі з ДВВ зручніше працювати з генератриссами, але на відміну від генератрисс, характеристична функція визначена для всіх видів випадкових величин. Перейдемо до абсолютно неперервного випадку.

3.3.2. Абсолютно неперервні розподіли.

Згадаємо: $\chi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx$

$$\xi \sim \mathbf{U}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad \chi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases} = \frac{1}{a-b} \int_a^b e^{itx} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

$$\chi_{U(-a,a)}(t) = \begin{cases} \frac{e^{ita} - e^{-ita}}{2iat}, & t \neq 0; \\ 1, & t = 0; \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sin(at)}{at}, & t \neq 0; \\ 1, & t = 0; \end{cases}$$

$$\xi \sim \mathbf{Exp}(\lambda). \quad \chi_\xi(t) = \int_0^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x} e^{itx} dx = \frac{\lambda}{it - \lambda} e^{x(it-\lambda)} \Big|_{x=0}^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Для гаусівського розподілу: спочатку розглянемо $\xi_0 \sim N(0, 1)$. Потім скористаємося властивістю $\xi = a + \sigma \xi_0$, де $\xi \sim N(a, \sigma^2)$.

$$\xi \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1}). \quad \chi_{\xi_0}(t) = \mathbb{E} e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^{-\frac{x^2}{2}} & du = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\ dv = e^{itx} dx & v = \frac{1}{it} e^{itx} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{it} \cdot e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{it} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{it} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \chi_{\xi_0}(t)$$

$$\chi'_{\xi_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i x e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \implies \chi'_{\xi_0}(t) = -t \chi_{\xi_0}(t)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -t\chi \quad \int \frac{d\chi}{\chi} = - \int t dt \quad \ln |\chi| = -\frac{t^2}{2} + C \quad \chi(t) = K \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\chi(0) = 1 = K \implies \boxed{\chi_{\xi_0}(t) = \chi_{N(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

$$\boxed{\chi_{N(a,\sigma^2)}(t) = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}$$

3.4. Ймовірнісні розподіли, стійкі відносно додавання.

Означення. Розподіл називають стійким відносно додавання, якщо сума двох незалежних випадкових величин, що мають цей розподіл (можливо, з різними параметрами), також має цей розподіл.

$Pois(\lambda)$ - стійкий розподіл. Це означає, що:

$$\mathbb{I} \begin{cases} \xi_1 \sim Pois(\lambda_1) \\ \xi_2 \sim Pois(\lambda_2) \end{cases} \implies \xi_1 + \xi_2 \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Доведемо за допомогою характеристичної функції розподілу:

$$\begin{cases} \chi_{\xi_1}(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)} \\ \chi_{\xi_2}(t) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)} \end{cases} \implies \chi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \chi_{\xi_1}(t) \cdot \chi_{\xi_2}(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$$

Остаточно: $\boxed{\xi_1 + \xi_2 \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)}$

$N(a, \sigma^2)$ - стійкий розподіл.

$$\mathbb{I} \begin{cases} \xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2) \\ \xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2) \end{cases} \quad \begin{cases} \chi_{\xi_1} = e^{ia_1t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \\ \chi_{\xi_2} = e^{ia_2t - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} \end{cases}$$

$$\chi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \chi_{\xi_1} \cdot \chi_{\xi_2}(t) = e^{i(a_1+a_2)t - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}} = \chi_{N(a_1+a_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)}(t)$$

Остаточно: $\boxed{\xi_1 + \xi_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$

Розглянемо біноміальний розподіл: $Bin(n, p)$

$$\mathbb{I} \begin{cases} \xi_1 \sim Bin(n_1, p) \\ \xi_2 \sim Bin(n_2, p) \end{cases} \quad \begin{cases} \chi_{\xi_1}(t) = (pe^{it} + q)^{n_1} \\ \chi_{\xi_2}(t) = (pe^{it} + q)^{n_2} \end{cases}$$

$$\chi_{\xi_1+\xi_2}(t) = (pe^{it} + q)^{n_1} \cdot (pe^{it} + q)^{n_2} = (pe^{it} + q)^{n_1+n_2}$$

Остаточно: $\boxed{\xi_1 + \xi_2 \sim Bin(n_1 + n_2, p)}$

Задача: знайти щільність розподілу $f_\xi(x)$ за харатеристичною функцією.

$$\begin{aligned} \chi_\xi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx - \text{перетворення Фур'є} & f &\xrightarrow{F} \chi \\ f_\xi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \chi_\xi(x) dx - \text{обернене перетворення} & \chi &\xrightarrow{F^{-1}} f \end{aligned}$$

3.5. Характеристичні функції випадкових векторів.

3.5.1. Означення.

Розглядаємо випадковий вектор $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$. Характеристична функція:

$$\chi_{\bar{\xi}}(\bar{t}) = \chi_{\bar{\xi}}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbb{E} e^{i\langle \bar{\xi}, \bar{t} \rangle} = \mathbb{E} e^{i(t_1 \xi_1 + \dots + t_n \xi_n)}$$

Для дискретного випадкового вектора $\bar{\xi}$:

$$\chi_{\bar{\xi}}(\bar{t}) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_n=1}^{m_n} e^{i(t_1 x_1^{(i_1)} + \dots + t_n x_n^{(i_n)})} \cdot \mathbb{P} \left\{ \xi_1 = x_1^{(i_1)}, \dots, \xi_n = x_n^{(i_n)} \right\}$$

Для абсолютно неперервного випадкового вектора $\bar{\xi}$:

$$\chi_{\bar{\xi}}(\bar{t}) = \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} f_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

3.5.2. Властивості характеристичної функції випадкового вектора.

1. $\chi_{\bar{\xi}}$ - унікальна характеристика випадкового вектора. Проте, за однакової характеристичної функції неможна вважати, що вектори однакові. Можна вважати, що вони мають однакові розподіли. Наведемо приклад:

$$\xi \sim U(-1, 1) \quad -\xi \sim U(-1, 1) \quad \xi \neq -\xi \quad \xi \stackrel{\circ}{=} -\xi$$

$$2. \chi_{\bar{\xi}}(\vec{0}) = 1$$

$$3. |\chi_{\bar{\xi}}(\bar{t})| \leq 1$$

$$4. \chi_{\bar{\xi}} \in C(\mathbb{R}^n)$$

$$5. \text{Якщо } \bar{\xi}_1 \perp \bar{\xi}_2 \implies \chi_{\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2}(t) = \chi_{\bar{\xi}_1}(t) \cdot \chi_{\bar{\xi}_2}(t)$$

$$6. \exists \mathbb{E} \left(\xi_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{k_n} \right) \implies \mathbb{E} \left(\xi_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{k_n} \right) = \frac{1}{i^{k_1 + \dots + k_n}} \cdot \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial t_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \partial t_n^{k_n}} \chi_{\bar{\xi}}(\vec{0})$$

$$7. \chi_{A\bar{\xi} + \bar{b}}(\bar{t}) = \mathbb{E} e^{i\langle A\bar{\xi} + \bar{b}, \bar{t} \rangle} = \mathbb{E} \left(e^{i\langle A\bar{\xi}, \bar{t} \rangle} \cdot e^{i\langle \bar{b}, \bar{t} \rangle} \right) = e^{i\langle \bar{b}, \bar{t} \rangle} \mathbb{E} e^{i\langle \bar{\xi}, A^T \bar{t} \rangle} = e^{i\langle \bar{b}, \bar{t} \rangle} \chi_{\bar{\xi}}(A^T \bar{t})$$

$$8. \text{Якщо координати вектора } \bar{\xi} \text{ - незалежні, Тоді: } \chi_{\bar{\xi}}(\bar{t}) = \mathbb{E} e^{i(t_1 \xi_1 + \dots + t_n \xi_n)} = \mathbb{E} (e^{it_1 \xi_1} \cdot \dots \cdot e^{it_n \xi_n}) = (\mathbb{E} e^{it_1 \xi_1}) \cdot \dots \cdot (\mathbb{E} e^{it_n \xi_n}) = \chi_{\xi_1}(t_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\xi_n}(t_n)$$

Якщо координати незалежні, то характеристична функція розпадається на добуток маргінальних характеристичних функцій. До речі, справедливе і обернене твердження. Звідси, отримали критерій незалежності координат.

3.6. Гаусівські випадкові вектори.

$$n = 1 \quad \xi \sim N(a, \sigma^2) \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

$$\sigma^2 = \mathbb{D}\xi \quad a = \mathbb{E}\xi \quad \chi_\xi(t) = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

3.6.1. Характеристики стандартного гаусівського розподілу.

Нехай маємо стандартний гаусівський n -вимірний випадковий вектор:

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \text{ де } \xi_1, \dots, \xi_n - \text{ незалежні } N(0, 1) \implies \bar{\xi} \sim N(\vec{0}, I).$$

$$\mathbb{E}\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}\xi_n \end{bmatrix} = \vec{0} \quad C_{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) & \cdots & cov(\xi_1, \xi_n) \\ cov(\xi_2, \xi_1) & \mathbb{D}\xi_2 & \cdots & cov(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\xi_n, \xi_1) & cov(\xi_n, \xi_2) & \cdots & \mathbb{D}\xi_n \end{bmatrix} = I^{n \times n}$$

Для одновимірної стандартної величини $\xi \sim N(0, 1)$:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x) \quad \chi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\text{Для стандартного вектора } \bar{\xi} \sim N(\vec{0}, I) \quad \bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

$$f_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdots f_{\xi_n}(x_n) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_j^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}{2}}$$

$$F_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdots F_{\xi_n}(x_n) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} + \Phi(x_j) \right)$$

$$\chi_{t_1, \dots, t_n} = \chi_{\xi_1}(t_1) \cdots \chi_{\xi_n}(t_n) = e^{-\frac{t_1^2}{2} \cdots -\frac{t_n^2}{2}} = e^{-\frac{t_1^2 + \dots + t_n^2}{2}} = e^{-\frac{\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle}{2}}$$

3.6.2. Характеристика загального гаусівського розподілу.

Якщо C - симетрична невід'ємно визначена матриця, то в неї існує квадратний корінь: така матриця A : $A^2 = C$.

Розглянемо загальний гаусівський вектор: $\bar{\xi} \sim N(\vec{0}, I)$.

$\boxed{\bar{\eta} = \bar{a} + A\bar{\xi}}$ - за означенням будемо називати гаусівським, тобто $\bar{\eta} \sim N(\bar{a}, C)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\bar{\eta} &= \mathbb{E}(\bar{a} + A\bar{\xi}) = \mathbb{E}\bar{a} + \mathbb{E}(A\bar{\xi}) = \bar{a} + A \cdot \mathbb{E}\bar{\xi} = \bar{a} \\ C_{\bar{\eta}} &= \mathbb{E}(\bar{\eta} - \mathbb{E}\bar{\eta})(\bar{\eta} - \mathbb{E}\bar{\eta})^T = \mathbb{E}(\bar{a} + A\bar{\xi} - \bar{a})(\bar{a} + A\bar{\xi} - \bar{a})^T = \\ &= \mathbb{E}(A\bar{\xi}\bar{\xi}^T A^T) = A \cdot \mathbb{E}(\bar{\xi}\bar{\xi}^T) \cdot A^T = A \cdot C_{\bar{\xi}} \cdot A^T = A \cdot I \cdot A^T = A^2 = C\end{aligned}$$

Характеристична функція загального гаусівського вектора:

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= \bar{a} + A\bar{\xi}, \text{ де } A^2 = AA^T = C, \bar{\xi} \sim N(\vec{0}, I) \\ \chi_{\bar{\eta}}(\bar{t}) &= \chi_{A\bar{\xi} + \bar{a}}(\bar{t}) = e^{i\langle \bar{a}, \bar{t} \rangle} \cdot \chi_{\bar{\xi}}(A^T \bar{t}) = e^{i\langle \bar{a}, \bar{t} \rangle} \cdot e^{-\frac{\langle A^T \bar{t}, A^T \bar{t} \rangle}{2}} = e^{i\langle \bar{a}, \bar{t} \rangle - \frac{\langle C \bar{t}, \bar{t} \rangle}{2}}\end{aligned}$$

Щільність розподілу вектора $\bar{\eta} \sim N(\bar{a}, C)$:

Лема. Щільність розподілу афінного перетворення.

Нехай маємо $\bar{\xi}$ - абсолютно неперервний випадковий вектор зі щільністю $f_{\bar{\xi}}(\bar{x})$.

Маємо його афінне перетворення: $\bar{\eta} = A\bar{\xi} + \bar{a}$ (A - невироджена матриця). Тоді, $\bar{\eta}$ - абсолютно неперервний випадковий вектор зі щільністю $f_{\bar{\eta}}(\bar{y})$:

$$f_{\bar{\eta}}(\bar{y}) = \frac{1}{|\det(A)|} f_{\bar{\xi}}(A^{-1}(\bar{y} - \bar{a}))$$

Доведення. Нехай $B \subset \mathbb{R}^n$. $\left(\text{Позначимо } n\text{-кратний інтеграл за множ. } B = \iint_B \right)$:

$$\begin{aligned}\iint_B f_{\bar{\eta}}(\bar{y}) d\bar{y} &= \mathbb{P}\{\bar{\eta} \in B\} = \mathbb{P}\{A\bar{\xi} + \bar{a} \in B\} = \mathbb{P}\{A\bar{\xi} \in B - \bar{a}\} = \\ &= \mathbb{P}\{\bar{\xi} \in A^{-1}(B - \bar{a})\} = \iint_{A^{-1}(B - \bar{a})} f_{\bar{\xi}}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} = \left| \begin{array}{l} \bar{y} = A\bar{x} + \bar{a} \\ \bar{x} = A^{-1}(\bar{y} - \bar{a}) \\ J = |\det(A^{-1})| \end{array} \right| = \\ &= \int_B f_{\bar{\xi}}(A^{-1}(\bar{y} - \bar{a})) |\det(A^{-1})| d\bar{y} = \int_B \frac{1}{|\det(A)|} f_{\bar{\xi}}(A^{-1}(\bar{y} - \bar{a})) d\bar{y}\end{aligned}$$

Інакше кажучи, інтеграли за будь-якою множиною збігаються т.т.т.к. збігаються підінтегральні функції. Приходимо до:

$$\iint_B f_{\bar{\eta}}(\bar{y}) d\bar{y} = \int_B \frac{1}{|\det(A)|} f_{\bar{\xi}}(A^{-1}(\bar{y} - \bar{a})) d\bar{y} \iff \boxed{f_{\bar{\eta}}(\bar{y}) = \frac{1}{|\det(A)|} f_{\bar{\xi}}(A^{-1}(\bar{y} - \bar{a}))}$$

■

Повернемося до щільності розподілу загального вектора:

$$\begin{aligned} f_{\bar{\eta}}(\bar{x}) &= \frac{1}{|\det A|} f_{\bar{\xi}}(A^{-1}(\bar{x} - \bar{a})) = \frac{1}{|\det A|} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\langle A^{-1}(\bar{x}-\bar{a}), A^{-1}(\bar{x}-\bar{a}) \rangle}{2}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det C}} \cdot e^{-\frac{\langle C^{-1}(\bar{x}-\bar{a}), (\bar{x}-\bar{a}) \rangle}{2}} \end{aligned}$$

Якщо C - вироджена матриця ($\det C = 0 \Leftrightarrow \nexists C^{-1}$), то щільності немає.

3.6.3. Властивості гаусівських векторів.

1. Клас гаусівських векторів замкнений відносно афінних перетворень.

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &\sim N(\bar{a}, C) \quad \bar{a} = \mathbb{E}\bar{\eta} \quad C = C_{\bar{\eta}} \\ \bar{\theta} &= D \cdot \bar{\eta} + \bar{b} \implies \bar{\theta} \sim N(D\bar{a} + \bar{b}; DC_{\bar{\eta}}D^T) \end{aligned}$$

Доведення. $\bar{\eta} = \bar{a} + A\bar{\xi}$, де $\bar{\xi}$ - загальний гаусівський вектор, $AA^T = C$.

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= D\bar{\eta} + \bar{b} = D(\bar{a} + A\bar{\xi}) + \bar{b} = DA\bar{\xi} + (D\bar{a} + \bar{b}) \\ \mathbb{E}\bar{\theta} &= D\bar{a} + \bar{b} \quad C_{\bar{\theta}} = (DA)(DA)^T = D(AA^T)D^T = DC_{\bar{\eta}}D^T \end{aligned}$$

■

2. Нехай $\bar{\xi}$ - стандартний гаусівський вектор.

$\bar{\eta} = U\bar{\xi}$, де U - ортогональна матриця ($U \cdot U^T = I$). Тоді $\bar{\eta} \sim N(\vec{0}, I)$.

$$\mathbb{E}\bar{\eta} = U \cdot \mathbb{E}\bar{\xi} = \vec{0} \quad C_{\bar{\eta}} = U \cdot C_{\bar{\xi}} \cdot U^T = UU^T = I$$

3. Розглянемо довільний гаусівський вектор $\bar{\xi} = [\xi_1 \ \cdots \ \xi_n]$:

$$\boxed{\xi_1, \dots, \xi_n \text{ - незалежні} \iff \xi_1, \dots, \xi_n \text{ - некорельовані}}$$

Тобто, для координат ГВВ незалежність еквівалентна некорельованості.

Доведення. Нехай величини ξ_1, \dots, ξ_n є некорельованими.

$$C_{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) & \cdots & cov(\xi_1, \xi_n) \\ cov(\xi_2, \xi_1) & \mathbb{D}\xi_2 & \cdots & cov(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\xi_n, \xi_1) & cov(\xi_n, \xi_2) & \cdots & \mathbb{D}\xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_{\bar{\xi}}(\bar{t}) &= e^{i\langle \bar{a}, \bar{t} \rangle - \frac{\langle C_{\bar{\xi}}^{-1} \bar{t}, \bar{t} \rangle}{2}} = e^{i(a_1 t_1 + \dots + a_n t_n) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + \dots + \sigma_n^2 t_n^2)} = \\ &= e^{\left(ia_1 t_1 - \frac{\sigma_1^2 t_1^2}{2}\right) + \left(ia_n t_n - \frac{\sigma_n^2 t_n^2}{2}\right)} = \chi_{N(a_1, \sigma_1^2)}(t_1) \cdot \dots \cdot \chi_{N(a_n, \sigma_n^2)}(t_n) \\ (\chi_{\bar{\xi}}(\bar{t}) &= \chi_{N(a_1, \sigma_1^2)}(t_1) \cdot \dots \cdot \chi_{N(a_n, \sigma_n^2)}(t_n)) \iff (\xi_1, \dots, \xi_n \text{ - незалежні.}) \end{aligned}$$

■

Наслідок 1. Якщо $\bar{\xi} = [\xi_1 \ \cdots \ \xi_n]$ - гаусівський вектор, то ξ_1, \dots, ξ_n - гаусівські величини. Візьмемо таку матрицю перетворення, що:

$$\xi_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_i \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} - \text{афінне перетворення.}$$

У гаусівському векторі всі координати - гаусівські величини, але обернений факт може бути хибним. Тобто, гаусівські величини можуть об'єднуватися в негаусівський вектор. Якщо координати гаусівські та незалежні, то вектор, складений із них, точно буде гаусівським.

3.6.4. Гаусівський вектор на площині.

$$\text{Нехай, маємо вектор } \bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2) \\ \xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2) \end{array} \quad r_{\xi_1, \xi_2} = r = \frac{\text{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}}$$

$$\chi_{\bar{\xi}}(t_1, t_2) = e^{i\langle \bar{a}, \bar{t} \rangle - \frac{1}{2} \langle C \bar{t}, \bar{t} \rangle} = e^{i(a_1 t_1 + a_2 t_2) - \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2)}$$

$$\text{Щільність розподілу: } f_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{2}} \sqrt{\det C}} e^{-\frac{1}{2} \langle C^{-1}(\bar{x} - \bar{a}), \bar{x} - \bar{a} \rangle}$$

$$\det C = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - (r\sigma_1\sigma_2)^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - r^2)$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - r^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -r\sigma_1\sigma_2 \\ -r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{r}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{r}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

$$\langle C^{-1}(\bar{x} - \bar{a}), \bar{x} - \bar{a} \rangle = \frac{1}{1 - r^2} \left(\frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2r}{\sigma_1\sigma_2} (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \right)$$

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1 - r^2)}} e^{-\frac{1}{2(1 - r^2)} \left(\frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2r}{\sigma_1\sigma_2} (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \right)}$$

Маємо такі обмеження: $(\sigma_1, \sigma_2 \neq 0, |r| \neq 1)$.

Зокрема, якщо $r = 0 \Leftrightarrow \xi_1, \xi_2$ - некорельовані:

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} \right)} = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1}{2\pi\sigma_2} e^{-\frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

— Happy End —

4. Функції від випадкових величин (векторів)

Для дискретної випадкової величини $\xi: \eta = \phi(\xi) \Rightarrow \eta$ - ДВВ.

Припустимо, що φ - неперервно диференційована. ξ - асолютно неперервна зі щільністю $f_\xi(x)$. Розглядаємо $\eta = \varphi(\xi)$:

Теорема 4.1. Нехай φ - взаємно-однозначна (бієкція на області значень), та її обернена ψ є неперервно диференційована. (Дифеоморфізм). Тоді:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} |\psi'(y)| \cdot f_\xi(\psi(y)), & y \in E_\varphi \\ 0 & y \notin E_\varphi \end{cases} = f_\xi(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)| \cdot \mathbb{I}_{E_\varphi}(y)$$

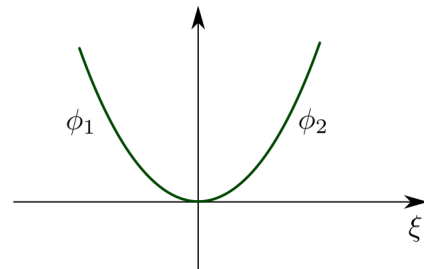
Доведення. Розглядаємо множину B .

$$\begin{aligned} \int_B f_\eta(y) dy &= \mathbb{P}\{\eta \in B\} = \mathbb{P}\{\varphi(\xi) \in B\} = \mathbb{P}\{\xi \in \phi^{-1}(B)\} = \int_{\phi^{-1}(B)} f_\xi(x) dx = \\ &= \left| \begin{matrix} \varphi(x) = y \\ x = \psi(y) \end{matrix} \right| = \int_{B \cap E_\varphi} f_\xi(\psi(y)) \cdot |J_\psi(y)| dy = \int_B f_\xi(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)| \cdot \mathbb{I}_{E_\varphi}(y) dy \end{aligned}$$

■

Теорема 4.2. Нехай ϕ не є ін'єкцією, але "розпадається" на декілька таких.

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x^2, x \in (-\infty, 0) \\ \varphi_2(x) &= x^2, x \in [0, +\infty) \\ E_{\varphi_1} &= (0, +\infty) \quad E_{\varphi_2} = (0, +\infty) \\ \psi(x) = y \quad x^2 = y \quad x &= \pm\sqrt{y} \\ \psi_1(y) &= -\sqrt{y} \quad \psi_2(y) = \sqrt{y} \end{aligned}$$



Тоді:

$$f_\eta(y) = \sum_{i=1}^n f_\xi(\psi_i(y)) \cdot |\psi'_i(y)| \cdot \mathbb{I}_{E_{\varphi_i}}(y).$$

Доведення. Розглядаємо множину B .

$$\int_B f_\eta(y) dy = \mathbb{P}\{\eta \in B\} = \mathbb{P}\{\xi \in \phi_1^{-1}(B) \cup \dots \cup \xi \in \phi_n^{-1}(B)\} = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{\xi \in \phi_i^{-1}(B)\}$$

■

4.1. Функції від випадкових векторів.

Розглядаємо $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ $\eta = \varphi(\xi_1, \xi_2)$.

1. Для дискретного випадку обчислення тривіальні.
2. $\bar{\xi}$ - абсолютно неперервний випадковий вектор.

$$f_{\bar{\xi}}(\bar{x}) \Rightarrow \eta = \varphi(\bar{\xi}) \quad f_{\eta}(y) = ? \quad \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Теорема 4.3. $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. φ - взаємно-однозначна $\Rightarrow \psi = \varphi^{-1}$.
 φ, ψ - дифеоморфізми $\Rightarrow \exists J_{\psi}(\bar{y})$ - якобіан. Тоді:

$$f_{\bar{\eta}}(\bar{y}) = f_{\bar{\xi}}(\psi(\bar{y})) \cdot |J_{\psi}(\bar{y})| \cdot \mathbb{I}_{E_{\varphi}}(\bar{y})$$

Теорема 4.4. φ розпадається на суму ін'єктивних функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_k$.
 $\varphi_i^{-1} = \psi_i$. E_i - область значень φ_i . J_{ψ_i} - якобіан ψ_i . Тоді:

$$f_{\bar{\eta}}(\bar{y}) = \sum_{i=1}^k f_{\bar{\xi}}(\psi_i(\bar{y})) \cdot |J_{\varphi_i}(\bar{y})| \cdot \mathbb{I}_{E_{\varphi_i}}(\bar{y})$$

Часто будемо використовувати: $f_{\xi_1+\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y-x) dx$.

Якщо $\xi_1 \perp \xi_2$: $f_{\xi_1+\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y-x) dx$.

Також: $f_{\xi_1+\xi_2}(y) = (f_{\xi_1}(x) \otimes f_{\xi_2}(y))$ - згортка.

4.2. Загальний алгоритм знаходження PDF

Розглядаємо $\eta = \varphi(\bar{\xi})$ $f_{\eta}(z) = ?$.

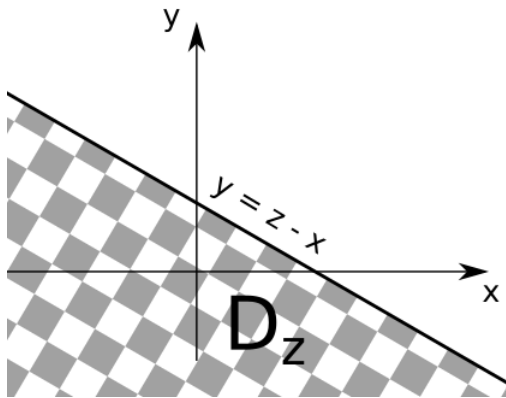
$$\begin{aligned} F_{\eta} &= \mathbb{P} \{ \eta < z \} = \mathbb{P} \{ \varphi(\xi_1, \xi_2) < z \} = \left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid \varphi(x, y) < z \right\} \right| = D_z = \\ &= \iint_{D_z} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy \Rightarrow f_{\eta}(z) = F'_{\eta}(z) \end{aligned}$$

Знайдемо щільності розподілу суми, добутку та частки випадкових величин.

$$\xi_1, \xi_2, f_{\bar{\xi}}(x, y) \Rightarrow f_{\xi_1+\xi_2}(z), f_{\xi_1 \cdot \xi_2}(x, y), f_{\xi_1/\xi_2}(x, y) - ?$$

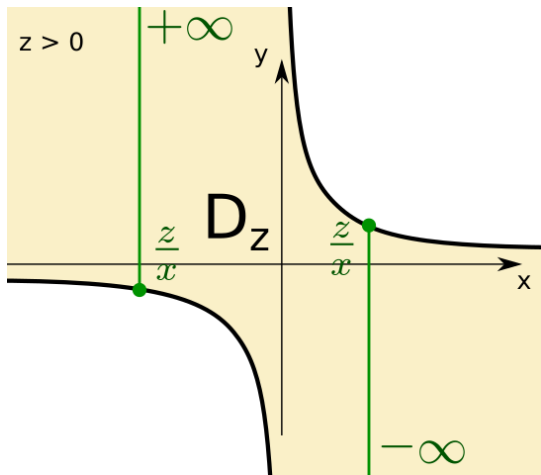
Сума: $F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \mathbb{P} \{ \xi_1 + \xi_2 < z \} = \mathbb{P} \{ \bar{\xi} \in D_z \} = \iint_{D_z} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy$$

$$f_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, z-x) dx$$


$$f_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, z-x) dx = |\xi_1 \perp \xi_2| = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(z-x) dx$$

Добуток: Шукаємо $f_{\xi_1 \cdot \xi_2}$ $F_{\xi_1 \cdot \xi_2} = \mathbb{P} \{ \xi_1 \cdot \xi_2 < z \}$.

$$x * y < z \Leftrightarrow \begin{cases} y < \frac{z}{x} \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y > \frac{z}{x} \\ x < 0 \end{cases}$$


$$F_{\xi_1 \cdot \xi_2}(z) = \iint_{D_z} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^0 dx \int_{\frac{z}{x}}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy$$

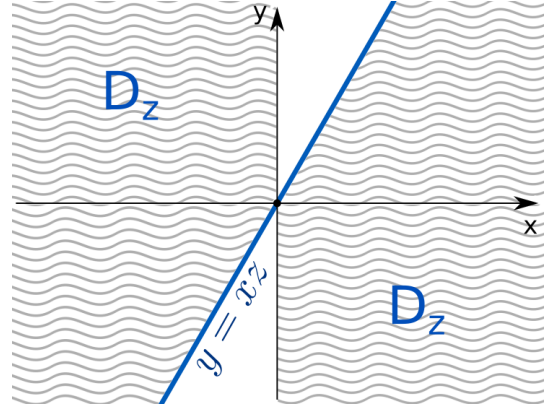
$$f_{\xi_1 \cdot \xi_2}(z) = - \int_{-\infty}^0 f_{\bar{\xi}}(x, \frac{z}{x}) \cdot \frac{1}{x} dx + \int_0^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, \frac{z}{x}) \cdot \frac{1}{x} dx$$

Відношення. Розглядаємо: $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ $f_{\bar{\xi}}(x, y)$ $\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1}$. За алгоритмом:

$$F_{\eta}(z) = \mathbb{P} \left\{ \frac{\xi_2}{\xi_1} < z \right\} = \mathbb{P} \{ \bar{\xi} \in D_z \} = \iint_{D_z} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy$$

де, $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y}{x} < z\}$ Якщо $z > 0$:

$$\frac{y}{x} < z \Leftrightarrow \begin{cases} y < xz \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y > xz \\ x < 0 \end{cases}$$



Повертаємося до інтегралу, що записано вище:

$$F_\eta(z) = \int_{-\infty}^0 dx \int_{zx}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{zx} f_{\bar{\xi}}(x, y) dy$$

$$f_\eta(z) = F'_\eta(z) = \int_{-\infty}^0 f_{\bar{\xi}}(x, zx) x dx + \int_0^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x, zx) x dx$$

Приклад. $\xi_1, \xi_2 \sim N(0, 1)$ $\xi_1 \perp \xi_2$ $\eta = \frac{\xi_2}{\xi_1}$

Величини ξ_1, ξ_2 розподілені нормально: $f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = f_{\xi_2}(x)$.

$$\begin{aligned} f_\eta(z) &= - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2 x^2}{2}} x dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2 x^2}{2}} x dx = \\ &= - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} \underbrace{xdx}_{=d(\frac{x^2}{2})} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} \underbrace{xdx}_{=d(\frac{x^2}{2})} = \\ &= - \frac{1}{2\pi(1+z^2)} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} d\left(\frac{x^2}{2}(1+z^2)\right) + \frac{1}{2\pi(1+z^2)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} d\left(\frac{x^2}{2}(1+z^2)\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi(1+z^2)} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} \Big|_{x=-\infty}^0 - \frac{1}{2\pi(1+z^2)} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} \Big|_{x=0}^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{2\pi(1+z^2)} + \frac{1}{2\pi(1+z^2)} = \frac{1}{\pi(1+z^2)}, z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Отримали, що: $\frac{N(0, 1)}{N(0, 1)} \sim \text{Cauchy Distribution}$

4.3. Щільності розподілу максимуму, мінімуму, порядкових статистик.

4.3.1. Максимум.

Розглянемо максимум з деяких незалежних випадкових величин: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

$$M = \max \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$$

$$\begin{aligned} F_M(x) &= \mathbb{P} \{M < x\} = \mathbb{P} \{\max \{\xi_1, \dots, \xi_n\} < x\} = \mathbb{P} \{\xi_1 < x, \dots, \xi_n < x\} = \\ &= \mathbb{P} \{\xi_1 < x\} \cdot \dots \cdot \mathbb{P} \{\xi_n < x\} = F_{\xi_1}(x) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x) \end{aligned}$$

$$F_M(x) = \prod_{i=1}^n F_{\xi_i}(x)$$

Якщо ξ_1, \dots, ξ_n однаково розподілені, то $F_M(x) = F_{\xi}^n(x)$. В такому випадку, можемо знайти і функцію розподілу: $f_M(x) = n \cdot F_{\xi}^{n-1}(x) \cdot f_{\xi}(x)$.

4.3.2. Мінімум.

Розглянемо мінімум з деяких незалежних випадкових величин: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

$$m = \min \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$$

$$\begin{aligned} F_m(x) &= \mathbb{P} \{\min \xi_1, \dots, \xi_n < x\} = 1 - \mathbb{P} \{\min \xi_1, \dots, \xi_n \geq x\} = \\ &= 1 - \mathbb{P} \{\xi_1 \geq x, \dots, \xi_n \geq x\} = 1 - (1 - F_{\xi_1}(x)) \cdot \dots \cdot (1 - F_{\xi_n}(x)) \end{aligned}$$

$$F_m(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{\xi_i}(x))$$

Якщо ξ_1, \dots, ξ_n однаково розподілені, то $F_m(x) = 1 - (1 - F_{\xi}(x))^n$. В такому випадку, можемо знайти і функцію розподілу: $f_m(x) = n \cdot (1 - F_{\xi}(x))^{n-1} \cdot f_{\xi}(x)$.

4.3.3. Порядкові статистики.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - незалежні однаково розподілені абсолютно неперервні випадкові величини зі щільністю f . Знайдемо: $\mathbb{P} \{\xi_i - \xi_j = 0\} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P} \{\xi_i \neq \xi_j\} = 1$.

Це означає, що з імовірністю 1 всі величини різні. Тому, можемо впорядкувати величини за зростанням:

$$\underbrace{\xi_{(1)}}_{\min \{\xi_1, \dots, \xi_n\}} < \xi_{(2)} < \dots < \underbrace{\xi_{(n)}}_{\max \{\xi_1, \dots, \xi_n\}}$$

$\xi_{(k)}, k \in [1, n]$ - k -та порядкова статистика (order statistics).

Щільність розподілу $\xi_{(k)}, k \in [1, n]$:

$$\begin{aligned}
F_{\xi_{(k)}}(x) &= \mathbb{P} \{ \xi_{(k)} < x \} = \mathbb{P} \{ \forall i \leq k : \xi_i \in (-\infty, x) \} = \\
&= \sum_{l=k}^n \underbrace{\mathbb{P} \{ n(\xi_i \in (-\infty, x)) = l \}}_{\text{схема Бернуллі}} = \sum_{l=k}^n C_n^l \cdot F^l(x) \cdot \bar{F}^{n-l}(x) \\
f_{\xi_{(k)}}(x) &= F'_{\xi_{(k)}}(x) = \sum_{l=k}^n C_n^l \left(l F^{l-1}(x) f(x) \bar{F}^{n-l}(x) - F^l(x) (n-l) \bar{F}^{n-l-1}(x) f(x) \right) = \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{Телескопічна сума.} \\ \text{Доданки скорочуються.} \end{array} \right| = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(x) \cdot \bar{F}^{n-k}(x) \cdot f(x), k \in [1, n]
\end{aligned}$$

4.4. Знаходження числових характеристик функцій від випадкових величин.

Теорема 4.5. Нехай є випадковий вектор $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$. Та функція $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow$

\mathbb{R} . В такому вигляді, ми не можемо застосувати теорему до характеристичної функції, адже характеристична функція є комплекснозначною. Але, слід зауважити, що умови теореми будуть виконуватися і в комплексному випадку.

$$\mathbb{E}\varphi(\bar{\xi}) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) \cdot f_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Доведення. Для 2-вимірного випадку. Дано:

$$n = 2 \quad \bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad \eta = \varphi(\xi_1, \xi_2)$$

Доведемо, що: $\mathbb{E}\varphi(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy$

Спочатку доведемо одну допоміжну лему.

Лема. $\mathbb{P}\{\eta \geq 0\} = 1 \iff \eta \geq 0 \text{ м.н (a.s.)}$. Тоді $\mathbb{E}\eta = \int_0^{+\infty} \underbrace{\overline{F_{\eta}}(x)}_{1-F_{\eta}(x)=\mathbb{P}\{\eta \geq x\}} dx$.

Доведення. (леми)

Раніше, за означенням:

Більш загально:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta &= \int_0^{+\infty} x \cdot f_{\eta}(x) dx & \iff & \mathbb{E}\eta = \int_0^{+\infty} \overline{F_{\eta}}(x) dx \\ \eta &= \int_0^{\eta} 1 dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{I}\{\eta \geq x\} dx & \implies & \mathbb{E}\eta = \mathbb{E} \int_0^{+\infty} \mathbb{I}\{\eta \geq x\} dx = \end{aligned}$$

Можемо внести математичне сподівання під знак інтегралу.

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{\mathbb{E}\mathbb{I}\{\eta \geq x\}}_{\mathbb{P}\{\eta \geq x\}} dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{\eta \geq x\} dx = \int_0^{+\infty} \overline{F_{\eta}}(x) dx$$

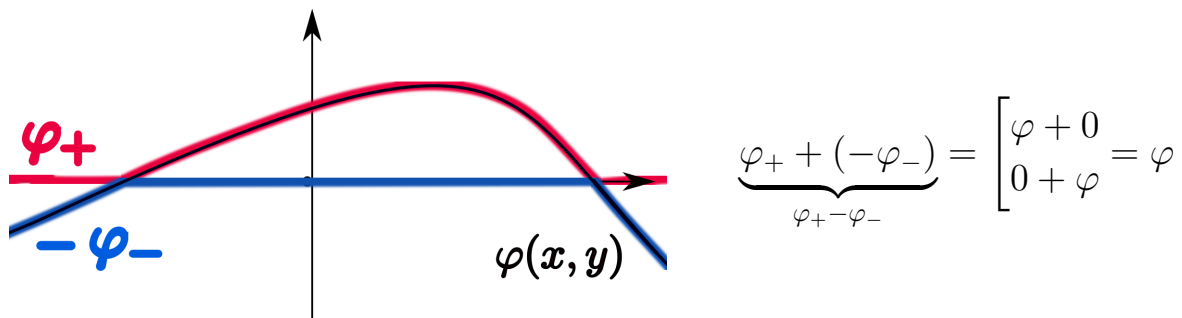
■

Повернемося до доведення основної теореми. Нехай $\varphi(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta &= \underbrace{\mathbb{E}\varphi(\xi_1, \xi_2)}_{\geq 0} = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{\varphi(\xi_1, \xi_2) \geq z\} dz = D_z : \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x, y) \geq z \right\} = \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{\bar{\xi} \in D_z\} = \int_0^{+\infty} \left(\iint_{D_z} f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy \right) dz = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{\bar{\xi}}(x, y) \left(\int_0^{\varphi(x, y)} dz \right) dx dy = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) \cdot f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy \quad \text{Що і треба було показати.} \end{aligned}$$

Нехай $\varphi(x, y)$ - довільна. Скористаємося фактом, що будь-яку функцію можна зобразити як різницю двох невід'ємних функцій:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi_+(x, y) - \varphi_-(x, y) & \varphi_+(x, y) &= \max\{\varphi(x, y), 0\} \geq 0 \\ & & \varphi_-(x, y) &= -\min\{\varphi(x, y), 0\} \geq 0 \end{aligned}$$



$$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\varphi(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\varphi_+(\xi_1, \xi_2) - \varphi_-(\xi_1, \xi_2)) = \mathbb{E}\varphi_+(\xi_1, \xi_2) - \mathbb{E}\varphi_-(\xi_1, \xi_2) \ominus$$

Застосуємо висновок про математичне сподівання невід'ємної функції:

$$\begin{aligned} &\ominus \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_+(x, y) f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy - \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_-(x, y) f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} (\varphi_+(x, y) - \varphi_-(x, y)) f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) f_{\bar{\xi}}(x, y) dx dy \quad \text{Ч.и.т.д.} \end{aligned}$$

■

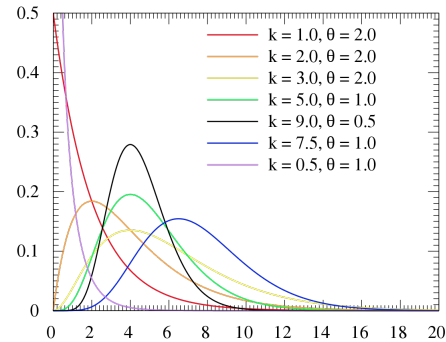
5. Деякі додаткові ймовірнісні розподіли.

5.1. Гамма-розподіл.

5.1.1. PDF.

Будемо називати гамма розподіленою величиною $\xi \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ $\alpha, \beta > 0$:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$



За умовою нормування:

$$1 = c \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{c}{\beta^{\alpha}} \underbrace{\int_0^{+\infty} (\beta x)^{\alpha-1} e^{-\beta x} d(\beta x)}_{\Gamma(\alpha)} = \frac{c \cdot \Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}} \implies c = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$$

Розглянемо випадок $\alpha = 1$: $f_{\Gamma(1,\beta)}(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} = f_{Exp(\beta)}$

Тобто, експоненціальний розподіл є окремим випадком гамма-розподілу.

5.1.2. Числові характеристики.

Знайдемо одразу n -тий момент величини $\xi \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi^n &= \int_0^{+\infty} x^n \cdot f_{\xi}(x) dx = \int_0^{+\infty} x^n \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^{+\infty} x^{\alpha+n-1} e^{-\beta x} dx = \\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^{n+\alpha}} \cdot \int_0^{+\infty} (\beta x)^{\alpha+n-1} e^{-\beta x} d(\beta x) = \boxed{\frac{\Gamma(\alpha + n)}{\beta^n \cdot \Gamma(\alpha)}} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\xi = (n = 1) = \frac{1}{\beta \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha + 1) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = (n = 2) = \frac{1}{\beta^2 \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha + 2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

5.1.3. Стійкість відносно додавання.

Експоненціальний розподіл не є стійким відносно додавання, але більш широкий клас - гамма розподілів буде мати таку властивість.

Теорема 5.1 (Про напівстійкість Гамма-розподілу.).

$$\perp \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta) \\ \xi_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta) \end{array} \right. \implies \boxed{\xi_1 + \xi_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)}$$

Доведення. За умовою, маємо:

$$f_{\xi_1} = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-\beta x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} \quad f_{\xi_2} = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2-1} e^{-\beta x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$

Скористаємося правилом згортки: $f_{\xi_1+\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y-x) dx =$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1} \beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^y x^{\alpha_1-1} e^{-\beta x} (y-x)^{\alpha_2-1} e^{-\beta(y-x)} dx = \left| \underbrace{\begin{cases} x > 0 \\ y-x > 0 \end{cases}}_{x \in (0,y)} \begin{cases} x > 0 \\ x < y \end{cases} \right| \ominus$$

Зауваження. Надалі будемо вважати, що при $y \leq 0$ $f_{\xi_1+\xi_2}(y) = 0$.

$$\begin{aligned} & \ominus \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^y x^{\alpha_1-1} (y-x)^{\alpha_2-1} dx = \left| \begin{array}{l} x = yt \quad dx = y dt \\ x : 0 \rightarrow y \\ t : 0 \rightarrow 1 \end{array} \right| = \\ & = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 y^{\alpha_1-1} t^{\alpha_1-1} y^{\alpha_2-1} (1-t)^{\alpha_2-1} y dt = \\ & = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta y}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \cdot y^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot \underbrace{\int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} dt}_{\beta(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}} = \\ & = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot y^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta y}, & y > 0; \\ 0 & y \leq 0; \end{cases} = f_{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \beta)}(y) \end{aligned}$$

■

5.2. Chi-square distribution with n degrees of freedom.

5.2.1. PDF.

Розглядаємо ξ_1, \dots, ξ_n - незалежні гаусівські $N(0, 1)$. Інакше: $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \sim N(\vec{0}, I)$.

Розподіл χ_n^2 - це закон розподілу $||\bar{\xi}||^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$.

$n = 1$. Шукаємо: $\xi^2, \xi \sim N(0, 1)$.

$$\varphi(x) = x^2 \quad x^2 = y \implies x = \pm\sqrt{y} \implies \begin{cases} \psi_1(y) = -\sqrt{y} \\ \psi_2(y) = \sqrt{y} \end{cases} \quad E_{\varphi_1} = E_{\varphi_2} = [0, +\infty]$$

$$\begin{aligned} f_{\varphi(\xi)}(y) &= \sum_{i=1}^2 f_{\xi}(\psi_i(y)) \cdot |\psi_i'(y)| \cdot \mathbb{I}\{y \in E_{\varphi_i}\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{x=-\sqrt{y}} \cdot |(-\sqrt{y})'| \cdot \mathbb{I}R_+(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{x=\sqrt{y}} \cdot |(\sqrt{y})'| \cdot \mathbb{I}R_+(y) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \mathbb{I}R_+(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} = f_{\chi_1^2}(y) \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$. Шукаємо: $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall \xi_i : \xi_i \sim N(0, 1)$.

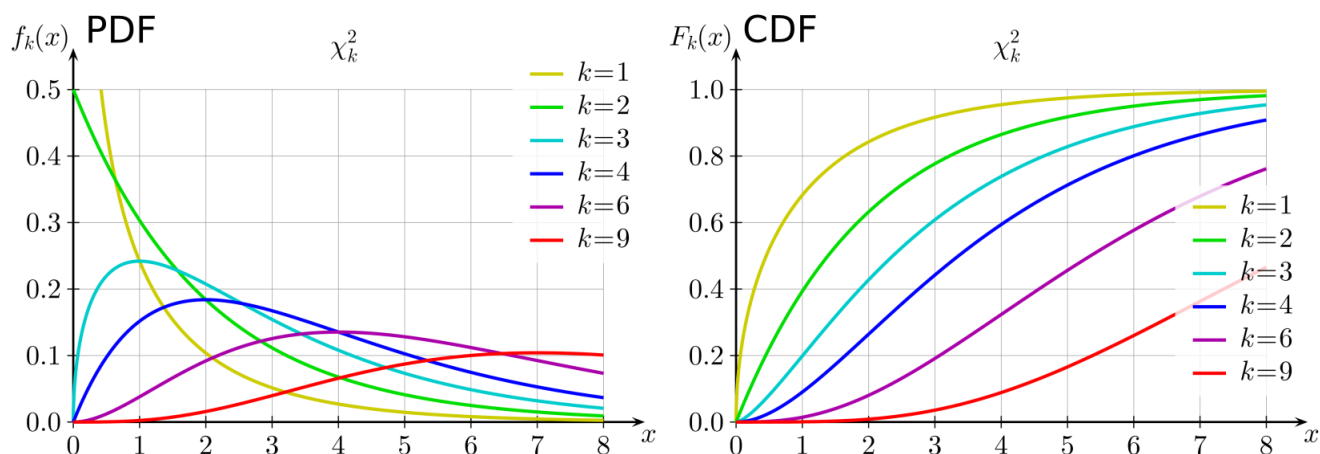
Розглянемо щільність $f_{\chi_1^2}(y)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(\frac{1}{2})^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Впізнаємо гамма-розподіл:} \\ \chi_1^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \end{array}$$

Тоді, χ_n^2 це сума n-незалежних χ_1^2 : $\chi_n^2 = \underbrace{\chi_1^2 + \dots + \chi_1^2}_n = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$f_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$

$n = 2$. Зокрема, в такому випадку, отримаємо: $\chi_2^2 = \Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right) = \text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$.



5.2.2. Числові характеристики.

$$\mathbb{E}\chi_n^2 = \mathbb{E}\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = n \quad [\mathbb{E}(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) = \mathbb{E}\xi_1^2 + \dots + \mathbb{E}\xi_n^2 = n]$$

$$\mathbb{D}\chi_n^2 = \mathbb{D}\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2n$$

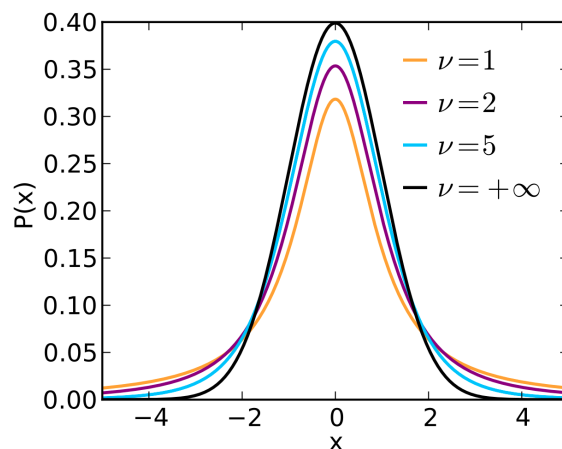
5.3. t-розподіл Стюдента з n степенями вільності.

Позначається t_n або St_n . Розглядаємо розподіл такої величини η :

$$\eta = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}{n}}} = \xi_0 \frac{n}{\sqrt{\chi_n^2}},$$

де $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ — незалежні стандартні гаусівські величини.

$$f_{St_n}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$



The PDF of the Student distribution.

Слід зауважити, що у випадку $n = 1$: St_1 отримаємо розподіл Коші:

$$f_{St_1}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Якщо спрямуємо $n \rightarrow \infty$, отримаємо стандартний гаусівський розподіл:

$$f_{St_\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

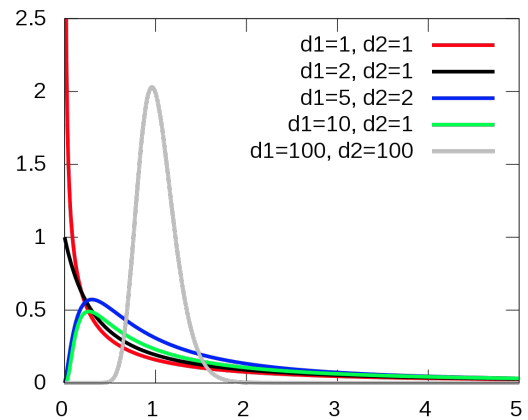
5.4. Розподіл Фішера(-Снедекора)

Позначається $F_{m,n}$. Розглядаємо розподіл такої величини ω :

$$\omega = \frac{(\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2) / m}{(\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2) / n}$$

де $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n$ — незалежні стандартні гаусівські величини.

$$f(x; d_1, d_2) = \frac{\sqrt{\frac{(d_1 x)^{d_1} d_2^{d_2}}{(d_1 x + d_2)^{d_1 + d_2}}}}{x \beta\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)}$$



The PDF of the F-distribution

6. Граничні теореми теорії ймовірностей

6.1. Нерівність Чебишова.

ξ - випадкова величина, для якої $\exists \mathbb{E}\xi \exists \mathbb{D}\xi$.

Знаємо, що $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$. Але дисперсія є більше теоретичною величиною. Наприклад, розглянемо прилад, який перестає працювати якщо напруга в мережі $\xi = U_m$ відхиляється $\xi < 180$ або $\xi > 260$.

Інакше кажучи, якщо $|\xi - \mathbb{E}\xi| > 40$ - прилад не працює. Нас цікавить ймовірність $\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| > a\} = ?$. Але, знаючи дисперсію, не зрозуміло, як пов'язати цю характеристику з ймовірністю зазначеної критичної події.

Саме таку оцінку дає нерівність Чебишова.

Теорема 6.1 (нерівність Чебишова). Якщо $\exists \mathbb{D}\xi$, то:

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq a\} \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{a^2}$$

Перевага: Обчислюється лише через дисперсію. Не залежить від розподілу.
Недолік: нерівність дає дуже грубу оцінку ймовірності.

Наслідок.

$$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| < a\} = \mathbb{P}\{\xi \in (\mathbb{E}\xi - a, \mathbb{E}\xi + a)\} \geq 1 - \frac{\mathbb{D}\xi}{a^2}$$

Лема. (нерівність Маркова) η - невід'ємна випадкова величина $\mathbb{P}\{\eta \geq 0\} = 1$.

Тоді: $\mathbb{P}\{\eta \geq a\} \leq \frac{\mathbb{E}\eta}{a}$

Доведення.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta &= \mathbb{E}(\eta \cdot \mathbb{I}\{0 \leq \eta < a\} + \eta \cdot \mathbb{I}\{\eta \geq a\}) = \mathbb{E}\eta \cdot \mathbb{I}\{\eta < a\} + \mathbb{E}\eta \cdot \mathbb{I}\{\eta \geq a\} \geq \\ &\geq \mathbb{E}\eta \cdot \mathbb{I}\{\eta \geq a\} \geq \mathbb{E}a \cdot \mathbb{I}\{\eta \geq a\} = a \cdot \mathbb{E}\mathbb{I}\{\eta \geq a\} = a \cdot \mathbb{P}\{\eta \geq a\} \end{aligned}$$

■

Доведення. (До нерівності Чебишова.) Очевидно, що:

$$\eta = (\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geq 0$$

За нерівністю Маркова:

$$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq a\} = \mathbb{P}\{(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geq a^2\} \leq \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2}{a^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{a^2}$$

■

6.2. Види збіжності випадкових величин

З мат. аналізу пам'ятаємо означення збіжності числової послідовності:

Означення. (Нагадування)

Послідовність $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ збігається до x якщо:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |x_n - x| < \varepsilon$$

Для (ξ_n) - послідовності випадкових величин, єдиного аналогічного означення не існує. Тому, доведеться розглянути декілька видів збіжності.

6.2.1. Збіжність з імовірністю 1.

Позначення: $\boxed{\text{м.н.-збіжність.}}$

Означення. Нехай задана послідовність $(\xi_n) = \{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, тоді:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{м.н.}} \xi \iff \mathbb{P}\{\xi_n \rightarrow \xi\} = 1 \iff \mathbb{P}\{\omega : \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)\} = 1$$

називається збіжністю з імовірністю 1 або м.н. збіжністю.

- 1) Найбільш природній вид збіжності.
- 2) Досить незручний для використання.

6.2.2. Збіжність в середньому квадратичному.

Позначення: $\boxed{\mathbb{L}_2\text{-збіжність.}}$

Означення. Нехай задана послідовність $(\xi_n) = \{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, тоді:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{L}_2} \xi \iff \mathbb{E}(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

називається збіжністю в середньому квадратичному.

6.2.3. Збіжність в середньому.

Позначення: $\boxed{\mathbb{L}_1\text{-збіжність.}}$

Означення. Нехай задана послідовність $(\xi_n) = \{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, тоді:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{L}_1} \xi \iff \mathbb{E}|\xi_n - \xi| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

називається збіжністю в середньому.

6.2.4. Збіжність за імовірністю.

Позначення: $\boxed{\mathbb{P}\text{-збіжність.}}$

Надалі **критичною подією** будемо називати велике відхилення однієї величини від іншої на фіксоване додатне число, тобто: $\varepsilon > 0 : |\xi_n - \xi| > \varepsilon$.

Означення. Нехай задана послідовність $(\xi_n) = \{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, тоді:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P} \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

називається збіжністю за імовірністю.

Зауваження. Для збіжності за імовірністю справедливою є еквівалентність:

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P} \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P} \{|\xi_n - \xi| \leq \varepsilon\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \right)$$

6.2.5. Взаємозв'язок збіжностей.

Кожна стрілки відповідає теоремі, що описує зв'язок збіжностей.

Пунктирні стрілки 1 та 2 потребують додаткового пояснення:

- ①. Завжди існує м.н.-збіжна підпослідовність.
- ②. Виконується, якщо $\xi = \text{const}$.

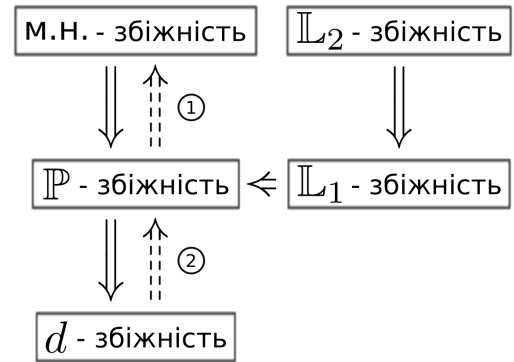


Схема зв'язку різних видів збіжності.

Лема. (Нерівність Ляпунова (ч.в.))

$$\mathbb{E} |\eta| \leq \sqrt{\mathbb{E} \eta^2}$$

Доведення. $\mathbb{E}(|\eta|^2) - (\mathbb{E} |\eta|)^2 = \mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E} |\eta|)^2 = \mathbb{D} |\eta| \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E} |\eta| \leq \sqrt{\mathbb{E} \eta^2}$ ■

Теорема. Покажемо, що $\mathbb{L}_2 \implies \mathbb{L}_1$, тобто:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_2 : \mathbb{E}(\xi_n - \xi)^2 &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ \Downarrow \\ \mathbb{L}_1 : \mathbb{E} |\xi_n - \xi| &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Доведення. За нерівністю Ляпунова та правилом "2-ох міліціонерів":

$$0 \leq \underbrace{\mathbb{E} |\xi_n - \xi|}_{\rightarrow 0} \leq \sqrt{\mathbb{E}(\xi_n - \xi)^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff \mathbb{L}_2\text{-збіжність.}$$

■

Теорема. Покажемо, що $\mathbb{L}_1 \implies \mathbb{P}$, тобто:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_1 : \mathbb{E} |\xi_n - \xi| &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \Downarrow \\ \mathbb{P} : \forall \varepsilon > 0 : \mathbb{P} \{ |\xi_n - \xi| > \varepsilon \} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Доведення. Підставимо $|\xi_n - \xi|$ у нерівність Маркова:

$$0 \leq \underbrace{\mathbb{P} \{ |\xi_n - \xi| > \varepsilon \}}_{\rightarrow 0} \leq \frac{\mathbb{E} |\xi_n - \xi|}{\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \mathbb{L}_1\text{-збіжність.}$$

За правилом "2-ох мільйонерів" отримали збіжність імовірності до 0. ■

6.2.6. Збіжність за розподілом (слабка збіжність).

Позначення: d-збіжність.

Означення. Нехай задана послідовність $(\xi_n) = \{ \xi_n | n \in \mathbb{N} \}$, тоді:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi \iff \begin{aligned} &F_\xi(x) \in C^1(D) \\ &F_{\xi_n}(x) \in C^1(D) \end{aligned} \quad \forall x \in D : \underbrace{F_{\xi_n}(x)}_{\mathbb{P}\{\xi_n < x\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{F_\xi(x)}_{\mathbb{P}\{\xi < x\}}$$

називається збіжністю за розподілом.

Теорема. Покажемо, що $d \implies \mathbb{P}$ якщо $\xi = \text{const}$, тобто:

$$\begin{aligned} d : \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \neq C : F_{\xi_n}(x) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_C(x) \\ \Downarrow \\ \mathbb{P} : \forall \varepsilon > 0 : \mathbb{P} \{ |\xi_n - C| > \varepsilon \} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Доведення. Умову збіжності послідовності (ξ_n) за розподілом до константи $\exists C \in \mathbb{R}$ природнім чином можна представити як:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C \iff \mathbb{P} \{ \xi_n < x \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & x \leq C; \\ 1, & x > C; \end{cases} = F_C(x)$$

В той же час, умову збіжності за імовірністю можна розписати так:

$$(\xi_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} C \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P} \{ \xi_n \in [C - \varepsilon, C + \varepsilon] \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Розпишемо, скориставшись правилом $\mathbb{P}\{\xi \in [a, b]\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$:

$$\begin{aligned} 1 &\geq \mathbb{P}\{\xi_n \in [C - \varepsilon, C + \varepsilon]\} \geq \mathbb{P}\{\xi \in [C - \varepsilon, C + \varepsilon]\} = \\ &= F_{\xi_n}(C + \varepsilon) - F_{\xi_n}(C - \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_C(C + \varepsilon) - F_C(C - \varepsilon) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Тому, за правилом "2-ох міліціонерів", отримали збіжність послідовності (ξ_n) за імовірністю до константи C . Отже: $d \xrightarrow{\xi=const} \mathbb{P}$. ■

Зауваження. Для всіх видів збіжності виконуються арифм. власт. границь.

6.2.7. Критерій середньоквадратичної збіжності до константи.

Теорема 6.2. Нехай задана послідовність $(\xi_n) = \{\xi_n | n \in \mathbb{N}\}$, тоді:

$$\exists C \in \mathbb{R} : (\xi_n) \xrightarrow{\mathbb{L}_2} C \iff \begin{cases} \mathbb{E}\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C; \\ \mathbb{D}\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0; \end{cases}$$

Доведення.

$$\begin{aligned} (\xi_n) \xrightarrow{\mathbb{L}_2} C &\iff \mathbb{E}(\xi_n - C)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \mathbb{E}((\xi_n - \mathbb{E}\xi_n) + (\mathbb{E}\xi_n - C))^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \\ &\iff \mathbb{E}(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)^2 + \mathbb{E}((\mathbb{E}\xi_n - C)^2) + 2\mathbb{E}(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)(\mathbb{E}\xi_n - C) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \\ &\iff \mathbb{D}\xi_n + (\mathbb{E}\xi_n - C)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \begin{cases} \mathbb{E}\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C; \\ \mathbb{D}\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0; \end{cases} \end{aligned}$$

■

Теорема 6.3 (Окремий випадок теореми неперервності П.Леві).

$$(\xi_n) \xrightarrow{d} \xi \iff \forall t \in \mathbb{R} \quad \underbrace{\chi_{\xi_n}(t)}_{\mathbb{E}e^{it\xi_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\chi_\xi(t)}_{\mathbb{E}e^{it\xi}}$$

Без доведення. ■

6.3. Закон великих чисел (ЗВЧ).

Маємо ξ_1, ξ_2, \dots , тоді:

$$\underbrace{\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}}_{\text{вибіркове середнє}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\xi$$

Теорема 6.4. (ЗВЧ для незалежних, однаково розподілених величин)

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - незалежні, однаково розподілені випадкові величини.

Нехай $\mathbb{E}\xi_i = a$. **Тоді:**

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} a \quad \left(\mathbb{P} \left\{ \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} > \varepsilon \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \right)$$

Доведення. (за додаткової умови існування дисперсії $\mathbb{D}\xi_i$, що , але з послабленим припущенням про некорельованість замість незалежності.)

$$\begin{aligned} \bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} : \quad \mathbb{E}\bar{\xi}_n &= \mathbb{E} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = \frac{\mathbb{E}\xi_1 + \dots + \mathbb{E}\xi_n}{n} = \frac{na}{n} = a \\ \mathbb{D}\bar{\xi}_n &= \mathbb{D} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = \frac{\mathbb{D}\xi_1 + \dots + \mathbb{D}\xi_n}{n^2} = \frac{n\mathbb{D}\xi}{n^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{n} \\ \begin{cases} \mathbb{E}\bar{\xi}_n = a \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \\ \mathbb{D}\bar{\xi}_n = \frac{\mathbb{D}\xi}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{cases} &\implies \bar{\xi}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{L}_2} a \implies \bar{\xi}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} a \end{aligned}$$

■

Доведення. (без припущення про існування $\mathbb{D}\xi$)

Введемо характеристичну функцію $\chi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}$. Тоді:

$$\chi_{\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}}(t) = \mathbb{E}e^{\frac{it}{n}(\xi_1 + \dots + \xi_n)} = \chi_{\xi_1 + \dots + \xi_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \underbrace{\chi_\xi\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \dots \cdot \chi_\xi\left(\frac{t}{n}\right)}_n = \chi_\xi^n\left(\frac{t}{n}\right)$$

Розпишемо в ряд Тейлора:

$$\chi_\xi(h) = \chi_\xi(0) + \frac{\chi'_\xi(0)}{1!}h + o(h) \quad h \rightarrow 0$$

$$\chi_\xi(h) = \left| \frac{\chi'_\xi(0)}{i} = \mathbb{E}\xi \right| = 1 + ia \cdot h + o(h) \quad h \rightarrow 0$$

$$\chi_\xi\left(\frac{t}{n}\right) = 1 + \frac{iat}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \rightarrow \infty$$

Отримали:

$$\chi_{\bar{\xi}_n}(t) = \chi_{\xi}^n\left(\frac{t}{n}\right) = \left[1 + \frac{iat}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \quad n \rightarrow \infty$$

$$\ln \chi_{\bar{\xi}_n}(t) = n \ln \left[1 + \frac{iat}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \sim n \left[\frac{iat}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = iat + o(1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$$

$$\chi_{\bar{\xi}_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{iat} = \mathbb{E}e^{iat} = \chi_{\xi}(t) \quad \boxed{\xrightarrow{\text{т. Леві}}}$$

$$\boxed{\Rightarrow} \bar{\xi}_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} a \Rightarrow \boxed{\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} a}$$

■

Теорема 6.5. (посилений ЗВЧ А.М.Колмогорова.)

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - незалежні, однаково розподілені випадкові величини.

$$\text{Нехай } \exists \mathbb{E}\xi_i = a. \text{ Тоді: } \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{м.н.}} a$$

Без доведення. ■

6.4. ЗВЧ для різнорозподілених випадкових величин.

6.4.1. Формулювання.

Теорема 6.6. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - незалежні випадкові величини. Нехай $\exists \mathbb{E}\xi_i = a_i$
 $\exists \mathbb{D}\xi_i = \sigma_i^2$.
 Додатково накладемо умову рівномірної обмеженості: $\exists C > 0 : \sigma_i^2 < C$.

Тоді:
$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \frac{(\xi_1 - a_1) + \dots + (\xi_n - a_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}, \mathbb{L}_2} 0$$

Доведення.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E} \left(\frac{(\xi_1 - a_1) + \dots + (\xi_n - a_n)}{n} \right) = \frac{\overbrace{\mathbb{E}(\xi_1 - a_1)}^{=0} + \dots + \overbrace{\mathbb{E}(\xi_n - a_n)}^{=0}}{n} = 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ \mathbb{D} \left(\frac{(\xi_1 - a_1) + \dots + (\xi_n - a_n)}{n} \right) = \frac{\mathbb{D}(\xi_1 - a_1) + \dots + \mathbb{D}(\xi_n - a_n)}{n^2} = \\ = \frac{\mathbb{D}\xi_1 + \dots + \mathbb{D}\xi_n}{n^2} - \frac{a_1 + \dots + a_n}{n^2} = \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}{n^2} \leq \frac{C \cdot n}{n^2} = \frac{C}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right.$$

З цього слідує: $\frac{(\xi_1 - a_1) + \dots + (\xi_n - a_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{L}_2, \mathbb{P}} 0$ ■

6.4.2. ЗВЧ для схеми Бернуллі.

Успіх: p . Невдача: $q = 1 - p$.

Введемо величину $\xi_i = \mathbb{I} \{ \text{на } i\text{-тому випробуванні відбувся успіх} \}$

$$\begin{array}{c} \xi_i \ 0 \ 1 \\ \mathbb{P} \ q \ p \end{array} \quad \mathbb{E}\xi_i = p$$

За ЗВЧ Колмогорова:

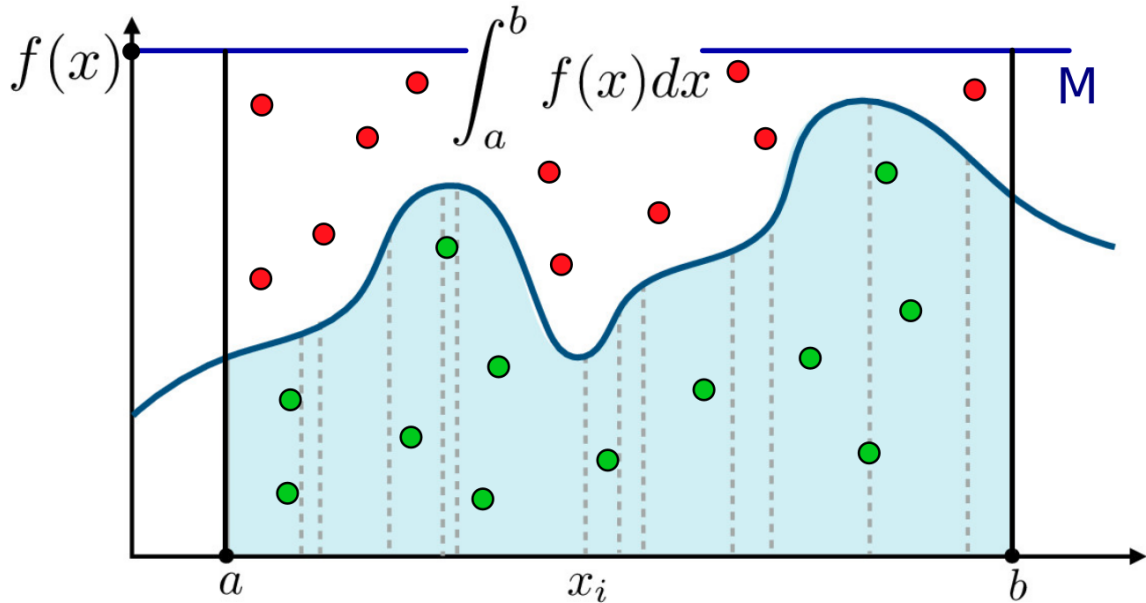
$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{L}_2, \mathbb{P}, \text{М.Н.}} \mathbb{E}\xi_i = p$$

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \text{відносна частота успіхів} = \nu_n \implies \boxed{\nu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{L}_2, \text{М.Н.}} p}$$

6.4.3. Методи Монте-Карло.

Приклад. Методи Монте-Карло дозволяють чисельно розв'язувати нестохастичні (детерміновані) задачі за допомогою стохастичних методів.

Шукаємо приблизне значення $\int_b^a f(x)dx$ при $M \geq f(x) \geq 0$ - обмежена на $[a, b]$.



Вибираємо незалежні: $\xi_n \sim U(a, b)$.

$f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ - незалежні, однаково розподілені з математичним сподіванням:

$$\mathbb{E}f(\xi_i) = \int_b^a f(x) \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_b^a f(x) dx$$

Застосуємо закон великих чисел:

$$\frac{f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{М.Н.}} \mathbb{E}f(\xi)$$

Якщо взяти $n \gg 1$:

$$\frac{f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)}{n} \approx \frac{1}{b-a} \int_b^a f(x) dx$$

Інакше:

$$\int_b^a f(x) dx \approx (b-a) \cdot \frac{f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)}{n}$$

Приклад. (Другий спосіб) Розглядаємо прямокутник $\Pi = (a, b) \times M$.

Випадкові вектори $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{bmatrix}$ - точки всередині прямокутника Π .

Схема Бернуллі: n випробувань. Успіх: потрапляння точки під графік $f(x)$.

$$p = \mathbb{P}\{\text{успіх}\} = \frac{S_{\text{під графіком}}}{S_{\Pi}} = \frac{\int_b^a f(x)dx}{M(b-a)}$$

Частота влучання під графік: $\nu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{м.н}} p = \frac{\int_b^a f(x)dx}{M(b-a)}$.

Якщо $n \gg 1$, то $\int_b^a f(x)dx \approx M(b-a)\nu_n = M(b-a) \cdot \frac{\text{к-сть точок під графіком}}{n}$.

6.5. Центральна гранична теорема та її застосування.

6.5.1. Формулювання.

Теорема 6.7. (Для незалежних, однаково розподілених величин).

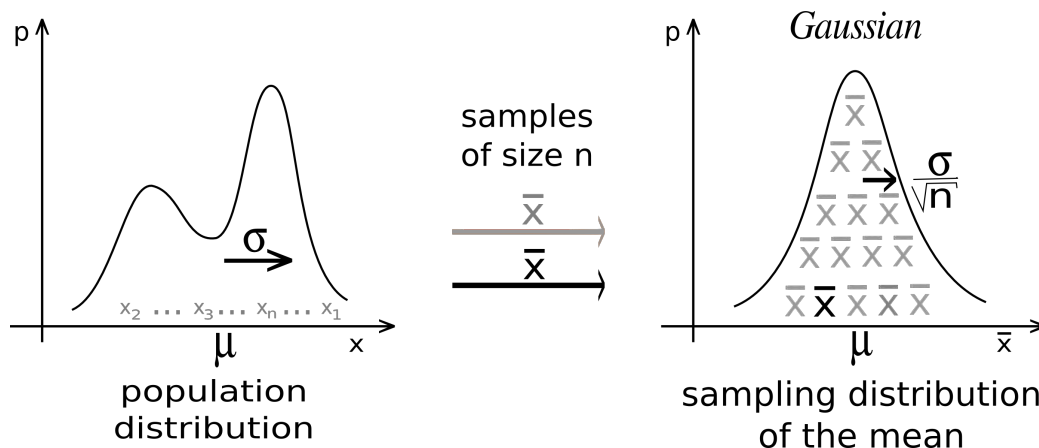
$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - незалежні, однаково розподілені випадкові величини.

Нехай $\exists \mathbb{E}\xi_i = m \quad \exists \mathbb{D}\xi_i = \sigma^2$.

$$\text{Тоді: } \frac{(\xi_1 - m) + \dots + (\xi_n - m)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \gamma \sim N(0, 1)$$

Неформально говорячи, класична ЦГТ стверджує, що сума з n незалежних величин однаково розподілених має розподіл, близький до $N(nm, n\sigma^2)$.

Якою б не була форма розподілу генеральної сукупності, вибіркового розподілу наближається до нормального, а його дисперсія задається ЦГТ.



Доведення. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - незалежні, однаково розподілені випадкові величини. Будемо позначати: $\xi_1 - m = \eta_1 \dots \xi_n - m = \eta_n$. Тоді:

$$\mathbb{E}\eta_i = \mathbb{E}(\xi_i - m) = \mathbb{E}\xi_i - m = m - m = 0 \quad \chi(t) = \chi_{\eta_i}(t)$$

$$\chi_{\frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E} \exp \left\{ it \cdot \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sigma\sqrt{n}} \right\} = \chi_{\eta_1 + \dots + \eta_n} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = \chi^n \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

Хочемо знайти границю характеристичної функції на $n \rightarrow \infty$. Позначимо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{\frac{(\xi_1 - m) + \dots + (\xi_n - m)}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = L(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi^n \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

$$\ln L(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \chi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \ominus$$

Розпишемо характеристичну функцію у ряд Тейлора:

$$\chi(h) = \chi_{\eta}(h) = \chi(0) + \frac{\chi'(0)}{1!}h + \frac{\chi''(0)}{2!}h^2 + o(h^2) = \quad h \rightarrow 0$$

$$= \left| \begin{array}{c} \frac{\chi'(0)}{i} = \mathbb{E}\eta = 0 \\ \frac{\chi''(0)}{i^2} = -\mathbb{E}\eta^2 = -\mathbb{D}\eta = -\sigma^2 \end{array} \right| = 1 - \frac{\sigma^2}{2}h^2 + o(h^2) \quad h \rightarrow 0$$

$$\chi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{t^2}{n\sigma^2} + o \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \quad n \rightarrow +\infty$$

Підставивши у границю, отримаємо:

$$\ominus \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(-\frac{t^2}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) = -\frac{t^2}{2}$$

Отже, для початкової границі маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{\frac{(\xi_1 - m) + \dots + (\xi_n - m)}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = L(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \chi_{N(0,1)}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \boxed{\text{т. Леві}}$$

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \frac{(\xi_1 - m) + \dots + (\xi_n - m)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \gamma \sim N(0, 1)$$

■

Зауваження. При великих n : $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \approx N(nm, n\sigma^2)$. Тоді:

$$\mathbb{P} \{a \leq S_n \leq b\} \approx \mathbb{P} \{a \leq \gamma_n \leq b\} = \Phi \left(\frac{b - mn}{\sigma\sqrt{n}} \right) - \Phi \left(\frac{a - mn}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

6.5.2. Використання ЦГТ у схемі Бернуллі.

- p - імовірність успіху.
- $q = 1 - p$ - імовірність невдачі.
- $\varepsilon_i = \mathbb{I} \{ \text{на } i\text{-тому випробуванні - успіх} \} \in \{0, 1\}$
- $\mathbb{E}\varepsilon_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$
- $\mathbb{E}\varepsilon_i^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p$
- $\mathbb{D}\varepsilon_i = \mathbb{E}(\varepsilon_i)^2 - (\mathbb{E}\varepsilon_i)^2$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \implies n \gg 1 : \text{ЦГТ } S_n \approx N(np, npq)$$

Інтегральна формула Муавра-Лапласа

$$\mathbb{P} \{a \leq S_n \leq b\} \approx \Phi \left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi \left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} \right) \approx \Phi \left(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi \left(\frac{a - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} \right)$$

Можемо використовувати, якщо: $\begin{cases} n \geq 50 \\ npq \geq 10 \end{cases} \quad \textcircled{*}$

Якщо n мале, користуємося точною формулою:

$$\mathbb{P} \{a \leq S_n \leq b\} = \sum_{k=a}^b \mathbb{P} \{S_n = k\} = \sum_{k=a}^b C_n^k p^k q^{n-k}$$

Якщо p близьке до 1 або до 0, застосовуємо граничну теорему Пуассона.

6.5.3. Локальна формула Муавра-Лапласа.

Якщо виконуються умови $\textcircled{*}$:

$$\mathbb{P} \{S_n = k\} = \mathbb{P} \{k \leq S_n \leq k\} \approx \Phi \left(\frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi \left(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} \right) \textcircled{=}$$

За теоремою Лагранжа:

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a) \quad b - a = \frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} - \frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

$$\textcircled{=} \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}}$$

Локальна формула Муавра-Лапласа

$$\mathbb{P} \{S_n = k\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ -\frac{(k - np)^2}{2npq} \right\}$$

6.5.4. Теорема Пуассона

Теорема 6.8 (Пуассона). Нехай є послідовність схем Бернуллі:

1. Одне випробування з p_1 - імовірність успіху.

2. Два випробування з p_2 - імовірність успіху.

...

n. n випробувань з p_n - імовірність успіху.

Нехай є величина ν_n - кількість успіхів в n-тій схемі Бернуллі.

Якщо $b \cdot p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda > 0$,

тоді: $\nu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \theta \sim Pois(\lambda) : \mathbb{P}\{\theta = k\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$.

Зауваження. Якщо виконується зазначена збіжність:

$$\mathbb{P}\{\nu_n = k\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \underbrace{\mathbb{P}\{\theta = k\}}_{\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}} \quad \forall k \in \overline{1, n} \implies \forall x \notin \overline{0, 1} \quad F_{\nu_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_{Pois(\lambda)}(x)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\nu_n = k\} &= \mathbb{P}\left\{\nu_n \in \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]\right\} = F_{\nu_n}\left(k + \frac{1}{2}\right) - F_{\nu_n}\left(k - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \\ &\longrightarrow F_{\theta}\left(k + \frac{1}{2}\right) - F_{\theta}\left(k - \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left\{\theta \in \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]\right\} = \mathbb{P}\{\theta = k\} \end{aligned}$$

Доведення. Покажемо збіжність $\nu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \theta$.

$$\begin{aligned} \nu_n &\sim Bin(n, p_n) \\ \theta &\sim Pois(\lambda) \\ np_n &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda \end{aligned} \implies \begin{aligned} \underbrace{(p_n e^{it} + q_n)^n}_{=(p_n e^{it} + 1 - p_n)^n} &= \chi_{\nu_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{?} \chi_{\theta}(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)} \\ \text{Позначимо: } L(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n e^{it} + 1 - p_n)^n \end{aligned}$$

$$\ln L(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln (p_n e^{it} + 1 - p_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left(1 + \underbrace{p_n(e^{it} - 1)}_{\rightarrow 0} \right) = \lambda(e^{it} - 1)$$

$$L(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)} = \chi_{Pois(\lambda)}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{Q.E.D.}$$

■

6.5.5. Наближена формула Пуассона у схемі Бернуллі.

Якщо у серії із n випробувань Бернуллі: $n \geq 50$ $npq \leq 10$.

$$\boxed{p \approx 0} \quad \mathbb{P}\{\nu_k = k\} \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k \in \overline{1, n} \quad \underline{\lambda = np}$$