

ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ ТА ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

За лекціями Горбань Н.

Редактори: Терещенко Д.

Людомирський Ю.

2021

Зміст

1. Лекція 1	3
1.1. Нормальні системи диференціальних рівнянь	3
1.2. Основні поняття теорії стійкості.	5
1.3. Приклади дослідження на стійкість за означенням.	7
1.4. Стійкість розв'язків лінійних систем	9
1.5. Стійкість ЛОС зі сталою матрицею.	12
1.6. Приклади дослідження на стійкість диф. рівнянь, що описують поведінку екологічних процесів.	13
1.6.1. Модель одновимірної популяції.	13

1. Лекція 1

1.1. Нормальні системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x'_2(t) = f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (1)$$

Системою диф. рівнянь n -го порядку в нормальній формі називається система вигляду (1), де $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $i = \overline{1, n}$.

Позначення.

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} - \text{невідома вектор-функція,} \quad \bar{f}(t, \bar{x}(t)) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}, \text{ що}$$

$D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тоді (1) : $\bar{x}'(t) = \bar{f}(t, \bar{x}(t))$.

Означення. Розв'язком системи (1) на (α, β) називається така вектор-функція $\bar{x}(t) \in C^1(\alpha, \beta)$, що:

1) $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$;

2) $\bar{x}(t)$ перетворює (1) на тотожність на інтервалі (α, β) .

Загальним розв'язком системи (1) називається n -параметрична сім'я розв'язків (1), що охоплює всі розв'язки системи.

Задача Коші. Для заданих $t_0, \bar{x}^0 \in D$ знайти такий розв'язок (1), що $\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$.

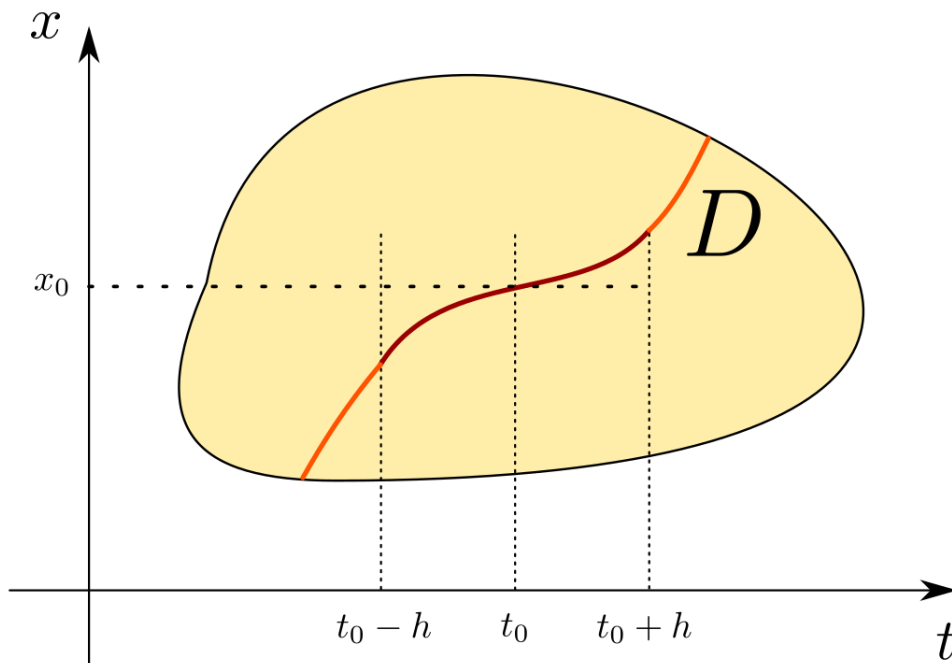
Нехай $\Pi = \{(t, \bar{x}) \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq a, \quad \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq b\}$.

Теорема 1.1 (Теорема Пеано). Нехай $\bar{f} \in C(\Pi)$. Тоді розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}) \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

існує принаймні на проміжку $I_h = (t_0 - h, t_0 + h)$, де $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$,
 $M = \max_{(t,x) \in \Pi} \|\bar{f}(t, \bar{x})\|$.

Теорема 1.2 (про продовження). Нехай для системи (1) виконується, що $\bar{f} \in C(D)$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область. Тоді $\forall t : (t_0, \bar{x}_0) \in D$ існують такі $t^-, t^+ : t^- < t_0 < t^+$, що розв'язок системи (1) з початкової умови $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ існує на інтервалі (t^-, t^+) , причому $(t^-, \bar{x}(t^-))$ та $(t^+, \bar{x}(t^+))$ належать межі області D .



Теорема 1.3 (Теорема Пікара). Нехай

- 1) $\bar{f} \in C(\Pi)$;
- 2) $\exists! L > 0 : \forall (t_1, \bar{x}_1), (t_2, \bar{x}_2) \in \Pi$ справедливо, що $\|f(t_1, \bar{x}_1) - f(t_2, \bar{x}_2)\| \leq L\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$ (умова Ліпшиця).

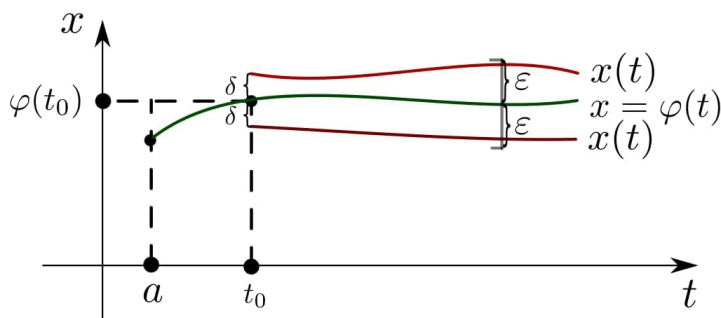
Тоді $\exists!$ розв'язок задачі Коші з початкової умови $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0(t)$, визначений принаймні на $I_h = (t_0 - h, t_0 + h)$, $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M = \max_{\Pi} \|f(t, \bar{x})\|$.

1.2. Основні поняття теорії стійкості.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь $\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})$ (1), де $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ та $D = [a, +\infty) \times G$, $G \subset \mathbb{R}^n$. Нехай при цьому \bar{f} задовольняє умовам існування та єдиності розв'язку задачі Коші в будь-якій точці $(t_0, \bar{x}_0) \in D$

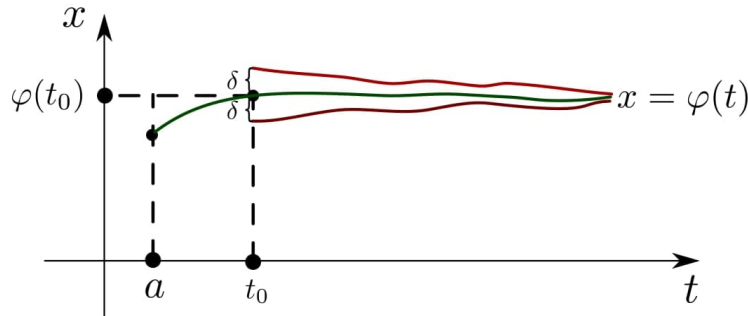
Означення. Розв'язок $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ системи (1) називається **стійким** за Ляпуновим, якщо

- 1) $\bar{x} = \bar{\varphi}(t) \quad \exists$ на $[a, +\infty)$ (відсутність вертикальних асимптот)
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$ розв'язку $\bar{x}(t)$ системи (1) такого, що $\|\bar{x}(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)\| < \delta$ виконується наступне, що $\bar{x}(t)$ існує на $[t_0, +\infty)$ та $\|\bar{x}(t) - \bar{\varphi}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$.



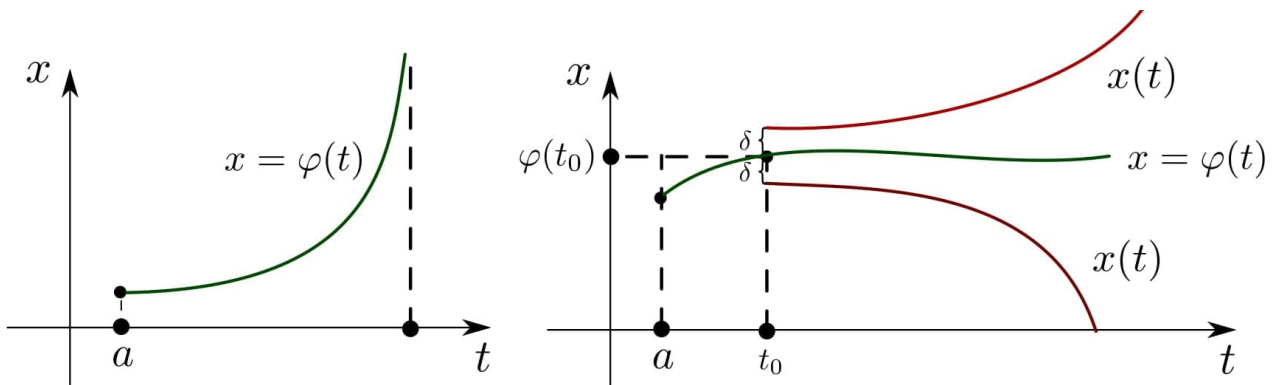
Означення. Розв'язок $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ системи (1) називається **асимптотично стійким** за Ляпуновим, якщо

- 1) $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ стійкий;
- 2) $\forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$ розв'язку $\bar{x}(t)$ с-ми (1) такого, що $\|\bar{x}(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)\| < \delta$ справедливо, що $\|\bar{x}(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.



Розв'язок $\bar{\varphi}(t)$ називається **нестійким за Ляпуновим**, якщо він не є стійким, тобто:

- 1) Або $\bar{x} = \bar{\varphi}(t) \nexists$ на $[a, +\infty)$ (вертикальні асимптоти);
- 2) Або $\exists \varepsilon > 0 : \exists t_0 \geq a : \forall \delta > 0$ існує розв'язок $\bar{x}(t)$ системи (1) такий, що $\|\bar{x}(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)\| < \delta$, але $\|\bar{x}(t_0) - \bar{\varphi}(t_0)\| > \varepsilon$



1.3. Приклади дослідження на стійкість за означенням.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} x' = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Знайдемо розв'язок заданої задачі Коші: $x' = 1 \Rightarrow x = t + C$ - загальний розв'язок. Підставимо: $x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$ - розв'язок, який будемо досліджувати. Зазначений розв'язок не має вертикальних асимптот та \exists на \mathbb{R} .

- 2) Знайдемо розв'язок довільної задачі Коші $x(t_0) = x_0$.

$$x_0 = t_0 + C \Rightarrow C = x_0 - t_0 \Rightarrow x(t) = t + x_0 - t_0$$

- 3) Нехай $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$, тоді $|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - t_0| < \varepsilon = \delta$.

Таким чином, розв'язок є стійким, але не є асимптотично стійким.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} x' = 1 + t - x - \text{лінійне неоднорідне рівняння першого порядку} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Знайдемо розв'язок даної задачі Коші:

$$x' = -x + 1 + t = | \text{метод Бернуллі, } x = uv | = t + Ae^{-t}$$

Знайшли загальний розв'язок. Із умови задачі Коші: $A = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$

2) Знайдемо розв'язок довільної задачі Коші:

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 = t_0 + Ae^{-t_0} \quad \Rightarrow \quad A = (x_0 - t_0)e^{t_0}$$

Отримали: $x(t) = t + (x_0 - t_0)e^{t_0-t}$ – загальний розв'язок задачі Коші

3) Беремо $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |t_0 - x_0| < \delta$ і розглянемо:

$$|x(t) - \varphi(t)| = |t - t - (x_0 - t_0)e^{t_0-t}| < \delta e^{t_0-t} \rightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow +\infty$$

Отже, $\forall t_0 \quad \exists \delta > 0$: для будь-якого розв'язку $x(t)$: $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$ справедливо, що $|x(t) - \varphi(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Отримали, що розв'язок даної задачі Коші $\varphi(t) = t$ є асимптотично стійким.

Зауваження. Очевидно, що простіше досліджувати на стійкість розв'язок типу $\varphi(t) = 0$. Нехай (1) $\bar{x}'(t) = \bar{f}(t, \bar{x})$, а $\bar{x} = \overline{\varphi(t)}$ – розв'язок, який потрібно дослідити на стійкість. Застосуємо заміну: $\bar{z} = \bar{x} - \bar{\varphi}(t)$, де \bar{z} – нова невідома вектор-функція. Отримаємо систему:

$$\bar{z}'(t) + \bar{\varphi}'(t) = \bar{f}(t, \bar{z} + \bar{\varphi}(t)) \quad \Rightarrow \quad \bar{z}'(t) = \bar{f}(t, \bar{z} + \bar{\varphi}(t)) - \bar{f}(t, \bar{\varphi}(t)) \quad (*)$$

Можно довести, що розв'язок $\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$ системи (1) – стійкий (асимптотично стійкий або нестійкий) \iff розв'язок $\bar{z} = \bar{0}$ системи (*) – стійкий (асимптотично стійкий або нестійкий).

1.4. Стійкість розв'язків лінійних систем

Лінійна неоднорідна система рівнянь n -ого порядку має вигляд (далі ЛНС):

$$\bar{x}' = A(t)\bar{x} + \bar{f}(t). \quad (2)$$

Де $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A(t) \in C[a, +\infty)$, $\bar{f} \in C[a, +\infty)$

Тоді $\forall t_0 \geq a$, $\forall \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний розв'язок ЛНС (2) з початковими умовами $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, визначений на $[a, +\infty)$.

Нехай $\bar{\varphi}(t)$ – розв'язок (2), який потрібно дослідити на стійкість. Застосуємо заміну: $\bar{z}(t) = \bar{x} - \bar{\varphi}(t)$, де $\bar{z}(t)$ – нова невідома вектор-функція, а $\bar{\varphi}(t)$ – розв'язок, який ми маємо дослідити на стійкість.

Отримали лінійну однорідну систему першого порядку (далі ЛОС):

$$\begin{aligned} \bar{z}'(t) + \bar{\varphi}'(t) &= A(t)\bar{z}(t) + A(t)\bar{\varphi}(t) + \bar{f}(t) \\ \bar{z}' &= A(t)\bar{z} - \text{ЛОС } n\text{-ого порядку} \end{aligned} \quad (3)$$

Заміною ми звели дослідження довільного розв'язку лінійної неоднорідної системи до дослідження нульового розв'язку відповідної ЛОС. Таким чином, приходимо до висновку, що усі розв'язки є одночасно стійкими, асимптотично стійкими або не стійкими. А отже, розглядаючи будь-яку лінійну систему, можемо говорити про стійкість не окремого розв'язку, а системи в цілому. Досліджуючи при цьому розв'язок $\bar{x}(t) = \bar{0}$

Розв'яжемо ЛОС (3) (перейдемо до змінної x): $\bar{x}' = A(t)\bar{x} - \text{ЛОС (3)}$.

$X(t)$ – її фундаментальна матриця (далі позначаємо ФМ). Тоді загальний розв’язок: $\bar{x}(t) = X(t) \cdot \bar{C}$, де $\bar{C} \in \mathbb{R}^n$. Розв’язок задачі Коші з початковими умовами $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$:

$$\bar{x}_0 = X(t_0) \cdot \bar{C} \Rightarrow \bar{C} = X^{-1}(t_0) \cdot \bar{x}_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\bar{x}_0}$$

Теорема 1.4 (Про стійкість ЛОС).

а) (3) - стійка $\iff \exists K > 0 : \sup_{t \geq a} \|X(t)\| \leq K$.

б) (3) - асимптотично стійка $\iff \|X(t)\| \rightarrow 0$, при $t \rightarrow +\infty$.

в) (3) - нестійка. $\iff \exists \{t_n\}_{n=1}^{\infty} : \|X(t_n)\| \rightarrow +\infty$, при $n \rightarrow \infty$

Доведення. а) $\boxed{\Leftarrow}$

Нехай $\exists K > 0 : \sup_{t \geq a} \|X(t)\| \leq K$.

Доведемо стійкість розв’язку $\bar{x}(t) = \bar{0}$. За означенням, візьмемо розв’язок до-

вільної задачі Коші з початковими умовами $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$. Нехай $\|\bar{x}_0\| < \delta$ і

розглянемо $\|\bar{x}(t)\| = \|X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot \bar{x}_0\| \leq \|X(t)\| \cdot \|X^{-1}(t_0)\| \cdot \|\bar{x}_0\| \leq$

$K \cdot \|X^{-1}(t_0)\| \cdot \|\bar{x}_0\| < K\|X^{-1}(t_0)\|\delta < \varepsilon$ при $\delta = \frac{\varepsilon}{K\|X^{-1}(t_0)\| + 1}$. Отже,

$\forall t_0 \geq a \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left(\delta = \frac{\varepsilon}{K\|X^{-1}(t_0)\| + 1} \right)$ для довільного розв’язку

з $\|\bar{x}_0\| < \delta$ справедливо $\|\bar{x}(t)\| < \varepsilon \implies$ стійкість розв’язку. ■

Доведення. а) $\boxed{\implies}$

Нехай (3) – стійка. Припустимо від супротивного, що

$$\exists \{t_n\}_{n \geq 1}^\infty : t_n \rightarrow +\infty : \|X(t_n)\| \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Тоді $\exists j = \overline{1, n} : \|\bar{x}^j(t_n)\| \rightarrow \infty$, де \bar{x}^j - це j -тий стовпчик ФМ.

Покладемо $\forall \delta > 0$:

$$\bar{x}_0^\delta = \frac{\delta X(t_0) \bar{e}_j}{2 \|X(t_0)\|}, \text{ де } \bar{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - j$$

$$\text{Тоді } \|\bar{x}_0^\delta\| = \frac{1}{2 \|X(t_0)\|} \cdot \delta \|X(t_0) \cdot \bar{e}_j\| < \delta.$$

Розглядаємо розв'язок задачі Коші з початковими умовами $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0^\delta$. Маємо:

$$\bar{x}(t) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot \bar{x}_0^\delta = X(t) X^{-1}(t_0) \cdot \frac{\delta X(t_0) \bar{e}_j}{2 \|X(t_0)\|} = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{X(t) \bar{e}_j}{\|X(t_0)\|} = \frac{\delta}{2 \|X(t_0)\|} \cdot \bar{x}^j(t)$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \forall n \geq n_0$$

$$\|\bar{x}(t_n)\| = \frac{\delta}{2 \|X(t_0)\|} \cdot \|\bar{x}^j(t_n)\| \rightarrow \infty > \varepsilon$$

Отримали нестійкість системи \implies суперечність початковій побудові \implies а).

Пункт б) доводиться аналогічно а). Пункт в) випливає із пункта а). \blacksquare

1.5. Стійкість ЛОС зі сталою матрицею.

$$\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t), \text{ де } A - \text{ стала матриця } n \times n \quad (4)$$

Теорема 1.5.

а) (4) - стійка $\iff \forall \lambda$ - власне число матриці A :

$\Re \lambda \leq 0$, причому якщо $\Re \lambda = 0$, то йому відповідають лише одновимірні клітини Жордана.

б) (4) - асимптотично стійка $\iff \forall \lambda$ - власні числа матриці $A : \Re \lambda < 0$.

в) (4) - нестійка \iff не є стійкою.

Доведення. Нехай $\lambda = \alpha + i\beta$ - власне число матриці $A \Rightarrow$ у ФМ цьому власному числу відповідає розв'язок:

- якщо λ відповідають лише одновимірні клітини Жордана:

$$\bar{x}(t) = e^{\alpha t}(\bar{Q}_0 \cos(\beta t) + \bar{R}_0 \sin(\beta t))$$

- якщо клітина Жордана розміру l :

$$\bar{x}(t) = e^{\alpha t}(\bar{Q}_{l-1} \cos(\beta t) + \bar{R}_{l-1} \sin(\beta t))$$

Тоді:

якщо $\Re \lambda = \alpha < 0 \Rightarrow \|\bar{x}(t)\| \rightarrow 0$ за $t \rightarrow \infty$.

якщо $\Re \lambda = \alpha > 0 \Rightarrow \|\bar{x}(t)\| \rightarrow +\infty$ за $t \rightarrow \infty$.

якщо $\Re \lambda = 0$, то:

- якщо лише одновимірні клітини Жордана: $\|\bar{x}(t)\|$ - обмежена.

- якщо клітини Жордана розмірності $l \geq 2 : \|\bar{x}(t)\| \rightarrow +\infty$ за $t \rightarrow \infty$. ■

Приклад.

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = y - x \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 2)^2$$

Отримали дійсне власне число $\lambda = 2$, кратності 2. $\Re \lambda = 2 > 0 \Rightarrow$ Система нестійка.

Зауваження. Перевірку умов теореми в частині, що стосується стійкості, можна здійснювати не знаходячи власних чисел матриці A .

Теорема 1.6 (Критерій Рауса-Гурвіца).

$$\det(A - \lambda I) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n; \quad a_1 \in \mathbb{R}, a_0 > 0;$$

$\Re \lambda < 0 \quad \forall \lambda \iff$ всі головні мінори матриці Гурвіца H додатні, де $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$

$$h_{ij} = \begin{cases} a_{2i-j}, & 0 \leq 2i - j \leq n; \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

1.6. Приклади дослідження на стійкість диф. рівнянь, що описують поведінку екологічних процесів.

1.6.1. Модель одновимірної популяції.

Однією з важливих проблем екології є динаміка чисельності популяції. Нехай маємо популяцію, що складається з особин одного виду, знайдемо закон зміни

її чисельності.

Припустимо, що: існують лише процеси розмноження та смерті, швидкості яких пропорційні кількості особин в даний момент часу; не враховується внутрішньовидова боротьба; розглядаємо лише одну популяцію (відсутність хижаки).

$x(t)$ — кількість особин в момент t .

R — швидкість розмноження.

γ — коефіцієнт розмноження.

$$R = \gamma x$$

S — швидкість природньої загибелі.

σ — коефіцієнт смертності (природньої).

$$S = -\sigma x$$

Тоді: $\frac{dx}{dt} = \gamma x - \sigma x = (\gamma - \sigma)x$.

Позначення: $\gamma - \sigma = a$. Тоді $\boxed{\frac{dx}{dt} = ax}$ - закон Мальтуса.



Томас Мальтус (1766-1834), - англ. вчений, демограф, економіст, священик;

1798 р.: "Все про принципи народонаселення."

$$\frac{dx}{dt} = ax \implies x(t) = C \cdot e^{at} - \text{загальний розв'язок.}$$

Нехай в початковий момент часу $t_0 = 0$ кількість особин складає x_0 особин:

$$x(0) = x_0$$

Тоді: $x(t) = x_0 \cdot e^{at}$ - розв'язок даної задачі Коші. Розглянемо випадки:

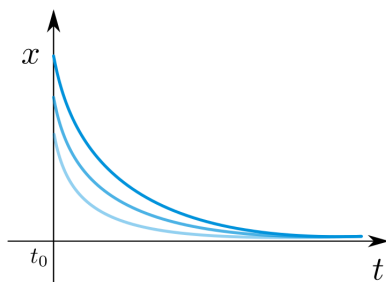
а) $a < 0$ (помирають більше, ніж народжується). Оскільки дане рівняння - лінійне, то всі розв'язки водночас стійкі (нест., ас. ст.). Тому дослідимо на стійкість розв'язок $\varphi(t) = 0$ (умова 1 стійкості виконується); розв'язок довільної задачі К.:

$$x(t_0) = x_0 : x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$$

Нехай $|x_0| < \delta$. Розглянемо:

$$\forall t \geq t_0 \quad |x(t)| = \underbrace{e^{a(t-t_0)}}_{<1, \text{ при } t \geq t_0} |x_0| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 < \varepsilon \text{ при } \varepsilon = \delta$$

\implies всі розв'язки рівняння асимптотично стійкі та прямують до нуля.



Це означає, що якою б великою не була кількість особин в початковий момент

часу, якщо смертність перевищує народжуваність, кількість особин з часом прямує до 0 ($t \rightarrow +\infty$).