ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ
ТА ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

За лекціями Горбань Н.

Редактори: Терещенко Д.

Людомирський Ю.

2021

Зміст

1. Лекція 1

1.1. Нормальні системи диференційних рівнянь

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \end{cases} \tag{1}$$

Системою диф. рівнянь n-го порядку в нормальній формі називається система вигляду (1), де $f_i : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad i = \overline{1, n}$.

Позначення.

$$\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{– невідома вектор-функція,} \quad \overline{f}(t, \overline{x}(t)) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}, \text{ що}$$

$D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тоді $(1) : \overline{x}'(t) = \overline{f}(t, \overline{x}(t))$.

Означення. Розв'язком системи (1) на (α, β) називається така вектор-функція $\overline{x}(t) \in C^1(\alpha, \beta)$, що:

1) $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$;

2) $\overline{x}(t)$ перетворює (1) на тотожність на інтервалі (α, β).

Загальним розв'язком системи (1) називається n-параметрична сім'я розв'язків (1), що охоплює всі розв'язки системи.

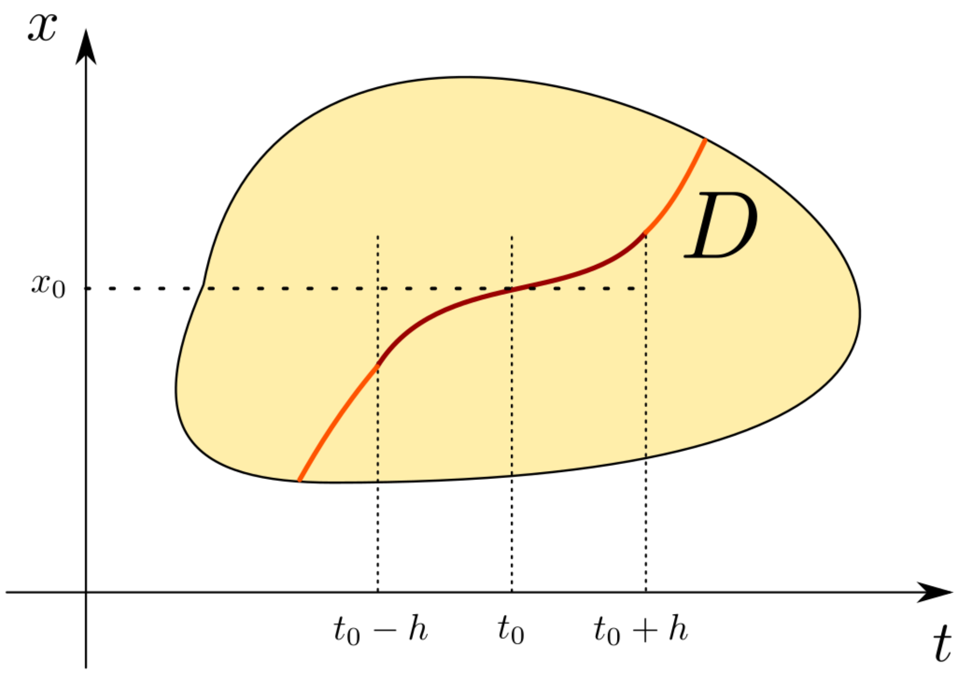
Задача Коші. Для заданих $t_0, \overline{x}^0 \in D$ знайти такий розв'язок (1), що $\overline{x}(t_0) = \overline{x}^0$.
Нехай $\Pi = \{(t, \overline{x}) \in \mathbb{R} \quad \Big| \quad |t - t_0| \leq a, \quad ||\overline{x} - \overline{x}_0|| \leq b\}$.

Теорема 1.1 (Теорема Пеано)**.** Нехай $\vec{f} \in C(\Pi)$. Тоді розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \overline{x}' = \overline{f}(t, \overline{x}) \\ \overline{x}(t_0) = \overline{x}_0 \end{cases}$$

існує принаймні на проміжку $I_h = (t_0 - h, t_0 + h)$, де $h = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}$, $M = \max\limits_{(t,x)\in\Pi} ||\overline{f}(t, \overline{x})||$.

Теорема 1.2 (про продовження)**.** Нехай для системи (1) виконується, що $\overline{f} \in C(D)$, $\quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область. Тоді $\forall t : (t_0, \overline{x}_0) \in D$ існують такі $t^-, t^+ : t^- < t_0 < t^+$, що розв'язок системи (1) з початкової умови $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$ існує на інтервалі (t^-, t^+), причому $(t^-, \overline{x}(t^-))$ та $(t^+, \overline{x}(t^+))$ належать межі області D.



Теорема 1.3 (Теорема Пікара)**.** Нехай

1) $\overline{f} \in C(\Pi)$;
2) $\exists! L > 0 : \forall (t_1, \overline{x}_1), (t_2, \overline{x}_2) \in \Pi$ справедливо, що $||f(t_1, \overline{x}_1) - f(t_2, \overline{x}_2)|| \leq$ $\leq L||\overline{x}_1 - \overline{x}_2||$ (умова Ліпшиця).

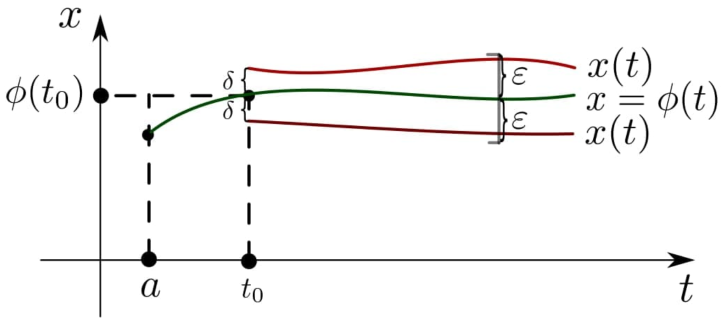
Тоді $\exists!$ розв'язок задачі Коші з початкової умови $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0(t)$, визначений принаймні на $I_h = (t_0 - h, t_0 + h), \quad h = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}, \quad M = \max\limits_{\Pi} ||f(t, \overline{x})||$.

1.2. Основні поняття теорії стійкості.

Розглянем систему диференційних рівнянь $\overline{x}' = \overline{f}(t, \overline{x})$ (1), де $f : D \to \mathbb{R}^n$ та $D = [a, +\infty] \times G, \quad G \subset \mathbb{R}^n$. Нехай при цьому $\overline{f}$ задавольняє умовам існування та єдиності розв'язку задачі Коші в будь-якій точці $(t_0, \overline{x}_0) \in D$

Означення. Розв'язок $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ системи (1) називається **стійким** за Ляпуновим, якщо

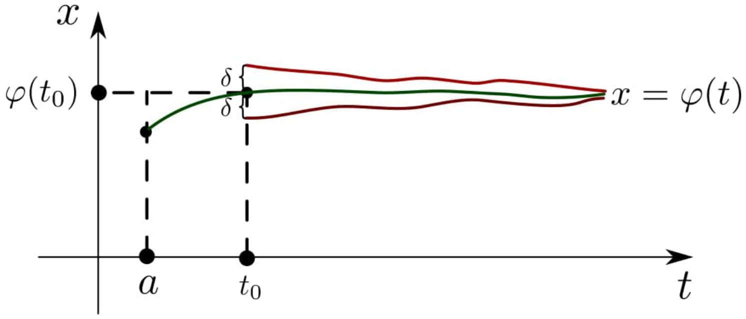
1) $\overline{x} = \overline{\varphi}(t) \quad \exists$ на $[a, +\infty]$ (відсутніть вертикальних асимптот)
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$ розв'язку $\overline{x}(t)$ системи (1) такого, що $||\overline{x}(t_0) - \overline{\varphi}(t_0)|| < \delta$ виконується наступне, що $\overline{x}(t)$ існує на $[t_0, +\infty]$ та $||\overline{x}(t) - \overline{\varphi}(t)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$.



Означення. Розв'язок $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ системи (1) називається **асимптотично стійким** за Ляпуновим, якщо

1) $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ стійкий;

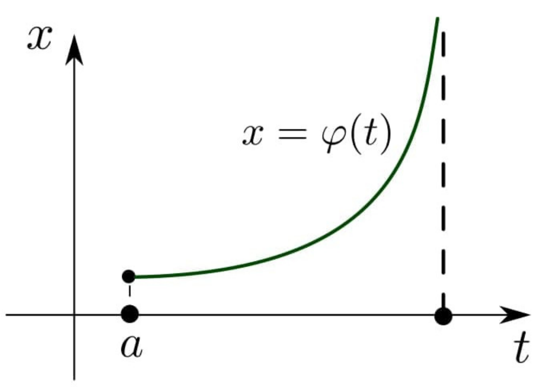
2) $\forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$ розв'язку $\vec{x}(t)$ с-ми (1) такого, що $||\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)|| < \delta$ справедливо, що $||\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)|| \to 0$ при $t \to +\infty$.

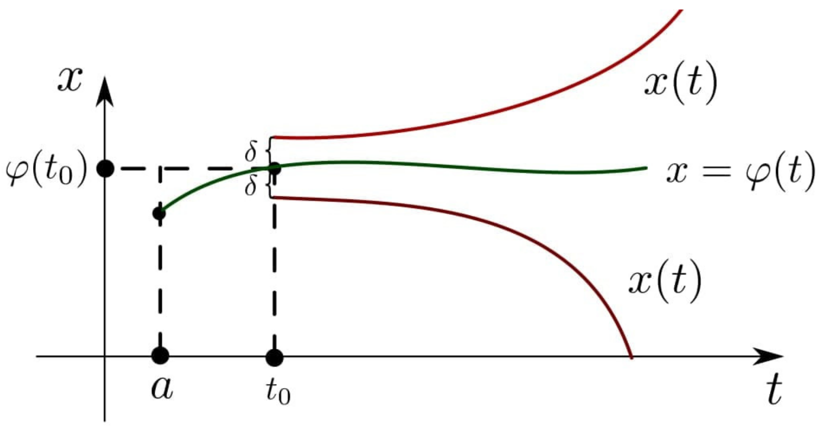


Роз'язок $\vec{\varphi}(t)$ називається **нестійким за Ляпуновим**, якщо він не є стійким, тобто:

1) Або $\overline{x} = \overline{\varphi}(t) \quad \nexists$ на $[a, +\infty]$ (вертикальні асимптоти);

2) Або $\exists \varepsilon > 0 : \exists t_0 \geq a : \forall \delta > 0$ існує розв'язок $\vec{x}(t)$ системи (1) такий, що $||\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)|| < \delta$, але $||\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)|| > \varepsilon$





1.3. Приклади дослідження на стійкість за означенням.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок З.К.:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Знайдемо розв'язок заданої З.К.: $x = 1 \Rightarrow x = t + C$ - заг. розв.

Підставимо: $0 = 0 + C \implies C = 0 \implies \boxed{\varphi(t) = t}$ - будемо досліджувати.

Зазначений розв'язок не має вертикальних асимптот та існує на всьому $\mathbb{R}$. 2. Знайдемо розв'язок довільної З.К. $x(t_0) = x_0$.

$$x_0 = t_0 + C \Rightarrow C = x_0 - t_0 \Rightarrow x(t) = t + x_0 - t_0$$

3. Нехай $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$;

Тоді $|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - t_0| < \varepsilon = \delta$.

Таким чином, розв'язок є стійким, але не є асимптотично стійким.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок З.К.:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + t - x \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Знайдемо розв'язок даної задачі Коші:

$$\dot{x} = -x + 1 + t = |\text{ методом Бернуллі }| = t + Ae^{-t}$$

Знайшли загальний розв'язок. Підставимо умову із з. К.: $A = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$

2. Знайдемо розв'язок довільної З.К.:

$$x(t_0) = x_0 \qquad x_0 = t_0 + Ae^{-t_0} \qquad A = (x_0 - t_0)e^{t_0}$$

$$x(t) = t + (x_0 - t_0)e^{t_0 - t} - \text{ загальний розв'язок з. К.}$$

3. Нехай $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$. Розглядаємо: $\forall t \geq t_0$:

$$|x(t) - \varphi(t)| = \left|t + (x_0 - t_0) \cdot e^{t_0 - t} - t\right| = |x_0 - t_0| < \delta \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

Отримали, що знайдений розв'язок є асимптотично стійким.

Перейдемо знов до систем диф. рівнянь: $\overline{x}' = \overline{f}(t, \overline{x}) \quad (1)$.

$\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ - розв'язок, який ми маємо дослідити на стійкість.

Заміна $\overline{z}(t) = \overline{x}(t) - \overline{\varphi}(y)$. Отримаємо систему:

$$\overline{z}' + \overline{\varphi}' = \overline{f}(t, \overline{z} + \overline{\varphi})(t)$$

$$\overline{f}'(t) = \overline{f}(t, \overline{\varphi}) \Longrightarrow \boxed{\overline{z}' = \overline{\varphi}(t, \overline{z} + \overline{\varphi}(t)) - \overline{f}(t, \varphi(t))}$$

1.4. Стійкість розв'язків лінійних систем

Лінійна неоднорідна система рівнянь має вигляд (далі ЛНС):

$$\overline{x}' = A(t)\overline{x} + \overline{f}(t), \text{ де} \qquad (2)$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, A(t) \in C[a, +\infty], \overline{f} \in C[a, +\infty]$ Застосуємо заміну: $\overline{z}(t) = \overline{x} - \overline{\varphi}(t)$, де

$\overline{z}(t)$ - нова невідома вектор-функція, а $\overline{\varphi}(t)$ - розв'язок, який ми маємо дослідити на стійкість.

Отримали лінійну однорідну систему першого порядку (далі ЛОС):

$$\overline{z}' + \overline{\varphi} = A(t)\overline{z} + A(t)\overline{\varphi} + \overline{f}(t)$$

$$\overline{z}' = A(t)\overline{z} \tag{3}$$

Заміною ми звели дослідження довільного розв'язку лінійної неоднорідної системи до дослідження нульового розв'язку відвовідної ЛОС. Таким чином, приходимо до висновку, що усі розв'язки є одночасно стійкими або не стійкими, або асимптотично стійкими. А отже, розглядаючи будь-яку лінійну систему, можемо говорити про стійкість не окремого розв'язку, а системи в цілому.

Розв'яжемо ЛОС (3) (перейдемо для зручності до змінної x): $\overline{x}' = A(t)\overline{x}$ - ЛОС (3).

$X(t)$ - її фундаментальна матриця (далі ФМ). Тоді з.р: $\overline{x}(t) = X(t) \cdot \overline{C}$, де $\overline{C} \in \mathbb{R}^n$. Розв'язок з. К. з початковими умовами $\overline{x}(t_0) = \overline{x_0}$:

$$\overline{x}_0 = X(t_0) \cdot C \Rightarrow \overline{C} = X^{-1}(t_0) \cdot \overline{x_0} \Rightarrow \boxed{x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\overline{x}_0}$$

Теорема 1.4 (Про стійкість ЛОС)**.**

а) (3) - ст. $\iff \exists K > 0 : \sup\limits_{t \geq a} ||X(t)|| \leq K$.

б) (3) - ас. ст. $\iff ||X(t)|| \to 0$, при $t \to +\infty$.

в) (3) - нест. $\iff \exists \{t_n\}_{n=1}^{\infty} : ||X(t_n)|| \to +\infty$, при $n \to \infty$

Доведення. а) $\boxed{\Leftarrow}$ Нехай $\exists K > 0 : \sup\limits_{t \geq a} ||X(t)|| \leq K$.

Доведемо стійкість розв'язку $\overline{x}(t) = \vec{0}$..

За означенням, візьмемо розв'язок довільної задачі Коші з початковими умовами $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$.

Нехай $||\overline{x}_0|| < \delta$ і розглянемо $||\overline{x}(t)|| = ||X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot \overline{x}_0|| \le ||X(t)|| \cdot ||X^{-1}(t_0)|| \cdot ||\overline{x}_0|| \le K \cdot ||X^{-1}(t_0)|| \cdot ||\overline{x}_0|| < K||X^{-1}(t_0)||\delta < \varepsilon$ при $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K||X^{-1}(t_0)|| + 1}$.

Отже, $\forall t_0 \ge a \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left(\delta = \dfrac{\varepsilon}{K||X^{-1}(t_0)|| + 1}\right)$ для довільного розв'язку з $||\overline{x}_0|| < \delta$ справедливо $||\overline{x}(t)|| < \varepsilon \Longrightarrow$ стійкість розв'язку (системи).

$\boxed{\Rightarrow}$ Нехай (3) - стійка. Припустимо від супротивного, що $\exists \{t_n\}_{n \ge 1}^{\infty} : ||X(t_n)|| \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Тоді $\exists j = \overline{1, n} : ||\overline{x}^j(t_n)|| \to \infty$, де $\overline{x}^j$ - це j-тий стовпчик ФМ.

Покладемо $\forall \delta > 0$:

$$\overline{x}_0^{\delta} = \frac{\delta X(t_0)\overline{e}_j}{2||X(t_0)||} \text{ , де } \overline{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - j$$

Тоді $||\overline{x}_0^{\delta}|| = \dfrac{1}{2||X(t_0)||} \cdot \delta||X(t_0) \cdot \overline{e}_j|| < \delta$.

Розглядаємо розв'язок з.К. з початковими умовами $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0^{\delta}$. Маємо:

$$\overline{x}(t) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot \overline{x}_0^{\delta} = X(t)X^{-1}(t_0) \cdot \frac{\delta X(t_0)\overline{e}_j}{2||X(t_0)||} = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{X(t)\overline{e}_j}{||X(t_0)||} = \frac{\delta}{2||X(t_0)||} \cdot \overline{x}^j(t)$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \forall n \ge n_0$$

$$||\overline{x}(t_n)|| = \frac{\delta}{2||X(t_0)||} \cdot ||\overline{x}^j(t_n)|| \to \infty > \varepsilon -$$

З попереднього випливає нестійкість $\Rightarrow$ суперечність початковій побудові $\Rightarrow$ а).

Пункт б) доводиться аналогічно а).

Пункт в) випливає із пукнта а). ■

1.5. Стійкість ЛОС зі сталою матрицею.

$$\overline{x}'(t) = A\overline{x}(t), \text{ де } A \text{ - стала матриця } n \times n \tag{4}$$

Теорема 1.5.

а) (4) - стійка $\iff \forall\lambda$ - власне число матриці A:

$\Re\lambda \leq 0$, причому якщо $\Re\lambda = 0$, то йому відповідають лише одновимірні клітини Жордана.

б) (4) - асимптотично стійка $\iff \forall\lambda$ - власні числа матриці $A : \Re\lambda < 0$.

в) (4) - нестійка $\iff$ не є стійкою.

Доведення. Нехай $\lambda = \alpha + i\beta$ - власне число матриці $A \Rightarrow$ у ФМ цьому власному числу відповідає розв'язок:

- якщо λ відповідають лише одновимірні клітини Жордана:

$$\overline{x}(t) = e^{\alpha t}(\overline{Q}_0 \cos{(\beta t)} + \overline{R}_0 \sin{(\beta t)})$$

- якщо клітина Жордана розміру l:

$$\overline{x}(t) = e^{\alpha t}(\overline{Q}_{l-1} \cos{(\beta t)} + \overline{R}_{l-1} \sin{(\beta t)})$$

Тоді:

якщо $\Re\lambda = \alpha < 0 \Rightarrow ||\overline{x}(t)|| \to 0$ за $t \to \infty$.

якщо $\Re\lambda = \alpha > 0 \Rightarrow ||\overline{x}(t)|| \to +\infty$ за $t \to \infty$.

якщо $\Re\lambda = 0$, то:

- якщо лише одновимірні клітини Жордана: $||\overline{x}(t)||$ - обмежена.
- якщо клітини Жордана розмірності $l \geq 2 : ||\overline{x}(t)|| \to +\infty$ за $t \to \infty$. ■

Приклад.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 2)^2$$

Отримали дійсне $\lambda = 2$, кратності 2. $\Re\lambda = 2 > 0 \Rightarrow$ Система нестійка.

Зауваження. Перевірку умов теореми в частині, що стосується стійкості, можно здійснювати нне знаходячи власних чисел матриці A.

Теорема 1.6 (Критерій Рауса-Гурвіца)**.**

$$\det(A - \lambda I) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n; \quad a_1 \in \mathbb{R}, a_0 > 0;$$

$\Re\lambda < 0 \quad \forall\lambda \Leftrightarrow$ всі головні мінори матриці Гурвіца H додатні, де $H = (h_{ij})_{ij=1}^n$

$$h_{ij} = \begin{cases} a_{2i-j}, & 0 \leq 2i - j \leq n; \\ 0, & \text{інкше.} \end{cases}$$