

## Зміст

<b>1. Лекція 1.</b>	<b>2</b>
1.1. Поява. Передмова. . . . .	2
1.2. Комплексна форма ряду Фур'є. . . . .	2
1.3. Випадок дійснозначної функції. . . . .	3
1.4. Не $2\pi$ -періодичні функції. . . . .	4
<b>2. Лекція 2.</b>	<b>5</b>
2.1. Аналіз збіжності ряду. . . . .	5
2.2. Збіжність часткових сум. . . . .	6
<b>3. Лекція 3.</b>	<b>7</b>
3.1. Рівномірна збіжність ряду Фур'є. . . . .	7
3.2. Середні по Чезаре . . . . .	7

# Ряд Фур'є

## 1. Лекція 1.

### 1.1. Поява. Передмова.

Нехай  $g(z)$  – аналітична в кільці  $K = \{z \mid 1 - \varepsilon_1 < |z| < 1 + \varepsilon_2\}; \{z \mid |z| = 1\} \subset K$ .

Розкладаємо  $g(z)$  в ряд Лорана за степенями  $z$  в цьому кільці:

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot z^n, \text{ де } C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz$$

$$z : |z| = 1 \implies z = e^{ix} \implies x \in [0, 2\pi] \implies g(z) = g(e^{ix}) = f(x)$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz = \left| \begin{array}{l} z = e^{ix} \\ dz = ie^{ix} dx \\ x \in [0, 2\pi] \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Отримали комплексну форму ряду Фур'є:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{inx}, \quad C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

### 1.2. Комплексна форма ряду Фур'є.

$f \in D[0, 2\pi]$  – періодична, інтегрова на  $[0, 2\pi]$ . За функцією  $f(x)$  будуємо ряд Фур'є:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{inx}, \quad C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Питання:

- 1) Збіжність ряду.
- 2) Якщо збігається, то зв'язок між  $S(x)$  та  $f(x)$ .

### 1.3. Випадок дійснозначної функції.

Розглянемо ряд Фур'є:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n \cdot e^{inx} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} = \left| \begin{array}{l} \text{В I сумі:} \\ n = -k \end{array} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} \cdot e^{-ikx} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} \quad (\equiv)$$

Окремо розглянемо  $C_{-k}e^{-ikx}$ :  $C_{-k}e^{-ikx} = \overline{C_k e^{ikx}}$ .

$$(\equiv) C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left( C_n e^{inx} + \overline{C_n e^{inx}} \right)}_{=2\Re(C_n e^{inx}) \in \mathbb{R}} \quad (\equiv)$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot (\cos(nx) - i \sin(nx)) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx - i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Re C_n e^{inx} &= \Re \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx - i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \right] \cdot (\cos(nx) + i \sin(nx)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cos(nx) \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx + \frac{1}{2\pi} \sin(nx) \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \end{aligned}$$

$$(\equiv) C_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx + \sin(nx) \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad \text{Отримали дійсну форму ряду Фур'є.}$$

$$f(x) \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

$$\text{де } a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

#### 1.4. Не $2\pi$ -періодичні функції.

$f - 2l$  періодична, або задана на  $[0, 2l]$ , інтегрована. Розглянемо відображення:

$$[0, 2\pi] \leftarrow [0, 2l] \quad x \in [0, 2\pi] \quad x = \frac{t}{l}\pi \quad t \in [0, 2\pi]$$

Тоді  $f(x) = f(\frac{t}{l}\pi) = g(t)$ .  $g(t)$  - задана на  $[0, 2l]$ .

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{l} \int_0^{2l} g(t) \cos\left(\frac{\pi nt}{l}\right) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{l} \int_0^{2l} g(t) \sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right) dt$$

$$g(t) = f(x) \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi nt}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} g(t) \cos\left(\frac{\pi nt}{l}\right) dt \quad b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} g(t) \sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right) dt$$

Частіше всього, зручно обчислювати коефіцієнти ряду інакше:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(t) \cos\left(\frac{\pi nt}{l}\right) dt \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(t) \sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right) dt$$

## 2. Лекція 2.

### 2.1. Аналіз збіжності ряду.

**Лема** (Рімана).  $f$  – інтегрована на  $[a, b]$  навіть в невластному сенсі.

Тобто  $\int_a^b f(x)dx$  – збігається. Тоді:

$$1) \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

$$2) \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

Надалі розглядаємо:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

**Теорема 2.1.**  $f(x)$  –  $2\pi$ -періодична, інтегрована. Тоді:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Часткова сума ряду Фур'є дорівнює:

$$S_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \cdot \frac{\sin \frac{2k+1}{2}u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

Підінтегральний множник  $\frac{\sin \frac{2k+1}{2}u}{2 \sin \frac{u}{2}} = D_k(u)$  називається *ядром Діріхле*.

Властивості ядра Діріхле:

1)  $D_k(u)$  – парна,  $2\pi$  період функції;

$$2) \int_{-\pi}^{\pi} D_k(u) du = 1;$$

## 2.2. Збіжність часткових сум.

Розглядаємо:

$$\begin{aligned} S_k(x) - C &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \cdot D_k(u) du - C \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(u) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u) - 2C] \cdot D_k(u) du \end{aligned}$$

Позначимо:  $f(x+u) + f(x-u) - 2C = g_{C,x}(u)$ . Отже:

$$S_k(x) - C = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g_{C,x}(u) D_k(u) du$$

**Теорема 2.2** (Ознака Діні для рядів Фур'є).  $f(x)$  –  $2\pi$ -періодична, інтегрована.

Якщо  $\exists \delta > 0 : \int_0^{\delta} \frac{|g_{C,x}(u)|}{u} du$  – збігається, то:  $S_{\delta}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} C$ .

**Наслідок.**  $f(x)$  – диференційована в т.  $x_0$ , тоді:

$$S_k(x_0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0) \iff f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)$$

**Наслідок.**  $f(x)$  –  $2\pi$ -періодична, інтегрована.  $x_0$  – точка розриву 1го роду ("стрибок").  $f(x)$  має в т.  $x_0$  ліву та праву похідні. Тоді:

$$S_k(x_0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (f(x_0+) + f(x_0-))$$

**Означення.**  $f(x)$  задовольняє умові Ліпшиця в околі т.  $x_0$ , якщо:

$$\forall x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) |f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

**Наслідок.**  $f(x)$  –  $2\pi$ -період., інтегрована та задов. ум. Ліпшиця в околі т.  $x_0$ . Тоді:

$$S_k(x_0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$$

### 3. Лекція 3.

#### 3.1. Рівномірна збіжність ряду Фур'є.

**Теорема 3.1.**  $f(x)$  –  $2\pi$ -періодична та кусково-неперервно диференційована.  
Тоді ряд Фур'є функції  $f(x)$  *рівномірно збігається*.

*Доведення.* Дуже велике доведення – дивіться в конспекті:)



#### 3.2. Середні по Чезаре

**Означення.**  $f(x)$  –  $2\pi$ -періодична, інтегрована.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) - \text{ряд Фур'є для } f(x);$$

$$S_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) - \text{часткові суми};$$

$$\mathcal{G}_n(x) = \frac{1}{n}(S_1(x), S_2(x), \dots, S_{n-1}(x)) - \text{середні по Чезаре}.$$

Отримаємо інтегральний вид середніх по Чезаре. Отримали:)

**Лема.**  $f(x)$  –  $2\pi$ -періодична, інтегрована.

$$S_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) - \text{часткові суми};$$

$$\mathcal{G}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) - \text{середні по Чезаре};$$

Тоді  $\mathcal{G}_n(x)$  має інтегральний вигляд:

$$\mathcal{G}_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2v) + f(x-2v)}{2} F_n(v) dv,$$

, де  $F_n(v) = \frac{\sin^2(nv)}{\pi n \sin^2 v}$  — ядро Фейєра.

**Властивості ядра Фейера:**

- 1)  $F_n(-v) = F_n(v)$ ;
- 2)  $F_n(v)$  –  $\pi$ -періодична;
- 3)  $\int_0^{2\pi} F_n(v) dv = \frac{1}{2}$ .

**Властивості коефіцієнтів ряду Фур'є.**

- 1)  $f(x)$  – непарна, задана на  $(-l; l)$ . Тоді:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx = 0;$$

- 2)  $f(x)$  – парна, задана на  $(-l; l)$ . Тоді:

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx = 0.$$

- 3)  $f(x)$  – парна, з періодом  $2l$ .

Якщо функція неперервна на  $(-l, l)$ , то вона неперервна на  $\mathbb{R}$ .

- 4)  $f(x)$  – непарна. Тоді:

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx$$

- 5)  $f(x)$  – парна. Тоді:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx$$