Зміст

Ряд Фур'є

1. Лекція 1.

1.1. Поява. Передмова.

Нехай $g(z)$ – аналітична в кільці $K = \left\{ z \;\middle|\; 1 - \varepsilon_1 < |z| < 1 + \varepsilon_2 \right\}$; $\left\{ z \;\middle|\; |z| = 1 \right\} \subset K$.

Розкладаємо $g(z)$ в ряд Лорана за степенями z в цьому кільці:

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot z^n \text{ , де } C_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z$$

$$z : |z| = 1 \implies z = e^{ix} \implies x \in [0, 2\pi] \implies g(z) = g(e^{ix}) = f(x)$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z = \begin{vmatrix} z = e^{ix} \\ \mathrm{d}z = ie^{ix}\mathrm{d}x \\ x \in [0, 2\pi] \end{vmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$$

Отримали *комплексну форму ряду Фур'є*:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{inx},\ C_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$$

1.2. Комплексна форма ряду Фур'є.

$f \in D[0, 2\pi]$ – періодична, інтегрова на $[0, 2\pi]$. За функцією $f(x)$ будуємо ряд Фур'є:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{inx},\ C_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$$

Питання:

1) Збіжність ряду.
2) Якщо збігається, то зв'язок між $S(x)$ та $f(x)$.

1.3. Випадок дійснозначної функції.

Розглянемо ряд Фур'є:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n \cdot e^{inx} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} = \begin{vmatrix} \text{в I сумі:} \\ n=-k \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} \cdot e^{-ikx} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} =$$

Окремо розглянемо $C_{-k}e^{-ikx}$: $C_{-k}e^{-ikx} = \overline{C_k e^{ikx}}$:

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(C_n e^{inx} + \overline{C_n e^{inx}} \right)}_{=2\Re(C_n e^{inx}) \in \mathbb{R}} \boxed{=}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot (\cos(nx) - i \sin(nx)) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) \mathrm{d}x - i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \mathrm{d}x$$

$$\Re C_n e^{inx} = \Re \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \mathrm{d}x - i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x \right] \cdot (\cos(nx) + i \sin(nx)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cos(nx) \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) \mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \sin(nx) \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \mathrm{d}x$$

$$\boxed{=} C_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) \mathrm{d}x + \sin(nx) \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \mathrm{d}x$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

Отримали *дійсну форму ряда Фур'є.*

$$f(x) \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

де $a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \mathrm{d}x, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1.4. Не 2π-періодичні функції.

f – $2l$ періодична, або задана на $[0, 2l]$, інтегрована. Розглянемо відображення:

$$[0, 2\pi] \leftarrow [0, 2l] \qquad x \in [0, 2\pi] \qquad x = \frac{t}{l}\pi \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Тоді $f(x) = f(\frac{t}{l}\pi) = g(t)$. $g(t)$ - задана на $[0, 2l]$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} g(t)\cos\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} g(t)\sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\mathrm{d}t$$

$$g(t) = f(x) \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{\pi nt}{l} + b_n\sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} g(t)\cos\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} g(t)\sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\mathrm{d}t$$

Частіше всього, зручно обчислювати коефіцієнти ряду інакше:

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(t)\cos\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(t)\sin\left(\frac{\pi nt}{l}\right)\mathrm{d}t$$

1.5. Аналіз збіжності ряду.

Лема (Рімана)**.** f – інтегрована на $[a, b]$ навіть в невласному сенсі.

Тобто $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ – збігається. Тоді:

1) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$

2) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$