Додаткове завдання: Тиждень 13.

Терещенко Д., Гапон М., Людомирський Ю.

KA-96, IASA

2021

Задача зі старшими похідними. № 7.16.

Вони не знали навіть того, що вони вже "знали". (С) Р. Фейнман

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 \ddot{x}^2 + \dot{x}^2 \mathrm{d}t \to \mathrm{extr} \\ x(0) = 3 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad x(1) = \cosh 1 \quad \dot{x}(1) = \sinh 1 \end{cases}$$

$$F(t, \dot{x}, \ddot{x}) = \ddot{x}^2 + \dot{x}^2 \text{ – з умови.}$$

- Складемо рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2x^{(2)};$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} = 2\ddot{x}; \qquad \frac{\partial^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} = 2x^{(4)};$$

Підставимо та спростимо:

$$0 - 2x^{(2)} + 2x^{(4)} = 0$$

$\boxed{x^{(4)} - x^{(2)} = 0}$ **– рівняння Ейлера-Пуассона.**

Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^4 - \lambda^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0 \text{ кр.2 }, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

Отже, отримали сімейство екстремалей:

$$x = C_1 + C_2 t + C_3 e^t + C_4 e^{-t}$$

- Знайдемо допустимі екстремалі. Для цього підставимо числа з умови:

1. $x(0) = C_1 + C_3 + C_4 = 1;$
2. $\dot{x}(0) = C_2 + C_3 - C_4 = 0;$
3. $x(1) = C_1 + C_2 + C_3 e + C_4 e^{-1} = \cosh 1$
4. $\dot{x}(1) = C_1 + C_2 + C_3 e - C_4 e^{-1} = \sinh 1$

$$\begin{aligned}
(3) - (4) &: \quad 2C_4 e^{-1} = \cosh 1 - \sinh 1 = e^{-1} \Longrightarrow C_4 = \tfrac{1}{2};\\
(1) &: \quad C_1 + C_3 = \tfrac{1}{2};\\
(2) &: \quad C_2 + C_3 = \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

З останніх двох рівностей отримуємо: $C_1 = C_2$.

$$(3) + (4) \quad : \quad 2C_1 + 2C_2 + 2C_3 e = \cosh 1 + \sinh 1 = e.$$

Підставляємо: $C_2 = C_1 = \frac{1}{2} - C_3 \quad \Longrightarrow \quad 2 - 4C_3 + 2C_3 e = e;$

$$C_3(2e - 4) = e - 2 \Longrightarrow C_3 = \frac{1}{2} \Longrightarrow C_2 = C_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Отже, єдина допустима екстремаль має вигляд:

$$\boxed{\tilde{x}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t}$$

- **Перевірка**. $\forall h \in C^2[a,b] : h(0) = h(1) = h'(0) = h(1) = 0$.

$$J(\tilde{x}+h) - J(\tilde{x}) = \int_0^1 ((\tilde{x}+h)'')^2 + ((\tilde{x}+h)')^2 \mathrm{d}t - \int_0^1 (\tilde{x}'')^2 + (\tilde{x}')^2 \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 2\underbrace{\tilde{x}''h''}_{(*)} + (h'')^2 + 2\tilde{x}'h' + (h')^2 \mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Візьмемо } (*) \text{ частинами:} \\ \int_0^1 \underbrace{\tilde{x}''}_{u}\underbrace{h''}_{v}\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u = \tilde{x}'' & v' = h'' \\ u' = \tilde{x}''' & v = h' \end{matrix} \right| = \underbrace{\tilde{x}''h'\Big|_0^1}_{=0} - \int_0^1 \tilde{x}'''h'\mathrm{d}t = \\ = \left| \begin{array}{l} \text{Знайдемо третю похідну:} \\ \tilde{x}''' = (\cosh t)^{(3)} = \sinh t \end{array} \right| = -\int_0^1 \sinh t \cdot h' \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 (h'')^2 + (h')^2 \mathrm{d}t + 2\int_0^1 \underbrace{\tilde{x}'' h''}_{=-\sinh t \cdot h'} + \underbrace{\tilde{x}'}_{=\sinh t} h' \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (h'')^2 + (h')^2 \mathrm{d}t + \underbrace{2\int_0^1 -\sinh t \cdot h' + \sinh t \cdot h' \mathrm{d}t}_{=0} =$$

$$= \int_0^1 (h'')^2 + (h')^2 \mathrm{d}t \geq 0$$

$$\forall h \in C^2[a, b] :$$
$$h(0) = h(1) = h'(0) = h(1) = 0$$

Отримали глобальний мінімум для $\tilde{x}(t) = \cosh t$.