一般の確率空間

確率・統計 - 講義 *2*

村田 昇

前回のおさらい

- 有限試行の確率空間
  - 確率論の基本用語: 試行，見本点，見本空間，事象
  - 事象は見本空間の部分集合
  - 事象の演算は集合の演算と等価
  - 確率測度の基本的な性質 (正値性，加法性，全確率)
  - 確率空間は見本空間，事象の集合，確率測度の 3 つ組

有理数の可算性

可算集合

- 定義

  集合の全ての要素に自然数で順番に番号が与えられることを**可算 (可付番) (enumerable, countable)** という.

- 自明な可算集合の例
  - 要素が有限個の集合
  - 自然数

有理数の可算性

- 区間 $(0,1)$ に含まれる全ての有理数は可算

  有理数と自然数に 1 対 1 の対応があることを示せばよい.

分子 \ 分母	2	3	4	5	6	$\cdots$
1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	$\cdots$
2		2/3	~~2/4~~	2/5	~~2/6~~	$\cdots$
3			3/4	3/5	~~3/6~~	$\cdots$
4				4/5	~~4/6~~	$\cdots$
5					5/6	$\cdots$
$\vdots$						$\cdots$

  対応づけ出来そうだが規則の記述は難しそう

Bernstein の定理

- 1 対 1 の対応が存在することを示す代わりに，A と B の部分集合，および A の部分集合と B の間にそれぞれ 1 対 1 の対応が存在することを示せばよい.

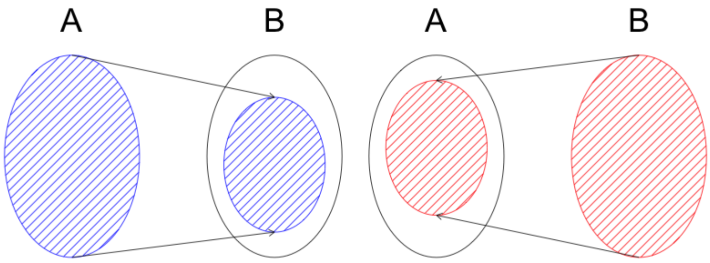

図 1: Bernstein の定理

有理数の可算性 (再考)

- Bernstein の定理を用いた場合
  - 全ての自然数 n から有理数の部分集合 $1/q$ への 1 対 1 対応

    $$n \mapsto \frac{1}{q} = \frac{1}{n+1}$$

    (有理数としては $1/q$ の形しか用いない)
  - 全ての有理数 p/q から自然数 n の部分集合への 1 対 1 対応

    $$\frac{p}{q} \mapsto n = 2^p \times 3^q$$

    (自然数としては 2 と 3 の倍数しか用いない)

演習

練習問題

- 整数が可算であることを示せ.
- 自然数の組 (m, n) が可算であるかどうか論じよ.
- 1 以上の有理数が可算であるかどうか論じよ.

整数の可算性

- 示すべきこと

  自然数と整数の間に 1 対 1 の対応づけがある.
- 構成例
  - 奇数の自然数: $n \mapsto z = (n-1)/2$ (非負の整数)
  - 偶数の自然数: $n \mapsto z = -n/2$ (負の整数)
- Bernstein の定理を使った場合も考えてみよ

自然数の組の可算性

- 以下の表に番号を振ることを考えればよい

(m,n)	1	2	3	4	5	$\cdots$
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	
$\vdots$						

- 例えば斜めに振っていく

(m,n)	1	2	3	4	5	$\cdots$
1	1	2	4	7	11	
2	3	5	8	12	17	
3	6	9	13	18	24	
4	10	14	19	25		
5	15	20	26			
$\vdots$						

- 規則 (数式) は考えてみよ

1 以上の有理数の可算性

- 1 以上の有理数は (自然数，区間 $[0, 1)$ の有理数) と分解して考えることができる
- 区間 $[0, 1)$ の有理数は番号付けできる (区間 $(0, 1)$ に 0 を加えただけ) ので，(自然数，自然数) に対応づけられる
- 前問の結果を用いれば明らか

無理数の非可算性

非可算集合

- 定義

  可算でないことを**非可算 (unenumerable, uncountable)** という．(不可算と書かれている場合もある)

- 非可算集合の例
  - 区間 $(0, 1)$ に含まれる無理数
  - 実数全体

Cantor の対角線論法

- 無理数の非可算性の証明 (背理法)
- 証明の概要 (詳しくは講義資料)
- その 1

  区間 $(0, 1)$ に含まれる **無理数の集合は可算** と仮定する．

- その 2

  有理数の集合は可算なので，仮定より無理数と有理数の和である実数も可算となる．

- その 3

自然数との対応付けを行い，番号順に並べる．

$$\begin{array}{ll} 1: & 0.\,d_1^1\,d_2^1\,d_3^1\,d_4^1\cdots \\ 2: & 0.\,d_1^2\,d_2^2\,d_3^2\,d_4^2\cdots \\ 3: & 0.\,d_1^3\,d_2^3\,d_3^3\,d_4^3\cdots \\ 4: & 0.\,d_1^4\,d_2^4\,d_3^4\,d_4^4\cdots \\ \vdots & \quad\quad \vdots \end{array}$$

ただし，有限桁の小数の場合は 0 で埋める．

- その 4

  第 n 番の数の第 n 桁目 d_n^n とは **異なる数** $\tilde{d}_n^n \neq d_n^n$ を選び，これらを並べた次の数を考える．

  $$0.\,\tilde{d}_1^1\,\tilde{d}_2^2\,\tilde{d}_3^3\,\tilde{d}_4^4\cdots$$

- その 5

  区間 $(0,1)$ に含まれるこの数の番号を探す．

- その 6

  第 n 番の数とは第 n 桁目が **違っている** ので，この数は区間 $(0,1)$ の **全ての実数を並べたはずの表にはない** ．

- その 7

  番号が振られていない数が存在するので区間 $(0,1)$ の実数が可算である (並べて番号が付けられる) ことに矛盾する．

- その 8

  つまり最初の仮定 **"無理数の集合は可算"** が間違っていたということ．

集合の分類

- 無限集合を更に分類 (可算と非可算) する必要がある
- **集合の濃度**
  - この講義で必要な概念は以下の 3 つ

    有限の濃度 有限個の要素からなる集合

    可算の濃度 自然数，有理数など

    連続の濃度 無理数，実数など
- より詳しくは位相と集合の本を参照

演習

練習問題

- 以下の集合の濃度を答えなさい．
  - 区間 $(0,1)$ に含まれる有理数
  - 区間 $(0,1)$ に含まれる無理数
  - 実数 $\mathbb{R}$ (区間 $(-\infty,\infty)$)
  - 2 つの実数の組 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
  - 2 次元空間で xy 座標がともに整数となる点の集合
  - 表が出るまでコインを投げ続ける試行の見本空間

解答

- 以下のとおり
  - 区間 $(0, 1)$ に含まれる有理数：可算
  - 区間 $(0, 1)$ に含まれる無理数：連続
  - 実数 $\mathbb{R}$ (区間 $(-\infty, \infty)$)：連続
  - 2 つの実数の組 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$：連続
  - 2 次元空間で xy 座標がともに整数となる点の集合：可算
  - 表が出るまでコインを投げ続ける試行の見本空間：可算

一般の確率測度

可測集合

可測集合 (measurable set) 確率測度 P で確率の値を測ることができる集合
(見本点の集合の中で事象として考えてよいもの)

可測 (measurable) "集合 A が可測" とは集合 A を確率測度 P で測ることができること

集合族

- 確率測度 P で確率の値を測ることができる対象全体 (関数 P の **定義域**) を $\mathcal{F}$ と書く
- 定義域 $\mathcal{F}$ は可測な事象 (見本空間の部分集合) $A \subset \Omega$ の集まり
- このような "集合の集合" を**集合族 (family of sets)** という

σ-加法族

- 定義

  以下の $(\sigma.1)$-$(\sigma.3)$ の 3 つの条件を満たす集合族を **σ-加法族 (σ-algebra)** と呼ぶ.

$$(\sigma.1) \quad \Omega \in \mathcal{F}$$
$$(\sigma.2) \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$
$$(\sigma.3) \quad A_n \in \mathcal{F},\ (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

- $(\sigma.1)$-$(\sigma.3)$ は定義域 $\mathcal{F}$ の満たすべき条件でもある

条件の意味

$(\sigma.1)$ 見本空間 (全事象) は可測である (P で測ることができる)

$(\sigma.2)$ ある事象が可測なら，その余事象も可測である

$(\sigma.3)$ 可測集合の可算 (自然数で番号付けできる) 無限和も可測である

確率測度

- 定義

  集合関数 P は条件 (P.1), (P.2) を満たすとき**測度 (measure)** と呼ばれ，さらに (P.3) まで満たすとき**確率測度 (probability measure)** と呼ばれる．また $P(A)$ を A の**測度**という.

$$(P.1) \quad P(A) \geq 0,\ A \in \mathcal{F}$$
$$(P.2) \quad P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),\ A_n \in \mathcal{F}$$
$$(P.3) \quad P(\Omega) = 1$$

- (P.2) を σ-加法性 (σ-additivity) という．

確率空間

- 定義

  見本空間 Ω と確率測度 P，および P の定義域である σ-加法族 $\mathcal{F}$ の組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を**確率空間 (probability spcae)** という．

Lebesgue 測度

ルーレット回しの確率測度

- 区間 $(0,1]$ からの無作為抽出

  試行 T を "区間 $(0,1]$ から無作為に一点抜き出すこと" とする．このとき見本空間は

  $$\Omega = (0,1]$$

  であり無限試行となる．確率測度は事象 A が区間 $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$ または $(a,b]$ といった簡単な集合であれば

  $$P(A) = |A| = b - a, \ (|A| \text{ は区間の長さを表す})$$

  とすればよい．

確率測度の定義域

- 確率測度 P の定義域 $\mathcal{F}$ は集合演算で作られる
- **可算個** の区間を組み合わせてつくられる集合

  $$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{&\text{可算個の任意の区間の和，差，交，} \\ &\qquad\text{余集合から作られる集合}\}\end{aligned}$$

- 集合の測度 (確率) は (P.2) の性質より排反な区間の長さの和から計算できる

Lebesgue 測度

- 定義

  "区間 $(0,1]$ から無作為に一点抜き出す" 試行 T によって考えられる確率測度 P を $(0,1]$ 上の **Lebesgue 測度 (Lebesgue measure)** という．また Lebesgue 測度の定義域となる σ-加法族を $\mathbb{R}$ の **Borel 集合族 (Borel field)** という．

- Lebesgue 測度は μ で表されることが多い
- 厳密な定義については Lebesgue 積分の本を参考

Lebesgue 測度の計算

- 一点が抜き出される確率

  Lebesgue 測度において，$P\{a\}$ (一点 a が抜き出される確率) は 0 となる．

  例えば $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ という可算集合を考えると，

  $$P\left\{\frac{1}{n}\right\} \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow P\left(\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\frac{1}{n}\right\} \to \infty$$

  となり矛盾が生じる．

- 抜き出した点が有理数である確率

$$\mathbb{R}_{(0,1]} = \{\text{区間 } (0,1] \text{ 上の実数全体}\}(= \Omega)$$
$$\mathbb{Q}_{(0,1]} = \{\text{区間 } (0,1] \text{ 上の有理数全体}\}$$

と書くことにする．有理数は **可算** であるからその要素に番号が付けられ，

$$\mathbb{Q}_{(0,1]} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots\}$$

と書けるので，(P.2) の性質により計算できる．

$$\begin{aligned} P(\mathbb{Q}_{(0,1]}) &= P\left(\{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots\}\right) \\ &= P\{q_1\} + P\{q_2\} + P\{q_3\} + \cdots + P\{q_n\} + \cdots \\ &= 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0 \end{aligned}$$

- 抜き出した点が無理数である確率

$$(\text{区間 } (0,1] \text{ 上の無理数全体}) = \mathbb{R}_{(0,1]} - \mathbb{Q}_{(0,1]}$$

を用いて求められる．

$$P(\mathbb{R}_{(0,1]} - \mathbb{Q}_{(0,1]}) = P(\mathbb{R}_{(0,1]}) - P(\mathbb{Q}_{(0,1]}) = 1 - 0 = 1$$

無理数全体は **可算でない** ため有理数のように成分毎の可算無限和では書けず，したがって (P.2) の性質を使って計算することはできない．

- 異なる区間の場合

“区間 $(0,5]$ から無作為に一点抜き出す” 試行を考えたとき，その見本空間は $\Omega = (0,5]$ となる．この試行の確率測度は Lebesgue 測度 μ を定数倍 (正規化) し，

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu(A)}{5},\ A \in \mathcal{F}$$

とすることによって構成できる．

零集合

- 定義

空集合でない集合 A でその事象が起こる確率が $P(A) = 0$ となるものがある．こうした集合を **零集合 (null set)** と呼ぶ．

- 以下は等しくないことに注意 (有理数と無理数の例)
  - 事象 A の確率が 0 である
  - 事象 A に含まれる見本点が全く起こらない

“ほとんど確実”

- 確率での特殊な言い回し

事象 $A = \{\omega | \alpha(\omega)\}$ の確率が 1 であるとき，**“ほとんど確実に (almost surely)”** あるいは **“条件 $\alpha(\omega)$ が確率 1 で成り立つ”** といい，以下のように書く．

$$\alpha(\omega) \text{ a.s.}$$

- 別の表現
  - 事象 A の余事象 A^c は零集合
  - 条件 α は成り立たないこともあるが，その確率は 0

演習

練習問題

- Buffon の針 (Buffon's needle) の問題を考えよ

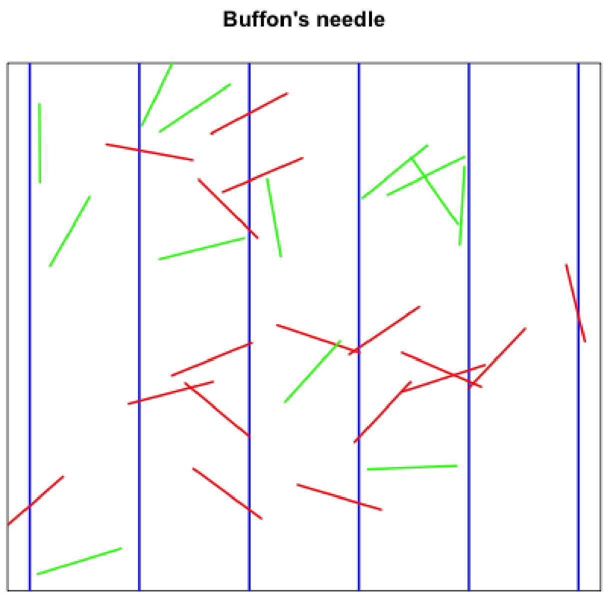

図 2: Buffon の針

2 次元平面上に等間隔 d で平行線が引いてある．長さ l の針をこの平面上にランダムに落としたとき，平行線と交わる確率を求めよ．ただし $l < d$ とする．

解答

- 講義資料 20 頁の例 2.11 を参照
- 講義資料 23 頁の練習問題 (4)-(7) にも目を通しておくこと

今回のまとめ

- 一般の確率空間
  - 有限集合と無限集合
  - 集合の濃度 (無限集合は更に分類される)
    - 可算集合: 自然数，整数，有理数
    - 連続集合: 無理数，実数
  - 一般の確率測度と σ-加法性の関係
  - Lebesgue 測度と Borel 集合族 (応用上重要な概念)
  - "ほとんど確実に成り立つ"