

有限試行の確率空間

確率・統計 第1回

村田 昇

試行と見本空間

試行と見本点

試行 (trial) 不確定性のある現象を調べるための**実験**

見本点 (sample point) 試行の結果観測される**事柄**

標本, 観測値 (observation), 実現値 (realization) と呼ばれる

試行の例

- 骰子 (サイコロ) 振り

“骰子を振って、どの目が出易いか調べる” という実験を考える. “骰子を振ること” が試行に対応し, “1, 2, 3, 4, 5, 6 の目” が見本点となる.

- ルーレット回し

周長 1m の円盤を中心で回るように用意し, 円周上に 0 から 1 の目盛りを付ける. また円周の外側の適当な位置に印を付ける. “ルーレットを回して止まったときに印が指している目盛りを読む” という実験を考える. “ルーレットを回すこと” が試行に対応し, “(0, 1] の間のいずれかの値” が見本点となる.

見本空間と見本点

見本空間 (sample space) 観測される全ての見本点を集めた集合

標本空間と呼ぶ場合もある

記法 見本空間 Ω (オメガの大文字) のように大文字で表記

見本点 ω (オメガの小文字) のように小文字で表記

見本空間の例

- 骰子振り

試行 T = “骰子を振る” の見本空間は $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ であり, 試行 T の結果 2 の目が出た場合は “ $\omega = 2$ が観測された” という.

- ルーレット回し

試行 T = “ルーレットを回す” の見本空間は $\Omega = (0, 1]$ である.

見本空間による試行の分類

有限試行 見本空間が有限集合 (要素数が**有限個**) である試行

無限試行 見本空間が無限集合 (要素数が**無限個**) となる試行

試行の分類の例

- 骰子振り

見本点は 6 つなので有限試行である.

- ルーレット回し

見本点の数は数え切れないので無限試行である.

- “1 が出るまで骰子を振り続ける” 試行

出た目の数の列, 例えば $\langle 4, 2, 5, 6, 1 \rangle$ が見本点になる.

見本点としていくらかでも長い系列, 例えば $\Omega = \{ \langle 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \dots, \langle 4, 2, 5, 6, 1 \rangle, \dots \}$ が存在するので, その要素の数は無限となる.

したがってこの試行は無限試行である.

演習

問題

- “コインを 10 回投げる” 試行を考える.
 - 見本点の例を挙げよ.
 - 見本空間を記せ.
- “表が出るまでコインを投げる” 試行を考える.
 - 見本点の例を挙げよ.
 - 見本空間を記せ.
- “表が出るまでコインを投げた回数を観測する” 試行を考える.
 - 見本点の例を挙げよ.
 - 見本空間を記せ.

事象とその表現

事象

事象 (event) 見本点の集合, すなわち見本空間の部分集合

試行 T の結果として部分集合 A に属する見本点が出現することを“**事象 A が起こる**”と表現する.

根元事象 (elementary event) 1 つの見本点だけからなる事象

全事象 (full event, whole event) 見本空間全体 Ω

事象の例

- 骰子振り

事象 A として “偶数の目” $A = \{2, 4, 6\}$ を考える.

4 の目が出た場合は A に属している ($4 \in A$) ので “事象 A が起こった” ことになり, 5 の目が出た場合は $5 \notin A$ なので “事象 A は起こらなかった” ことになる.

- ルーレット回し

事象 A を区間 $(0, 0.5]$ とする.

止まったときに印が 0.5 を指していれば $0.5 \in A$ なので “事象 A が起こった” ことになり, $\pi/4 = 0.785 \dots$ を指していたら $\pi/4 \notin A$ なので “事象 A は起こらなかった” ことになる.

事象の演算 (集合の演算)

和事象 (sum event) A または B が起こること.

A, B の和集合 (union) $A \cup B$

交事象 (product event) A と B が同時に起こること.

A, B の交集合 (intersection) $A \cap B$

差事象 (difference event) A が起こり B が起こらないこと.

A, B の差 (difference) $A \setminus B$

余事象 (complementary event) A が起こらないこと.

A の補集合 (complement) A^c または \bar{A}

排反事象 (exclusive event) 事象 A, B が同時に起こらないこと.

A, B が互いに素 (disjoint) $A \cap B = \emptyset$

直和 (direct sum, disjoint union) 排反事象の和 $A \cup B$ を $A + B$ と書く.

逆に $A + B$ と書いた場合には A と B は排反

固有差 $A \supset B$ のとき $A \setminus B$ を $A - B$ と書く.

事象の演算の例

- 骰子振り

3つの事象

- 事象 A として “偶数の目” $A = \{2, 4, 6\}$

- 事象 B として “奇数の目” $B = \{1, 3, 5\}$

- 事象 C として “素数の目” $C = \{2, 3, 5\}$

を考えると, 例えば

- A の余事象は $B = A^c$

- B と C の交事象は $B \cap C = \{3, 5\}$,

- A と C の和事象は $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,

- A と B の直和は全事象 $A + B = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

のようになる.

条件による事象の表現

- 事象は見本点 ω に関する**条件 (condition)** を表す式 $\alpha(\omega)$ を用いて記述可能:

$$A = \{\omega \mid \alpha(\omega)\}$$

- 条件 α を事象 A と同一視して単に事象 α ということもある

条件による事象の例

- 骰子振り

“偶数の目” という事象 A :

$$A = \{\omega \mid \omega \text{ が偶数} \} = \{2, 4, 6\}$$

- ルーレット回し

“区間 $(0, 0.5]$ の値” という事象 A :

$$A = \{\omega \mid 0 < \omega \leq 0.5\}$$

条件による事象の演算

和事象 (α または β) : $\alpha \vee \beta$

$$\{\omega \mid \alpha(\omega) \vee \beta(\omega)\} = \{\omega \mid \alpha(\omega)\} \cup \{\omega \mid \beta(\omega)\}$$

交事象 (α かつ β) : $\alpha \wedge \beta$

$$\{\omega \mid \alpha(\omega) \wedge \beta(\omega)\} = \{\omega \mid \alpha(\omega)\} \cap \{\omega \mid \beta(\omega)\}$$

余事象 (α の否定) : α^\neg

$$\{\omega \mid \alpha(\omega)^\neg\} = \Omega - \{\omega \mid \alpha(\omega)\}$$

条件による事象の演算の例

- 骰子振り

それぞれの事象を条件で書くと

$$\{\omega \mid (\omega \text{ が偶数})^\neg\} = \{\omega \mid \omega \text{ が奇数}\} \text{ (余事象)}$$

$$\{\omega \mid (\omega \text{ が奇数}) \wedge (\omega \text{ が素数})\} = \{3, 5\} \text{ (交事象)}$$

$$\{\omega \mid (\omega \text{ が偶数}) \vee (\omega \text{ が素数})\} = \{2, 3, 4, 5, 6\} \text{ (和事象)}$$

$$\{\omega \mid (\omega \text{ が偶数}) \vee (\omega \text{ が奇数})\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ (直和)}$$

となる.

演習

問題

- 和事象, 交事象, 差事象, 余事象, 排反事象, 固有差, 直和をベン図 (Venn diagram) を描いて説明せよ.
- ド・モルガンの法則 (de Morgan's laws) について説明せよ.

有限試行の確率空間

有限試行の確率測度

- 定義

見本空間 Ω と任意の事象 $A, B \subset \Omega$ に対して以下の性質をもつ実数値集合関数 P (Ω の部分集合に作用して実数を出力する関数) を**確率測度 (probability measure)** という.

$$(P.1) \quad P(A) \geq 0, \quad (\text{正值性; positivity})$$

$$(P.2) \quad P(A + B) = P(A) + P(B), \quad (\text{加法性; additivity})$$

$$(P.3) \quad P(\Omega) = 1 \quad (\text{全確率は 1})$$

- 確率測度は**確率分布 (probability distribution)** あるいは単に**分布 (distribution)** と言うこともある.

確率測度の条件の意味

(P.1) ある事象の起こる確率は 0 または正の値を取る

(P.2) 排反な事象の和の確率はそれぞれの事象の確率の和となる

(P.3) ある試行を行ったとき見本空間の中のどれか 1 つの見本点は必ず観測される

確率測度の例

- 骰子振り

“いかさまのない骰子を1回振る” 試行 T の確率測度 P は

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{素数の目が出る}) = P(\{2, 3, 5\}) = \frac{1}{2}$$

のように、事象を入れるとその事象の起こる確率を返してくれる関数 P である。

確率空間

- 定義

見本空間 Ω と事象の集合 (集合族) \mathcal{F} と確率測度 P の組 (Ω, \mathcal{F}, P) を, **確率空間 (probability space)** と呼ぶ。

- 試行 T が定まると

- 見本空間 Ω
- 考えるべき事象の集合 \mathcal{F}
- 確率法則 P

を考えることができる。

確率測度の演算

- 事象の演算に関しては以下の関係が成り立つ。

1. $P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$
2. $P(A - B) = P(A) - P(B)$
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A) = \sum_{\omega \in A} P\{\omega\}$

確率測度の演算の例

- 骰子振り

“いかさまのない骰子を1回振る” 試行 T において素数の目が出る確率は

$$\begin{aligned} P(\text{素数の目}) &= P(\{2, 3, 5\}) \\ &= P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

演習

問題

- 確率測度の定義にもとづいて以下を証明せよ。

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- よく切ったトランプから2枚カードを引く試行を考える。この試行の確率空間を構成せよ。

試行が有限でない場合の問題点

無限試行の例

- “1 が出るまで骰子を振り続ける” 試行

見本点 $\langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$ が観測される確率は、6 回骰子を振る 6^6 通りの中の等しい確率で起こる 1 つなので

$$P(\langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle) = \frac{1}{6^6}$$

となる。また、ちょうど 6 回で 1 が出て終わる見本点 $\langle *, *, *, *, *, 1 \rangle$ ($*$ は 1 以外の目) が観測される確率は、最初の 5 回は 1 以外、最後に 1 の目の 5^5 通りがあるので

$$P(\langle *, *, *, *, *, 1 \rangle) = \frac{5^5}{6^6}$$

である。

無限試行の例

- ルーレット回し

“ルーレット回し” の試行で、ちょうど 0.5 の値が出る確率はいくつか？

- 考え方

事象 A を要素数が無限個の適当な数の集合として、これを $A = \{a, b, c, \dots\}$ と書く。前出の加法性に従うなら事象 $A = \{a, b, c, \dots\}$ に対して、1 回の試行で例えば見本点 a と b が同時に観測されることはないので、

$$P(A) = P\{a\} + P\{b\} + P\{c\} + \dots$$

として良い。

仮に各要素の出現確率が同じ $\epsilon > 0$ という値である場合

$$P\{a\} = P\{b\} = P\{c\} = \dots = \epsilon \quad (\neq 0)$$

を考える。このとき要素数が無限個あるので

$$P(A) = \epsilon + \epsilon + \epsilon + \dots \rightarrow \infty$$

となり、確率の値が 1 を越えてしまう。

事象 A が無限集合で各見本点が同様に起こり易い場合には

$$P\{a\} = P\{b\} = P\{c\} = \dots = 0$$

でなくてはならない。

任意の見本点についてその確率が 0 なら、いくら足しても

$$P(A) = P\{a\} + P\{b\} + P\{c\} + \dots = 0$$

である。

見本空間全体についてこの議論を行えば $P(\Omega) = 0$ となってしまうので、全事象の確率がうまく定義できない。

- この問題を解決するためには**加法性**を考え直す必要がある

まとめ

- 有限試行の確率空間
 - 確率論の基本用語: 試行, 見本点, 見本空間, 事象
 - 事象は見本空間の部分集合
 - 事象の演算は集合の演算と等価
 - 確率測度の基本的な性質 (正值性, 加法性, 全確率)
 - 確率空間は見本空間, 事象の集合, 確率測度の 3 つ組