確率変数

確率・統計 第 *4* 回

村田 昇

*2020*年 *8*月 *23*日

1 次元の確率変数

確率空間の上の関数として定義される確率変数の性質についてまとめる.

確率変数の定義

- 定義

  ある試行 T の確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とする.
  Ω から実数 $\mathbb{R}$ への写像

  $$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

  として定義される実数値関数 $X(\omega)$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の **(実) 確率変数** (random variable) と呼ぶ.

確率変数の例

- 骰子振りの確率変数

  骰子を振ると (出た目 $\times 100$) 円の賞金が貰えるとする.
  骰子の目を ω で表すと賞金 X は

  $$X(\omega) = 100\omega$$

  という確率変数であると考えることができる.

- 二回の骰子振りの確率変数

  骰子を二回振ったときの出た目の和を考える.
  このとき見本空間は

  $$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) | \, \omega_1, \omega_2 = 1, 2, \dots, 6\} = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\}$$

  となり, 出た目の和 X は確率変数である:

  $$X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$$

  出た目の大小で確率変数を定義することもできる:

  $$Y(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1, & \omega_1 > \omega_2 \\ 0, & \omega_1 = \omega_2 \\ -1, & \omega_1 < \omega_2 \end{cases}$$

- ルーレット回しの確率変数

“ルーレット回し” の試行において，ルーレットの目盛り ω が有理数なら 1 点，無理数なら 0 点の得点が得られるとする．このとき点数

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \text{ が有理数} \\ 0, & \omega \text{ が無理数} \end{cases}$$

は $\Omega = (0, 1]$ 上の確率変数である．同様に出た目盛りが 0 にどれだけ近いかに応じて点数がもらえるとする．この点数を

$$Y(\omega) = \log \frac{1}{\omega}$$

で定めれば，Y も $\Omega = (0, 1]$ 上の確率変数である．

- 骰子振り

“1 が出るまで骰子を振り続ける” 試行で得られる見本点を ω とする．このとき，系列 ω の長さ

$$X(\omega) = \text{系列 } \omega \text{ の長さ}$$

は自然数 $\mathbb{N}$ 上の確率変数と考えることができる．

- 工場の製品

ある工場で生産されるエンジンの抜き取り検査をして，最大出力と燃費を測定したとする．この場合は見本点 ω は生産されるエンジンの個体を表し，最大出力 $X(\omega)$ と燃費 $Y(\omega)$ は個体 ω ごとに異なる確率変数であると考えることができる．

確率変数の確率空間

確率変数の値を見本点として，もとの確率空間から導かれる確率測度を用いて確率空間を構成することができる．

確率変数の見本空間

- 定義

確率変数 $X(\omega)$ は ω が従う確率法則によってばらつく確率的な量であるため，確率変数 $X(\omega)$ の確率空間を考えることができる．確率変数 $X(\omega)$ の取り得る全ての値の集合を**確率変数 X の見本空間** (sample space) と呼ぶ．

$$\Omega^X = X(\Omega) \qquad (\Omega \text{ の各点を } X \text{ で写像した像 (点) の集合})$$

確率変数の確率法則

- 見本点の写像

見本空間 Ω^X の任意の部分集合 B に対して “X の値が B に入る” ($X \in B$) という事象を定義する．この事象に含まれる元の見本空間 Ω の見本点は

$$A = \{\omega |\ X(\omega) \text{ が } B \text{ に入る}\} = \{\omega |\ X(\omega) \in B\} \subset \Omega$$

であり A の確率は元の確率空間で考えることができる．

$$P(X \text{ の値が } B \text{ に入る}) = P(A)$$

- 事象の写像

X を Ω の部分集合から $\mathbb{R}$ の部分集合へ対応させる関数

$$B = \{X(\omega) |\ \omega \in A\} = X(A)$$

とみなして，その逆関数を

$$X^{-1}(B) = \{\omega |\ X(\omega) \in B\} = A$$

によって定義する．

- 確率測度の変換

  X の値が B に入る確率は

  $$P(X^{-1}(B)) = P\{\omega |\ X(\omega) \in B\}$$

  と表される．これを B の関数とみて

  $$P^X(B) = P(X^{-1}(B))$$

  と書くと，P^X は Ω^X 上の X の確率測度を表す．

  Ω^X は $\mathbb{R}$ の部分集合なので, Ω^X 上の Borel 集合族を $\mathcal{F}^X$ と書くことにすれば, $(\Omega^X, \mathcal{F}^X, P^X)$ も確率空間になる．

- 確率測度の条件の確認

  事象の写像の基本的な性質

  $$X^{-1}(B_1 + B_2) = X^{-1}(B_1) + X^{-1}(B_2)$$
  $$X^{-1}(\Omega^X) = \Omega$$

  より P^X が条件を満たしていることが確認できる．

  $$\begin{aligned} P^X(B) &= P(X^{-1}(B)) \geq 0 && \text{(正値性)} \\ P^X(B_1 + B_2) &= P(X^{-1}(B_1 + B_2)) \\ &= P(X^{-1}(B_1) + X^{-1}(B_2)) \\ &= P(X^{-1}(B_1)) + P(X^{-1}(B_2)) \\ &= P^X(B_1) + P^X(B_2) && \text{(加法性)} \\ P^X(\Omega^X) &= P(X^{-1}(\Omega^X)) \\ &= P(\Omega) = 1 && \text{(全確率)} \end{aligned}$$

確率変数の確率空間の例

- 二回の骰子振りの確率変数 X

  見本空間，および確率測度は以下のとおり．

  $$\Omega^X = \{2, 3, 4, \ldots, 11, 12\}$$

  $$\begin{aligned} P^X(X=2) &= P\left((\omega_1, \omega_2) \in \{(1,1)\}\right) = \frac{1}{36}, \\ P^X(X=3) &= P\left((\omega_1, \omega_2) \in \{(1,2),(2,1)\}\right) = 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{18}, \\ P^X(X=4) &= P\left((\omega_1, \omega_2) \in \{(1,3),(2,2),(3,1)\}\right) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{12}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

- 二回の骰子振りの確率変数 Y

  見本空間，および確率測度は以下のとおり．

  $\Omega^Y = \{1, 0, -1\}$

$$\begin{aligned}
P^Y(Y=1) &= P\left((\omega_1, \omega_2) \in \{(2,1), (3,1), \ldots, (6,5)\}\right) \\
&= 15 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{12}, \\
P^Y(Y=0) &= P\left((\omega_1, \omega_2) \in \{(1,1), (2,2), \ldots, (6,6)\}\right) \\
&= 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}, \\
P^Y(Y=-1) &= P\left((\omega_1, \omega_2) \in \{(1,2), (1,3), \ldots, (5,6)\}\right) \\
&= 15 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

- ルーレット回しの確率変数 X

  見本空間，および確率測度は以下のとおり．

  $\Omega^X = \{1, 0\}$

$$\begin{aligned}
P^X(X=1) &= P(\omega \text{ が有理数}) = 0 \\
P^X(X=0) &= P(\omega \text{ が無理数}) = 1
\end{aligned}$$

演習

- ルーレット回しの確率変数 Y

  $$Y(\omega) = \log \frac{1}{\omega}$$

  について，以下のそれぞれの項目を説明せよ．

  1. 見本空間
  2. 確率測度
  3. 確率密度

解答例

- 見本空間

$$\Omega^Y = \log \frac{1}{(0,1]} = -\log((0,1]) = [0, \infty)$$

- 確率測度

$$\begin{aligned}
P^Y(a < Y < b) &= P\left(\{\omega | \ a < -\log \omega < b\}\right) \\
&= P\left(\{\omega | \ e^{-a} > \omega > e^{-b}\}\right) \\
&= e^{-a} - e^{-b} = -e^{-b} - (-e^{-a})
\end{aligned}$$

- 確率密度

  確率測度の積分表現を微分すれば求められる

$$f(y) = e^{-y}, \qquad P^Y(a < Y < b) = \int_a^b f(y) dy$$

多次元の確率変数

多次元の確率変数

- 同じ確率空間の上の複数の確率変数をまとめてベクトルと見ることができる

  例: 2 次元の値を取る関数

  $$\boldsymbol{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))$$

  を考えると，2 次元の確率変数を考えることができる．

  これを **2 次元確率変数** (2-dimensional random variable) あるいは 2 次元の **確率ベクトル** (random vector) という．

  一般に n 次元で考えてよい．

- 見本空間や確率測度も自然に考えることができる

  $$\Omega^{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}(\Omega)$$
  $$P^{\boldsymbol{X}}(B) = P\{\omega|\ \boldsymbol{X}(\omega) \in B\} = P(\boldsymbol{X}^{-1}(B)), \quad B \subset \Omega^{\boldsymbol{X}}$$

多次元確率変数の用語

- $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$: $\boldsymbol{X}(\omega)$ の **成分変数**
- $\boldsymbol{X}(\omega)$: $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ の **結合変数**
- $P^{\boldsymbol{X}}$ ($\boldsymbol{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ の確率測度): $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ の**同時確率分布** (joint probability distribution)

確率変数の変換

確率変数の変換

- 変換

  実数値関数

  $$\begin{aligned} \phi : \Omega^X &\to \mathbb{R} \\ X &\mapsto \phi(X) \end{aligned}$$

  に対して

  $$Y(\omega) = \phi(X(\omega)) \qquad (Y = \phi \circ X \text{と書くこともある})$$

  とすると $Y(\omega)$ という新しい実数値確率変数ができる．

確率変数の変換の例

- 二回の骰子振りの確率変数の変換

  骰子を二回振ったときの出た目の和を考え，和が偶数なら 100 円貰え，奇数なら 50 円支払うというゲームを考える．骰子を二回振ったときの出た目をそれぞれ ω_1, ω_2 とする．また，目の和を

  $$X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$$

  で表すとすると，賞金 (罰金) Y は

  $$Y(\omega_1, \omega_2) = Y(X) = \begin{cases} 100, & X \text{ が偶数} \\ -50, & X \text{ が奇数} \end{cases}$$

  という X が変換された確率変数である．

変換後の確率空間

- 見本空間

  新しく作られた確率変数 Y の見本空間は，変換を順に追って

  $$\Omega^Y = \phi(X(\Omega)) = (\phi \circ X)(\Omega)$$

  で定義される．

- 確率測度

  Ω^Y の適当な部分集合 C に対して，Ω^X で対応する集合を B，Ω で対応する集合を A とすると

  $$\begin{aligned} C &= \phi(B) = \phi(X(A)) \\ B &= X(A) = \phi^{-1}(C) \\ A &= X^{-1}(B) = X^{-1}(\phi^{-1}(C)) \end{aligned}$$

  となるので，その確率測度は

  $$\begin{aligned} P^Y(C) &= P^X(B) = P(A) \\ &= P(X^{-1}(\phi^{-1}(C))) = P\{\omega | \ \phi(X(\omega)) \in C\} \quad C \subset \Omega^Y \end{aligned}$$

  で計算される．

確率変数の平均値

確率変数はその見本空間が実数となり平均値や分散といった具体的な量を計算することができる．

離散分布の平均値

- 定義

  見本空間が可算の場合，その確率空間上で定義された確率変数 X の **平均値 (期待値)** (expectation) は

  $$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P\{\omega\}$$

  で定義される．

  - $X(\omega)$ は ω の関数であるが，全ての可能な ω について和を取っているので，$\mathbb{E}[X]$ は ω によらない量となっていることに注意する．
  - また，確率変数は関数であるので，$\mathbb{E}$ は関数 $X(\omega)$ に作用する作用素と考えることができる．

平均値の例

- 骰子振りの確率変数

  出た目の 100 倍の値である賞金 X の平均値 (期待値) は，骰子の目を ω で表すことにすれば $P\{\omega\} = \frac{1}{6}$ なので，

  $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= X(1) \cdot P\{1\} + X(2) \cdot P\{2\} + X(3) \cdot P\{3\} \\ &\qquad + X(4) \cdot P\{4\} + X(5) \cdot P\{5\} + X(6) \cdot P\{6\} \\ &= 100 \cdot \frac{1}{6} + 200 \cdot \frac{1}{6} + 300 \cdot \frac{1}{6} + 400 \cdot \frac{1}{6} + 500 \cdot \frac{1}{6} + 600 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 350 \end{aligned}$$

  である．

- 二回の骰子振りの確率変数

    出た目の和 X の平均値は，二つの目を ω_1, ω_2 で表すことにすれば $P\{(\omega_1, \omega_2)\} = \frac{1}{36}$ なので，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= X(1,1)\cdot P\{(1,1)\} + X(1,2)\cdot P\{(1,2)\} + \\ &\quad \cdots + X(6,5)\cdot P\{(6,5)\} + X(6,6)\cdot P\{(6,6)\} \\ &= 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + \cdots + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} \\ &= 7\end{aligned}$$

    である．

    二つの目の大小関係で $\{-1, 0, 1\}$ の値を取る確率変数 Y の平均値は

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= Y(1,1)\cdot P\{(1,1)\} + Y(1,2)\cdot P\{(1,2)\} + \\ &\quad \cdots + Y(6,5)\cdot P\{(6,5)\} + Y(6,6)\cdot P\{(6,6)\} \\ &= 1\cdot\frac{15}{36} + 0\cdot\frac{6}{36} + (-1)\cdot\frac{15}{36} \\ &= 0\end{aligned}$$

    である．

連続分布の平均値

- 定義

    確率測度 P に確率密度 f がある場合，その確率空間上で定義された確率変数 X の**平均値 (期待値)** (expectation) は

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)f(\omega)d\omega$$

    で定義される．

    – 連続分布の場合も $X(\omega)$ は ω の関数であるが，ω に関して積分しているので，平均値 $\mathbb{E}[X]$ は ω によらない量となっていることに注意する．

平均値の例

- ルーレット回しの確率変数

    ルーレットの目盛りが有理数か無理数かで $\{1, 0\}$ の値を取る確率変数 X の平均値は

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 X(\omega)\mu(d\omega) = 1\cdot\mu(\text{有理数}) + 0\cdot\mu(\text{無理数}) = 0$$

    または

$$\mathbb{E}[X] = 0\cdot P^X(X=0) + 1\cdot P^X(X=1) = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0$$

    で計算される．

注意

- 見本空間の制限付平均値

  見本空間を $A \subset \Omega$ に制限した場合の平均値を

  $$\mathbb{E}[X, A] = \sum_{\omega \in A} X(\omega) P(\omega)$$

  $$\mathbb{E}[X, A] = \int_A X(\omega) P(d\omega) = \int_A X(\omega) f(\omega) d\omega$$

  と書くことがある．

- $\boldsymbol{X}$ がベクトルの場合は，その平均値は各成分ごとに計算すればよい．

  $$\mathbb{E}[\boldsymbol{X}] = (\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2], \ldots, \mathbb{E}[X_n]) \in \mathbb{R}^n$$

平均値の性質

- 定理

  平均値には以下のような性質がある．

  1. $\mathbb{E}[aX + bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$ (**線形性**)
  2. $\mathbb{E}[X, \sum_{i=1}^n A_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X, A_i]$
  3. A の上で恒等的に確率変数が定数，すなわち $X(\omega) = a$ ならば

     $\mathbb{E}[X, A] = a\,P(A)$

     特に $\mathbb{E}[a] = a$ (定数の平均値はその定数)

- 定理

  X の確率分布が考えられ，X の確率分布が P^X あるいは密度関数が f^X で与えられる場合には以下が成り立つ．

  1. $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \Omega^X} x P^X\{x\}$ (X が離散分布)

     $\mathbb{E}[X] = \int_{x \in \Omega^X} x f^X(x) dx$ (X が連続分布)
  2. $Y(\omega) = \phi(X(\omega))$ ならば

     $\mathbb{E}[Y] = \sum_{x \in \Omega^X} \phi(x) P^X\{x\}$ (X が離散分布)

     $\mathbb{E}[Y] = \int_{x \in \Omega^X} \phi(x) f^X(x) dx$ (X が連続分布)

平均値の計算の例

- 二回の骰子振りの確率変数

  出た目の和 X の平均値は平均の和の関係を用いると

  $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[\omega_1 + \omega_2] = \mathbb{E}[\omega_1] + \mathbb{E}[\omega_2] = 2\mathbb{E}[\omega_1] \\ &= 2\left(1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}\right) \\ &= 7\end{aligned}$$

  としても求まる．

演習

- ルーレット回しの確率変数 Y の平均値を以下の 2 通りの確率測度を用いて求めよ
  1. ω の確率空間の確率測度
  2. Y の確率空間の確率測度

解答例

- ω の確率空間の確率測度

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \int_0^1 (-\log\omega)\,\mu(d\omega) \\ &= [-\omega\log\omega + \omega]_0^1 = 1\end{aligned}$$

- Y の確率空間の確率測度

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \int_0^\infty ye^{-y}dy \\ &= \left[-ye^{-y}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-y}dy = \left[-e^{-y}\right]_0^\infty = 1\end{aligned}$$

確率変数の分散

平均値と同様に確率変数の性質を決める大事な量として分散がある．これは確率変数が平均値のまわりにどのくらいばらつくかを示す指標となる．

分散

- 定義

確率変数 X の **分散** (variance) は平均値を用いて

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

で定義される．

分散の平方根を **標準偏差** (standard deviation) という．

共分散

- 定義

確率変数 X, Y の **共分散** (covariance) は

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

で定義される．

確率変数の確率空間による計算

- 離散分布に従う場合

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_{x\in\Omega^X}(x - \mathbb{E}[X])^2 P^X\{x\} \\ \mathrm{Cov}(X,Y) &= \sum_{x\in\Omega^X, y\in\Omega^Y}(x - \mathbb{E}[X])(y - \mathbb{E}[Y])P^{(X,Y)}\{x,y\}\end{aligned}$$

- 連続分布に従う場合

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \int_{x\in\Omega^X}(x - \mathbb{E}[X])^2 f^X(x)dx \\ \mathrm{Cov}(X,Y) &= \int_{x\in\Omega^X, y\in\Omega^Y}(x - \mathbb{E}[X])(y - \mathbb{E}[Y])f^{(X,Y)}(x,y)dxdy\end{aligned}$$

分散の計算例

- 二回の骰子振りの確率変数 X

  出た目の和 X の分散は

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]\\&=(2-7)^2\cdot\frac{1}{36}+(3-7)^2\cdot\frac{2}{36}+\cdots+(12-7)^2\cdot\frac{1}{36}\\&=\frac{35}{6}\end{aligned}$$

  である.

- 二回の骰子振りの確率変数 Y

  また二つの目の大小関係を表す Y の分散は

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[Y])^2]\\&=(1-0)^2\cdot\frac{5}{12}+(0-0)^2\cdot\frac{1}{6}+(-1-0)^2\cdot\frac{5}{12}\\&=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

  である.

- ルーレット回しの確率変数 X

  有理数・無理数を区別する X の分散は

$$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]=(1-0)^2\cdot 0+(0-0)^2\cdot 1=0$$

  である.

分散・共分散の性質

- 定理

  分散・共分散には以下の性質がある.

  1. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$ (対称性)
  2. $\mathrm{Cov}(X,a)=0$
  3. $\mathrm{Cov}(X,X)=\mathrm{Var}(X)\geq 0$ (正値性)
  4. $\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\,\mathrm{Var}(X)$

     $\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\mathrm{Cov}(X,Y)$
  5. $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\,\mathrm{Var}(X)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)+b^2\,\mathrm{Var}(Y)$
  6. $\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2$

     $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$
  7. $|\mathrm{Cov}(X,Y)|\leq\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

     (Schwarz の不等式の一つの表現)

  – 特に 6. の関係は重要

モーメント

- 定義

  確率変数 X の **k 次モーメント** (積率; k-th moment) は，確率変数の k 乗の平均

  $$m_k(X) = \mathbb{E}[X^k]$$

  で定義される．分散と同じように平均値を中心として考えた**平均値のまわりの k 次モーメント** は

  $$\mu_k(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$$

  で定義される．

  – 分散は平均値のまわりの 2 次モーメントである．

- 絶対モーメント

  確率変数の絶対値の k 乗のモーメント

  $$\tilde{m}_k(X) = \mathbb{E}[|X|^k]$$

  を **k 次絶対モーメント**と呼ぶことがある．

演習

- 以下の確率変数の分散を求めよ．
  1. 区間 $(-1, 1)$ 上の一様分布
  2. ルーレット回しの確率変数 Y

解答例

- 一様分布の分散

  区間 $(-1, 1)$ 上の一様分布に従う確率変数を U と書くと

  $$\mathbb{E}[(U - \mathbb{E}[U])^2] = \int_{-1}^{1} u^2 \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{3}$$

- ルーレット回しの確率変数 Y

  $$\begin{aligned}\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] &= \int_0^\infty (y-1)^2 e^{-y} dy \\ &= -\left[\left\{(y-1)^2 + 2(y-1) + 2\right\} e^{-y}\right]_0^\infty \\ &= 1\end{aligned}$$

特性関数

平均，分散，モーメントは確率変数の一面を捉えるための 1 つの量であるが，確率変数が従う確率測度の特徴を表すものとしては以下の特性関数がある．

特性関数

- 定義

  特性関数 (characteristic function) は指数関数を用いて変数変換された確率変数の平均として

  $$\phi(z) = \mathbb{E}[e^{izX}]$$

  で定義される．

  – 特性関数は実数値ではなく複素数値をとることに注意する．

注意

- Fourier 変換との関係

  1 次元の連続分布 P に対して密度関数 f が存在すれば

  $$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} f(x) dx$$

  となり確率密度の Fourier 変換に対応する．離散分布では

  $$\phi(z) = \sum_{x \in \Omega} P\{x\} e^{izx},$$

  により計算される．

- 逆変換の存在

  Fourier 変換には逆 Fourier 変換が存在してもとの関数を再構成できるように，特性関数と確率測度 (確率密度) は一対一に対応している (**Levy-Haviland の反転公式**)

- 分布の同一性

  2 つの分布の特性関数が同じであれば，2 つの分布が同じであることが言える．後に中心極限定理の証明で述べるように特性関数は確率測度の性質を調べるために重要な働きをする．

演習

- 以下の確率測度の特性関数を求めよ．
  1. 区間 $(-1, 1)$ 上の一様分布
  2. 標準正規分布
  3. 平均 μ 分散 σ^2 の正規分布

ヒント

1. 定義に従って計算する．

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \int_{-1}^{1} e^{izx} \cdot \frac{1}{2} dx \\ &= \left[\frac{e^{izx}}{2iz} \right]_{-1}^{1} = \frac{\sin(z)}{z}\end{aligned}$$

2. 指数の肩の 2 次式を整理する．
3. 標準正規分布の結果を利用する．

まとめ

- 確率変数
  - 確率空間上の関数としての確率変数
  - 確率変数の確率空間
  - 複数の確率変数の同時確率 (結合確率)
  - 確率変数の平均，分散，モーメント
  - 確率変数の特性関数