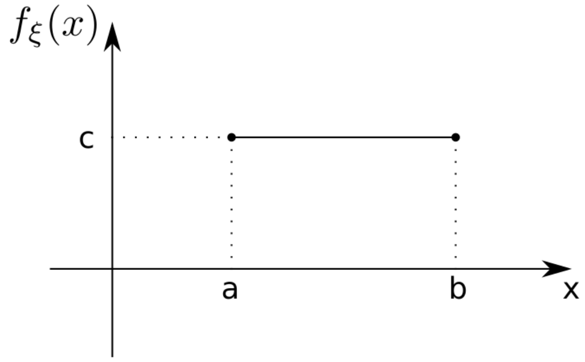
Собственно, теорвер...

Зміст

1. Абсолютно неперервні розподіли.

1.1. Рівномірний розподіл.

Рівномірний розподіл на $[a, b]$. Графік функції щільності розподілу:



Позначення: $\xi \sim U(a, b)$. Функція щільності має наступній вигляд:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c, x \in [a, b] \\ 0, x \notin [a, b] \end{cases}, \text{ де } c = \frac{1}{b-a}$$

Визначимо функцію розподілу:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; a] \\ \int\limits_a^t f_\xi(t)dt = \frac{1}{b-a}x - \frac{a}{a-b} = \frac{x-a}{b-a}, x \in (a, b] \\ 1, x \in (b; +\infty) \end{cases}$$

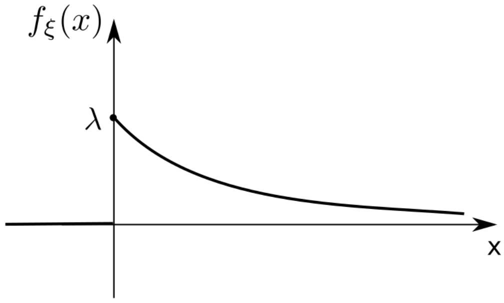
Числові характеристики:
$\mathbb{E}\xi = \int\limits_a^b x f_\xi(x)dx = \frac{b^2-a^2}{2b-a} = \frac{a+b}{2}$
$\mathbb{E}\xi^2 = \int\limits_a^b x^2 f_\xi(x)dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$
$\mathbb{D}\xi = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$
Величини залежать лише від довжини проміжку.
Нехай $[c, b] \subset [a, b]$, тоді знайдемо:

$$\mathbb{P}\{\xi \in [c, d]\} = F_\xi(d) - F_\xi(c) = \frac{d-c}{b-a}$$

1.2. Експоненціальний розподіл.

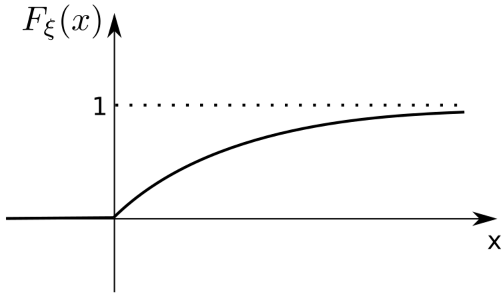
Розглядаємо $\xi \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$.
Щільність розподілу:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$



Запишемо функію розподілу:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0, \qquad x < 0 \\ F(0) + \int\limits_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$$



Знайдемо: $\mathbb{P}\left\{\xi \in [x, d]\right\} = (1 - e^{-\lambda x})\Big|_c^d = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.
Виведемо числові характеристики. Спочатку виведемо формулу $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{E}\xi^k$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k * f_\xi(x)dx = \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^k} * \Gamma(k+1) = \frac{k!}{\lambda^k}$$

Користуючись цією формулою, отримаємо числові характеристики розподілу:

$$\mathbb{E}\xi = (k = 1) = \frac{1}{\lambda}$$
$$\mathbb{E}\xi^2 = (k = 2) = \frac{2}{\lambda^2}$$
$$\mathbb{D}\xi = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Властивості Гамма-функції:

$$1.\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$
$$2.\Gamma(n) = (n-1)!$$
$$3.\Gamma(\alpha+1) = \alpha * \Gamma(\alpha)$$
$$4.\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Експоненціальна величина описує час безвідмовної роботи приладу до моменту першої відмови. Це твердження не є вірним. Чому?

Властивості експоненціального розподілу.
1. Відсутність післядії.

$$\xi \sim Exp(\lambda) \Rightarrow \begin{matrix} \forall t, h > 0 \\ \mathbb{P}\{\xi > t + h \big| \xi > t\} = \mathbb{P}\{\xi > h\} \end{matrix}$$

Доведення.

$$\mathbb{P}\{\xi > t+h \big| \xi > t\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi > t+h, \xi > t\}}{\mathbb{P}\{\xi > t\}} = \frac{\mathbb{P}\{\xi > t+h\}}{\mathbb{P}\{\xi > t\}} = \frac{e^{-\lambda(t+h)-e^{-\lambda\infty}}}{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda\infty}} =$$

$$= e^{-\lambda h} - e^{-\lambda\infty} = \mathbb{P}\left\{\xi > h\right\}$$

■

2. Стійкість відносно min.

$$\xi_1, \xi_2 ..., \xi_n \text{ - незалежні.} \begin{pmatrix} \xi_1 \sim Exp(\lambda_1) \\ \xi_2 \sim Exp(\lambda_2) \\ ... \\ \xi_n \sim Exp(\lambda_n) \end{pmatrix} \Rightarrow \min\left\{\xi_1, \xi_2, ., ., \xi_n\right\} \sim Exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$$

Доведення.

$$F_{min(\xi_1,...,\xi_n)}(x) = \mathbb{P}\left\{\min\left(\xi_1, ..., \xi_n\right) < x\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\min\left(\xi_1, ..., \xi_n\right) \geq x\right\} =$$

$$1 - \mathbb{P}\left\{\xi_1 \geq x, ..., \xi_n \geq x\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\xi_1 \geq x\right\} \cdot ... \cdot \mathbb{P}\left\{\xi_n \geq 1\right\} = 1 - e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x} \cdot ... \cdot e^{-\lambda_n x} =$$

$$= F_{Exp(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n)}(x), x \geq 0$$

■

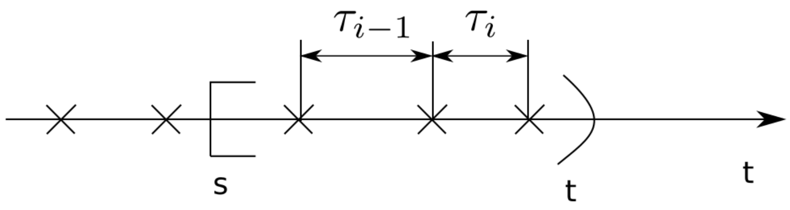
Використання: нехай є прилад, що складається з n блоків. Для коректної роботи приладу необхідно коректна робота всіх блоків.
Позначимо: ξ_i - час роботи блоку $i, i = 1, ..., n$.
Час роботи всього приладу: $\xi = \min\left\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right\}$.

Приклад. Прилад - 10 блоків. Кожний з них з ймовірністю 0.99 може пропрацювати 1000 годин. Знайти середній час роботи всього приладу та ймовірність того, що він пропрацює 500 год.
Розглянемо блок і-тий:
$\xi_i = Exp(\lambda_i)$.
$\mathbb{P}\left\{\xi_i \geq 1000\right\} = 0.99 = e^{-1000\lambda} \Longrightarrow \lambda = \frac{\ln 0.99}{-1000} \approx 10^{-5}$
$\mathbb{E}\xi_i = \frac{1}{\lambda} = 10^5$
Для всього приладу:
$\xi = \min\left\{\xi_1, ..., \xi_n\right\} \sim Exp(\sum_{i=1}^{10} \lambda_i) = Exp(10^{-4})$
$\mathbb{E}\xi = 10^4 \qquad \mathbb{P}\left\{\xi \geq 500\right\} = e^{-500*10^{-4}} = e^{-0.005} \approx 0.95$

3. Inter-arrival times dependency.

Теорема 1.1. Розглянемо потік Пуассона з інтенсивністю

$$\lambda \Rightarrow N(s,t) \sim Pois(\lambda(t-s))$$



τ_i- inter-arrival times. $\Rightarrow (\tau_i, i \in \mathbb{Z})-$ незалежні, та $Exp(\lambda)$.

1.3. Гаусівський (нормальний) розподіл.

Стандартний Гаусівський розподіл. Позначення:

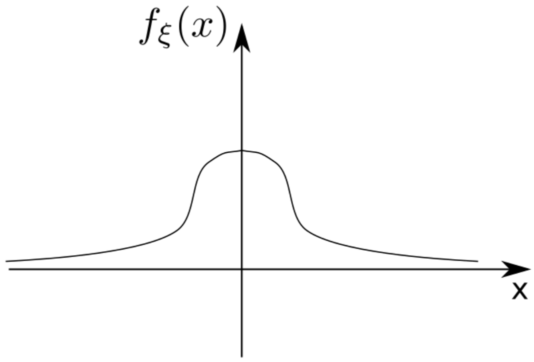
$$\xi \sim N(0, 1^2)$$

Щільність розподілу: $f_\xi(x) = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. З умови нормування та властивостей Гамма-функції:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 2C\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \begin{vmatrix} \dfrac{x^2}{2} = t \\ x = \sqrt{2t} \\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{2t}} \end{vmatrix} = 2C\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{t}} =$$

$$= \sqrt{2}C\int_0^{\infty} t^{-1/2}e^{-t}dt = \sqrt{2}C\Gamma(1/2) = \sqrt{2\pi}C \Longrightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Остаточно,
щільність розподілу:
$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Знайдемо числові характеристики розподілу:
$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$ (Функція щільності парна)
$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} 2te^{-t} \frac{dt}{\sqrt{2t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} t^{1/2} e^{-t} dt =$
$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(3/2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = 1$
Для гаусівського розподілу: $N(a, \sigma^2)$, де $a = \mathbb{E}\xi \quad \sigma = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t) dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi(x)$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функція Лапласа aka **CDF** (cumulative distr. function).
$\xi \sim N(0, 1)$. Знайдемо $\mathbb{P}\left\{\xi \in [b, c]\right\}, \mathbb{E}\xi^k, k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\left\{\xi \in [b, c]\right\} = F_\xi(c) - F_\xi(b) = \Phi(c) - \Phi(b)$$

$$k = 2n, n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}\xi^k = \int\limits_{0}^{+\infty} x^k e^{-x^2/2} dx = \frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} t^{\frac{k-1}{2}} e^{-t} dt = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{(\pi)}} \Gamma(\frac{k+1}{2}) =$$

$$= \frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{k-1}{2} \cdot \frac{k-3}{2} \cdot ... \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(k-1)!!}{2^{\frac{k}{2}}} \cdot \sqrt{\pi} = (k-1)!!$$

$$\mathbb{E}\xi^k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} (k-1)!!, & k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2n+1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Перейдемо до загального гаусівського розподілу.
Загальний гаусівський розподіл.

Означення. Візьмемо, що $\xi_0 \sim N(0, 1)$ - стандартна гаусівська величина.
ξ називається гаусівською величиною: $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, якщо $\xi = a + \sigma\xi_0$ - існує та справедливе перетворення стандартної гаусівської величини.

Числові характеристики гаусівського розподілу:
$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(a + \sigma\xi_0) = a$
$\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}(a + \sigma\xi) = \sigma^2 \mathbb{D}\xi = \sigma^2$
$F_\xi(x) = \mathbb{P}\left\{\xi < x\right\} = \mathbb{P}\left\{a + \sigma\xi < x\right\} = \mathbb{P}\left\{\xi_0 < \frac{x-a}{\sigma}\right\} = F_{\xi_0}(\frac{x-a}{\sigma}) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-a}{\sigma})$
$\mathbb{P}\left\{\xi \in [b, c]\right\} = F_\xi(c) - F_\xi(b) = \Phi(\frac{c-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{b-a}{\sigma})$

Знаючи $F_\xi(x)$ знайдемо вираз для щільності розподілу:

$$f_\xi(x) = F`\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\frac{x-a}{\sigma})^2/2} \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E_{N(a,\sigma^2)} = \frac{\mathbb{E}\left(\xi - \mathbb{E}\xi\right)^4}{\left(\mathbb{D}\xi\right)^2} - 3 = \begin{vmatrix} \xi = a\sigma\xi_0 \\ \mathbb{E}\xi = a \end{vmatrix} = \frac{\sigma^4 \mathbb{R}\xi_0^4}{\sigma^4} - 3 = \mathbb{E}\xi_0^4 - 3 = 0$$

Правило "3σ". $\xi \sim (a, \sigma^2)$ Знайдемо: $\mathbb{P}\left\{|\xi - a| < 3\sigma\right\} =$
$= \mathbb{P}\left\{\xi \in (a - 3\sigma; a + 3\sigma)\right\} = \Phi(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma} - \Phi(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma})) = 2\Phi(3) \approx 0.9974$
Тобто, у багатьох практичних випадках, гаусівська величина відповідає нерівності $|\xi - a| < 3\sigma$ з великою вірогідністю.

Теорема 1.2 (Центральна гранична теорема). Розглянемо $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - незалежні, мають однаковий розподіл. Якщо $\mathbb{E}\xi_i = 0$ та $\mathbb{D}\xi_1 = 1$:

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{\sqrt{n}} \underset{n \to \infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} N(0, 1)$$

Гаусівська випадкова величина добре описує результат дії великої кількості випадкових факторів, дія кожного з яких окремо є досить малою.

2. Випадкові вектори

Розглядаємо:

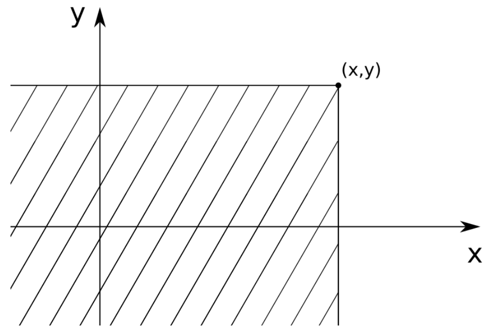
$$\vec{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

Означення. Випадковий вектор - система випадкових величин $\xi_1 ... \xi_n$, що задані на спільному ймовірністному просторі $(\Omega, F, \mathbb{P})$.

Функція розподілу: $F_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_n) = \mathbb{P}\left\{\xi_1 < x_1, ..., \xi_n < x_n\right\}$.

$$\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

$$F_{\overline{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\left\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\right\}$$



2.1. Властивості функції розподілу.

1. $F_{\overline{\xi}}(x,y) \in [0,1] \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
2. $F_{\overline{\xi}}$ - неспадна для кожного аргументу. Тобто:

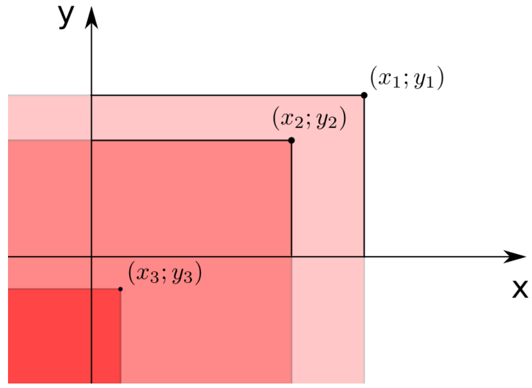
$$F_{\overline{\xi}}(x_1,y) \leq F_{\overline{\xi}}(x_2,y) \text{ при } x_1 \leq x_2;$$
$$F_{\overline{\xi}}(x,y_1) \leq F_{\overline{\xi}}(x,y_2) \text{ при } y_1 \leq y_2.$$

$$\mathbb{P}\left\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < y\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\xi_1 < x_2, \xi_2 < y\right\}$$

3, $F_{\overline{\xi}}$ - неперервна зліва за кожним аргументом.
4a.

В одновимірному: В багатовимірному:

$$\lim_{x\to-\infty} F_{\xi} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to-\infty} F_{\overline{\xi}}(x,y) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} F_{\xi} = 1 \qquad \qquad \lim_{y\to-\infty} F_{\overline{\xi}}(x,y) = 0$$



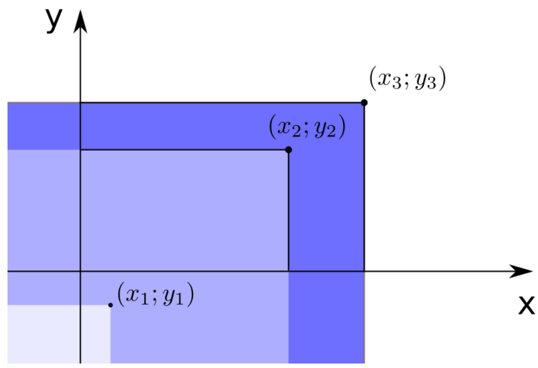
Доведення. $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\overline{\xi}}(x_n,y_n) = 0$, якщо $x_n \to \infty$ або $y_n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} F_{\overline{\xi}}(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{n\geq1}(\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n)\right\} = \mathbb{P}\left\{\emptyset\right\} = 0$$

■

4b.

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F_{\overline{\xi}}(x,y) = 1$$



Доведення.

$$\lim_{n\to\infty} F_{\overline{\xi}}(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{n\geq1}(\xi_1 < x_n, \xi_2 < y_n)\right\} = \mathbb{P}\left\{\Omega\right\} = 1$$

■

4c.

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \in \mathbb{R}}} F_{\overline{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\left\{\xi_2 < y\right\} = F_{\xi_2}(y)$$

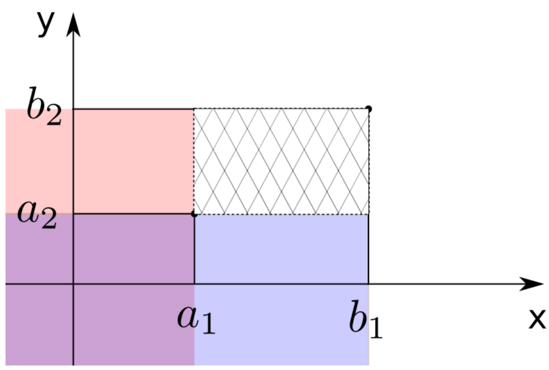
$$\lim_{\substack{y \to +\infty \\ x \in \mathbb{R}}} F_{\overline{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\left\{\xi_1 < x\right\} = F_{\xi_1}(x)$$

Означення. $\overline{\xi} = \begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{bmatrix}$ $F_{\overline{\xi}}(x,y)$ – **сумісна функція розподілу.**

ξ_1 - випадкова величина. F_{ξ_1} -**маргінальна функція розподілу** ξ_1.
Щоб отримати маргінальну функцію розподілу, потрібно відправили "зайві" аргументи до $+\infty$.

5. В одновимірному випадку:

$$\mathbb{P}\left\{\xi \in [a,b)\right\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$

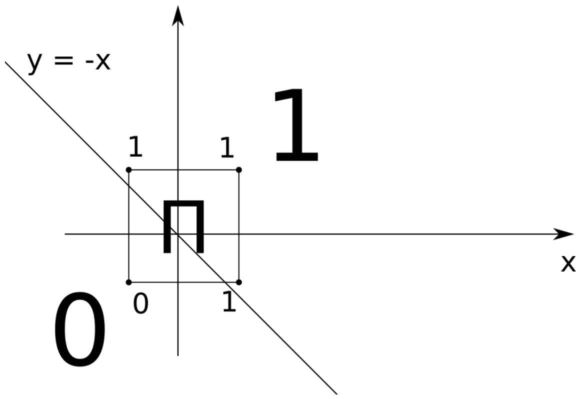


У багатовимірному випадку нас цікавить вірогідність $\mathbb{P}\left\{\xi_1 \in [a_1,b_1), \xi_2 \in [a_2,b_2)\right\}$ (користуємося правилом знаходження приросту функції 2-ох змінних):

$$\mathbb{P}\left\{\xi_1 \in [a_1,b_1), \xi_2 \in [a_2,b_2)\right\} = \mathbb{P}\left\{\overline{\xi} \in \ \Pi\right\} =$$
$$= F_{\overline{\xi}}(b_1,b_2) - F_{\overline{\xi}}(b_1,a_2) - F_{\overline{\xi}}(b_1,a_2) + F_{\overline{\xi}}(a_1,a_2)$$

Приклад.

$$F(x,y) = \begin{cases}0, x+y \le 0 \\ 1, x+y > 0\end{cases}$$



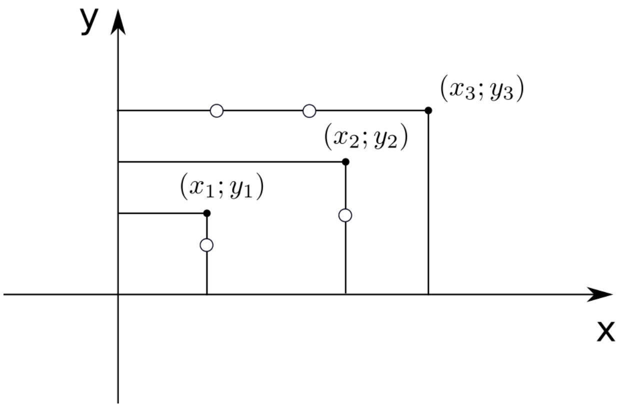
Задана функція не є функцією розподілу. Розглянемо прямокутник П.

2.2. Дискретні та неперервні випадкові вектори.

2.2.1. Дискретні випадкові вектори.

Означення. $\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ ... \\ \xi_n \end{bmatrix}$ називають дискретним(неперервним), якщо усі його координати - дискретні(неперервні) випадкові величини.

$\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ ... \\ \xi_n \end{bmatrix}$ - дискретний вектор. $p_{ij} = \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}$



$\xi_1 \backslash \xi_2$	y_1	...	y_j	...	y_n
x_1	p_{11}	...	p_{1j}	...	p_{1n}
...	...	...	...	...	...
x_i	p_{i1}	...	p_{ij}	...	p_{in}
...	...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	...	p_{mj}	...	p_{mn}

2.2.2. Неперервні випадкові вектори.

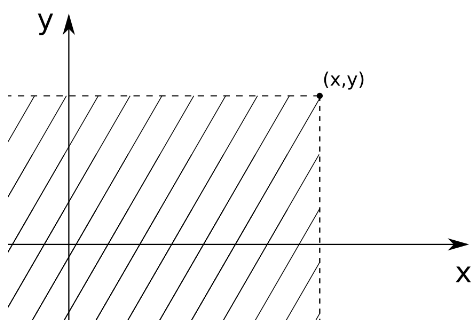
ξ - неперервна $\Leftrightarrow F_\xi$ - неп. функція $\Leftrightarrow \mathbb{P}\{\xi = x\} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Означення. $\overline{\xi}$ - неперервний вектор, якщо $\mathbb{P}\{\xi = \overline{x}\} = 0 \quad \forall \overline{x}$

Означення. $\overline{\xi}$ - абсолютно неперервний вектор, якщо

$$\exists f : F_\xi = \int\limits_{-\infty}^{x} ... \int\limits_{-\infty}^{x_n} f_{\overline{\xi}}(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n = \mathbb{P}\{\xi_1 < x_1, ..., \xi_n < x_n\}$$

$$F_{\xi_1,\xi_2}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_1,\xi_2}(s, t) ds dt$$



2.2.3. Властивості щільності розподілу:

1. $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\xi_1,\xi_2}(x,y)}{\partial x \partial y}$ - в точках, де похідна існує.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dxdy = 1$

Доведення.

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dxdy = 1$$

$$F_{\xi_1,\xi_2}(x,y) \underset{x,y\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

■

3. $\mathbb{P}\left\{\bar{\xi} \in B\right\} = \iint\limits_B f_{\bar{\xi}}dxdy$, якщо B - квадрована множина.

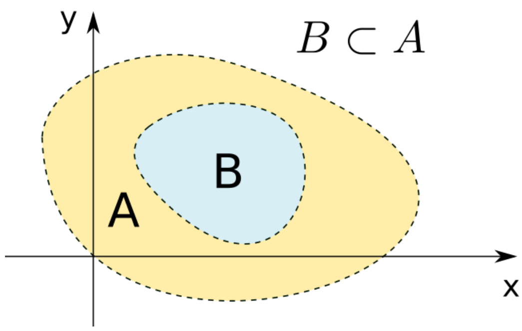
Доведення. Доведемо спочатку для прямокутників $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

$$\mathbb{P}\left\{\bar{\xi} \in B\right\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_2, b_2) = \iint\limits_B f_{\bar{\xi}}dxdy$$

■

2.3. Рівномірний розподіл на площині.

$$\bar{\xi} \sim U(A) \Leftrightarrow f_{\bar{\xi}} = \begin{cases} c, (x,y) \in A \\ 0, (x,y) \notin A \end{cases}$$



$$1 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f_\xi(x,y)dxdy = c \cdot S(A) \Rightarrow c = \frac{1}{S(A)}$$

$$\boxed{f_{\bar{\xi}} = \begin{cases} \frac{1}{S(A)}, (x,y) \in A \\ 0, (x,y) \notin A \end{cases}}$$

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\xi} \in B\right\} = \iint\limits_B f_{\overline{\xi}(x,y)} dxdy = \iint\limits_B \frac{1}{S(A)} dxdy = \frac{S(B)}{S(A)}$$

2.4. Маргінальна щільність

$$\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \qquad f_{\overline{\xi}} \text{ - щільність} \qquad f_{\overline{\xi}}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,y)dy$$

Доведення.

$$\int\limits_C f_{\xi_1} dx = \mathbb{P}\left\{\xi_1 \in C\right\} = \mathbb{P}\left\{(\xi_1, \xi_2) \in C \times \mathbb{R}\right\} = \int\limits_C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,y)dxdy$$

■

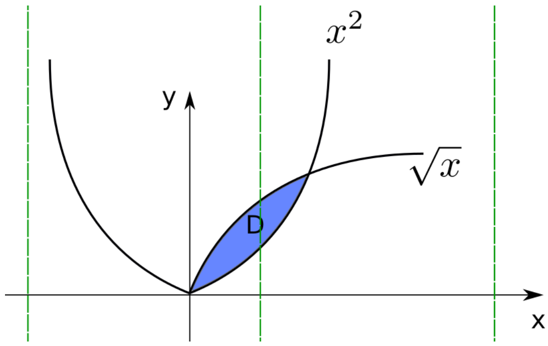
Приклад.

$$f_{\overline{xi}}(x,y) = \begin{cases} 3, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}$$

За умовою нормування:

$$S(D) = \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$f_{\xi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}dy$$



1. $x \in (-\infty; 0)$ $x \in (1; +\infty)$ $\quad f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 0dy = 0$

2. $x \in [0,1] \quad f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} 3dy = 3(\sqrt{x} - x^2)$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ 3(\sqrt{x} - x^2), x \in [0,1] \end{cases}$$

Перевірка: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1} dx = 3 \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = 1$.

Аналогічно для $f_{\xi_2}(y)$.

2.5. Числові характеристики випадкових векторів.

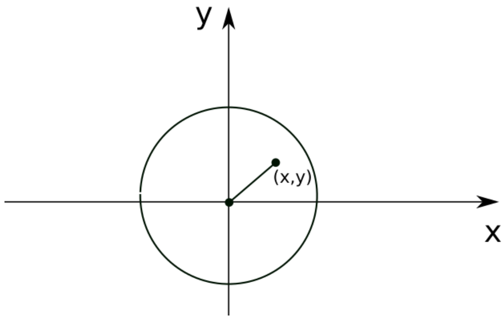
$$\mathbb{E}\xi_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\overline{\xi}}(x,y)dy \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\overline{\xi}}(x,y)dxdy$$

$$\mathbb{E}\xi_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\overline{\xi}}(x,y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\overline{\xi}}(x,y)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\overline{\xi}}(x,y)dy$$

Таким чином, за подвійним інтегралом рахувати числові характеристики зручніше, адже ми можемо вибрати найпростіший вигляд.

Приклад. Точка розподілена в одиничному крузі, для якого $f_{\overline{\xi}}(x,y)$ пропорційеа відстані до границі круга. Знайти $\mathbb{D}\xi_1, \mathbb{D}\xi_2$.

$$f_{\overline{\xi}}(x,y) = \begin{cases} (1-\sqrt{x^2+y^2})k, (x,y) \in \bigcirc \\ 0, (x,y) \notin \bigcirc \end{cases}$$



$$1 = k \iint\limits_{\bigcirc} (1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy = k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1-\rho)\rho d\rho = \frac{\pi k}{3} \Longrightarrow k = \frac{3}{\pi}$$

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}\xi)^2 = \iint\limits_{\bigcirc} x^2 \frac{3}{\pi}(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

2.6. Коваріація та її властивості.

$$\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{E}\xi_1, \mathbb{E}\xi_2 . \mathbb{D}\xi_1, \mathbb{D}\xi_2$$

Маэстро, что с Вами?

Означення. Коваріація (кореляційний момент) - $cov(\xi_1, \xi_2)$.

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_2)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_2) - \mathbb{E}\xi_1\xi_2$$

Коваріяція дискретного випадкового вектора.

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} - \left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}\right\} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij}\right\}$$

Коваріяція неперервного випадкового вектора.

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xy \cdot f_{\overline{\xi}} dxdy - \iint\limits_{\mathbb{R}^2} x \cdot f_{\overline{\xi}} dxdy \cdot \iint\limits_{\mathbb{R}^2} y \cdot f_{\overline{\xi}} dxdy$$

Властивості коваріації.

1. $cov(\xi, \xi) = \mathbb{D}\xi$.
2. Якщо ξ_1, ξ_2 - незалежні , то $cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) = 0$

Означення. ξ_1 та ξ_2 наз. некорельованими, якщо $cov(\xi_1, \xi_2) = 0$.

3. $cov(\xi_1, \xi_2) = cov(\xi_2, \xi_1)$ (симетричність).
4. $cov(\xi, c) = 0$
5. $cov(\alpha\xi_1' + \beta\xi_1'', \xi_2) = \mathbb{E}(\alpha\xi_1' + \beta\xi_1'' - \mathbb{E}(\alpha\xi_1' + \beta\xi_1''))(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2) = \alpha cov(\xi_1', \xi_2) + \beta cov(\xi_1'', \xi_2)$
Отримали: Коваріація є білінійним симетричним функціоналом.
6. Якщо ξ_1, ξ_2 - незалежні, то $\mathbb{D}(\xi_1 \pm \xi_2) = \mathbb{D}\xi_1 \pm \mathbb{D}\xi_2$.
Якщо існує залежність: $\mathbb{D}(\xi_1 \pm \xi_2) = \mathbb{E}((\xi_1 \pm \xi_2) - \mathbb{E}(\xi_1 \pm \xi_2))^2 = \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1) \pm (\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)) = \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)^2 + (\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)^2 \pm 2(\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)(\xi_2 - \mathbb{E}\xi_2)) = \mathbb{D}\xi_1 + \mathbb{D}\xi_2 \pm 2cov(\xi_1, \xi_2)$
7. $cov(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A\mathbb{I}_B) - (\mathbb{E}\mathbb{I}_A)(\mathbb{E}\mathbb{I}_B) = \mathbb{P}\{A \cap B\} - \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}$
8. Нерівність Коші-Буняковського.

$$|cov(\xi_1, \xi_2)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2}$$

2.7. Коваріаційна матриця вектора та її властивості

ξ : дисперсія $\mathbb{D}\xi = \mathbb{R}\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$
$\overline{\xi}$: коваріаційна матриця $C_{\overline{\xi}} = \mathbb{E}(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})^T$

$$C_{\overline{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) & \cdots & cov(\xi_1, \xi_n) \\ cov(\xi_2, \xi_1) & \mathbb{D}\xi_2 & \cdots & cov(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\xi_n, \xi_1) & cov(\xi_n, \xi_1) & \cdots & \mathbb{D}\xi_n \end{bmatrix}$$

1. $C_{\overline{\xi}}$ - симетрична матриця.
2. A - квадратна матриця $n \times n$, симетрична.
A - невід'ємно визначена $\Leftrightarrow$ $(A\overline{x}, \overline{x}) \geq \forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n$ $C_{\overline{\xi}}$ - невід'ємно визначена. $(C_{\overline{\xi}}, \overline{\xi}) = (\mathbb{E}(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})(\mathbb{E}(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})^T \overline{x}, \overline{x}) = \mathbb{E}\left|\left|(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})^T \overline{x}\right|\right|^2 \geq 0.$
Застосування невід'ємної визначеності.

$$\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \qquad C_{\overline{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & cov(\xi_1, \xi_2) \\ cov(\xi_1, \xi_2) & \mathbb{D}\xi_2 \end{bmatrix} - \text{ невід'ємно визначена}$$

Застосуємо критерій Сільвестра:

$$\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2 - cov^2(\xi_1, \xi(2)) \geq 0 \Longrightarrow |cov(\xi_1, \xi_2)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi_1 \cdot \mathbb{D}\xi_2}$$

Що означає виродженість коваріаційної матриці? $\Leftrightarrow \det C_{\overline{\xi}} = 0$:

$$\det C_{\overline{\xi}} = 0 \Leftrightarrow \exists \overline{x} \in \mathbb{R}^n : \left(C_{\overline{\xi}}, \overline{\xi}\right) = 0 \Leftrightarrow C_{\overline{\xi}} - \text{не додатня, невід'ємно визначена}$$

Доведення.

$$\det C_{\overline{\xi}} = 0 \Rightarrow KerC_{\overline{\xi}} \neq \left\{\vec{0}\right\} \Rightarrow \exists \overline{x} \neq 0 : C_{\overline{\xi}}\overline{x} = 0 \Rightarrow \left(C_{\overline{\xi}}\overline{x}, \overline{x}\right) = 0$$

$$\exists \overline{x} \neq 0 : \left(C_{\overline{\xi}}\overline{x}, \overline{x}\right) = 0 \Rightarrow \exists \overline{y} \neq 0 : \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

$$\left(C_{\overline{\xi}}\overline{x}, \overline{x}\right) = 0 = (\Omega\overline{y}, \overline{y}) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2 \Leftrightarrow \exists \lambda_i = 0 \Rightarrow \det C_{\overline{\xi}} = 0$$

■

Теорема 2.1. $C_{\overline{\xi}}$ є виродженою т.т.т.к між $\xi_1, ..., \xi_n$ є афінна залежність. Тобто:

$$\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + ... + \lambda_n\xi_n = c$$

Доведення.

$$\exists \overline{x} \neq 0 : \left(C_{\overline{\xi}}\overline{x}, \overline{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists \overline{\xi} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n : \left(\mathbb{E}(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi})^T \cdot \overline{x}, \overline{x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\mathbb{E}(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi}) \cdot \overline{x}, (\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi}) \cdot \overline{x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}\left|\left|\left(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi}\right)^T \overline{x}\right|\right|^2 = 0 \Leftrightarrow \left|\left|\left(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi}\right)^T \overline{x}\right|\right|^2 = 0 \quad \text{м.н.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\overline{\xi} - \mathbb{E}\overline{\xi}\right)^T \overline{x} = 0 \Leftrightarrow (\xi_1 - \mathbb{E}\xi_1)\, x_1 + ... + (\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)x_n = 0 \Leftrightarrow$$

$\exists x_1, ..., x_n$ не всі з яких дорівнюють нулю:

$$\Leftrightarrow x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n = x_1\mathbb{E}\xi_1 + ... + x_n\mathbb{E}\xi_n = c \Leftrightarrow$$

Візьмемо $x_i = \lambda_i$: $\lambda_1\xi_1 + ... + \lambda_n\xi_n = c \Leftrightarrow$ афінна залежність. ■

Розглянемо $cov(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)$.
Застосуємо нерівність Коші-Буняковського: $|cov(\xi,\eta)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}$

$$\boxed{r_{\xi,\eta} = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}} \text{ - коефіцієнт кореляції між } \xi \text{ та } \eta.}$$

$$-1 \leq r_{\xi,\eta} \leq 1$$

Коефіцієнт показує "силу" лінійної залежності між ξ та η.

$$r_{\xi,\eta} = 0 \Leftrightarrow cov(\xi,\eta) \Leftrightarrow \xi \text{ та } \eta\text{- некорельовані.}$$

$$r_{\xi,\eta} = \pm 1 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \mathbb{D}\xi & cov(\xi,\eta) \\ cov(\xi,\eta) & \mathbb{D}\eta \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det C_{\xi,\eta} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta - cov(\xi,\eta) = 0 \Leftrightarrow |r_{\xi,\eta}| = 1$$

Теорема 2.2. $r_{\xi,\eta} = \pm 1$ т.т.т.к. $\eta = k\xi + b$, де $k, b \in R$
При цьому $\begin{matrix} r_{\xi,\eta} + 1 \Rightarrow k > 0 \\ r_{\xi,\eta} - 1 \Rightarrow k < 0 \end{matrix}$

Доведення.

$$r_{\xi,\eta} = \frac{cov(\xi, k\xi + b)}{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}(k\xi + b)} = \frac{k\mathbb{D}\xi}{\sqrt{k^2 \cdot \mathbb{D}^2\xi}} = \frac{k}{|k|} = \begin{cases} 1, k > 0 \\ -1, k < 0 \end{cases}$$

■

2.8. Незалежність випадкових величин

Означення. Випадкові величини ξ, η називають незалежними, якщо події $\{\xi \in [a,b]\}, \{\eta \in [a,b]\}$ є незалежними $\forall a \leq b, c \leq d$
Зокрема, якщо ξ, η - дискретні:

$$\begin{matrix} \xi \in \{x_1, ..., x_n\} \\ \eta \in \{y_1, ..., y_n\} \end{matrix} \qquad \{\xi = x_i\} \perp\!\!\!\perp \{\eta = y_j\} \quad \begin{matrix} \forall i = \overline{1, m} \\ \forall j = \overline{1, n} \end{matrix}$$

Теорема 2.3. ξ, η - незалежні $\Leftrightarrow F_{\xi,\eta} = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$

Доведення. Нехай ξ, η - незалежні $\Leftrightarrow \forall a \leq b, c \leq d : \mathbb{P}\{\xi \in [a,b], \eta \in [c,d]\} = \mathbb{P}\{\xi \in [a,b]\} \cdot \mathbb{P}\{\eta \in [c,d]\} \Rightarrow \mathbb{P}\{\xi \in [a,b), \eta \in [c,d)\} = \mathbb{P}\{\xi \in [a,b)\} \cdot \mathbb{P}\{\eta \in [c,d)\}$
$\mathbb{P}\{\xi < b, \eta < d\} = \mathbb{P}\{\xi < b\} \cdot \mathbb{P}\{\eta < d\} \Leftrightarrow F_{\xi,\eta}(b,d) = F_\xi(b) \cdot F(\eta)(d)$
Нехай навпаки: $F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x) - F_\eta(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\{\xi \in [a,b), \eta \in [c,d)\} = F_{\xi,\eta}(d,b) - F_{\xi,\eta}(b,c) - F_{\xi,\eta}(a,d) + F_{\xi,\eta}(a,c) =$$

$$= F_\xi(b)F_\eta(d) - F_\xi(b)F_\eta(c) - F_\xi(a)F_\eta(d) + F_\xi(a)F_\eta(c) =$$

$$= (F_\xi(b) - F_\xi(a))(F_\eta(d) - F_\eta(c)) = \mathbb{P}\{\xi \in [a,b)\} \cdot \mathbb{P}\{\eta \in [c,b)\}$$

■

Теорема 2.4. Для абсолюно неперервного вектора $\begin{bmatrix}\xi & \eta\end{bmatrix}^T$

$$\xi \perp\!\!\!\perp \eta \Leftrightarrow f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Доведення.

$$\begin{array}{ll} 1. & F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y) \Longrightarrow f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y) \\ 2. & f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y) \Longrightarrow F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y) \end{array} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

2.

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(s,t) ds dt = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_\xi(s) \cdot f_\eta(t) ds dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_\xi(s) ds \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(t) dt = F_\xi(s) \cdot F_\eta(t)$$

1.

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)) = \frac{\partial}{\partial x}(F_\xi(x) \cdot f_\eta(y)) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$$

■

2.9. Умовні розподіли та умовні математичні сподівання

2.9.1. Дискретний вектор

$\xi_1 \backslash \xi_2$	y_1	...	y_j	...	y_n
x_1	p_{11}	...	p_{1j}	...	p_{1n}
...	...	...	...	...	...
x_i	p_{i1}	...	p_{ij}	...	p_{in}
...	...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	...	p_{mj}	...	p_{mn}

Розподіли ξ_2 за ξ_1

$$\mathbb{P}\left\{\xi_2 = y_j | \xi_2 = x_i\right\} = \frac{\mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\right\}}{\mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_i\right\}} = $$

$$= \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_i j}$$

$\xi_1 \backslash \xi_2$	y_1	...	y_j	...	y_n	
$P\{\xi_2 \vert \xi_1 = x_1\}$	$\frac{p_{11}}{\sum_{j=1}^{n} p_i j}$	...	$\frac{p_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} p_i j}$	...	$\frac{p_{1n}}{\sum_{j=1}^{n} p_i j}$	-----> ряд розподілу ξ_2 за ξ_1 = x_1
...	...	...	...	...	...	
$P\{\xi_2 \vert \xi_1 = x_m\}$	$\frac{p_{i1}}{\sum_{j=1}^{n} p_i j}$	...	$\frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} p_i j}$	...	$\frac{p_{in}}{\sum_{j=1}^{n} p_i j}$	-----> ряд розподілу ξ_2 за ξ_1 = x_i
...	...	...	...	...	...	
$P\{\xi_2 \vert \xi_1 = x_i\}$	$\frac{p_{m1}}{\sum_{j=1}^{n} p_i j}$	...	$\frac{p_{mi}}{\sum_{j=1}^{n} p_i j}$	...	$\frac{p_{mn}}{\sum_{j=1}^{n} p_i j}$	-----> ряд розподілу ξ_2 за ξ_1 = x_n

$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbb{P}\left\{\xi_2 = y_j | \xi_1 = x_i\right\} = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_{ik}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j p_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}}$$

ξ_1	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_m
$\mathbb{E}_{\xi_2 \vert \xi_1 = x_k}$	$\frac{\sum_{j=1}^{n} y_j p_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} p_{1j}}$	$\cdots$	$\frac{\sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}$	$\cdots$	$\frac{\sum_{j=1}^{n} y_j p_{mj}}{\sum_{j=1}^{n} p_{mj}}$ $\longrightarrow$ ряд розподілу $\mathbb{E}(\xi_2 \vert \xi_1)$
$\mathbb{P}\left\{\xi_1 = x_k\right\}$	$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{n} p_{mj}$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)] = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j \cdot p_{1j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{1j}} \cdot \sum_{j=1}^{n} p_{1j} + \ldots + \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j \cdot p_{mj}}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{mj}} \cdot \sum_{j=1}^{n} p_{mj} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij} = \mathbb{E}\xi_2$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)] = \mathbb{E}\xi_2 \qquad \mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)] = \mathbb{E}\xi_1$$

2.9.2. Абсолютно неперервний вектор

$$\overline{\xi}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} \qquad f_{\overline{\xi}}(x,y) - \text{ сумісна щільність розподілу.}$$

$f_{\xi_2|\xi_1}(y|y) = f_{\xi_2|\xi_1=x}(y)$ - умовна щільність другої координати за першою.

$F_{\xi_2|\xi_1=x}(y)$ - умовна функція розподілу ξ_2 за умови $\xi_1 = x$.
$F_{\xi_2|\xi_1=x}(y) = \mathbb{P}\left\{\xi_2 < y|\xi_1 = x\right\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi_1=x,\xi_2<y\}}{\mathbb{P}\{\xi_1=x\}} = \frac{0}{0}$

$$F_{\xi_2|\xi_1=x}(y) = \lim_{\varepsilon\to\infty}\mathbb{P}\left\{\xi_2|\xi_1\in[x,x+\varepsilon)\right\} = \frac{\mathbb{P}\left\{\xi_1\in[x,x+\varepsilon),\xi_2\in(-\infty,y)\right\}}{\mathbb{P}\left\{\xi_1\in[x,x+\varepsilon)\right\}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int\limits_x^{x+\varepsilon}ds\int\limits_{-\infty}^{y}f_{\overline{\xi}}(s,t)dt}{\int\limits_x^{x+\varepsilon}f_{\xi_1}(s)ds} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\cdot\int\limits_x^{x+\varepsilon}ds\int\limits_{-\infty}^{y}f_{\overline{\xi}}(s,t)dt}{\varepsilon\cdot\int\limits_x^{x+\varepsilon}f_{\xi_1}(s)ds} = \boxed{\frac{\int\limits_{-\infty}^{y}f_{\overline{\xi}}(x,t)dt}{f_{\xi_1}(x)} = F_{\xi_2|\xi_1=x}(y)}$$

Знаючи умовну функцію розподілу, можемо знайти умовну щільність:

$$f_{\xi_2|\xi_1=x} = F'_{\xi_2|\xi_1=x}(y) = \frac{f_{\overline{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_1}(x)}$$

Знайдемо умовне математичне сподівання ξ_2 за ξ_1

$$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1=x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_{\xi_2|\xi_1=x}dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\cdot\frac{f_{\overline{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_1}(x)}dy = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_{\overline{\xi}}(x,y)dy}{f_{\xi_1}(x)}$$

$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$ - випадкова величина, яка спочатку визначає, куди попала умова (чому дорівнює $x \longleftarrow \xi_1$), а далі визначає $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1=x)$.
$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$ - набуває значення $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1=x)$, коли ξ_1 набула значення x.

$$\xi_1 \longrightarrow x \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_2|\xi_1) \longrightarrow \mathbb{E}(\xi_2|\xi_1=x)$$

$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)$ є функцією від ξ_1. Якою? $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1=x)$
$\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1) = \Psi(\xi_1)$, де $\Psi(x) = \mathbb{E}(\xi_2|\xi_1=x)$

Формула повного математичного сподівання ($?\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)] = \mathbb{E}\xi_2?$)

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1)] = \mathbb{E}\Psi(\xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x)\cdot f_{\xi_1}(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_{\overline{\xi}}(x,y)dy}{f_{\xi_1}(x)}\cdot f_{\xi_1}(x)dx = \mathbb{E}\xi_2$$

3. Характеристичні функції

ξ - випадкова величина. Загальна характеристика такої величини - функція розподілу. Існує для кожної величинию. Також є характеристики, такі як ряд розподілу та щільність розподілу - існують не завжди. Введемо ще одну характеристику, яка буде існувати для будь-якої випадкової величини.

Означення. Характеристична функція випадкової величини.

$$\chi_\xi(t) = \mathbb{E}(\cos(t\xi) + i\sin(t\xi)) = \mathbb{E}(e^{it\xi})$$

$$\boxed{X_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}}$$

Як шукати? Дискретний випадок: $\sum\limits_{i=1}^{n(\infty)} e^{itx_i}p_i$

Для абсолютно неперервної величини: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f_\xi(x)dx$

3.1. Властивості характеристичних функцій

ξ - випадкова величина. $\chi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{et\xi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^itxf_\xi(x)dx$

1. Характеристична функція є унікальною характеристикою ймовірнісного розподілу.
2. $\chi_\xi(0) = 1 \qquad \chi_\xi(0) = \mathbb{E}e^0 = 1.$
3. $|\chi_\xi(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\left|\mathbb{E}e^{it\xi}\right| = |\mathbb{E}\cos(t\xi) + i\mathbb{E}\sin(t\xi)| = \sqrt{\mathbb{E}\cos(t\xi)^2 + \mathbb{E}\sin(t\xi)^2} = 1$$

4. χ_ξ - неперервна за t для ξ - абсолютно неперервна випадкова величина.

$$\chi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f_\xi(x)dx \quad \longleftarrow \quad \chi_\xi(t+h) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t+h)x}f_\xi(x)dx$$

$$(\chi_\xi - \text{ непервна в т. } t) \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0}\chi_\xi(t+h) = \chi_\xi(t)$$

Для $\lim\limits_{h\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t+h)x}f_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f_\xi(x)dx$, треба щоб $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f_\xi(x)dx$ збігався рівномірно на $t \in \mathbb{R}$. $\left|e^{itx}\cdot f_\xi(x)\right| = |f_\xi(x)| = f_\xi(x) = M(x)$- мажорантний ряд.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} M(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1 < \infty$$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx$ - збігається рівномірно за озн. Вейерштрасса.

5. $\xi_1 \perp\!\!\!\perp \xi_2 \Longrightarrow \chi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \chi_{\xi_1}(t) \cdot \chi_{\xi_2}(t)$

6. Якщо $\exists \mathbb{E}\xi^n$, то $\mathbb{E}\xi^n = \frac{1}{i^n} \cdot \chi_\xi^{(n)}(0)$.

Доведення. В неперервному випадку.

$$\mathbb{E}\xi^n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_\xi(x)dx$$

$$\chi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx$$

$$\chi^{(n)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (ix)^n e^{itx} f_\xi(x)dx$$

Але потрібна рівномірна збіжність. Скористаємося озн. Вейерштрасса:

$$\left|(ix)^n e^{itx} f_\xi(x)\right| = |x|^n \cdot f_\xi(x) = M(x) :$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} M(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^n \cdot f_\xi(x)dx < \infty$$

$$\chi^{(n)}(0) = i^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_\xi(x)dx = i^n \cdot \mathbb{E}(\xi^n)$$

$\blacksquare$