有限試行の確率空間

確率・統計 第 *1* 回

村田 昇

*2020*年 *8*月 *23*日

試行と見本空間

不確定性のある現象を記述するための数学的な枠組である確率を扱うために必要な用語を定義する.

試行と見本点

試行 (trial) 現象を観測する実験

見本点 (sample point) 試行の結果観測される事柄
標本，観測値 (observation)，実現値 (realization) とも呼ばれる

試行の例

- 骰子 (サイコロ) 振り

  「骰子を振って，どの目が出易いか調べる」という実験を考える.「骰子を振ること」が試行に対応し，1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が見本点となる.

- ルーレット回し

  周長 1m の円盤を中心で回るように用意し，円周上に 0 から 1 の目盛りを付ける. また円周の外側の適当な位置に印を付ける.「ルーレットを回して止まったときに印が指している目盛りを読む」という実験を考える.「ルーレットを回すこと」が試行に対応し，$(0,1]$ の間のいずれかの実数値が見本点となる.

見本空間

見本空間 (sample space) 観測される全ての見本点を集めた集合
標本空間と呼ぶ場合もある

記法 **見本空間** Ω (オメガの大文字) のように大文字
見本点 ω (オメガの小文字) のように小文字

見本空間の例

- 骰子振り

  試行 $T =$「骰子を振る」の見本空間は $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ であり，試行 T の結果 2 の目が出た場合は「2 が観測された」あるいは「$\omega = 2$ が観測された」という.

- ルーレット回し

  試行 $T =$「ルーレットを回す」の見本空間は $\Omega = (0,1]$ である.

見本空間による試行の分類

有限試行 見本空間が有限集合 (要素数が**有限個**) である試行

無限試行 見本空間が無限集合 (要素数が**無限個**) となる試行

試行の分類の例

- 骰子振り

  見本点は 6 つなので有限試行である．

- ルーレット回し

  見本点の数は数え切れないので無限試行である．

- 「1 が出るまで骰子を振り続ける」試行

  出た目の数の列，例えば $\langle 4,2,5,6,1\rangle$ が見本点になる．

  見本点としていくらでも長い系列，例えば $\Omega = \{\langle 1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \ldots, \langle 4,2,5,6,1\rangle, \ldots\}$ が存在するので，その要素の数は無限となる．

  したがってこの試行は無限試行である．

演習

- 「コインを 10 回投げる」試行を考える．
  - 見本点の例を挙げよ．
  - 見本空間を記せ．
- 「表が出るまでコインを投げる」試行を考える．
  - 見本点の例を挙げよ．
  - 見本空間を記せ．
- 「表が出るまでコインを投げた回数を観測する」試行を考える．
  - 見本点の例を挙げよ．
  - 見本空間を記せ．

事象とその表現

確率を考える対象としては，単一の見本点だけではなく，複数の見本点の集まりを考えることができる．ここでは見本点の集合である事象とその記述の仕方，および基本的な演算についてまとめておく．

事象

事象 (event) 見本点の集合，すなわち見本空間の部分集合

試行 T の結果として部分集合 A に属する見本点が出現することを**「事象 A が起こる」**と表現する．

根元事象 (elementary event) 1 つの見本点だけからなる事象

全事象 (full event, whole event) 見本空間全体 Ω

事象の例

- 骰子振り

  事象 A として「偶数の目」$A = \{2,4,6\}$ を考える．

  4 の目が出た場合は A に属している $(4 \in A)$ ので「事象 A が起こった」ことになり，5 の目が出た場合は $5 \notin A$ なので「事象 A は起こらなかった」ことになる．

- ルーレット回し

  事象 A を区間 $(0, 0.5]$ とする．

  止まったときに印が 0.5 を指していれば $0.5 \in A$ なので「事象 A が起こった」ことになり，$\pi/4 = 0.785\cdots$ を指していたら $\pi/4 \notin A$ なので「事象 A は起こらなかった」ことになる．

事象の演算 (集合の演算)

和事象 (sum event) A または B が起こること.
A, B の和集合 (union) $A \cup B$

交事象 (product event) A と B が同時に起こること.
A, B の交集合 (intersection) $A \cap B$

差事象 (difference event) A が起こり B が起こらないこと.
A, B の差 (difference) $A \backslash B$

余事象 (complementary event) A が起こらないこと.
A の補集合 (complement) A^c または $\bar{A}$

排反事象 (exclusive event) 事象 A, B が同時に起こらないこと.
A, B が互いに素 (disjoint) $A \cap B = \emptyset$

直和 (direct sum, disjoint union) 排反事象の和 $A \cup B$ を $A + B$ と書く.
逆に $A + B$ と書いた場合には A と B は排反

固有差 $A \supset B$ のとき $A \backslash B$ を $A - B$ と書く.

事象の演算の例

- 骰子振り

  3 つの事象
  - 事象 A として「偶数の目」$A = \{2, 4, 6\}$
  - 事象 B として「奇数の目」$B = \{1, 3, 5\}$
  - 事象 C として「素数の目」$C = \{2, 3, 5\}$

  を考えると，例えば
  - A の余事象は $B = A^c$
  - B と C の交事象は $B \cap C = \{3, 5\}$，
  - A と C の和事象は $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$，
  - A と B の直和は全事象 $A + B = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  のようになる.

条件による事象の表現

- 事象は見本点 ω に関する**条件** (condition) を表す式 $\alpha(\omega)$ を用いて記述可能:

$$A = \{\omega |\ \alpha(\omega)\}$$

- 条件 α を事象 A と同一視して単に事象 α ということもある

条件による事象の例

- 骰子振り

  「偶数の目」という事象 A:

$$A = \{\omega |\ \omega \text{が偶数}\} = \{2, 4, 6\}$$

- ルーレット回し

  「 区間 $(0, 0.5]$ の数」という事象 A:

$$A = \{\omega |\ 0 < \omega \leq 0.5\}$$

条件による事象の演算

和事象 (α または β)： $\alpha \vee \beta$

$$\{\omega |\ \alpha(\omega) \vee \beta(\omega)\} = \{\omega |\ \alpha(\omega)\} \cup \{\omega |\ \beta(\omega)\}$$

交事象 (α かつ β)： $\alpha \wedge \beta$

$$\{\omega |\ \alpha(\omega) \wedge \beta(\omega)\} = \{\omega |\ \alpha(\omega)\} \cap \{\omega |\ \beta(\omega)\}$$

余事象 (α の否定)： $\alpha^{\neg}$

$$\{\omega |\ \alpha(\omega)^{\neg}\} = \Omega - \{\omega |\ \alpha(\omega)\}$$

条件による事象の演算の例

- 骰子振り

  それぞれの事象を条件で書くと

$$\{\omega |\ (\omega\text{が偶数})^{\neg}\} = \{\omega |\ \omega\text{が奇数}\}\ (\text{余事象})$$
$$\{\omega |\ (\omega\text{が奇数}) \wedge (\omega\text{が素数})\} = \{3, 5\}\ (\text{交事象})$$
$$\{\omega |\ (\omega\text{が偶数}) \vee (\omega\text{が素数})\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}\ (\text{和事象})$$
$$\{\omega |\ (\omega\text{が偶数}) \vee (\omega\text{が奇数})\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\ (\text{直和})$$

  となる．

演習

- 和事象，交事象，差事象，余事象，排反事象，固有差，直和をベン図 (Venn diagram) を描いて説明せよ．
- ド・モルガンの法則 (de Morgan’s laws) について説明せよ．

有限試行の確率空間

これまでの準備をもとに，各事象の起こり易さである確率を計算する関数を定義し，確率を考える空間を規定する．この節では有限試行の場合について考える．

有限試行の確率測度

- 定義

  見本空間 Ω と任意の事象 $A, B \subset \Omega$ に対して以下の性質をもつ実数値集合関数 P (Ω の部分集合に作用して実数を出力する関数) を**確率測度 (probability measure)** という．

$$\begin{aligned} &(P.1) \quad P(A) \geq 0, && (\text{正値性; positivity}) \\ &(P.2) \quad P(A+B) = P(A) + P(B), && (\text{加法性; additivity}) \\ &(P.3) \quad P(\Omega) = 1 && (\text{全確率は } 1) \end{aligned}$$

- 確率測度は確率分布 (probability distribution) あるいは単に分布 (distribution) と言うこともある．

確率測度の条件の意味

(P.1) ある事象の起こる確率は 0 または正の値を取る

(P.2) 排反な事象の和の確率はそれぞれの事象の確率の和となる

(P.3) ある試行を行ったとき見本空間の中のどれか 1 つの見本点は必ず観測される

確率測度の例

- 骰子振り

  いかさまのない骰子を 1 回振る試行 T の確率測度 P は

  $$P(\{1\}) = P\{2\} = P\{3\} = P\{4\} = P\{5\} = P\{6\} = \frac{1}{6}$$
  $$P(\text{素数の目が出る}) = P(\{2,3,5\}) = \frac{1}{2}$$

  のように，事象を入れるとその事象の起こる確率を返してくれる関数 P である．

確率空間

- 定義

  見本空間 Ω と事象の集合 (集合族) $\mathcal{F}$ と確率測度 P の組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を，**確率空間 (probability space)** と呼ぶ．

- 試行 T が定まると
  - 見本空間 Ω
  - 考えるべき事象の集合 $\mathcal{F}$
  - 確率法則 P

  を考えることができる．

確率測度の演算

- 事象の演算に関しては以下の関係が成り立つ．

  1. $P\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
  2. $P(A - B) = P(A) - P(B)$
  3. $P(A^c) = 1 - P(A)$
  4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  5. $P(A) = \sum_{\omega \in A} P\{\omega\}$

確率測度の演算の例

- 骰子振り

  いかさまのない骰子を 1 回振る試行 T において素数の目が出る確率は

  $$\begin{aligned} P(\text{素数の目}) &= P(\{2,3,5\}) \\ &= P\{2\} + P\{3\} + P\{5\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  となる．

演習

- 確率測度の定義にもとづいて以下を証明せよ．

  $$P(A^c) = 1 - P(A)$$
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- よく切ったトランプから 2 枚カードを引く試行を考える．この試行の確率空間を構成せよ．

試行が有限でない場合の問題点

次に一般の試行 T と，それに付随する確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考える．確率測度が持つべき性質は有限試行の場合とほぼ同じであるが，Ω の要素の数が有限でないということが問題を引き起こす場合がある．

無限試行の例

- 「1 が出るまで骰子を振り続ける」試行

  見本点 $\langle 6,5,4,3,2,1\rangle$ が観測される確率は，6 回骰子を振る 6^6 通りの中の等しい確率で起こる 1 つなので

  $$P\left(\langle 6,5,4,3,2,1\rangle\right) = \frac{1}{6^6}$$

  となる．また，ちょうど 6 回で 1 が出て終わる見本点 $\langle *,*,*,*,*,1\rangle$ ($*$ は 1 以外の目) が観測される確率は，最初の 5 回は 1 以外，最後に 1 の目の 5^5 通りがあるので

  $$P\left(\langle *,*,*,*,*,1\rangle\right) = \frac{5^5}{6^6}$$

  である．

無限試行の例

- ルーレット回し

  「ルーレット回し」の試行で，ちょうど 0.5 の値が出る確率はいくつか？

- 考え方

  事象 A を要素数が無限個の適当な数の集合として，これを $A = \{a, b, c, \dots\}$ と書く．前出の加法性に従うなら事象 $A = \{a, b, c, \dots\}$ に対して，1 回の試行で例えば見本点 a と b が同時に観測されることはないので，

  $$P(A) = P\{a\} + P\{b\} + P\{c\} + \cdots$$

  として良い．

  仮に各要素の出現確率が同じ $\epsilon > 0$ という値である場合

  $$P\{a\} = P\{b\} = P\{c\} = \cdots = \epsilon \quad (\neq 0)$$

  を考える．このとき要素数が無限個あるので

  $$P(A) = \epsilon + \epsilon + \epsilon + \cdots \quad \to \infty$$

  となり，確率の値が 1 を越えてしまう．

  事象 A が無限集合で各見本点が同様に起こり易い場合には

  $$P\{a\} = P\{b\} = P\{c\} = \cdots = 0$$

  でなくてはならない．

  任意の見本点についてその確率が 0 なら，いくら足しても

  $$P(A) = P\{a\} + P\{b\} + P\{c\} + \cdots = 0$$

  である．

  見本空間全体についてこの議論を行えば $P(\Omega) = 0$ となってしまうので，全事象の確率がうまく定義できない．

- この問題を解決するには**加法性**を考え直す必要がある

まとめ

- 有限試行の確率空間
  - 確率論の基本用語: 試行，見本点，見本空間，事象
  - 事象は見本空間の部分集合
  - 事象の演算は集合の演算と等価
  - 確率測度の基本的な性質 (正値性，加法性，全確率)
  - 確率空間は見本空間，事象の集合，確率測度の 3 つ組