

Додаткове завдання: Тиждень 11.

Терещенко Д., Людомирський Ю., Гапон М.

KA-96, IASA

2021

Задача зі старшими похідними. № 7.16.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \ddot{x}^2 + \dot{x} dt \rightarrow \text{extr} \\ x(0) = 3 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad x(1) = \cosh 1 \quad \dot{x}(1) = \sinh 1 \end{array} \right.$$

- Складемо рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2x^{(2)};$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} = 2\ddot{x}; \quad \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} = 2x^{(4)};$$

Підставимо та спростимо:

$$0 - 2x^{(2)} + 2x^{(4)} = 0$$

$x^{(4)} - x^{(2)} = 0$ – рівняння Ейлера-Пуассона.

Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^4 - \lambda^2 = 0 \implies \lambda_1 = 0 \text{ кр.2}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

Отже, отримали сімейство екстремалей:

$$x = C_1 + C_2 t + C_3 e^t + C_4 e^{-t}$$

- Знайдемо допустимі екстремалі. Для цього підставимо числа з умови:

❶ $x(0) = 1 + 3 + 4 = 1;$

❷ $\dot{x}(0) = C_2 + C_3 - C_4 = 0;$

❸ $x(1) = C_1 + C_2 + C_3 e + C_4 e^{-1} = \cosh 1$

❹ $\dot{x}(1) = C_1 + C_2 + C_3 e - C_4 e^{-1} = \sinh 1$

$$(3) - (4) : \quad 2C_4 e^{-1} = \cosh 1 - \sinh 1 = e^{-1} \implies C_4 = \frac{1}{2};$$

$$(1) : \quad C_1 + C_3 = \frac{1}{2};$$

$$(2) : \quad C_2 + C_3 = \frac{1}{2}.$$

З останніх двох рівностей отримуємо: $C_1 = C_2$.

$$(3) + (4) : \quad 2C_1 + 2C_2 + 2C_3 e = \cosh 1 + \sinh 1 = e.$$

$$\text{Підставляємо: } C_2 = C_1 = \frac{1}{2} - C_3 \implies 2 - 4C_3 + 2C_3e = e;$$

$$C_3(2e - 4) = e - 2 \implies C_3 = \frac{1}{2} \implies C_2 = C_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$(1) : \quad 2C_1 + C_3 + C_4 = 1 \implies C_4 = \frac{1}{2}$$

Отже, **єдина допустима екстремаль має вигляд:**

$$\tilde{x}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$$

- **Перевірка.** $\forall h \in C^2[a, b] : h(0) = h(1) = h'(0) = h'(1) = 0$.

$$\begin{aligned}
 J(\tilde{x}+h) - J(\tilde{x}) &= \int_0^1 ((\tilde{x}+h)'')^2 + ((\tilde{x}+h)')^2 dt - \int_0^1 (\tilde{x}'')^2 + (\tilde{x}')^2 dt = \\
 &= \int_0^1 2 \underbrace{\tilde{x}'' h''}_{(*)} + (h'')^2 + 2\tilde{x}' h' + (h')^2 dt =
 \end{aligned}$$

Візьмемо $(*)$ частинами:

$$\begin{aligned}
 &= \left| \int_0^1 \underbrace{\tilde{x}''}_u \underbrace{h''}_v dt = \left| \begin{array}{ll} u = \tilde{x}'' & v' = h'' \\ u' = \tilde{x}''' & v = h' \end{array} \right| = \underbrace{\tilde{x}'' h'}_{=0} \Big|_0^1 - \int_0^1 \tilde{x}''' h' dt = \right. \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{Знайдемо третю похідну:} \\ \tilde{x}''' = (\cosh t)^{(3)} = \sinh t \end{array} \right| = - \int_0^1 \sinh t \cdot h' dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (h'')^2 + (h')^2 dt + 2 \int_0^1 \underbrace{\tilde{x}'' h''}_{=-\sinh t \cdot h'} + \underbrace{\tilde{x}'}_{=\sinh t} h' dt = \\
&= \int_0^1 (h'')^2 + (h')^2 dt + 2 \underbrace{\int_0^1 -\sinh t \cdot h' + \sinh t \cdot h' dt}_{=0} = \\
&= \int_0^1 (h'')^2 + (h')^2 dt \geq 0 \quad \forall h \in C^2[a, b] : \\
&\quad h(0) = h(1) = h'(0) = h'(1) = 0
\end{aligned}$$

Отримали **глобальний мінімум** для $\tilde{x}(t) = \cosh t$.