ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ

За лекціями Горбань Н.

Редактори: Терещенко Д.

Людомирський Ю.

2021

Зміст

1. Лекція 1

1.1. Нормальні системи диференційних рівнянь

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \end{cases} \tag{1}$$

Системою диф. рівнянь n-го порядку в нормальній формі називається система вигляду (1), де $f_i : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad i = \overline{1, n}$.

Позначення.

$$\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{– невідома вектор-функція,} \quad \overline{f}(t, \overline{x}(t)) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}, \text{ що}$$

$D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тоді $(1) : \overline{x}'(t) = \overline{f}(t, \overline{x}(t))$.

Означення. Розв'язком системи (1) на (α, β) називається така вектор-функція $\overline{x}(t) \in C^1(\alpha, \beta)$, що:

1) $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$;

2) $\overline{x}(t)$ перетворює (1) на тотожність на інтервалі (α, β).

Загальним розв'язком системи (1) називається n-параметрична сім'я розв'язків (1), що охоплює всі розв'язки системи.

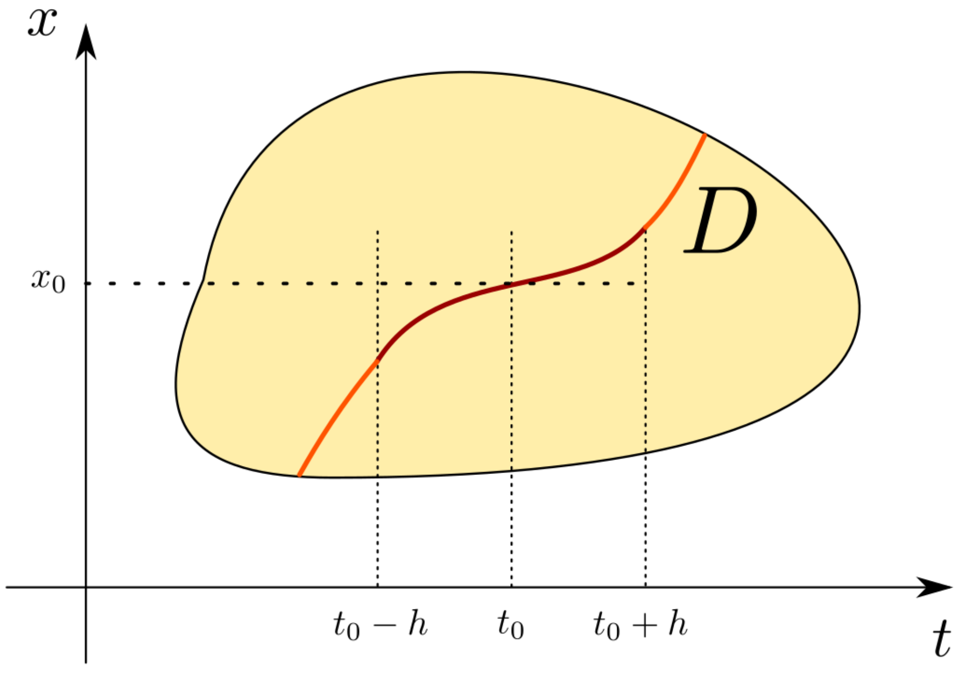
Задача Коші. Для заданих $t_0, \overline{x}^0 \in D$ знайти такий розв'язок (1), що $\overline{x}(t_0) = \overline{x}^0$.
Нехай $\Pi = \{(t, \overline{x}) \in \mathbb{R} \quad \Big| \quad |t - t_0| \le a, \quad ||\overline{x} - \overline{x}_0|| \le b\}$ та $\overline{f} \in C(\Pi)$.

Теорема 1.1 (Теорема Пеано)**.** Нехай $\vec{f} \in C(\Pi)$. Тоді розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \overline{x}' = \overline{f}(t, \overline{x}) \\ \overline{x}(t_0) = \overline{x}_0 \end{cases}$$

існує принаймні на проміжку $I_h = (t_0 - h, t_0 + h)$, де $h = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}$, $M = \max\limits_{(t,x)\in\Pi} ||\overline{f}(t, \overline{x})||$.

Теорема 1.2 (про продовження)**.** Нехай для системи (1) виконується, що $\overline{f} \in C(D)$, $\quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область. Тоді $\forall t : (t_0, \overline{x}_0) \in D$ існують такі $t^-, t^+ : t^- < t_0 < t^+$, що розв'язок системи (1) ??? $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$ існує на інтервалі (t^-, t^+), причому $(t^-, x(t^-))$ та $(t^+, x(t^+))$ належать межі області D.



Теорема 1.3 (Теорема Пікара)**.** Нехай

1) $\overline{f} \in C(\Pi)$;

2) $\exists! L > 0 : \forall (t_1, \overline{x}_1), (t_2, \overline{x}_2) \in \Pi$ справедливо, що $||f(t_1, \overline{x}_1) - f(t_2, \overline{x}_2)|| \leq$

$\leq L||\overline{x}_1 - \overline{x}_2||$ (умова Ліпшиця).

Тоді $\exists!$ розв'язок задачі Коші ?з п. ри? $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0(t)$, визначений принаймні на $I_h = (t_0 - h, t_0 + h), \quad h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, \quad M = \max\limits_{\Pi} ||f(t, \overline{x})||$.

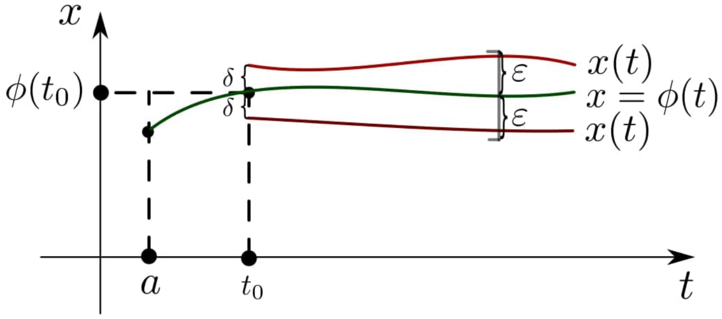
1.2. Основні поняття теорії стійкості.

Розглянем систему диференційних рівнянь $\overline{x}' = \overline{f}(t, \overline{x})$ (1), де $f : D \to \mathbb{R}^n$ та $D = [a, +\infty] \times G, \quad G \subset \mathbb{R}^n$. Нехай при цьому $\overline{f}$ задавольняє умовам існування та єдиності розв'язку задачі Коші в будь-якій точці $(t_0, \overline{x}_0) \in D$

Означення. Розв'язок $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ системи (1) називається **стійким** за Ляпуновим, якщо

1) $\overline{x} = \overline{\varphi}(t) \quad \exists$ на $[a, +\infty]$ (відсутніть вертикальних асимптот)

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$ розв'язку $\overline{x}(t)$ системи (1) такого, що $||\overline{x}(t_0) - \overline{\varphi}(t_0)|| < \delta$ виконується наступне, що $\overline{x}(t)$ існує на $[t_0, +\infty]$ та $||\overline{x}(t) - \overline{\varphi}(t)|| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$.



Означення. Розв'язок $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ системи (1) називається **асимптотично стійким** за Ляпуновим, якщо

1) $\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ стійкий;

2) $\forall t_0 \geq a \quad \exists \delta > 0 : \forall$ розв'язку $\vec{x}(t)$ с-ми (1) такого, що $||\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)|| < \delta$ справедливо, що $||\vec{x}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)|| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Роз'язок називається **нестійким**, якщо він не є стійким.

1.3. Приклади дослідження на стійкість за означенням.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок З.К.:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Знайдемо розв'язок заданої З.К.: $x = 1 \Rightarrow x = t + C$ - заг. розв.
Підставимо: $0 = 0 + C \implies C = 0 \implies \boxed{\varphi(t) = t}$ - будемо досліджувати. Зазначений розв'язок не має вертикальних асимптот та існує на всьому $\mathbb{R}$. 2. Знайдемо розв'язок довільної З.К. $x(t_0) = x_0$.

$$x_0 = t_0 + C \Rightarrow C = x_0 - t_0 \Rightarrow x(t) = t + x_0 - t_0$$

3. Нехай $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$;
Тоді $|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - t_0| < \varepsilon = \delta$.
Таким чином, розв'язок є стійким, але не є асимптотично стійким.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок З.К.:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + t - x \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Знайдемо розв'язок даної задачі Коші:

$$\dot{x} = -x + 1 + t = |\text{ методом Бернуллі }| = t + Ae^{-t}$$

Знайшли загальний розв'язок. Підставимо умову із з. К.: $A = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = t}$

2. Знайдемо розв'язок довільної З.К.:

$$x(t_0) = x_0 \qquad x_0 = t_0 + Ae^{-t_0} \qquad A = (x_0 - t_0)e^{t_0}$$

$$x(t) = t + (x_0 - t_0)e^{t_0 - t} - \text{ загальний розв'язок з. К.}$$

3. Нехай $|x(t_0) - \varphi(t_0)| = |x_0 - t_0| < \delta$. Розглядаємо: $\forall t \geq t_0$:

$$|x(t) - \varphi(t)| = \left| t + (x_0 - t_0) \cdot e^{t_0 - t} - t \right| = |x_0 - t_0| < \delta \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

Отримали, що знайдений розв'язок є асимптотично стійким.

Перейдемо знов до систем диф. рівнянь: $\overline{x}' = \overline{f}(t, \overline{x}) \quad (1)$.

$\overline{x} = \overline{\varphi}(t)$ - розв'язок, який ми маємо дослідити на стійкість.

Заміна $\overline{z}(t) = \overline{x}(t) - \overline{\varphi}(y)$. Отримаємо систему:

$$\overline{z}' + \overline{\varphi}' = \overline{f}(t, \overline{z} + \overline{\varphi})(t)$$

$$\overline{f}'(t) = \overline{f}(t, \overline{\varphi}) \Longrightarrow \boxed{\overline{z}' = \overline{\varphi}(t, \overline{z} + \overline{\varphi}(t)) - \overline{f}(t, \varphi(t))}$$

Sample