有限試行の確率空間

確率・統計 - 講義 *1*

村田 昇

試行と見本空間

試行と見本点

試行 (trial) 不確定性のある現象を調べるための**実験**

見本点 (sample point) 試行の結果観測される**事柄**
標本，観測値 (observation)，**実現値** (realization) とも呼ばれる

試行の例

- 骰子 (サイコロ) 振り

  “骰子を振って，どの目が出易いか調べる” という実験を考える．“骰子を振ること” が試行に対応し，“1, 2, 3, 4, 5, 6 の目” が見本点となる．

- ルーレット回し

  周長 1m の円盤を中心で回るように用意し，円周上に 0 から 1 の目盛りを付ける．また円周の外側の適当な位置に印を付ける．“ルーレットを回して止まったときに印が指している目盛りを読む” という実験を考える．“ルーレットを回すこと” が試行に対応し，“$(0,1]$ の間のいずれかの値” が見本点となる．

見本空間と見本点

見本空間 (sample space) 観測される全ての見本点を集めた集合
標本空間と呼ぶ場合もある

記法 見本空間 Ω (オメガの大文字) のように大文字で表記
見本点 ω (オメガの小文字) のように小文字で表記

見本空間の例

- 骰子振り

  試行 $T =$ “骰子を振る” の見本空間は $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ であり，試行 T の結果 2 の目が出た場合は “$\omega = 2$ が観測された” という．

- ルーレット回し

  試行 $T =$ “ルーレットを回す” の見本空間は $\Omega = (0,1]$ である．

見本空間による試行の分類

有限試行 見本空間が有限集合 (要素数が**有限個**) である試行

無限試行 見本空間が無限集合 (要素数が**無限個**) となる試行

試行の分類の例

- 骰子振り

  見本点は 6 つなので有限試行である.

- ルーレット回し

  見本点の数は数え切れないので無限試行である.

- "1 が出るまで骰子を振り続ける" 試行

  出た目の数の列，例えば $\langle 4, 2, 5, 6, 1\rangle$ が見本点になる.

  見本点としていくらでも長い系列，例えば $\Omega = \{\langle 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \ldots, \langle 4, 2, 5, 6, 1\rangle, \ldots\}$ が存在するので，その要素の数は無限となる.

  したがってこの試行は無限試行である.

演習

練習問題

- "コインを 10 回投げる" 試行を考える.
  - 見本点の例を挙げよ.
  - 見本空間を記せ.
- "表が出るまでコインを投げる" 試行を考える.
  - 見本点の例を挙げよ.
  - 見本空間を記せ.
- "表が出るまでコインを投げた回数を観測する" 試行を考える.
  - 見本点の例を挙げよ.
  - 見本空間を記せ.

事象とその表現

事象

事象 (event) 見本点の集合，すなわち見本空間の部分集合

試行 T の結果として部分集合 A に属する見本点が出現することを **"事象 A が起こる"** と表現する.

根元事象 (elementary event) 1 つの見本点だけからなる事象

全事象 (full event, whole event) 見本空間全体 Ω

事象の例

- 骰子振り

  事象 A として "偶数の目" $A = \{2, 4, 6\}$ を考える.

  4 の目が出た場合は A に属している $(4 \in A)$ ので "事象 A が起こった" ことになり，5 の目が出た場合は $5 \notin A$ なので "事象 A は起こらなかった" ことになる.

- ルーレット回し

  事象 A を区間 $(0, 0.5]$ とする.

  止まったときに印が 0.5 を指していれば $0.5 \in A$ なので "事象 A が起こった" ことになり，$\pi/4 = 0.785\cdots$ を指していたら $\pi/4 \notin A$ なので "事象 A は起こらなかった" ことになる.

事象の演算 (集合の演算)

和事象 (sum event) A または B が起こること．
A, B の和集合 (union) $A \cup B$

交事象 (product event) A と B が同時に起こること．
A, B の交集合 (intersection) $A \cap B$

差事象 (difference event) A が起こり B が起こらないこと．
A, B の差 (difference) $A \backslash B$

余事象 (complementary event) A が起こらないこと．
A の補集合 (complement) A^c または $\bar{A}$

排反事象 (exclusive event) 事象 A, B が同時に起こらないこと．
A, B が互いに素 (disjoint) $A \cap B = \emptyset$

直和 (direct sum, disjoint union) 排反事象の和 $A \cup B$ を $A + B$ と書く．
逆に $A + B$ と書いた場合には A と B は排反

固有差 $A \supset B$ のとき $A \backslash B$ を $A - B$ と書く．

事象の演算の例

- 骰子振り

  3 つの事象
  - 事象 A として “偶数の目” $A = \{2, 4, 6\}$
  - 事象 B として “奇数の目” $B = \{1, 3, 5\}$
  - 事象 C として “素数の目” $C = \{2, 3, 5\}$

  を考えると，例えば
  - A の余事象は $B = A^c$
  - B と C の交事象は $B \cap C = \{3, 5\}$,
  - A と C の和事象は $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,
  - A と B の直和は全事象 $A + B = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  のようになる．

条件による事象の表現

- 事象は見本点 ω に関する**条件 (condition)** を表す式 $\alpha(\omega)$ を用いて記述可能:

$$A = \{\omega |\ \alpha(\omega)\}$$

- 条件 α を事象 A と同一視して単に事象 α ということもある

条件による事象の例

- 骰子振り

  “偶数の目” という事象 A:

$$A = \{\omega |\ \omega\text{が偶数}\} = \{2, 4, 6\}$$

- ルーレット回し

  “区間 $(0, 0.5]$ の値” という事象 A:

$$A = \{\omega |\ 0 < \omega \leq 0.5\}$$

条件による事象の演算

和事象 (α または β)： $\alpha \vee \beta$

$$\{\omega |\ \alpha(\omega) \vee \beta(\omega)\} = \{\omega |\ \alpha(\omega)\} \cup \{\omega |\ \beta(\omega)\}$$

交事象 (α かつ β)： $\alpha \wedge \beta$

$$\{\omega |\ \alpha(\omega) \wedge \beta(\omega)\} = \{\omega |\ \alpha(\omega)\} \cap \{\omega |\ \beta(\omega)\}$$

余事象 (α の否定)： $\alpha^{\neg}$

$$\{\omega |\ \alpha(\omega)^{\neg}\} = \Omega - \{\omega |\ \alpha(\omega)\}$$

条件による事象の演算の例

- 骰子振り

  それぞれの事象を条件で書くと

  $$\{\omega |\ (\omega\text{が偶数})^{\neg}\} = \{\omega |\ \omega\text{が奇数}\}\ (\text{余事象})$$
  $$\{\omega |\ (\omega\text{が奇数}) \wedge (\omega\text{が素数})\} = \{3, 5\}\ (\text{交事象})$$
  $$\{\omega |\ (\omega\text{が偶数}) \vee (\omega\text{が素数})\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}\ (\text{和事象})$$
  $$\{\omega |\ (\omega\text{が偶数}) \vee (\omega\text{が奇数})\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\ (\text{直和})$$

  となる．

演習

練習問題

- 和事象，交事象，差事象，余事象，排反事象，固有差，直和をベン図 (Venn diagram) を描いて説明せよ．
- ド・モルガンの法則 (de Morgan’s laws) について説明せよ．

ド・モルガンの法則

- 一般には以下の 2 つの等式で表される関係を指す．

  $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad (\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B})$$
  $$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B})$$

- ベン図での表現を考えてみよ．

有限試行の確率空間

有限試行の確率測度

- 定義

  見本空間 Ω と任意の事象 $A, B \subset \Omega$ に対して以下の性質をもつ実数値集合関数 P (Ω の部分集合に作用して実数を出力する関数) を**確率測度 (probability measure)** という．

  $$(P.1) \quad P(A) \geq 0, \qquad (\text{正値性; positivity})$$
  $$(P.2) \quad P(A + B) = P(A) + P(B), \qquad (\text{加法性; additivity})$$
  $$(P.3) \quad P(\Omega) = 1 \qquad (\text{全確率は } 1)$$

- 確率測度は**確率分布 (probability distribution)** あるいは単に**分布 (distribution)** と言うこともある．

確率測度の条件の意味

(P.1) ある事象の起こる確率は 0 または正の値を取る

(P.2) 排反な事象の和の確率はそれぞれの事象の確率の和となる

(P.3) ある試行を行ったとき見本空間の中のどれか 1 つの見本点は必ず観測される

確率測度の例

- 骰子振り

  “いかさまのない骰子を 1 回振る” 試行 T の確率測度 P は

  $$P(\{1\}) = P\{2\} = P\{3\} = P\{4\} = P\{5\} = P\{6\} = \frac{1}{6}$$
  $$P(\text{素数の目が出る}) = P(\{2,3,5\}) = \frac{1}{2}$$

  のように，事象を入れるとその事象の起こる確率を返してくれる関数 P である．

確率空間

- 定義

  見本空間 Ω と事象の集合 (集合族) $\mathcal{F}$ と確率測度 P の組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を，**確率空間 (probability space)** と呼ぶ．

- 試行 T が定まると
  - 見本空間 Ω
  - 考えるべき事象の集合 $\mathcal{F}$
  - 確率法則 P

  を考えることができる．

確率測度の演算

- 事象の演算に関しては以下の関係が成り立つ．

  1. $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
  2. $P(A - B) = P(A) - P(B)$
  3. $P(A^c) = 1 - P(A)$
  4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  5. $P(A) = \sum_{\omega \in A} P\{\omega\}$

確率測度の演算の例

- 骰子振り

  “いかさまのない骰子を 1 回振る” 試行 T において素数の目が出る確率は

  $$\begin{aligned} P(\text{素数の目}) &= P(\{2,3,5\}) \\ &= P\{2\} + P\{3\} + P\{5\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  となる．

演習

練習問題

- 確率測度の定義にもとづいて以下を証明せよ．

$$
\begin{aligned}
&P(A^c) = 1 - P(A)\\
&P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}
$$

- よく切ったトランプから 2 枚カードを引く試行を考える．この試行の確率空間を構成せよ．

解答例

- 確率測度の 3 つの性質を用いる．1 つめは

$$P(A) + P(A^c) = P(A + A^c) = P(\Omega) = 1$$

  より

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

  となる．また 2 つめについては

$$(A \cup B) = (A - A \cap B) + (B - A \cap B) + (A \cap B)$$

  を用いればよい．

試行が有限でない場合の問題点

無限試行の例

- "1 が出るまで骰子を振り続ける" 試行

  見本点 $\langle 6,5,4,3,2,1\rangle$ が観測される確率は，6 回骰子を振る 6^6 通りの中の等しい確率で起こる 1 つなので

$$P\left(\langle 6,5,4,3,2,1\rangle\right) = \frac{1}{6^6}$$

  となる．

- 事象の確率も同様

  また，ちょうど 6 回で 1 が出て終わる見本点 $\langle *,*,*,*,*,1\rangle$ ($*$ は 1 以外の目) が観測される確率は，最初の 5 回は 1 以外，最後に 1 の目の 5^5 通りがあるので

$$P\left(\langle *,*,*,*,*,1\rangle\right) = \frac{5^5}{6^6}$$

  である．

無限試行の例

- ルーレット回し

  "ルーレット回し" の試行で，ちょうど 0.5 の値が出る確率はいくつか？

- 任意の事象を考える

事象 A を要素数が無限個の適当な数の集合として，これを $A = \{a, b, c, \dots\}$ と書く．前出の加法性に従うなら事象 $A = \{a, b, c, \dots\}$ に対して，1 回の試行で例えば見本点 a と b が同時に観測されることはないので，

$$P(A) = P\{a\} + P\{b\} + P\{c\} + \cdots$$

として良い．

- 確率の和を考える

  仮に各要素の出現確率が同じ $\epsilon > 0$ という値である場合

  $$P\{a\} = P\{b\} = P\{c\} = \cdots = \epsilon \quad (\neq 0)$$

  を考える．このとき要素数が無限個あるので

  $$P(A) = \epsilon + \epsilon + \epsilon + \cdots \quad \to \infty$$

  となり，確率の値が 1 を越えてしまう．

  事象 A が無限集合で各見本点が同様に起こり易い場合には

  $$P\{a\} = P\{b\} = P\{c\} = \cdots = 0$$

  でなくてはならない．

- 全確率を考える

  任意の見本点についてその確率が 0 なら，いくら足しても

  $$P(A) = P\{a\} + P\{b\} + P\{c\} + \cdots = 0$$

  である．

  見本空間全体についてこの議論を行えば $P(\Omega) = 0$ となってしまうので，全事象の確率がうまく定義できない．

- この問題を解決するためには**加法性**を考え直す必要がある

今回のまとめ

- 有限試行の確率空間
  - 確率論の基本用語: 試行，見本点，見本空間，事象
  - 事象は見本空間の部分集合
  - 事象の演算は集合の演算と等価
  - 確率測度の基本的な性質 (正値性，加法性，全確率)
  - 確率空間は見本空間，事象の集合，確率測度の 3 つ組