独立変数の和の性質

確率・統計 - 第 6 講

村田 昇

前回のおさらい

- 条件付確率と独立性
  - 同時確率，周辺確率，条件付確率
  - 条件付確率分布，条件付確率密度，条件付平均値
  - 条件付確率と Beyes の定理
  - 確率変数と事象の独立性

特性関数

- 定義

  特性関数は指数関数を用いて変数変換された確率変数の平均として

  $$\phi(s) = \mathbb{E}[e^{isX}]$$

  で定義される．
  - 特性関数は実数値ではなく複素数値をとることに注意する

特性関数の性質

- 逆変換の存在

  特性関数と確率測度 (確率密度) は一対一に対応している

  (Levy-Haviland の反転公式)
- 分布の同一性

  2 つの分布の特性関数が同じであれば，2 つの分布が同じであることが言える．

標準正規分布の特性関数

- X を標準正規分布に従う確率変数とする

$$\begin{aligned}
\phi_X(s) &= \mathbb{E}[e^{isX}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= e^{-\frac{s^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-is)^2}{2}} dx \\
&= e^{-\frac{s^2}{2}}
\end{aligned}$$

独立性の重要な性質

- 平均値の乗法性

  確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立 $\Rightarrow$

  $$\mathbb{E}[X_1 X_2 \cdots X_n] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]\cdots\mathbb{E}[X_n]$$

- 分散の加法性

  確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の任意の 2 変数が独立 $\Rightarrow$

  $$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\\ &= \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)\end{aligned}$$

大数の法則

記号の準備

- 確率変数列

  確率変数の列 (可算無限でも良い) を

  $$\{X_n\} = \{X_1, X_2, X_3, \ldots\}$$

  と書く．一般に X_n はそれぞれ異なる分布 P^{X_n} に従っていて構わない.

- 確率変数列の性質の記述

  確率変数 X_n の平均や分散などをまとめて表記するときは $\{\mathbb{E}[X_n]\}$ や $\{\mathrm{Var}(X_n)\}$ のように書く．例えば

  $$\sup_n \mathrm{Var}(X_n) < \infty$$

  は "$\{\mathrm{Var}(X_n)\}$ が有界である" と書く.

大数の法則

- 定理

  $\{X_n\}$ を確率変数列として

  $$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

  とする．また，$\{X_n\}$ は独立で，$\{\mathrm{Var}(X_n)\}$ は有界とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n(\varepsilon)$ を十分大きくとれば，すべての $n > n(\varepsilon)$ に対して

  $$P\left(\frac{|S_n - \mathbb{E}[S_n]|}{n} > \varepsilon\right) < \varepsilon$$

  とすることができる.

Čebyšëv の不等式

- 定理

  任意の確率変数 X において任意の $a > 0$ に対して

  $$P\left(|X(\omega) - \mathbb{E}[X]| > a\right) \leq \frac{1}{a^2}\mathrm{Var}(X)$$

  が成り立つ.

- 証明

$$A = \left\{\omega \middle| |X(\omega) - \mathbb{E}[X]| > a\right\}$$

とする．分散の性質から

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] \\
&= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2, \Omega] \\
&= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2, A + A^c] \\
&= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2, A] + \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2, A^c] \\
&\geq \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2, A] \geq a^2 P(A)
\end{aligned}$$

であるので，題意が証明される．

大数の法則の略証

- step 1

まず $a > 0$ として Čebyšëv の不等式より

$$P\left(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| > a\right) \leq \frac{1}{a^2}\mathrm{Var}(S_n)$$

が成り立つ．

- step 2

$\{X_n\}$ の独立性より

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) \leq n \cdot \max_k \mathrm{Var}(X_k)$$

がいえる．

- step 3

$a = n\varepsilon$ と置き換えることによって

$$P\left(\frac{|S_n - \mathbb{E}[S_n]|}{n} > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \max_k \mathrm{Var}(X_k)$$

が成り立つ．

- step 4

$n \to \infty$ とすると右辺は $\{\mathrm{Var}(X_n)\}$ の有界性より 0 になる．したがって任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|S_n - \mathbb{E}[S_n]|}{n} > \varepsilon\right) \to 0$$

が成り立つ．

Kolmogorov の大数の強法則

- 定理

  $\{X_n\}$ を確率変数列として

  $$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

  とする．$\{X_n\}$ が独立で，$\{\mathrm{Var}(X_n)\}$ が有界ならば

  $$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \to 0 \text{ a.s.}$$

  が成り立つ．

- 大数の法則 (弱法則) より強い意味での収束性を主張
  - 大数の弱法則 : 確率収束
  - 大数の強法則 : 概収束

同分布の場合の大数の強法則

- 定理

  確率変数列 $\{X_n\}$ が独立で同じ分布に従い，$\{\mathbb{E}[|X_n|]\}$ が有界であるとする．$\{X_n\}$ の平均値を μ とすると，

  $$\frac{S_n}{n} \to \mu \quad \text{a.s.}$$

  が成り立つ．

  - 絶対値の平均が有界という条件に緩められている

- 定理の意味

  条件を満たすならば，n が十分大きくとれる (十分多くの観測を行うことができる) とき，平均値 μ の近似値として観測値の算術平均

  $$\frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

  を使って良い．

演習

練習問題

- 確率変数 X は平均 50，標準偏差 10 の分布に従うとする．このとき以下の確率を Čebyšëv の不等式を用いて評価せよ．
  - $P(|X - 50| > 10)$
  - $P(|X - 50| > 20)$
  - $P(|X - 50| > 30)$

中心極限定理

Lindeberg の中心極限定理

- 定理

  $\{X_n\}$ は独立で，その分散が有界，$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ とする．すべての $\varepsilon > 0$ に対し

$$\frac{1}{\mathrm{Var}(S_n)} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_k - \mathbb{E}[X_k])^2, |X_k - \mathbb{E}[X_k]| \geq \varepsilon\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}\right] \to 0 \ (n \to \infty)$$

  ならば，$n \to \infty$ のとき

$$T_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}$$

  の確率法則は標準正規分布 $N(0,1)$ に近づく．

同分布の場合の中心極限定理

- 定理

  $\{X_n\}$ が独立で，正の分散を持つ同じ分布に従うときには中心極限定理が成り立つ．

  – “正の分散を持つ” とは定数ではないことを意味する．

- Lindeberg の条件の確認

  同分布の場合には

$$\frac{1}{\mathrm{Var}(X)}\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2, |X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\sqrt{n\mathrm{Var}(X)}\right] \to 0 \quad (n \to \infty)$$

  と書かれる．左辺は，平均値から $\sqrt{n\mathrm{Var}(X)}$ 以上離れた標本点が得られるという事象 $|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\sqrt{n\mathrm{Var}(X)}$ の起こる確率を表すが，これは n が大きくなるとともに 0 に近づくので，Lindeberg の条件は満たされる．

- T_n の書き換え

  $\{X_n\}$ の平均を $\mathbb{E}[X] = \mu$，分散を $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ と書き，$\{X_n\}$ の標本平均を

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{S_n}{n}$$

  と定義すると

$$T_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = \frac{n\bar{X}_n - n\mathbb{E}[X]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(X)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$$

  である．

- 定理の別表現

  $\{X_n\}$ は独立で，平均 μ，標準偏差 σ の同じ分布に従うとする．このとき，すべての実数 $a < b$ に対して

$$P\left(a \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \quad (n \to \infty)$$

  が成り立つ．

- 定理の意味

  X_i の分布が何であっても，サンプル数 n が十分大きければ，標本平均と真の平均の差 $\bar{X}_n - \mu$ の分布は，**標準正規分布** を利用して

  $$P\Big(a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X}_n - \mu \le b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

  で近似できる．

- 評価の例

$$\begin{aligned}
\alpha = 1 &\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0.6827 \\
\alpha = 2 &\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2}^{2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0.9545 \\
\alpha = 3 &\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3}^{3} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0.9973
\end{aligned}$$

  - Čebyšëv の不等式による評価と比較してみよ

演習

練習問題

- 以下の関数を $x = 0$ のまわりで Taylor 展開せよ．
  - $\log(1 + x)$
  - $\exp(x)$

    関数 $f(x)$ の点 $x = a$ における Taylor 展開:

    $$\begin{aligned}
    f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f^{(1)}(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f^{(2)}(a)}{2!} + \cdots \\
    + (x-a)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}
    \end{aligned}$$

    $$\xi = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1$$

練習問題

- 以下の極限を求めよ

  $$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

定理の略証

証明の考え方

- 以下は同分布 (平均 μ 分散 σ^2) の場合で考える
- step 1

確率変数 Y_{nk} を

$$Y_{nk} = \frac{X_k - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{n \mathrm{Var}(X)}} = \frac{X_k - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

とおくと T_n は

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_{nk}$$

と表される.

- step 2

  このとき

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_{nk}] &= 0, \\
\mathrm{Var}(Y_{nk}) &= \mathbb{E}[Y_{nk}^2] = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{Var(X)}}{\sigma^2} = \frac{1}{n}, \\
\mathbb{E}[T_n] &= 0, \\
\mathrm{Var}(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_{nk}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[Y_{nk}^2] = 1
\end{aligned}$$

  となる.

- step 3

  $\{Y_{nk}, k = 1, 2, \ldots, n\}$ は独立であるから，T_n の特性関数は独立変数の平均値の乗法性より

$$\mathbb{E}[e^{isT_n}] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{isY_{nk}}]$$

  と分解できる.

- step 4

  Y_{nk} の特性関数に着目して指数関数を適当な項まで Taylor 展開する.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{isY_{nk}}] &= \mathbb{E}\left[1 + isY_{nk} - \frac{1}{2}s^2 Y_{nk}^2 + (Y_{nk}^3 \text{ 以上の項})\right] \\
&= 1 + is\mathbb{E}[Y_{nk}] - \frac{1}{2}s^2 \mathbb{E}[Y_{nk}^2] + \mathbb{E}[(s^3 Y_{nk}^3 \text{ 以上の項})] \\
&= 1 - \frac{1}{2n}s^2 + \frac{r_n(s)}{n}
\end{aligned}$$

  ただし $r_n(s)$ は $\lim_{n\to\infty} r_n(s) = 0$ となることに注意.

- step 5

  したがって

$$\mathbb{E}[e^{isT_n}] = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2n}s^2 + \frac{r_n(s)}{n}\right) = \left(1 + \frac{-s^2/2}{n} + \frac{r_n(s)}{n}\right)^n$$

  であるから

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{isT_n}] = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-s^2/2}{n} + \frac{r_n(s)}{n}\right)^n = e^{-\frac{s^2}{2}}$$

演習

練習問題

- 偏りのないコインを投げたとき表なら 1，裏なら-1 となる確率変数 X を考える．n 回投げたときに得られた結果を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ と書く．

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

  とするとき，以下の問に答えよ．
  - Y_n の平均と分散を求めよ．
  - Y_n の特性関数 $\phi_n(s)$ を求めよ．
  - 特性関数 $\phi_n(s)$ の極限 $\lim_{n\to\infty} \phi_n(s)$ を求めよ．

今回のまとめ

- 独立変数の和の性質
  - 大数の法則とその条件
  - 中心極限定理とその条件