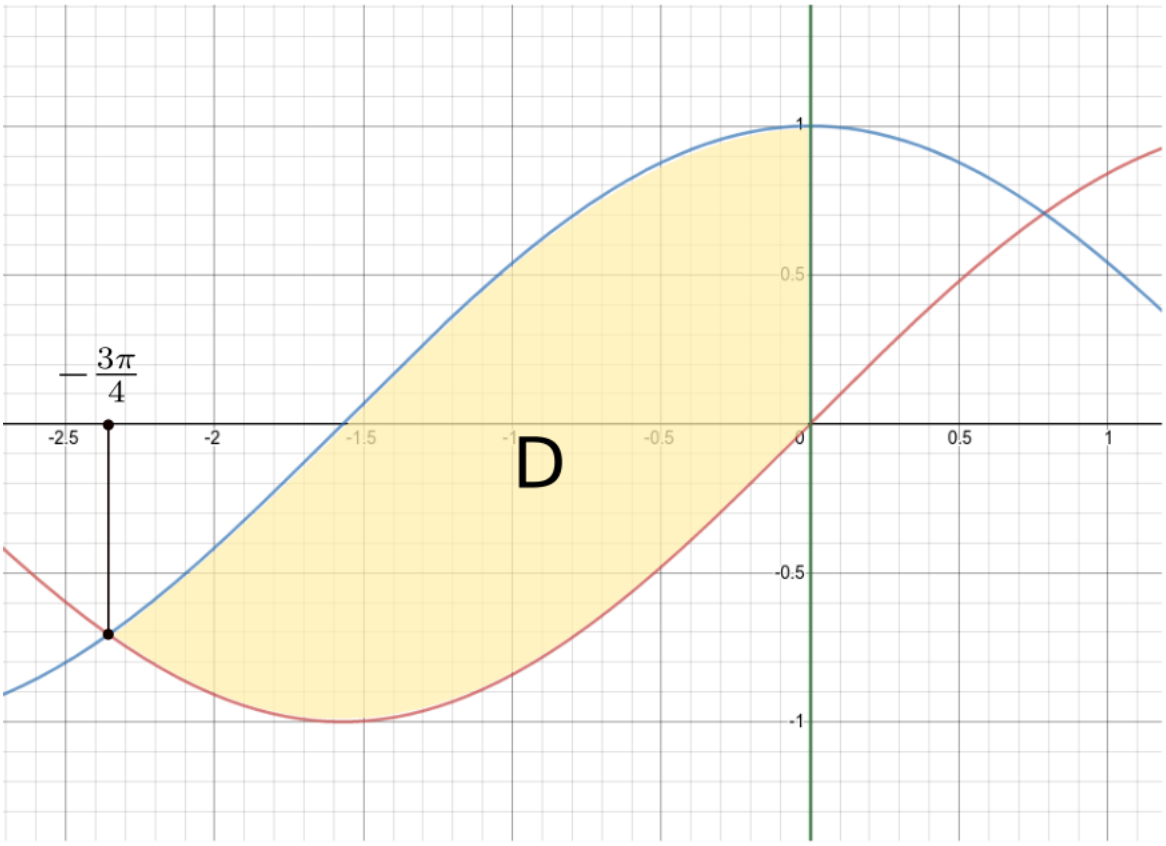
Розрахункова робота № 2

Терещенко Денис КА-96

Варіант - 27

1,27, Знайти площу фігури, що обмежена даними лініями.

$$y = \sin(x) \quad y = \cos(x) \quad x = 0, (x \leq 0)$$

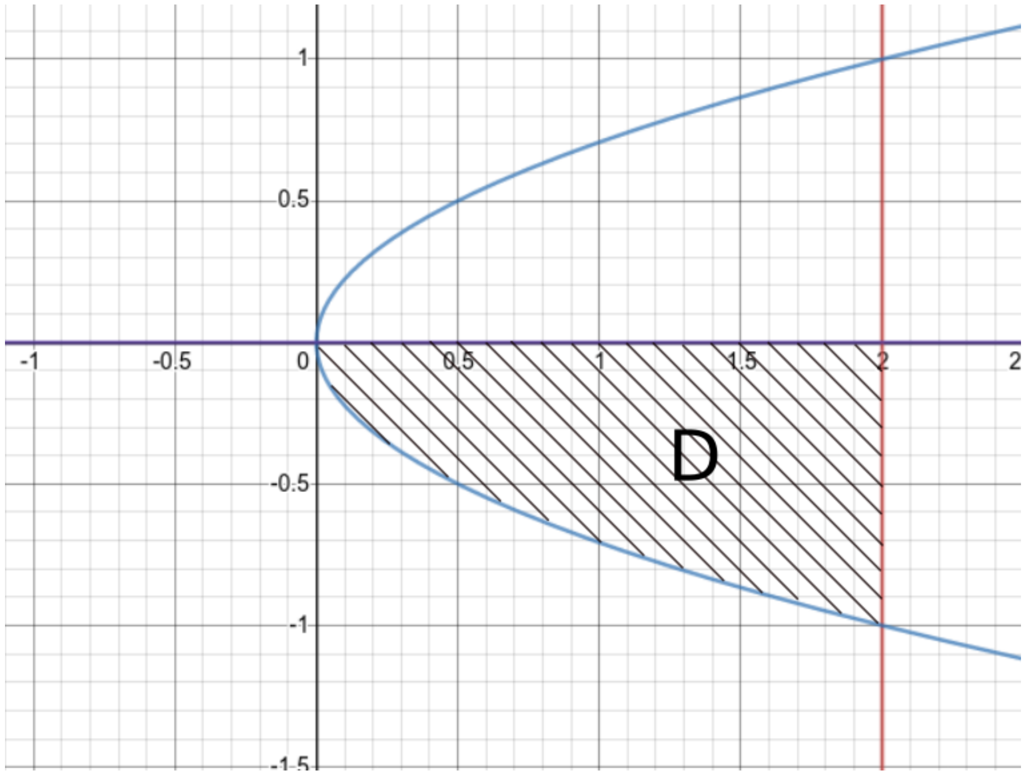


Побудуємо задані криві. З графіка видно, що площа фігури D: $S_D = \iint\limits_D dxdy$.
З рівняння $\sin(x) = \cos(x)$ одна з точок перетину $x = \frac{-3\pi}{4}$. Тоді множину D можна представити як $D = \left\{x \in [\frac{-3\pi}{4}; 0]; \sin(x) \leq y \leq \cos(x)\right\}$. Обчислимо:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{0} dx \int\limits_{\sin(x)}^{\cos(x)} dy = \int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{0} \cos(x) - \sin(x)dx = \sqrt{2} + 1$$

2.27. Пластина D обмежена кривими; μ - щільність. Знайти масу пластини.

$$\left[\begin{array}{c} D : x = 2, y = 0, y^2 = x/2, (y \geq 0) \\ \mu = 4x + 6y^2 \end{array}\right.$$

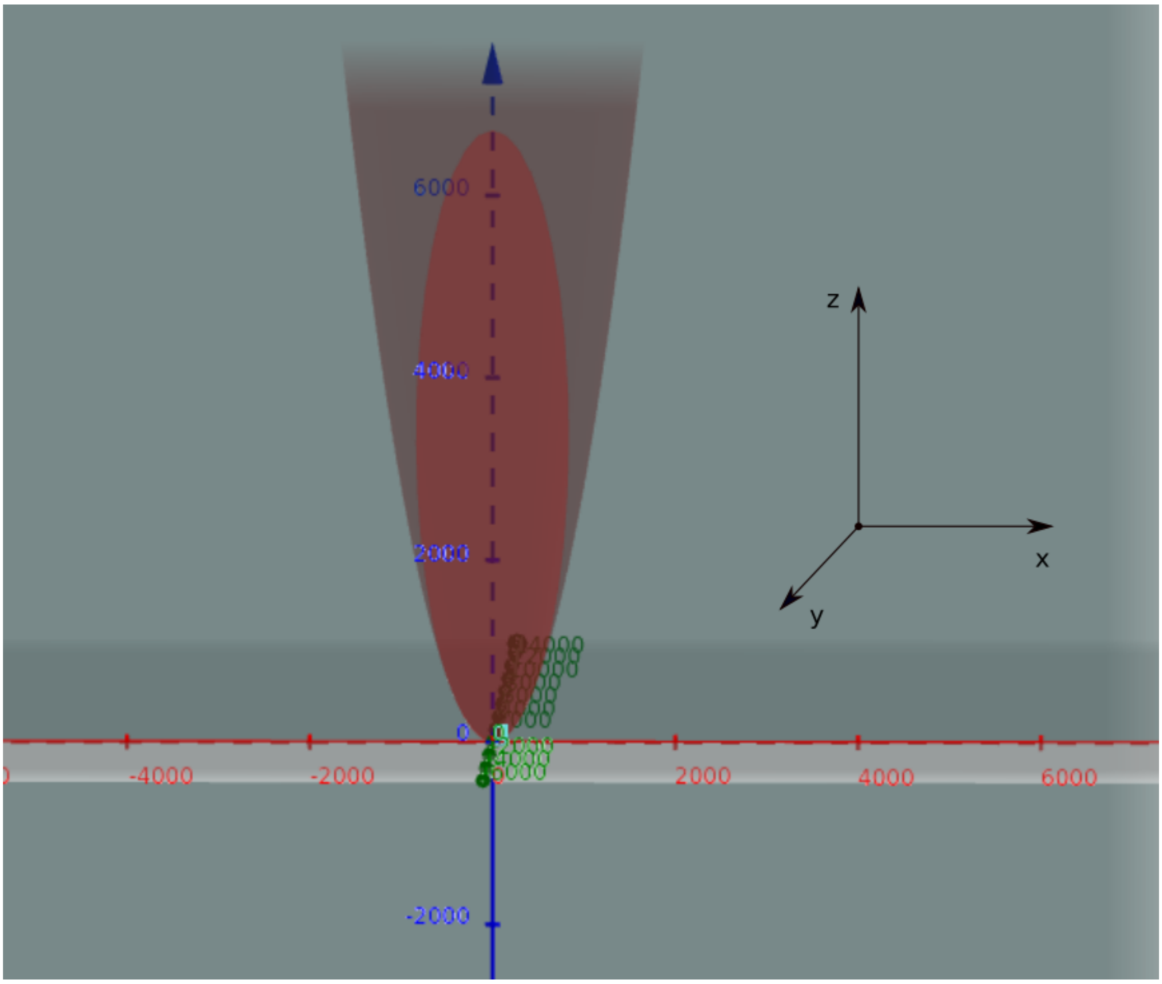


Область D зобразимо на графіку. Вона дорівнює: $D_{x,y} = \left\{ x \in [0, 2]; -\sqrt{x/2} \leq y \leq 0 \right\}$.
Формула для обчисленням маси пластини: $M(D) = \iint\limits_D \mu(x, y)dxdy$.

$$M(D) = \iint\limits_D \mu(x, y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{0} (4x + 6y^2)dy = \int\limits_0^2 \frac{5x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}dx = \sqrt{2}x^{\frac{5}{2}}\bigg|_0^2 = 8$$

3.27. Знайти об'єм тіла, яке задано поверхнями, що обмежують його.

$$z = 28(x^2 + y^2) + 3$$
$$z = 56y + 3$$



Зобразимо отриману фігуру на графіку. Бачимо, що необхідно визначити об'єм між похилою площиною та параболоїдом. У перетині площини та параболоїда лежить еліпс. Буде зручно розглянути проекцію фігур на YOZ.

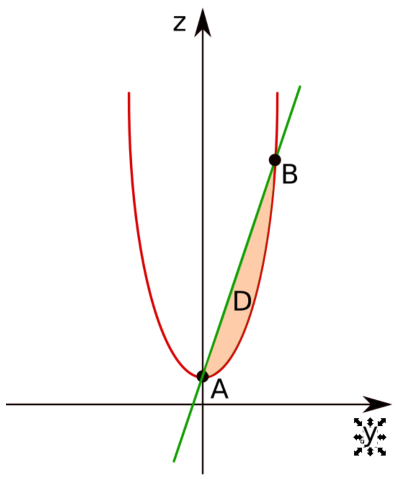
В такому разі маємо:

З умови $x = 0$:

$A = (0, 0, 3)$

$B = (0, 2, 115)$

D – область



Для знаходження об‘єму будемо інтегрувати за площиною D вираз $x_{\text{вих}} - x_{\text{вх}}$, де з умови та графіка знаходимо:

$$x_{\text{вих}} = \sqrt{\frac{z-3}{28} - y^2} \qquad x_{\text{вх}} = -\sqrt{\frac{z-3}{28} - y^2}$$

Тоді остаточно, приходимо до обчислення об'єму
$D = \left\{y \in [0,2]; 28y^2 + 3 \le z \le 56y + 3\right\}$:

$$V(\Sigma) = 2\iint\limits_{D} \sqrt{\frac{z-3}{28} - y^2 dydz} = 2\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{28y^2+3}^{56y+3} \sqrt{\frac{z-3}{28} - y^2 dz} =$$

$$= \int\limits_{0}^{2} \left(\frac{112\left(\frac{z-3}{28} - y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Bigg|_{28y^2+3}^{56y+3} dy = \int\limits_{0}^{2} -\frac{112\,(y-2)\,y\sqrt{2y-y^2}}{3} dy =$$

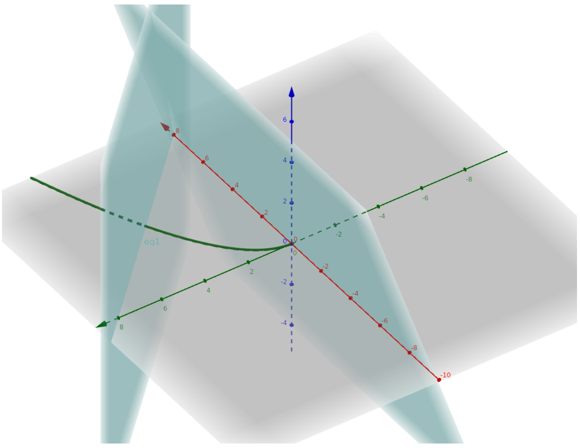
Подальше інтегрування та обчислення було досить об'ємним, але чисельне значення збіглося з обчисленням, виконаним алгоритмом на Python. На початку потрібно було перейти до циліндричних координат, це спростило би умову.

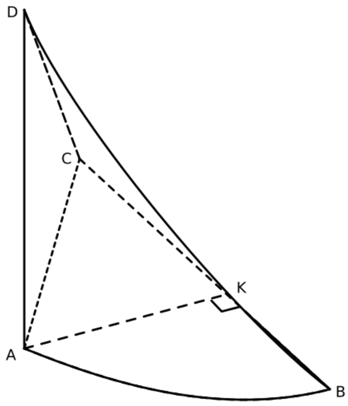
$$= -\frac{56\left(-\frac{y\left(2y-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{\left(2y-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4} - \frac{3y\sqrt{2y-y^2}}{8} + \frac{3\sqrt{2y-y^2}}{8} + \frac{3\arcsin\left(\frac{2-2y}{2}\right)}{8}\right)}{3} \Bigg|_{0}^{2} = 7\pi$$

4.27. Знайти об'єм тіла, яке задано поверхнями, що обмежують його.

$$x + y = 8 \qquad y = \sqrt{4x} \qquad z = 3y \qquad z = 0$$

Подубуємо задані площини. Фігура "S" - це фігура, об'єм якої треба знайти.





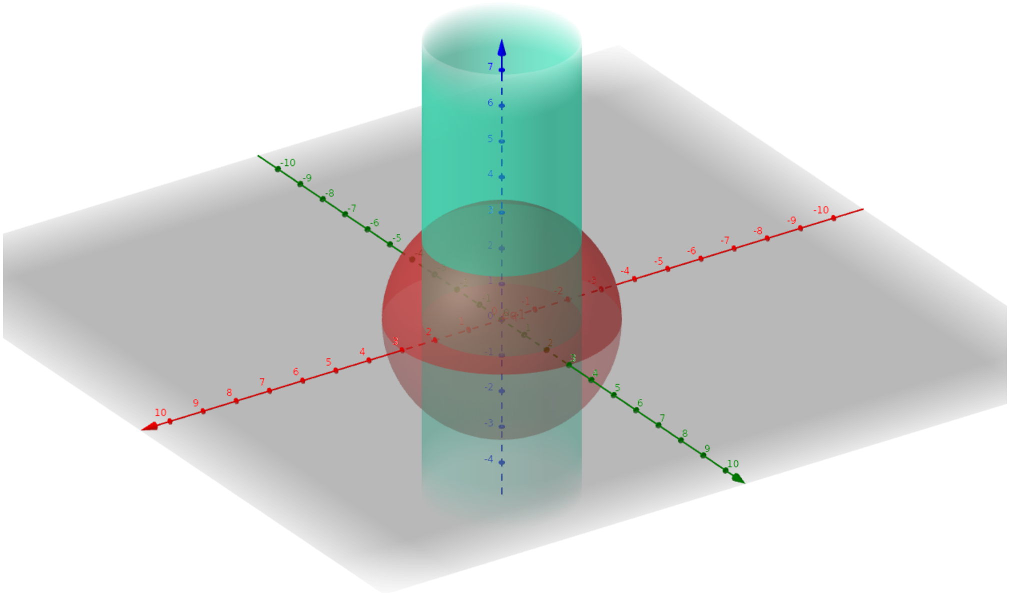
Спочатку, спроектуємо фігуру на площину XOY. Отримаємо ABC. Тобто, об'єм дорвінює:

$$V(S) = \iiint\limits_S dxdydz = \int\limits_0^8 dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} dy \int\limits_0^{3y} dz = \int\limits_0^8 dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} 3ydy =$$

$$= \int\limits_0^8 \frac{3x^2 - 60x + 192}{2} dx = \left. \frac{x\left(x^2 - 30x + 192\right)}{2} \right|_0^8 = 64$$

5.27. Тіло Ω обмежено поверхнями, μ - щільність. Знайти масу тіла.

$$x^2+y^2+z^2=9 \qquad x^2+y^2=4 \qquad x^2+y^2\le 4$$
$$z=0 \qquad z\ge 0 \qquad \mu=2z$$



Зобразимо задані площини. Неохідно знайти масу частини шара, вирізану циліндром. Для цього перейдемо в циліндричні координати.

$$\begin{cases} x=\rho\cos(\varphi) \\ y=\rho\sin(\varphi) \\ J=\rho \\ x^2+y^2=\rho^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho^2+z^2=9, z=\sqrt{9-\rho^2} \\ \rho^2=4 \quad (\rho^2\le 4) \\ z=0 \quad (z\ge 0) \end{cases}$$

Масса шуканого тіла Ω: $M(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega} 2zdxdydz$

$$M(\Omega)=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} d\rho \int\limits_0^{\sqrt{9-\rho^2}} 2\rho z dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho(9-\rho^2)d\rho = 32\pi$$