МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
“ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ“
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО“
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Розрахункова робота

ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ

Варіант-93(27)

Виконав:
Терещенко Денис, КА-96

КИЇВ - 2020

Зміст розрахункової роботи
«Випадкові вектори»

Розрахункова робота складається з виконання двох завдань.

Порядок виконання завдання 1

За таблицею розподілу координат дискретного випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$

Знайти:

1. Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2.
2. Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно та побудувати графіки цих функцій.
3. Функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}(x,\ y)$ випадкового вектора.
4. Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю.
5. Умовні ряди розподілу для кожної координати.
6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Порядок виконання завдання 2

Вважаючи, що неперервний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ рівномірно розподілений у заданій області

Знайти:

1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2.
2. Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно.
3. Функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}(x,\ y)$ випадкового вектора.
4. Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю.
5. Умовні щільності розподілу для кожної координати.
6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Зміст

1. Завдання 1

Дискретний випадковий вектор $\xi = \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\end{bmatrix}$ задано таблицею розподілу.

Варіант 93

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-5	1	4	8
-3	0,06	0,04	0,06	0,03
0	0,01	0,14	0,04	0,13
3	0,12	0,12	0,06	0,19

Таблиця розподілу згідно варіанту.

Позначимо ймовірності: $p_{ij} = \mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\right\}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$

1.1. Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Т.я. події $\left\{\xi_1 = x_i\right\}, i = \overline{1,3}$ утворюють повну группу подій, (як і $\left\{\xi_2 = y_j\right\}$, $j = \overline{1,4}$), можемо скористатися формулою повної ймовірності:

$$\mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i\right\} = \sum_{j=1}^{4} p_{ij} \qquad \mathbb{P}\left\{\xi_2 = y_j\right\} = \sum_{i=1}^{3} p_{ij}$$

Отримали:

$$\mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3\right\} = 0.06 + 0.04 + 0.06 + 0.03 = 0.19$$
$$\mathbb{P}\left\{\xi_1 = 0\right\} = 0.01 + 0.14 + 0.04 + 0.13 = 0.32$$
$$\mathbb{P}\left\{\xi_1 = 3\right\} = 0.12 + 0.12 + 0.06 + 0.19 = 0.49$$

Перевірка: $\sum\limits_{i=1}^{3} \mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i\right\} = 0.19 + 0.32 + 0.49 = 1.0$
Отримали:

$$\mathbb{P}\left\{\xi_2 = -5\right\} = 0.06 + 0.01 + 0.12 = 0.19$$
$$\mathbb{P}\left\{\xi_2 = 1\right\} = 0.04 + 0.14 + 0.12 = 0.3$$
$$\mathbb{P}\left\{\xi_2 = 4\right\} = 0.06 + 0.04 + 0.06 = 0.16$$
$$\mathbb{P}\left\{\xi_2 = 8\right\} = 0.03 + 0.13 + 0.19 = 0.35$$

Перевірка: $\sum\limits_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{\xi_2 = y_j\right\} = 0.19 + 0.3 + 0.16 + 0.35 = 1.0$
Ряди розподілу ξ_1 та ξ_2:

ξ_1	-3	0	3
P	0.19	0.32	0.49

ξ_2	-5	1	4	8
P	0.19	0.3	0.16	0.35

1.2. Функції розподілу координат ξ_1, ξ_2.

Для ξ_1 :

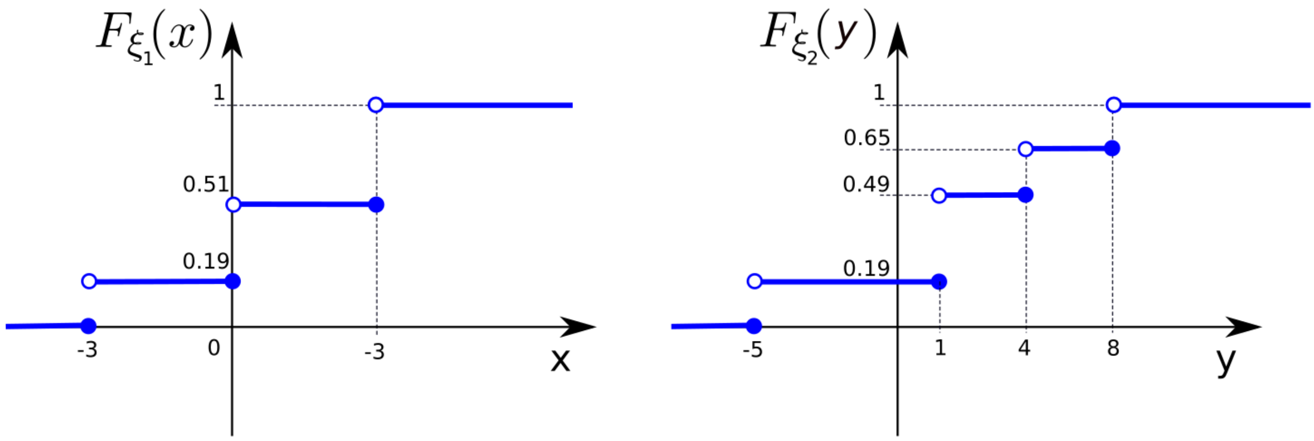
$$F_{\xi_1}(x) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x\} = \begin{cases} \mathbb{P}\{\emptyset\} = 0, \quad x \le -3; \\ \mathbb{P}\{\xi_1 = -3\} = 0.19, \quad -3 < x \le 0; \\ \mathbb{P}\{\{\xi_1 = -3\} \cup \{\xi_1 = 0\}\} = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3\} + \\ +\mathbb{P}\{\xi_1 = 0\} = 0.19 + 0.32 = 0.51, \quad 0 < x \le 3 \\ \mathbb{P}\{\{\xi_1 = -3\} \cup \{\xi_1 = 0\} \cup \{\xi_1 = 3\}\} = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3\} + \\ +\mathbb{P}\{\xi_1 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3\} = 0.19 + 0.32 + 0.49 = 1, \quad 3 < x \end{cases}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le -3; \\ 0.19, \quad -3 < x \le 0; \\ 0.51, \quad 0 < x \le 3 \\ 1, \quad 3 < x \end{cases}$$

Для ξ_2 :

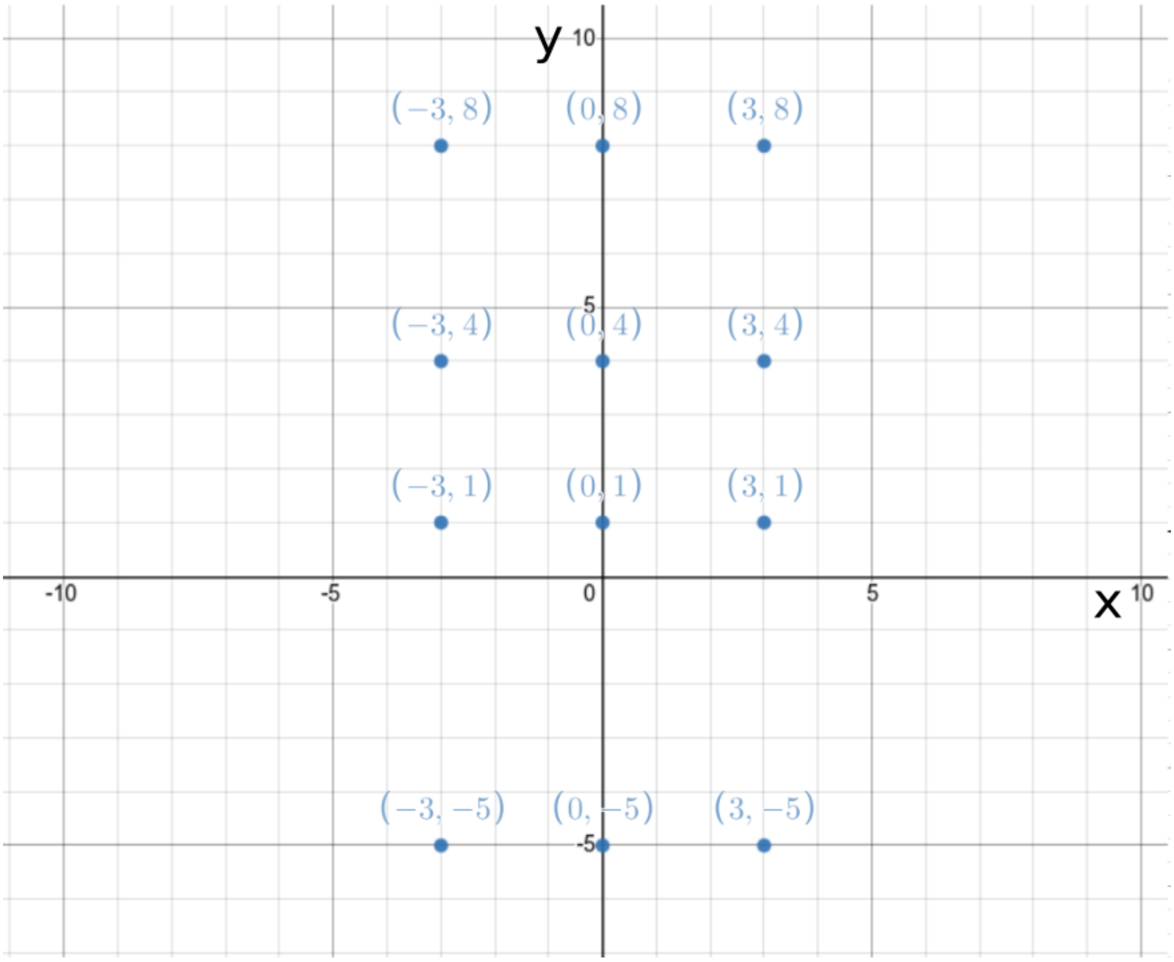
$$F_{\xi_2}(x) = \mathbb{P}\{\xi_2 < x\} = \begin{cases} \mathbb{P}\{\emptyset\} = 0, \quad x \le -5 \\ \mathbb{P}\{\xi_2 = -3\} = 0.19, \quad -5 < x \le 1 \\ \mathbb{P}\{\xi_2 = -5\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 1\} = 0.19 + 0.3 = 0.49, \quad 1 < x \le 4 \\ \mathbb{P}\{\xi_2 = -5\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 4\} = \\ = 0.19 + 0.3 + 0.16 = 0.65, \quad 4 < x \le 8 \\ \mathbb{P}\{\Omega\} = 0.19 + 0.3 + 0.16 + 0.35 = 1, \quad 8 < x \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le -5 \\ 0.19, \quad -5 < x \le 1 \\ 0.49, \quad 1 < x \le 4 \\ 0.65, \quad 4 < x \le 8 \\ 1, \quad 8 < x \end{cases}$$

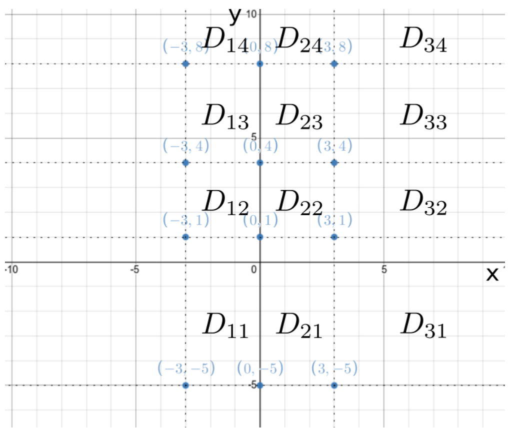


1.3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\overline{\xi}$

За означенням, $F_{\overline{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$. Тоді $F_{\overline{\xi}}(x, y) = 0$ якщо $\begin{matrix} x \le x_1 \\ y \le y_1 \end{matrix}$.
Щоб полегшити знаходження $F_{\overline{\xi}}(x, y)$ намалюємо в декартовій системі координат усі точки, що відповідають значенню вектора $\overline{\xi}$ та обчислимо значення сумісної функції розподілу в кожній області $D_{i,k}, i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 4}$.



Використаємо формулу $F_{\overline{\xi}}(x, y) = \sum\limits_{i: x_i < x} \sum\limits_{j: y_j < y} p_{ij}$.

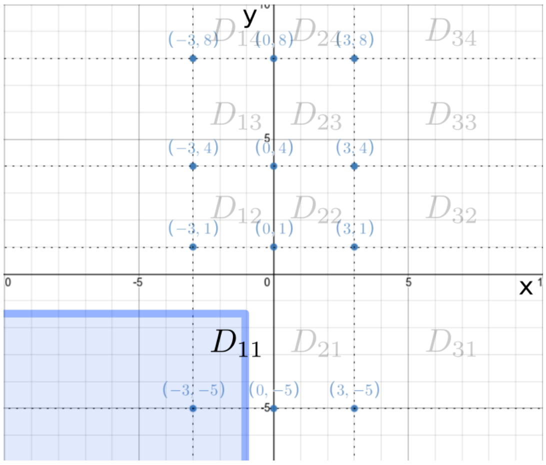


Будемо почергово розглядати зони, як на малюнку зліва.

1.$(x \le -3) \vee (y \le -5)$;
$F_{\overline{\xi}}(x, y) = 0$

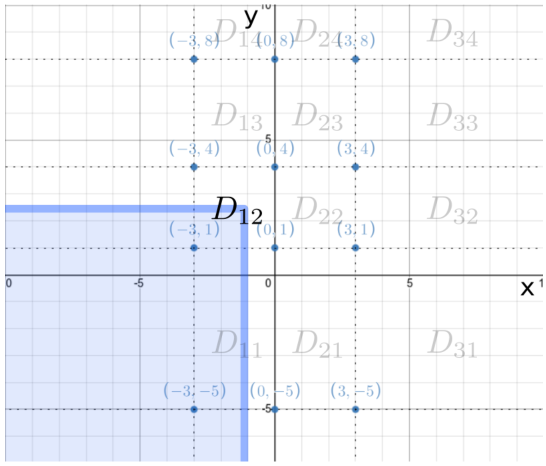
$$2. D_{1,1} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} -3 < x \le 0 \\ -5 < y \le 1 \end{matrix} \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} = 0.06$$



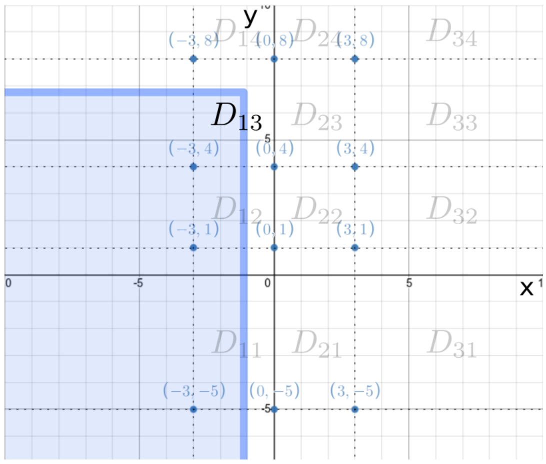
$$3. D_{1,2} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} -3 < x \le 0 \\ 1 < y \le 4 \end{matrix} \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} + \\ + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} = \\ = 0.06 + 0.04 = 0.1$$

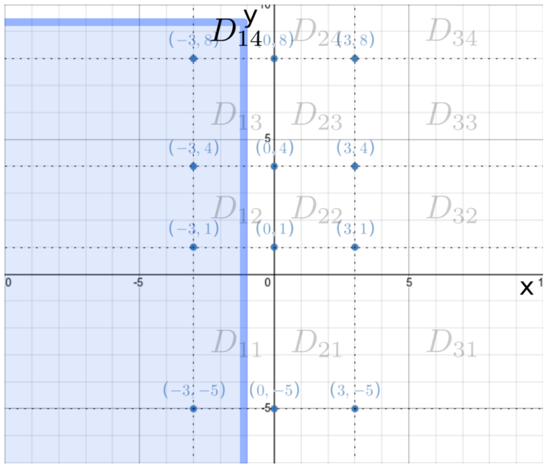


$$4. D_{1,3} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} -3 < x \le 0 \\ 4 < y \le 8 \end{matrix} \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} + \\ + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} + \\ + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 4\} = \\ = 0.06 + 0.04 + 0.06 = 0.16$$

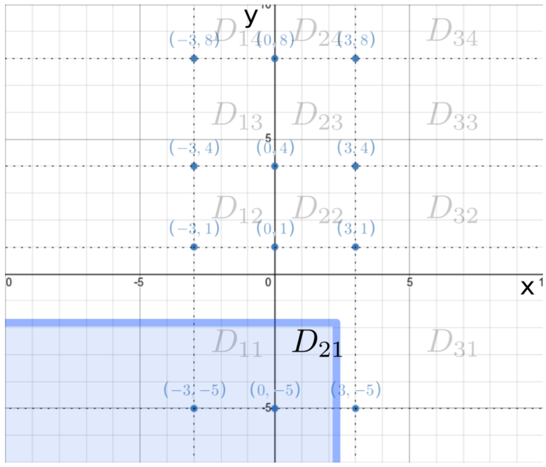


$$5.D_{1,4} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} -3 < x \leq 0 \\ 8 < y \end{matrix} \right\};$$



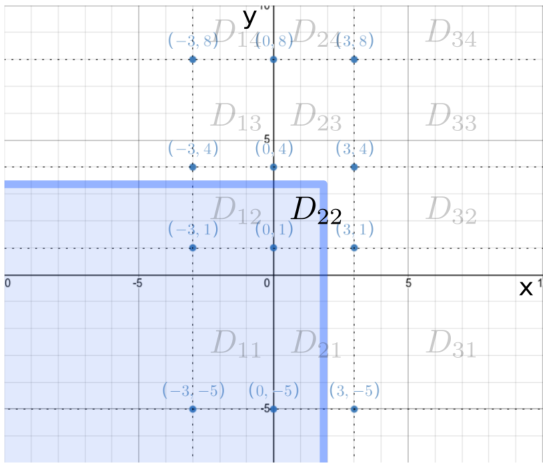
$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\right\} +$$
$$+\mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\right\} +$$
$$+\mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 4\right\} +$$
$$+\mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 8\right\} =$$
$$= 0.06 + 0.04 +$$
$$+0.06 + 0.03 = 0.19$$

$$6.D_{2,1} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 0 < x \leq 3 \\ -5 < y \leq 1 \end{matrix} \right\};$$



$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\right\} +$$
$$+\mathbb{P}\left\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\right\} =$$
$$= 0.06 + 0.01 = 0.07$$

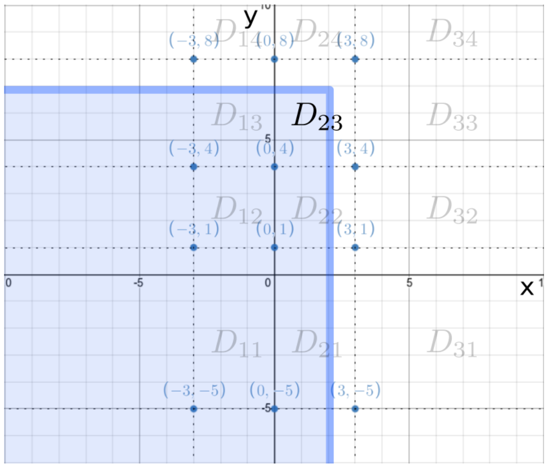
$$7.D_{2,2} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 0 < x \leq 3 \\ 1 < y \leq 4 \end{matrix} \right\};$$



$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\right\} +$$
$$+\mathbb{P}\left\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\right\} +$$
$$+\mathbb{P}\left\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\right\} +$$
$$+\mathbb{P}\left\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\right\} =$$
$$= 0.06 + 0.04 + 0.01 + 0.14 = 0.25$$

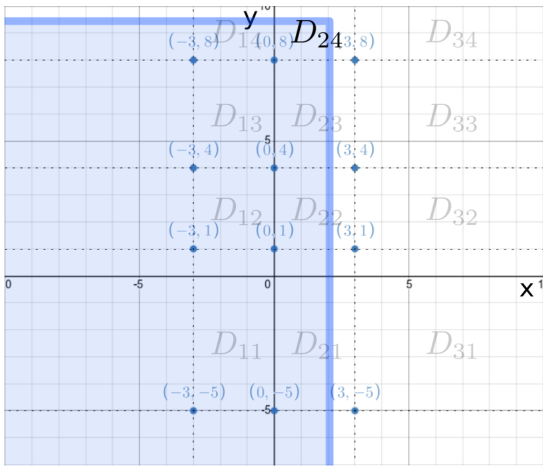
$$8. D_{2,3} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 0 < x \leq 3 \\ 4 < y \leq 8 \end{matrix} \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 4\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 4\} =$$
$$= 0.06 + 0.04 + 0.06 +$$
$$+0.01 + 0.14 + 0.04 = 0.35$$



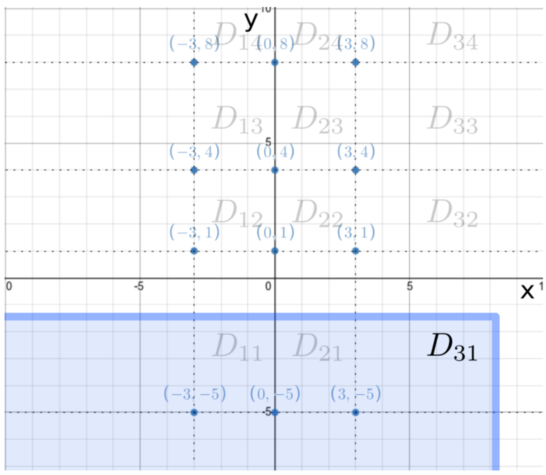
$$9. D_{2,4} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 0 < x \leq 3 \\ 8 < y \end{matrix} \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 4\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 8\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 4\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 8\} =$$
$$= 0.06 + 0.04 + 0.06 +$$
$$+0.03 + 0.01 + 0.14 +$$
$$+0.04 + 0.13 = 0.51$$

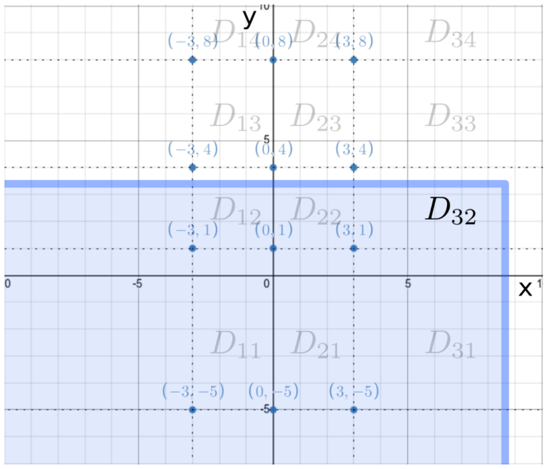


$$10. D_{3,1} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 3 < x \\ -5 < y \leq 1 \end{matrix} \right\};$$

$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -5\} =$$
$$= 0.06 + 0.01 + 0.12 = 0.19$$

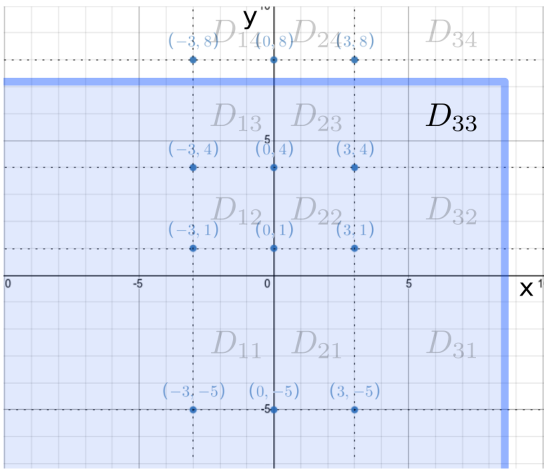


$$11.D_{3,2} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 3 < x \\ 1 < y \le 4 \end{matrix} \right\};$$



$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\} =$$
$$= 0.06 + 0.04 + 0.01 + 0.14 +$$
$$+0.12 + 0.12 = 0.49$$

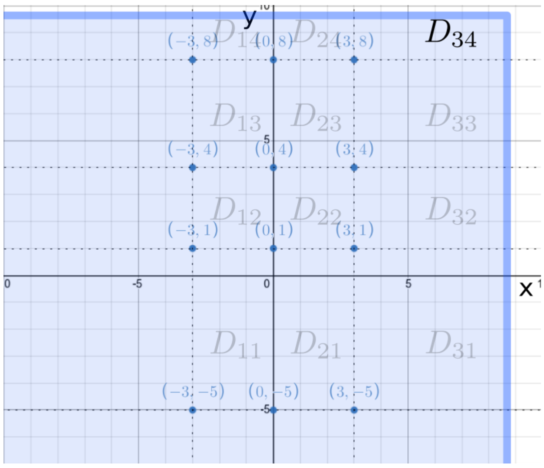
$$12.D_{3,3} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 3 < x \\ 4 < y \le 8 \end{matrix} \right\};$$



$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 4\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 4\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -5\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\} +$$
$$+\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 4\} =$$
$$= 0.06 + 0.04 + 0.06 + 0.01 +$$
$$+0.14 + 0.04 + 0.12 +$$
$$+0.12 + 0.06 = 0.65$$

$$13. D_{3,4} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} 3 < x \\ 8 < y \end{matrix} \right\};$$

$$\begin{aligned} F_{\overline{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -5\} + \\ +\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} + \\ +\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 4\} + \\ +\mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 8\} + \\ +\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -5\} + \\ +\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} + \\ +\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 4\} + \\ +\mathbb{P}\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 8\} + \\ +\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -5\} + \\ +\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\} + \\ +\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 4\} + \\ +\mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 8\} = \\ = 0.06 + 0.04 + 0.06 + 0.03 + \\ +0.01 + 0.14 + 0.04 + 0.13 + \\ +0.12 + 0.12 + 0.06 + 0.19 = 1 \end{aligned}$$



Отримали сумісну функцію розподілу, яку можна записати у вигляді таблиці.

$y \setminus x$	$x \leq -3$	$-3 < x \leq 0$	$0 < x \leq 3$	$3 < x$
$y \leq -5$	0	0	0	0
$-5 < y \leq 1$	0	0.06	0.07	0.19
$1 < y \leq 4$	0	0.10	0.25	0.49
$4 < y \leq 8$	0	0.16	0.35	0.65
$8 < y$	0	0.19	0.51	1.00

Перевірка: (властивість узгодження)

$\lim\limits_{x\to+\infty} F_{\overline{\xi}}(x,y) = F_{\xi_2}(y)$ - виконується, адже в останньому стовпчику $F_{\xi_2}(y)$.

$\lim\limits_{y\to+\infty} F_{\overline{\xi}}(x,y) = F_{\xi_1}(x)$ - иконується, адже в останній стрічці $F_{\xi_1}(x)$.

$\lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} F_{\overline{\xi}}(x,y) = 1 \quad F_{\overline{\xi}}(x,y) = 1 \quad \forall (x,y) \in D_{3,4}$

Або у вигляді сукупності:

$$F_{\overline{\xi}}(x,y)=\begin{cases}0, \quad (x\le -3)\vee(y\le -5);\\ 0.06, \quad (-3<x\le 0)\wedge(-5<y\le 1);\\ 0.1, \quad (-3<x\le 0)\wedge(1<y\le 4);\\ 0.16, \quad (-3<x\le 0)\wedge(4<y\le 8);\\ 0.19, \quad (-3<x\le 0)\wedge(8<y);\\ 0.07, \quad (0<x\le 3)\wedge(-5<y\le 1);\\ 0.25, \quad (0<x\le 3)\wedge(1<y\le 4);\\ 0.35, \quad (0<x\le 3)\wedge(4<y\le 8);\\ 0.51, \quad (0<x\le 3)\wedge(8<y);\\ 0.19, \quad (3<x)\wedge(-5<y\le 1);\\ 0.49, \quad (3<x)\wedge(1<y\le 4);\\ 0.65, \quad (3<x)\wedge(4<y\le 8);\\ 1, \quad (3<x)\wedge(8<y);\end{cases}$$

1.4. Математичні сподівання координат. Кореляційна та нормована кореляційна матриця.

а) За рядом розподілу величини ξ_1 знайдемо математичне сподівання:

$$\mathbb{E}\xi_1=\sum_{i=1}^{3}x_ip_i=-3*0.19+0*0.32+3*0.49=0.9$$

Аналогічно для ξ_2:

$$\mathbb{E}\xi_2=\sum_{j=1}^{4}y_jp_j=-5*0.19+1*0.3+4*0.16+8*0.35=2.79$$

Центр розсіювання вектора $\overline{\xi}$ – $(0.9, 2.79)$
б) Побудуємо кореляційну та нормовану кореляційну матриці.
Для дискретного вектора:

$$cov(\xi_1,\xi_2)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i\cdot y_j\cdot p_{ij}-\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_ip_{ij}\right\}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_jp_{ij}\right\}$$

$$C_{\overline{\xi}}=\begin{bmatrix}\mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1,\xi_2)\\ cov(\xi_1,\xi_2) & \mathbb{D}\xi_2\end{bmatrix}$$

Розрахуємо та внесемо до матриці всі необхідні величини:

$$
\begin{gathered}
cov(\xi_1, \xi_2) = ((-3) \cdot (-5) \cdot 0.06) + ((-3) \cdot 1 \cdot 0.04) + ((-3) \cdot 4 \cdot 0.06) + \\
+((-3) \cdot 8 \cdot 0.03) + (0 \cdot (-5) \cdot 0.01) + (0 \cdot 1 \cdot 0.14) + \\
+(0 \cdot 4 \cdot 0.04) + (0 \cdot 8 \cdot 0.13) + (3 \cdot (-5) \cdot 0.12) + \\
+(3 \cdot 1 \cdot 0.12) + (3 \cdot 4 \cdot 0.06) + (3 \cdot 8 \cdot 0.19) - \mathbb{E}\xi_1 \cdot \mathbb{E}\xi_2 = \\
= 0.9 - 0.12 - 0.72 - 0.72 - 1.8 + 0.36 + 0.72 + 4.56 - 2.511 = 0.669
\end{gathered}
$$

Знайдемо дисперсію компонент ξ_1 та ξ_2:

$$
\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot p_i - 0.9^2 = 6.12 - 0.81 = 5.31
$$

$$
\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = \sum_{j=1}^{4} y_j^2 \cdot p_j - 2.79^2 = 30.01 - 7.7841 = 22.2259
$$

Отримали кореляційну матрицю:

$$
C_{\overline{\xi}} = \begin{bmatrix} 5.31 & 0.669 \\ 0.669 & 22.2259 \end{bmatrix}
$$

Оскільки $cov(\xi_1, \xi_2) > 0$ випадкові величини ξ_1, ξ_2 є корельованими та залежними. Перевіримо додатну визначеність $C_{\overline{\xi}}$:

$$
\det C_{\overline{\xi}} = 5.31 \cdot 22.2259 - 0.669^2 = 117.571968 > 0
$$

Знайдемо коефіцієнт кореляції: $r_{\overline{\xi}} = \dfrac{cov(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2}} \approx \dfrac{0.669}{\sqrt{118.02}} \approx 0.0616$

1.5. Умовні ряди розподілу для кожної координати.

Обчислимо умовні ймовірності:

$$
\mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i | \xi_2 = y_j\right\} = \frac{\mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\right\}}{\mathbb{P}\left\{\xi_2 = y_j\right\}} = \frac{p_{ij}}{p_j}
$$

$$
\mathbb{P}\left\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = x_i\right\} = \frac{\mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\right\}}{\mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i\right\}} = \frac{p_{ij}}{p_i}
$$

Обчислюємо умовні ряди розподілу для ξ_1 та ξ_2 та результати заносимо у таблиці. Отримані дроби скорочуємо, але для зручності у кожному рядку залишаємо однаковий знаменник.

Умовні ряди розподілу ξ_1:

ξ_1	-3	0	3
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \mid \xi_2 = -5\}$	6/19	1/19	12/19
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \mid \xi_2 = 1\}$	4/30	14/30	12/30
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \mid \xi_2 = 4\}$	6/16	4/16	6/16
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \mid \xi_2 = 8\}$	3/35	13/35	19/35

Перевірка:

$$\frac{6}{19} + \frac{1}{19} + \frac{12}{19} = 1$$
$$\frac{4}{30} + \frac{14}{30} + \frac{12}{30} = 1$$
$$\frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = 1$$
$$\frac{3}{35} + \frac{13}{35} + \frac{19}{35} = 1$$

Умовні ряди розподілу ξ_2:

ξ_2	-5	1	4	8
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j \mid \xi_1 = -3\}$	6/19	4/19	6/19	3/19
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j \mid \xi_1 = 0\}$	1/32	14/32	4/32	13/32
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j \mid \xi_1 = 3\}$	12/49	12/49	6/49	19/49

Перевірка:

$$\frac{6}{19} + \frac{4}{19} + \frac{6}{19} + \frac{3}{19} = 1$$
$$\frac{1}{32} + \frac{14}{32} + \frac{4}{32} + \frac{13}{32} = 1$$
$$\frac{12}{49} + \frac{12}{49} + \frac{6}{49} + \frac{19}{49} = 1$$

1.6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Скористаємося формулами:

$$\mathbb{E}(\xi_1 \mid \xi_2 = y_j) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i \mid \xi_2 = y_j\}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2 \mid \xi_1 = x_i) = \sum_{j=1}^{4} y_j \cdot \mathbb{P}\{\xi_2 = y_j \mid \xi_1 = x_i\}$$

Обчислимо ряд розподілу $\mathbb{E}(\xi_1 \mid \xi_2)$:

$$\mathbb{E}(\xi_1 \mid \xi_2 = -5) = (-3) \cdot \frac{6}{19} + 0 \cdot \frac{1}{19} + 3 \cdot \frac{12}{19} = \frac{18}{19}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 \mid \xi_2 = 1) = (-3) \cdot \frac{4}{30} + 0 \cdot \frac{14}{30} + 3 \cdot \frac{12}{30} = \frac{24}{30} = \frac{12}{15}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 \mid \xi_2 = 4) = (-3) \cdot \frac{6}{16} + 0 \cdot \frac{4}{16} + 3 \cdot \frac{6}{16} = 0$$

$$\mathbb{E}(\xi_1 \mid \xi_2 = 8) = (-3) \cdot \frac{3}{35} + 0 \cdot \frac{13}{35} + 3 \cdot \frac{19}{35} = \frac{48}{35}$$

Перевіримо за формулою повного математичного сподівання:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)) = 0.19 \cdot \frac{18}{19} + 0.3 \cdot \frac{12}{15} + 0.16 \cdot 0 + 0.35 \cdot \frac{48}{35} = \\ = 0.18 + 0.24 + 0 + 0.48 = 0.9 = \mathbb{E}\xi_1$$

Обчислимо ряд розподілу $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$:

$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = -3) = (-5) \cdot \frac{6}{19} + 1 \cdot \frac{4}{19} + 4 \cdot \frac{6}{19} + 8 \cdot \frac{3}{19} = \frac{22}{19}$$
$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = 0) = (-5) \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{14}{32} + 4 \cdot \frac{4}{32} + 8 \cdot \frac{13}{32} = \frac{129}{32}$$
$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = 3) = (-5) \cdot \frac{12}{49} + 1 \cdot \frac{12}{49} + 4 \cdot \frac{6}{49} + 8 \cdot \frac{19}{49} = \frac{128}{49}$$

Перевіримо за формулою повного математичного сподівання:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)) = 0.19 \cdot \frac{22}{19} + 0.32 \cdot \frac{129}{32} + 0.49 \cdot \frac{128}{49} = \ = 0.22 + 1.29 + 1.28 = 2.79 = \mathbb{E}\xi_2$$

Отримали такі умовні ряди розподілу для $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$, $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$:

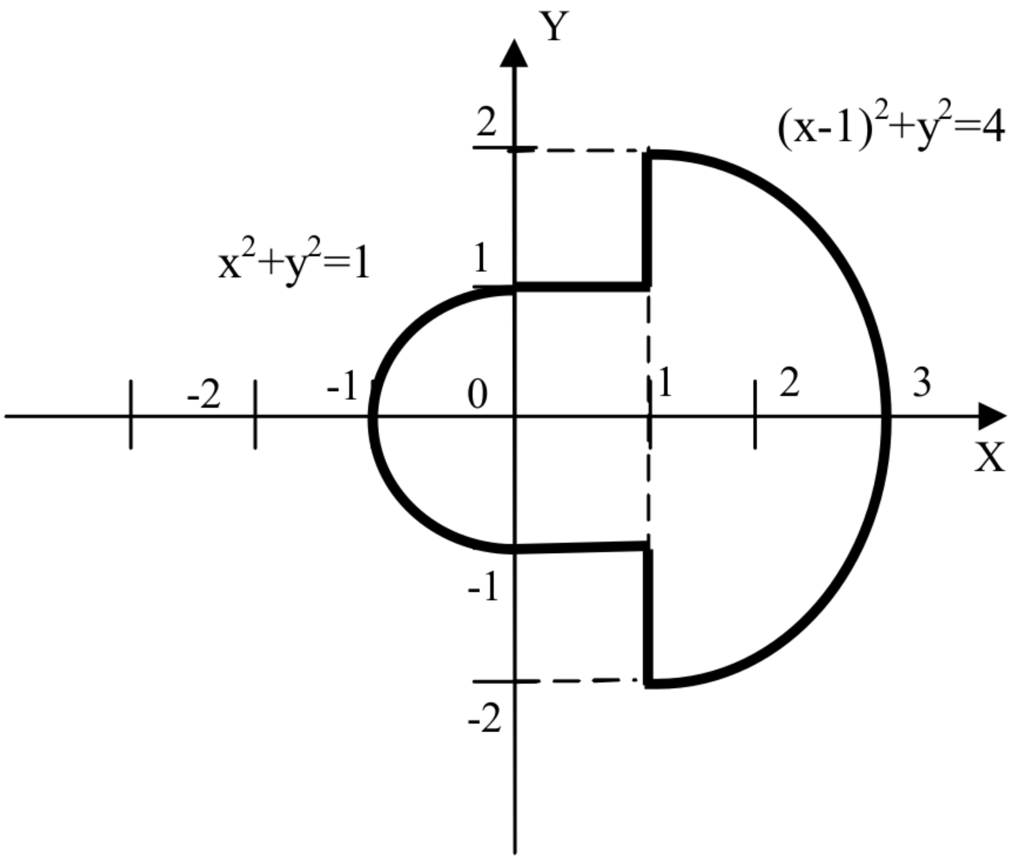
$\mathbb{E}(\xi_2\vert\xi_1)$	22/19	129/32	128/49
P	0.19	0.32	0.49

$\mathbb{E}(\xi_1\vert\xi_2)$	18/19	12/15	0	48/35
P	0.19	0.3	0.16	0.35

2. Завдання 2

Нехай неперервний випадковий вектор $\overline{\xi} = \left[\xi_1, \xi_2\right]$ рівномірно розподілений в області G.

Варіант 93



Центр півкола $x^2 + y^2 = 1$ - (0,0). Центр півкола $(x-1)^2 + y^2 = 4$ - (1, 0). Усі рівняння кривих вказано на рисунку.

Задану область можна розбити наступним чином:

$$G = \left\{ (x, y) \quad \middle| \quad \begin{array}{c} \Big((-1 \le x < 0) \wedge (-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2})\Big) \vee \\ \vee \left((0 \le x \le 1) \wedge (-1 \le y \le 1)\right) \vee \\ \vee \Big((1 \le x \le 3) \wedge (-\sqrt{4-(x-1)^2} \le y \le \sqrt{4-(x-1)^2})\Big) \end{array} \right\}$$

2.1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Спочатку, знайдемо в загальному вигляді інтеграл:

$$\int\sqrt{a^2-t^2}dt = \left|\begin{array}{c}\text{Заміна:}\\ t=a\sin(s)\\ dt=a\cos(s)ds\end{array}\right| = a^2\cdot\int\cos^2(s)ds = a^2\cdot\int\frac{\cos(2s)+1}{2}ds =$$

$$= a^2\cdot\frac{\frac{\sin(2s)}{2}+s}{2}+C = \frac{t\sqrt{a^2-t^2}+a^2\arcsin\left(\frac{t}{a}\right)}{2}+C$$

$$S_G = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy + \int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{-1}^{1}dy + \int\limits_{1}^{3}dx\int\limits_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}}dy =$$

$$= 2\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{1-x^2}dx + 2 + 2\int\limits_{1}^{3}\sqrt{4-(x-1)^2}dx =$$

$$= \left|\begin{array}{cc}\text{У I інтегралі:} & \text{У II інтегралі:}\\ x=\sin(t)\Rightarrow dx=\cos(t)dt & x-1=2\sin(t)\Rightarrow dx=2\cos(t)dt\\ t_2(0)=0\quad t_1=-\frac{\pi}{2} & t_2=\frac{\pi}{2}\quad t_1(0)=0\end{array}\right| =$$

$$= 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2(t)dt + 8\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)dt = \left(\frac{\sin(2t)}{2}+t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + 2 + 4\cdot\left(\frac{\sin(2t)}{2}+t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2\pi + \frac{\pi}{2} + 2 = 2.5\pi + 2$$

Тоді щільність вектора рівномірно розподіленого в області G:

$$f_{\overline{\xi}}(x,y) = \begin{cases}\dfrac{1}{2.5\pi+2}, & (x,y)\in G;\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}$$

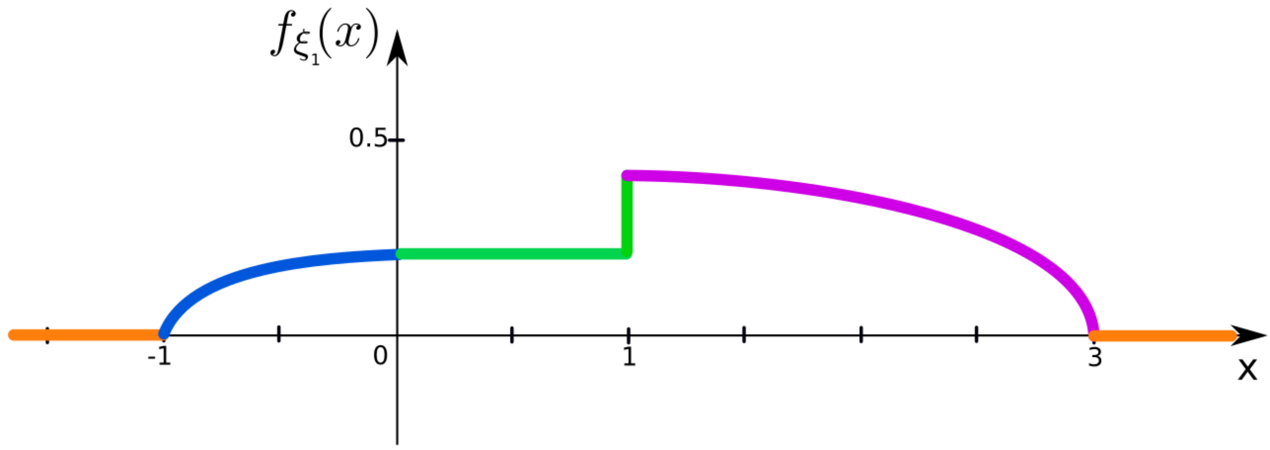
Із визначення рівномірного розподілу випливає, що умова нормування для $f_{\overline{\xi}}(x,y)$ виконана $\left(\frac{1}{S_G} * \iint\limits_G dxdy = (2.5\pi+2)\cdot\dfrac{1}{2.5\pi+2} = 1\right)$.

Обчислимо щільності координат вектора $\overline{\xi}$:

$$f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,y)dy \qquad f_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,y)dx$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le -1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi + 2} \int\limits_{-\sqrt{(1-x^2)}}^{\sqrt{(1-x^2)}} dy = \dfrac{2}{2.5\pi + 2}\sqrt{(1-x^2)}, \quad -1 < x \le 0; \\ \dfrac{1}{2.5\pi + 2} \int\limits_{-1}^{1} dy = \dfrac{2}{2.5\pi + 2}, \quad 0 < x \le 1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi + 2} \int\limits_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}} dy = \dfrac{2}{2.5\pi + 2}\sqrt{4-(x-1)^2}, \quad 1 < x \le 3; \\ 0, \quad x > 3; \end{cases}$$

Графік отриманої функції щільності:



Перевірка умови нормування:

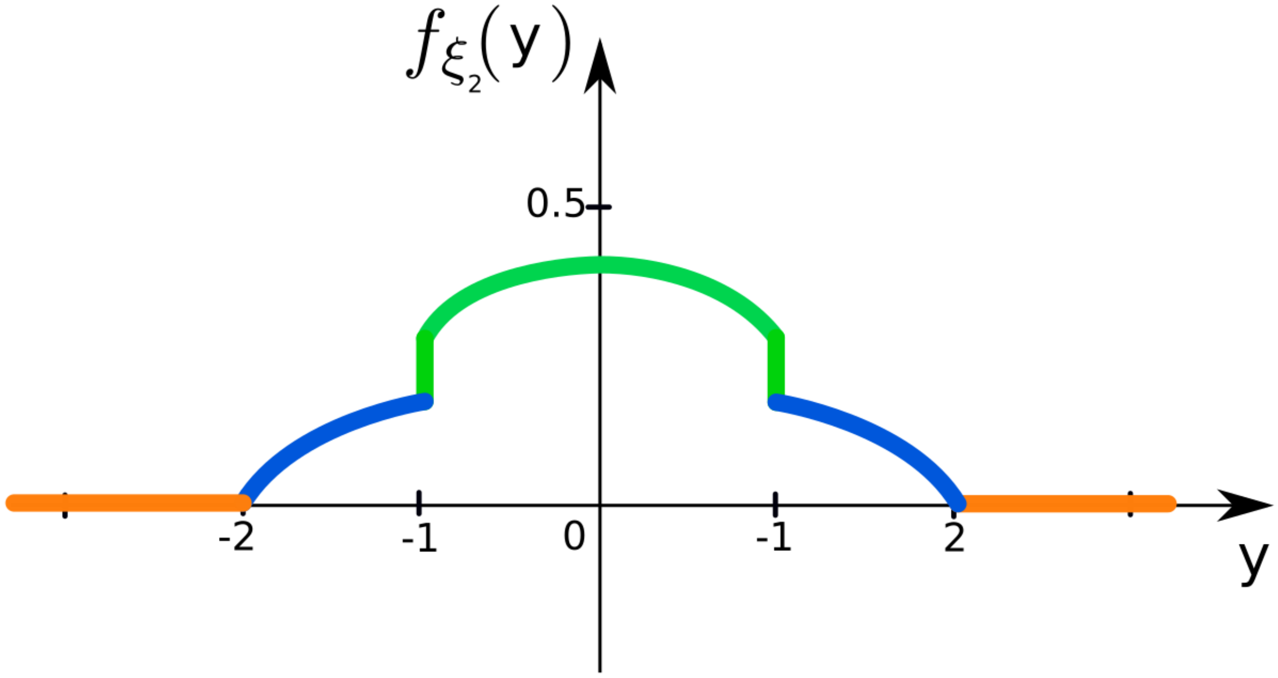
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x)dx = 0 + \frac{2}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}dx + \int\limits_{0}^{1} dx + \int\limits_{1}^{3} \sqrt{4-(x-1)^2}dx \right) =$$

$$= \frac{2}{2.5\pi + 2} \cdot \frac{(2.5\pi + 2)}{2} = 1$$

Зауваження. Вже знаходили ці інтеграли під час пошуку площі фігури.

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, \quad y \le -2; \\ \dfrac{1}{2.5\pi + 2} \int\limits_{1}^{1+\sqrt{4-y^2}} dx = \dfrac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \sqrt{4-y^2}, \quad -2 < y \le -1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi + 2} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{4-y^2}} dx = \dfrac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \left(\sqrt{4-y^2} + \sqrt{1-y^2} + 1 \right), -1 < y \le 1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi + 2} \int\limits_{1}^{1+\sqrt{4-y^2}} dx = \dfrac{1}{2.5\pi + 2} \cdot \sqrt{4-y^2}, \quad 1 < y \le 2; \\ 0, \quad y > 2; \end{cases}$$

Графік отриманої функції щільності:



Перевірка умови нормування:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y)dy = 0 + \frac{1}{2.5\pi + 2}\left(\int\limits_{-2}^{-1}\sqrt{4-y^2}dy + \int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2}+1\right)dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-2}^{-1}\sqrt{4-y^2}dy\right) = \frac{1}{2.5\pi+2}\left(\int\limits_{-1}^{1}dy + \int\limits_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}dy + \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Вже знаходили такі інтеграли за змінною } x \\ \int\limits_{-1}^{1} dy = y\Big|_{-1}^{1} = 2 \\ \int\limits_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}dy = 2\left(\frac{\sin(2t)}{2}+t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \\ \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2}+t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = (2 + \frac{\pi}{2} + 2\pi)\cdot\frac{1}{2+2.5\pi} = 1$$

2.2. Функції розподілу координат ξ_1 та ξ_2.

Нехай $F_{\xi_1}(x), F_{\xi_2}(y)$ функції розподілу координат вектора $\overline{\xi}$. Застосуємо формули:

$$F_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi_1}(t)dt \qquad F_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_2}(s)ds$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \leq -1; \\ \int\limits_{-1}^{x} \frac{2}{2.5\pi + 2}\sqrt{(1-s^2)}ds, \quad -1 < x \leq 0; \\ \frac{2}{2.5\pi+2}\left(\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{(1-s^2)}ds + \int\limits_{0}^{x} ds\right), \quad 0 < x \leq 1; \\ \frac{2}{2.5\pi+2}\left(\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{(1-s^2)}ds + \int\limits_{0}^{1} ds + \int\limits_{1}^{x} \sqrt{4-(s-1)^2}ds\right), \quad 1 < x \leq 3; \\ 1, \quad x > 3; \end{cases}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \leq -1; \\ \frac{2}{2.5\pi+2} \cdot \frac{s\sqrt{1-s^2}+\arcsin(s)}{2}\Big|_{-1}^{x}, \quad -1 < x \leq 0; \\ \frac{2}{2.5\pi+2}\left(\frac{s\sqrt{1-s^2}+\arcsin(s)}{2}\Big|_{-1}^{0} + x\right), \quad 0 < x \leq 1; \\ \frac{2}{2.5\pi+2}\left(\frac{s\sqrt{1-s^2}+\arcsin(s)}{2}\Big|_{-1}^{0} + 1 + \frac{(s-1)\sqrt{4-(s-1)^2}+4\arcsin\left(\frac{s-1}{2}\right)}{2}\Big|_{1}^{x}\right), \quad 1 < x \leq 3; \\ 1, \quad x > 3; \end{cases}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \leq -1; \\ \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi+2}, \quad -1 < x \leq 0; \\ \frac{\frac{\pi}{2}+2x}{2.5\pi+2}, \quad 0 < x \leq 1; \\ \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi+2}, \quad 1 < x \leq 3; \\ 1, \quad x > 3; \end{cases}$$

Перевіримо на неперервність у точках стику:

$$\lim_{x\to -1-} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 1-} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to -1+} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to -1+} \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi + 2} = \frac{0 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi + 2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0-} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi + 2} = \frac{0 + 0 + \frac{\pi}{2}}{2.5\pi + 2} = \frac{\pi}{5\pi + 4}$$

$$\lim_{x\to -0+} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to -0+} \frac{\frac{\pi}{2} + 2x}{2.5\pi + 2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2.5\pi + 2} = \frac{\pi}{5\pi + 4}$$

$$\lim_{x\to 1-} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{\pi}{2} + 2x}{2.5\pi + 2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2}$$

$$\lim_{x\to 1+} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} =$$

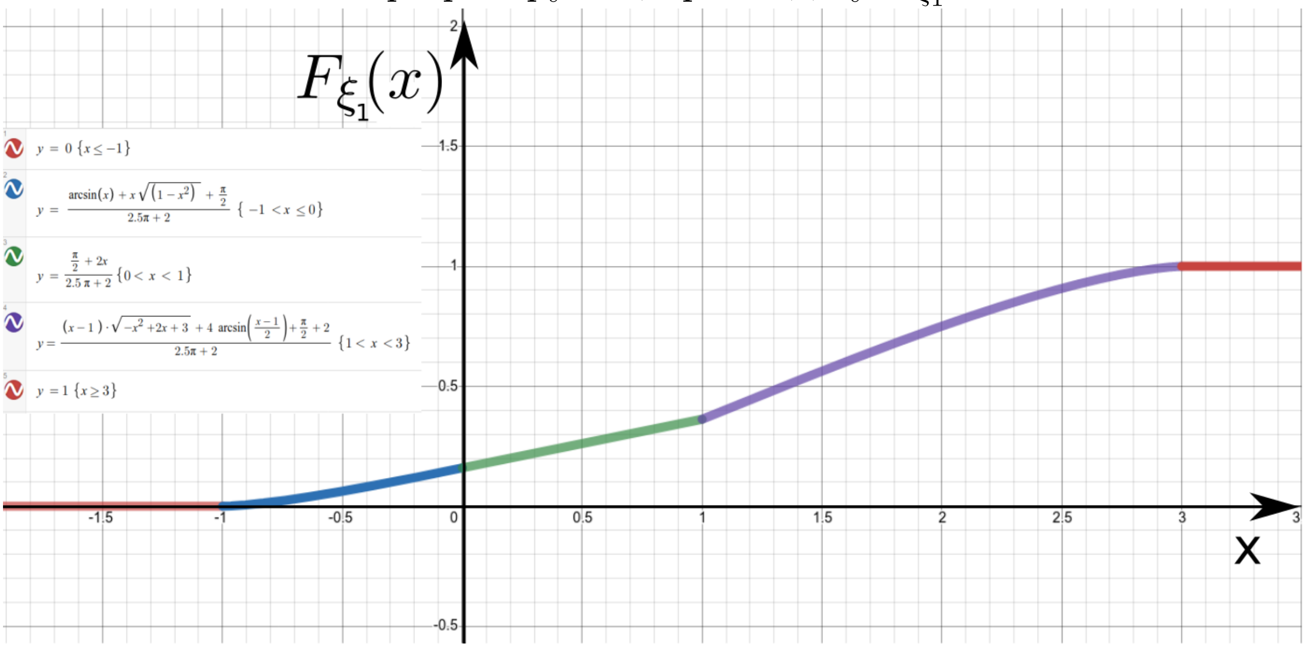
$$= \frac{0\cdot\sqrt{-s^2+2s+3} - 4\arcsin(0) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2}$$

$$\lim_{x\to 3-} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 3-} \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{0} - 4\arcsin\left(\frac{-4}{4}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} = \frac{0 - 4\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2}{2.5\pi + 2} = 1$$

$$\lim_{x\to 3+} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 3+} 1 = 1$$

Графік функції розподілу F_{ξ_1}



$$F_{\xi_2}(y)=\begin{cases} 0, \quad y\leq -2; \\ \int\limits_{-2}^{y}\dfrac{\sqrt{4-s^2}}{2.5\pi+2}ds, \quad -2<y\leq -1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\int\limits_{-2}^{-1}\sqrt{4-s^2}ds+\int\limits_{-1}^{y}\sqrt{4-s^2}+\sqrt{1-s^2}+1ds\right), -1<y\leq 1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\int\limits_{-2}^{-1}\sqrt{4-s^2}ds+\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{4-s^2}+\sqrt{1-s^2}+1ds\right)+\right. \\ \left.+\int\limits_{1}^{y}\sqrt{4-s^2}ds\right), \quad 1<y\leq 2; \\ 1, \quad y>2; \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y)=\begin{cases} 0, \quad y\leq -2; \\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\cdot\left(\dfrac{s\sqrt{4-s^2}}{2}+2\arcsin\left(\dfrac{s}{2}\right)\right)\Bigg|_{-2}^{y}, \quad -2<y\leq -1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\left[\cdot\left(\dfrac{s\sqrt{4-s^2}}{2}+2\arcsin\left(\dfrac{s}{2}\right)\right)\Bigg|_{-2}^{y}+\right. \\ \left.+\left(\dfrac{\arcsin(s)}{2}+\dfrac{s\sqrt{1-s^2}}{2}+s\right)\Bigg|_{-1}^{y}\right], -1<y\leq 1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi+2}\left[\cdot\left(\dfrac{s\sqrt{4-s^2}}{2}+2\arcsin\left(\dfrac{s}{2}\right)\right)\Bigg|_{-2}^{y}+\right. \\ \left.+\left(\dfrac{\arcsin(s)}{2}+\dfrac{s\sqrt{1-s^2}}{2}+s\right)\Bigg|_{-1}^{1}\right], \quad 1<y\leq 2; \\ 1, \quad y>2; \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, \quad y \le -2; \\ \dfrac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\dfrac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + \pi \right), \quad -2 < y \le -1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\dfrac{2\arcsin(y) + 2y\sqrt{1-y^2}}{4} + \right. \\ \left. + \dfrac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + 1.25\pi + y + 1 \right), -1 < y \le 1; \\ \dfrac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\dfrac{\pi+4}{2} + \dfrac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + \pi \right), \quad 1 < y \le 2; \\ 1, \quad y > 2; \end{cases}$$

Перевіримо на неперервність у точках стику:

$$\lim_{y\to-2-} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to 2-} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to-2+} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to 2+} \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2\pi}{5\pi+4} = \frac{-2*0 + 4\frac{\pi}{2} + 2\pi}{5\pi+4} = 0$$

$$\lim_{y\to-1-} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to-1-} \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2\pi}{5\pi+4} = \frac{-\sqrt{3} - 4\frac{\pi}{6} + 2\pi}{5\pi+4} = \frac{-\sqrt{3} + \dfrac{4\pi}{3}}{5\pi+4}$$

$$\lim_{y\to-1+} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to-1+} \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{2\arcsin(y) + 2y\sqrt{1-y^2}}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + 1.25\pi + y + 1 \right) = \frac{-\dfrac{\pi}{2} - 1\cdot 0 - 1\cdot\sqrt{3} - 4\frac{\pi}{6} + 2.5\pi}{5\pi+4} =$$

$$= \frac{-\sqrt{3} + \dfrac{4\pi}{3}}{5\pi+4}$$

$$\lim_{y\to 1-} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to 1-} \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{2\arcsin(y) + 2y\sqrt{1-y^2}}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + 1.25\pi + y + 1 \right) = \frac{\frac{\pi}{2} + 1\cdot 0 + \sqrt{3} + \frac{4\pi}{6} + 2.5\pi + 4}{5\pi+4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \frac{11\pi}{3} + 4}{5\pi+4}$$

$$\lim_{y\to 1+} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to 1+} \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{\pi+4}{2} + \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + \pi \right) =$$

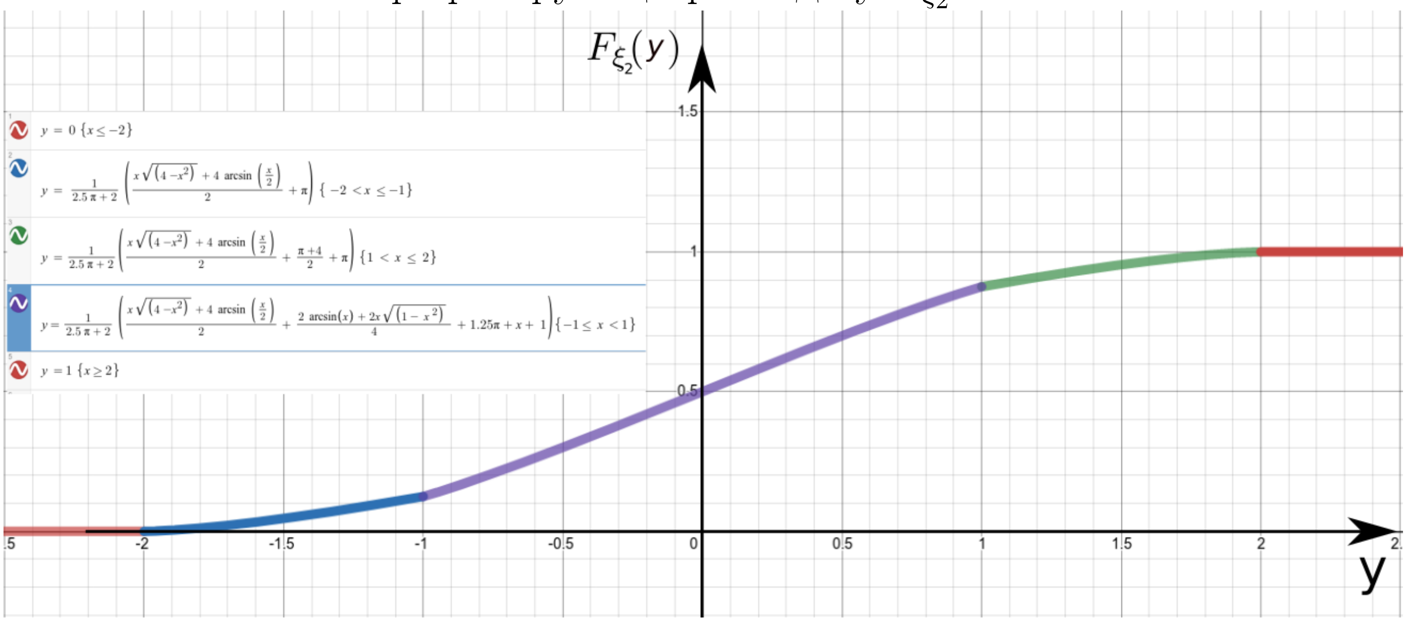
$$= \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \frac{\pi+4}{2} + \frac{\sqrt{3} + \frac{4\pi}{6} + 2\pi}{2} = \frac{\sqrt{3} + \frac{11\pi}{3} + 4}{5\pi+4}$$

$$\lim_{y\to 2-} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y\to 2-} \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot \left(\frac{\pi+4}{2} + \frac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{2} + \pi \right) == \frac{1}{2.5\pi+2} \cdot$$
$$\frac{\pi + 4 + 2 \cdot 0 + \frac{4\pi}{2} + 2\pi}{2} = \frac{5\pi+4}{4\pi+4} = 1$$
$$\lim_{y\to 2+} F_{\xi_2}(y) = 1$$

Тож, знайдені функції розподілу $F_{\xi_1}(x), F_{\xi_2}(y)$ задовольняють умові неперервності. Але, можемо дещо спростити $F_{\xi_2}(y)$ виконавши алгебраїчні перетворення:

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, \quad y \leq -2; \\ \dfrac{y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2\pi}{10\pi+4}, \quad -2 < y \leq -1; \\ \dfrac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + 2.5\pi + 2y + 2}{5\pi+4}, \\ -1 < y \leq 1; \\ \dfrac{3\pi + 4 + y\sqrt{4-y^2} + 4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}{5\pi+4}, \quad 1 < y \leq 2; \\ 1, \quad y > 2; \end{cases}$$

Графік функції розподілу F_{ξ_2}

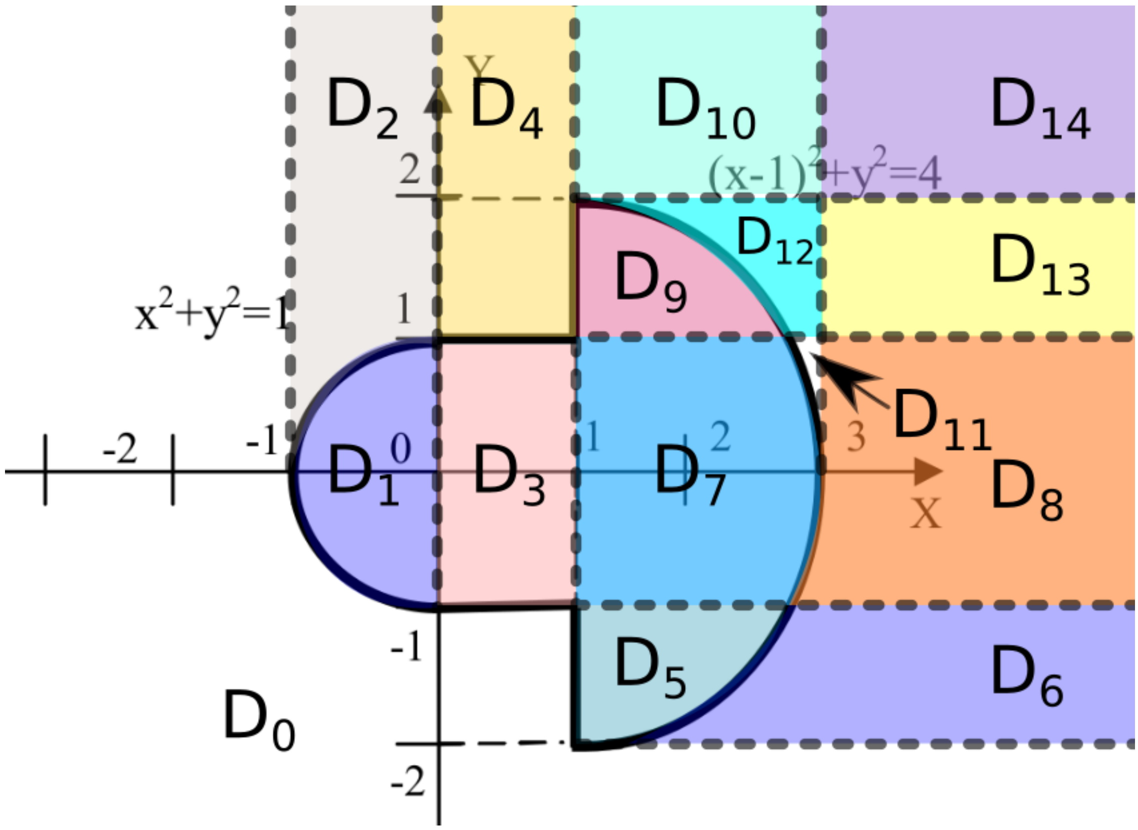


2.3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\overline{\xi}$

Згідно означення $F_{\overline{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$. Скористаємося формулою:

$$F_{\overline{\xi}}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} dt \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\overline{\xi}}(t, s) ds$$

Координатну площину XOY розіб'ємо на області $D_1, D_2, ..., D_{14}$.



1. $D_0 = \left\{ (x, y) \middle| \begin{array}{c} (x \leq -1) \vee \left((x \leq -\sqrt{1-y^2}) \wedge (y \leq -\sqrt{1-x^2}) \right) \vee \\ \vee ((0 \leq x \leq 1) \wedge (-2 \leq y \leq -1)) \vee (y \leq -2) \end{array} \right\}$
2. $D_1 = \left\{ (x, y) \middle| (y \leq 0) \wedge (x^2 + y^2 < 1) \right\}$
3. $D_2 = \left\{ (x, y) \middle| ((-1 < x \leq 0) \wedge (1 < y)) \vee \left((x \leq -\sqrt{1-y^2}) \wedge (y \geq \sqrt{1-x^2}) \right) \right\}$
4. $D_3 = \left\{ (x, y) \middle| (0 < x \leq 1) \wedge (-1 < y \leq 1) \right\}$