Розрахункова робота № 1
Терещенко Денис КА-96
Варіант - 27

1.27. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

$$y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$$

Це однорідне рівняння. Зробимо заміну:

$$y = xz \qquad y' = z + z'x \qquad z = \frac{y}{x} \qquad x \neq 0$$

$$z + z'x = \frac{x^2 + x^2 z - 5x^2 z^2}{x^2 - 6x^2 z}$$

$$z'x = \frac{1 + z - 5z^2}{1 - 6z}$$

$$\frac{1 - 6z}{1 + z^2} dz = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1 - 6z}{1 + z^2} dz = \ln|x| + C_1$$

$$\int \frac{1 - 6z}{1 + z^2} dz = \int \frac{1}{1 + z^2} dz - 3 \int \frac{2z}{1 + z^2} dz = \arctan z - 3 \ln \left|1 + z^2\right| + C_2$$

Після оберненої заміни, отримаємо загальний інтеграл:

$$\arctan \frac{y}{x} - 3 \ln \frac{y^2 + x^2}{x^2} - \ln|x| + C = 0$$

Відповідно, розглядаємо рішення на $I_+ = (0; \infty) \quad I_- = (-\infty; 0)$

2.27. Розв'язати задачу Коші. У вигляді системи:

$$\begin{cases} ydx + (2x - 2\sin^2(y) - y\sin(2y))dy = 0 \\ y(3/2) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Перейдемо від рівняння Пфаффа до зручного вигляду лінійного рівняння. Але, розв'язок будемо шукати відносно змінної x:

$$x' + \frac{2x}{y} - \frac{2\sin^2(y)}{y} - \sin(2y) = 0$$

Прийшли до лінійного рівняння, для якого скористаємося методом Бернуллі:

$$x(y) = v(y) \cdot u(y) = vu$$

$$uv' + vu' + \frac{2uv}{y} - \frac{2\sin^2(y)}{y} - \sin(2y) = 0$$

$$uv' + v(u' + \frac{2u}{y}) - \frac{2\sin^2(y)}{y} - \sin(2y) = 0$$

Розв'яжемо відносно u:

$$u' + \frac{2u}{y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{1}{y^2}$$

$$y^{-2}v' - \frac{2\sin^2(y)}{y} - \sin(2y) = 0$$

$$v = \int \frac{2\sin^2(y)}{y} + \sin(2y)dy = y^2\sin^2(y) + C$$

$$x(y) = u * v = \sin^2 y + \frac{C}{y^2}$$

Далі повернемося до задачі Коші, підставляючи числа:

$$1 = \frac{16C}{\pi^2} \Longrightarrow C = \frac{\pi^2}{16}$$

3.27. Знайти розв'язок задачі Коші. Запишемо у вигляді системи:

$$\begin{cases} y' + y = xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Розв'яжемо за методом Бернуллі:

$$\begin{matrix} \text{Заміна:} \\ y(x) = v(x) \cdot u(x) = vu \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} uv' + vu' + uv - xu^2v^2 = 0 \\ uv' + v(u' + u) - xu^2v^2 = 0 \end{matrix}$$

Знайдемо u з умови $u' + u = 0$:

$$u' + u = 0 \qquad \int \frac{1}{u} du = -\int 1dx\Big|_{C=0} \qquad \ln|u| = -x \Longrightarrow u = e^{-x}$$

$$e^{-x}v' = v^2 \cdot e^{-2x}$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int xe^{-x}dx$$

$$\int xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} & d\mu = e^{-x} \\ \nu = x & dx = d\nu \\ & \mu = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1) + C$$

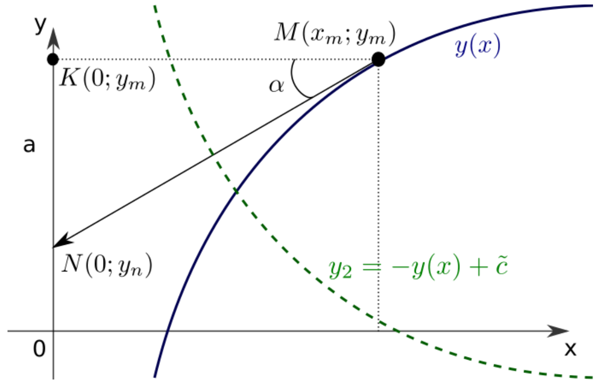
$$y = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(x+1) + C} = \frac{1}{x + 1 + Ce^{-x}}$$

Підставляючи відповідні значення з умови задачі Коші:

$$1 = \frac{1}{0 + C + 1} \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow y = \frac{1}{x+1}$$

4.27. Знайти лінію, що проходить через точку M_0 та має властивість, що в будь-який її точці M дотичний вектор $\overline{MN}$ з кінцем на осі Oy має проекцію на вісь Oy, рівну a.

Умова:
$M_0(1, 4)$
$a = 2$



Спочатку розглянемо вектор $\overline{MN}$, для якого знаємо, що $N(0, y_n)$. Опустимо нормаль з точки $M(x_m, y_m)$ до Oy - отримаємо т. $K(0, y_n - a)$. З геометричного змісту похідної та $\triangle KMN(KM = x; KN = a; \angle KMN = \alpha)$, отримаємо вираз для a:

$$a = x_m \cdot \operatorname{tg}(\alpha) = x_m y'(x_m)$$

Ми розглядаємо лише додатні значення похідної, тобто $y(x)$ ми знайдемо як зростаючу функцію. Однак розв'язком також буде функція $y_2(x) = -y(x)$, для якої проекія також буде дорівнювати a. Також, попередньо можна сказати, що функція буде або показниковою, або логаріфмічною. Прийшли до задачі Коші:

$$\begin{cases} y'x = 2 \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

$$y' = \frac{2}{x}$$

$$y = \int \frac{2}{x} dx$$

$$y = 2\ln|x| + C$$

Але, пам'ятаємо, що існують розв'язки, симетричні за Ox

$$y_1 = 2\ln x + C_1$$
$$y_2 = -2\ln x + C_2$$

Підставивши значення з умови задачі Коші:

$$C_1 = C_2 = 4 \Longrightarrow \begin{matrix} y_1 = 2\ln x + 4 \\ y_2 = -2\ln x + 4 \end{matrix} \quad I = (0, +\infty)$$

5.27. Знайти розв'язок задачі Коші.

$$y''y^3 + 4 = 0 \qquad y(0) = -1 \qquad y'(0) = -2$$

У рівнянні відсутні доданки, залежні від x, тож скористаємося заміною:

$$z(y) = y' \Longrightarrow y'' = z * z'$$

$$\begin{cases} z' * z = \dfrac{4}{y^3} \\ z(-1) = -2 \end{cases} \qquad \int z dz = -4 \int \frac{dy}{y^3}$$

$$z^2 = \frac{4}{y^2} + C_1 \qquad \text{або} \qquad z = \pm\sqrt{\frac{4}{y^2} + C_1}$$

Розглядаємо $z(y)$ в околі т. -1, тож $-2 = -\sqrt{4 + C_1} \Longrightarrow C_1 = 0$. Отримали:

$$z = -\frac{2}{|y|} \qquad y \in U_\varepsilon(-1) \Longrightarrow \begin{matrix} |y| = -y \\ z = \dfrac{2}{y} \end{matrix} \Longrightarrow y' = \frac{2}{y}$$

$$yy' = 2; \quad ydy = 2dx; \quad \frac{y^2}{2} = 2x + C_2; \quad y = \pm\sqrt{4x + C}$$

Підставимо $y = -1 \quad x = 0$. Знайшли параметр : $C = 1 \Longrightarrow \mathbf{y = -\sqrt{4x + 1}}$

6. 27. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$y''' - 64y' = 128\cos(8x) - 64e^{8x} \tag{1}$$

Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння:

$$y''' - 64y' = 0$$

Характеристичне рівняння:

$$\lambda(\lambda^2 - 64) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm 8; 0$$

Отримали загальний розв'язок:

$$y_{\text{з.о}} = C_1 e^{-8x} + C_2 e^{8x} + C_3$$

Для рівняння (1) роз'язок $y = y_{\text{ч}} + y_{\text{з.о}}$. $y_{\text{ч}}$ знайдемо користуючись принципом суперпозиції:

$$\begin{pmatrix} y_1 - \text{ част. розв. } y''' - 64y' = 128\cos(8x) \\ y_2 - \text{ част. розв. } y''' - 64y' = -64e^{8x} \\ y_{\text{ч}} = y_1 + y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y_{\text{ч}} - \text{ част. розв. рівняння (1)}$$

y_1 шукаємо у вигляді $A\sin(8x) + B\cos(8x)$:

$$y_1' = 8(A\cos(8x) - B\sin(8x))$$

$$y_1''' = 512(B\sin(8x) - A\cos(8x))$$

$$512(B\sin(8x) - A\cos(8x)) - 512(A\cos(8x) - B\sin(8x)) = 128\cos(8x)$$

$$1024A\cos(8x) = -128\cos(8x) \Longrightarrow B = 0 \quad A = -\frac{1}{8}$$

y_2 шукаємо у вигляді $e^{8x}(Ax)$:

$$y_2' = Ae^{8x} + 8Axe^{8x}$$

$$y_2''' = 192Ae^{8x} + 512Axe^{8x}$$

$$192Ae^{8x} + 512Axe^{8x} - 64(Ae^{8x} + 8Axe^{8x}) = -64e^{8x}$$

$$192A - 64A = -64 \Longrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Таким чином, можемо записати розв'язок рівняння(1):

$$y = C_1 e^{-8x} + C_2 e^{8x} + C_3 - \frac{1}{8}\sin(8x) - \frac{1}{2}xe^{8x}$$

7.27. Знайти розв'язок задачі Коші.

$$y'' + y = 2\,\mathrm{ctg}\,(x) \qquad y(\pi/2) = 1 \qquad y'(\pi/2) = 2$$

Розглянемо відповідне однорідне рівняння $y'' + y = 0$.
Його характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$.

$$y_{\text{з.о.}}(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

Скористаємося методом варіації: шукаємо розв'язок неоднорідного диф.рівняння у вигляді $y_{\text{з.о.}}(x) = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin(x)$, де $C_1(x), C_2(x)$ повинні задовольняти системі:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos(x) + C_2'(x)\sin(x) = 0 \\ -C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos(x) = 2\,\mathrm{ctg}\,x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)\cos(x) + C_2'(x)\sin(x) = 0 \\ -C_1'(x)\dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)} + C_2'(x)\sin(x) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)(\cos(x) + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)}) = -2 \\ C_2'(x) = \dfrac{2}{\sin(x)} - \sin(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -2\cos(x) \\ C_2'(x) = 2\,\mathrm{ctg}\,(x)\cdot\cos(x) \end{cases}$$

Проінтегрувавши, отримаємо:

$$C_1 = -2\sin(x) + C_1^* \qquad C_2 = 2\cos(x) + 2\ln\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C_2^*$$

Отримали розв'язок диф.рівняння:

$$y = -2\sin(x)\cos(x) + C_1^*\cos(x) + 2\cos(x)\sin(x) + 2\ln\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\sin(x) + C_2^*\sin(x)$$

$$\boxed{y = C_1^*\cos(x) + 2\ln\mathrm{tg}\left(\tfrac{x}{2}\right)\sin(x) + C_2^*\sin(x)}$$

$$y' = -C_1^*\sin(x) + 2 + C_2\cos(x)$$

Підставивши значення з умови задачі Коші:

$$\begin{cases} 1 = 0 + 0 + C_2^* \\ 2 = -C_1^* + 2 + 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1^* = 0 \\ C_2^* = 1 \end{cases}$$

Остаточно, розв'язок задачі Коші:

$$\boxed{y = 2\ln\mathrm{tg}\left(\tfrac{x}{2}\right)\sin(x) + \sin(x)}$$

8.27. Розв'язати систему диф.рівнянь.

$$\begin{cases} x' = -x + y + z + 2t \\ y' = -5x + 21y = 17z + 3 \\ z' = 6x - 26y - 21z - t^2 \end{cases}$$

Спочатку знайдемо розв'язок відповідної однорідної системи:

$$\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = -5x + 21y + 17z \\ z' = 6x - 26y - 21z \end{cases}$$

Запишемо матрицю системи:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{bmatrix}$$

Знайдемо фундаментальну матрицю $Y = e^{tA} = Ue^{tA}U^{-1}; A = U\Lambda U^{-1}$.
Знайдемо власні числа матриці:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ -5 & 21-\lambda & 17 \\ 6 & -26 & -21-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1+\lambda)(21-\lambda)(21-\lambda) + 17\cdot 6 - 130 - 6(-\lambda+21) - 26\cdot 17(-\lambda-1) - 5(\lambda+21) =$$

$$= -\lambda^2(\lambda+1)$$

Тобто, $\lambda_2 = 0$ - корінь кратності 2. $\lambda_1 = -1$.
Для $\lambda_1 = -1$ знайдемо власний вектор $\overline{f}$:

$$(A - \lambda I)\overline{f} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & 22 & 17 \\ 6 & -26 & -20 \end{bmatrix} \overline{f} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & 22 & 17 \\ 6 & -26 & -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -13 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} 3f_x - 13f_y - 10f_z = 0 \\ f_y = -f_z \end{cases} \sim \begin{cases} f_x = f_y \\ f_y = -f_z \end{cases}$$

Звідки, розв'язавши систему методом Гаусса, отримуємо:

$$\overline{f}^T = f_x \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Візьмемо $f_x = 1$, тоді: $\overline{f}^T = (-1, -1, 1)$.
Для $\lambda_2 = 0$ знайдемо власні вектори $\overline{g}, \overline{h}$.

$$(A - \lambda I)\overline{g} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{bmatrix} \overline{g} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 12 \\ 0 & -20 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} -g_x + g_y + g_z = 0 \\ 4g_y = -3g_z \end{cases} \Rightarrow \overline{g} = g_x \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Взявши $g_x = 1$: $\overline{g}^T = (1, -3, 4)$. Другий айгенвектор для $\lambda_2 = 0$ знайдемо з рівняння:

$$(A - \lambda I)^2 \overline{h} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -5 \\ 2 & -6 & -5 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \overline{h} = 0$$

$$\overline{h} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ 0.4h_x - 0.6h_y \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Зручно:} \\ h_z = 0 \\ h_x = 3 \\ h_y = 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Тож ми знайшли лінійно незалежні власні вектори для отриманих власних значень. Таким чином, Жорданова нормальна форма матриці A :

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad U^-1 = \begin{bmatrix} -2. & 6. & 5. \\ 0.5 & -1.5 & -1. \\ -0.5 & 2.5 & 2. \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{t\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!}$$

$$e^{t\Lambda} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad e^{tA} = e^{U\Lambda U^{-1}} = U \cdot e^{\Lambda} \cdot U^{-1}$$

$$Y = e^{tA} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 0.5t - 1 & -6e^{-t} + 2.5t + 6 & -5e^{-t} + 2t + 5 \\ 2e^{-t} - 2 + 1.5t & -6e^{-t} + 7 - 7.5t & -5e^{-t} + 5 - 6t \\ -2e^{-t} + 2 - 2t & 6e^{-t} - 6 + 10t & 5e^{-t} - 4 + 8t \end{bmatrix}$$

Тоді загальний розв'язок лінійної однорідної системи:

$$\vec{y}_{\text{з.о.}} = Y\vec{C} = e^{tA} * \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_{\text{з.о.}} = \begin{bmatrix} c_1(2e^{-t} - 0.5t - 1) + c_2(-6e^{-t} + 2.5t + 6) + c_3(-5e^{-t} + 2t + 5) \\ c_1(2e^{-t} - 2 + 1.5t) + c_2(-6e^{-t} + 7 - 7.5t) + c_3(-5e^{-t} + 5 - 6t) \\ c_1(-2e^{-t} + 2 - 2t) + c_2(6e^{-t} - 6 + 10t) + c_3(5e^{-t} - 4 + 8t) \end{bmatrix}$$

Тепер знайдемо розв'язок неоднорідної системи методом Лагранжа.

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \overline{b} \qquad \overline{b} = \begin{bmatrix} 2t \\ 3 \\ -t^2 \end{bmatrix}$$

$$Y^{-1} = e^{-tA} = \begin{bmatrix} 2e^t + 0.5t - 1 & -6e^t - 2.5t + 6 & -5e^t - 2t + 5 \\ 2e^t - 2 - 1.5t & -6e^t + 7 + 7.5t & -5e^t + 5 + 6t \\ -2e^t + 2 + 2t & 6e^t - 6 - 10t & 5e^t - 4 - 8t \end{bmatrix}$$

$$\vec{C}'(t) = Y^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 2e^t + 0.5t - 1 & -6e^t - 2.5t + 6 & -5e^t - 2t + 5 \\ 2e^t - 2 - 1.5t & -6e^t + 7 + 7.5t & -5e^t + 5 + 6t \\ -2e^t + 2 + 2t & 6e^t - 6 - 10t & 5e^t - 4 - 8t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ 3 \\ -t^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4te^t + t^2 - 2t - 18e^t - 7.5t + 18 + 5t^2e^t + 2t^3 - 5t^2 \\ 4te^t - 4t - 3t^2 - 18e^t + 21 + 22.5t + 5t^2e^t - 5t^2 - 6t^3 \\ -4te^t + 4t + 4t^2 + 18e^t - 18 - 30t - 5t^2e^t + 4t^2 + 8t^3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4te^t - 18e^t - 9.5t + 18 + 5t^2e^t + 2t^3 - 4t^2 \\ 4te^t - 18e^t + 21 + 18.5t + 5t^2e^t - 8t^2 - 6t^3 \\ -4te^t + 18e^t - 18 - 26t - 5t^2e^t + 8t^2 + 8t^3 \end{bmatrix}$$

Проінтегруємо:

$$\tilde{C}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\left(60t^2 - 72t - 144\right)\mathrm{e}^t + 6t^4 - 16t^3 - 57t^2 + 216t}{12} + \tilde{c_1} \\ \frac{\left(60t^2 - 72t - 144\right)\mathrm{e}^t - 18t^4 - 32t^3 + 111t^2 + 252t}{12} + \tilde{c_2} \\ -\frac{\left(15t^2 - 18t - 36\right)\mathrm{e}^t - 6t^4 - 8t^3 + 39t^2 + 54t}{3} + \tilde{c_3} \end{bmatrix}$$

Остаточно.

$$\vec{y_{\text{з.н.}}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\left(60t^2-72t-144\right)\mathrm{e}^t+6t^4-16t^3-57t^2+216t}{12}+\tilde{c_1}\right)(2e^{-t}-0.5t-1)+ \\ +(\frac{\left(60t^2-72t-144\right)\mathrm{e}^t-18t^4-32t^3+111t^2+252t}{12}+\tilde{c_2})(-6e^{-t}+2.5t+6)- \\ -\left(\frac{\left(15t^2-18t-36\right)\mathrm{e}^t-6t^4-8t^3+39t^2+54t}{3}+\tilde{c_3}\right)(-5e^{-t}+2t+5) \\ \left(\frac{\left(60t^2-72t-144\right)\mathrm{e}^t+6t^4-16t^3-57t^2+216t}{12}+\tilde{c_1}\right)(2e^{-t}-2+1.5t)+ \\ +(\frac{\left(60t^2-72t-144\right)\mathrm{e}^t-18t^4-32t^3+111t^2+252t}{12}+\tilde{c_2})(-6e^{-t}+7-7.5t)- \\ -\left(\frac{\left(15t^2-18t-36\right)\mathrm{e}^t-6t^4-8t^3+39t^2+54t}{3}+\tilde{c_3}\right)(-5e^{-t}+5-6t) \\ \left(\frac{\left(60t^2-72t-144\right)\mathrm{e}^t+6t^4-16t^3-57t^2+216t}{12}+\tilde{c_1}\right)(-2e^{-t}+2-2t)+ \\ +(\frac{\left(60t^2-72t-144\right)\mathrm{e}^t-18t^4-32t^3+111t^2+252t}{12}+\tilde{c_2})(6e^{-t}-6+10t)- \\ -\left(\frac{\left(15t^2-18t-36\right)\mathrm{e}^t-6t^4-8t^3+39t^2+54t}{3}+\tilde{c_3}\right)(5e^{-t}-4+8t) \end{bmatrix}$$