

# 有限試行の確率空間

確率・統計 第1回

村田 昇

## 試行と見本空間

### 試行と見本点

**試行 (trial)** 不確定性のある現象を調べるための**実験**

**見本点 (sample point)** 試行の結果観測される**事柄**

標本, 観測値 (observation), 実現値 (realization) とも呼ばれる

### 試行の例

- 骰子 (サイコロ) 振り

“骰子を振って、どの目が出易いか調べる” という実験を考える. “骰子を振ること” が試行に対応し, “1, 2, 3, 4, 5, 6 の目” が見本点となる.

- ルーレット回し

周長 1m の円盤を中心で回るように用意し, 円周上に 0 から 1 の目盛りを付ける. また円周の外側の適当な位置に印を付ける. “ルーレットを回して止まったときに印が指している目盛りを読む” という実験を考える. “ルーレットを回すこと” が試行に対応し, “(0, 1] の間のいずれかの値” が見本点となる.

### 見本空間と見本点

**見本空間 (sample space)** 観測される全ての見本点を集めた集合

標本空間と呼ぶ場合もある

**記法** 見本空間  $\Omega$  (オメガの大文字) のように大文字で表記

見本点  $\omega$  (オメガの小文字) のように小文字で表記

### 見本空間の例

- 骰子振り

試行  $T$  = “骰子を振る” の見本空間は  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  であり, 試行  $T$  の結果 2 の目が出た場合は “ $\omega = 2$  が観測された” という.

- ルーレット回し

試行  $T$  = “ルーレットを回す” の見本空間は  $\Omega = (0, 1]$  である.

### 見本空間による試行の分類

**有限試行** 見本空間が有限集合 (要素数が**有限個**) である試行

**無限試行** 見本空間が無限集合 (要素数が**無限個**) となる試行

## 試行の分類の例

- 骰子振り

見本点は 6 つなので有限試行である.

- ルーレット回し

見本点の数は数え切れないので無限試行である.

- “1 が出るまで骰子を振り続ける” 試行

出た目の数の列, 例えば  $\langle 4, 2, 5, 6, 1 \rangle$  が見本点になる.

見本点としていくらかでも長い系列, 例えば  $\Omega = \{\langle 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \dots, \langle 4, 2, 5, 6, 1 \rangle, \dots\}$  が存在するので, その要素の数は無限となる.

したがってこの試行は無限試行である.

## 演習

### 問題

- “コインを 10 回投げる” 試行を考える.
  - 見本点の例を挙げよ.
  - 見本空間を記せ.
- “表が出るまでコインを投げる” 試行を考える.
  - 見本点の例を挙げよ.
  - 見本空間を記せ.
- “表が出るまでコインを投げた回数を観測する” 試行を考える.
  - 見本点の例を挙げよ.
  - 見本空間を記せ.

## 事象とその表現

### 事象

**事象 (event)** 見本点の集合, すなわち見本空間の部分集合

試行  $T$  の結果として部分集合  $A$  に属する見本点が出現することを“**事象  $A$  が起こる**”と表現する.

**根元事象 (elementary event)** 1 つの見本点だけからなる事象

**全事象 (full event, whole event)** 見本空間全体  $\Omega$

### 事象の例

- 骰子振り

事象  $A$  として “偶数の目”  $A = \{2, 4, 6\}$  を考える.

4 の目が出た場合は  $A$  に属している ( $4 \in A$ ) ので “事象  $A$  が起こった” ことになり, 5 の目が出た場合は  $5 \notin A$  なので “事象  $A$  は起こらなかった” ことになる.

- ルーレット回し

事象  $A$  を区間  $(0, 0.5]$  とする.

止まったときに印が 0.5 を指していれば  $0.5 \in A$  なので “事象  $A$  が起こった” ことになり,  $\pi/4 = 0.785 \dots$  を指していたら  $\pi/4 \notin A$  なので “事象  $A$  は起こらなかった” ことになる.

## 事象の演算 (集合の演算)

**和事象 (sum event)**  $A$  または  $B$  が起こること.  
 $A, B$  の和集合 (union)  $A \cup B$

**交事象 (product event)**  $A$  と  $B$  が同時に起こること.  
 $A, B$  の交集合 (intersection)  $A \cap B$

**差事象 (difference event)**  $A$  が起こり  $B$  が起こらないこと.  
 $A, B$  の差 (difference)  $A \setminus B$

**余事象 (complementary event)**  $A$  が起こらないこと.  
 $A$  の補集合 (complement)  $A^c$  または  $\bar{A}$

**排反事象 (exclusive event)** 事象  $A, B$  が同時に起こらないこと.  
 $A, B$  が互いに素 (disjoint)  $A \cap B = \emptyset$

**直和 (direct sum, disjoint union)** 排反事象の和  $A \cup B$  を  $A + B$  と書く.  
逆に  $A + B$  と書いた場合には  $A$  と  $B$  は排反

**固有差**  $A \supset B$  のとき  $A \setminus B$  を  $A - B$  と書く.

## 事象の演算の例

- 骰子振り

3つの事象

- 事象  $A$  として “偶数の目”  $A = \{2, 4, 6\}$

- 事象  $B$  として “奇数の目”  $B = \{1, 3, 5\}$

- 事象  $C$  として “素数の目”  $C = \{2, 3, 5\}$

を考えると, 例えば

- $A$  の余事象は  $B = A^c$

- $B$  と  $C$  の交事象は  $B \cap C = \{3, 5\}$ ,

- $A$  と  $C$  の和事象は  $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ,

- $A$  と  $B$  の直和は全事象  $A + B = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

のようになる.

## 条件による事象の表現

- 事象は見本点  $\omega$  に関する**条件 (condition)** を表す式  $\alpha(\omega)$  を用いて記述可能:

$$A = \{\omega \mid \alpha(\omega)\}$$

- 条件  $\alpha$  を事象  $A$  と同一視して単に事象  $\alpha$  ということもある

## 条件による事象の例

- 骰子振り

“偶数の目” という事象  $A$ :

$$A = \{\omega \mid \omega \text{ が偶数} \} = \{2, 4, 6\}$$

- ルーレット回し

“区間  $(0, 0.5]$  の値” という事象  $A$ :

$$A = \{\omega \mid 0 < \omega \leq 0.5\}$$

## 条件による事象の演算

和事象 ( $\alpha$  または  $\beta$ ) :  $\alpha \vee \beta$

$$\{\omega \mid \alpha(\omega) \vee \beta(\omega)\} = \{\omega \mid \alpha(\omega)\} \cup \{\omega \mid \beta(\omega)\}$$

交事象 ( $\alpha$  かつ  $\beta$ ) :  $\alpha \wedge \beta$

$$\{\omega \mid \alpha(\omega) \wedge \beta(\omega)\} = \{\omega \mid \alpha(\omega)\} \cap \{\omega \mid \beta(\omega)\}$$

余事象 ( $\alpha$  の否定) :  $\alpha^\neg$

$$\{\omega \mid \alpha(\omega)^\neg\} = \Omega - \{\omega \mid \alpha(\omega)\}$$

## 条件による事象の演算の例

- 骰子振り

それぞれの事象を条件で書くと

$$\{\omega \mid (\omega \text{が偶数})^\neg\} = \{\omega \mid \omega \text{が奇数}\} \text{ (余事象)}$$

$$\{\omega \mid (\omega \text{が奇数}) \wedge (\omega \text{が素数})\} = \{3, 5\} \text{ (交事象)}$$

$$\{\omega \mid (\omega \text{が偶数}) \vee (\omega \text{が素数})\} = \{2, 3, 4, 5, 6\} \text{ (和事象)}$$

$$\{\omega \mid (\omega \text{が偶数}) \vee (\omega \text{が奇数})\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ (直和)}$$

となる.

## 演習

### 問題

- 和事象, 交事象, 差事象, 余事象, 排反事象, 固有差, 直和をベン図 (Venn diagram) を描いて説明せよ.
- ド・モルガンの法則 (de Morgan's laws) について説明せよ.

## 有限試行の確率空間

### 有限試行の確率測度

- 定義

見本空間  $\Omega$  と任意の事象  $A, B \subset \Omega$  に対して以下の性質をもつ実数値集合関数  $P$  ( $\Omega$  の部分集合に作用して実数を出力する関数) を**確率測度 (probability measure)** という.

$$(P.1) \quad P(A) \geq 0, \quad (\text{正值性; positivity})$$

$$(P.2) \quad P(A + B) = P(A) + P(B), \quad (\text{加法性; additivity})$$

$$(P.3) \quad P(\Omega) = 1 \quad (\text{全確率は 1})$$

- 確率測度は**確率分布 (probability distribution)** あるいは単に**分布 (distribution)** と言うこともある.

### 確率測度の条件の意味

(P.1) ある事象の起こる確率は 0 または正の値を取る

(P.2) 排反な事象の和の確率はそれぞれの事象の確率の和となる

(P.3) ある試行を行ったとき見本空間の中のどれか 1 つの見本点は必ず観測される

## 確率測度の例

- 骰子振り

“いかさまのない骰子を1回振る” 試行  $T$  の確率測度  $P$  は

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{素数の目が出る}) = P(\{2, 3, 5\}) = \frac{1}{2}$$

のように、事象を入れるとその事象の起こる確率を返してくれる関数  $P$  である。

## 確率空間

- 定義

見本空間  $\Omega$  と事象の集合 (集合族)  $\mathcal{F}$  と確率測度  $P$  の組  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を、**確率空間 (probability space)** と呼ぶ。

- 試行  $T$  が定まると

- 見本空間  $\Omega$
- 考えるべき事象の集合  $\mathcal{F}$
- 確率法則  $P$

を考えることができる。

## 確率測度の演算

- 事象の演算に関しては以下の関係が成り立つ。

1.  $P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$
2.  $P(A - B) = P(A) - P(B)$
3.  $P(A^c) = 1 - P(A)$
4.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5.  $P(A) = \sum_{\omega \in A} P\{\omega\}$

## 確率測度の演算の例

- 骰子振り

“いかさまのない骰子を1回振る” 試行  $T$  において素数の目が出る確率は

$$\begin{aligned} P(\text{素数の目}) &= P(\{2, 3, 5\}) \\ &= P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

## 演習

### 問題

- 確率測度の定義にもとづいて以下を証明せよ。

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- よく切ったトランプから2枚カードを引く試行を考える。この試行の確率空間を構成せよ。

## 試行が有限でない場合の問題点

### 無限試行の例

- “1が出るまで骰子を振り続ける” 試行

見本点  $\langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$  が観測される確率は、6 回骰子を振る  $6^6$  通りの中の等しい確率で起こる 1 つなので

$$P(\langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle) = \frac{1}{6^6}$$

となる。また、ちょうど 6 回で 1 が出て終わる見本点  $\langle *, *, *, *, *, 1 \rangle$  ( $*$  は 1 以外の目) が観測される確率は、最初の 5 回は 1 以外、最後に 1 の目の  $5^5$  通りがあるので

$$P(\langle *, *, *, *, *, 1 \rangle) = \frac{5^5}{6^6}$$

である。

### 無限試行の例

- ルーレット回し

“ルーレット回し” の試行で、ちょうど 0.5 の値が出る確率はいくつか？

- 考え方

事象  $A$  を要素数が無限個の適当な数の集合として、これを  $A = \{a, b, c, \dots\}$  と書く。前出の加法性に従うなら事象  $A = \{a, b, c, \dots\}$  に対して、1 回の試行で例えば見本点  $a$  と  $b$  が同時に観測されることはないので、

$$P(A) = P\{a\} + P\{b\} + P\{c\} + \dots$$

として良い。

仮に各要素の出現確率が同じ  $\epsilon > 0$  という値である場合

$$P\{a\} = P\{b\} = P\{c\} = \dots = \epsilon \quad (\neq 0)$$

を考える。このとき要素数が無限個あるので

$$P(A) = \epsilon + \epsilon + \epsilon + \dots \rightarrow \infty$$

となり、確率の値が 1 を越えてしまう。

事象  $A$  が無限集合で各見本点が同様に起こり易い場合には

$$P\{a\} = P\{b\} = P\{c\} = \dots = 0$$

でなくてはならない。

任意の見本点についてその確率が 0 なら、いくら足しても

$$P(A) = P\{a\} + P\{b\} + P\{c\} + \dots = 0$$

である。

見本空間全体についてこの議論を行えば  $P(\Omega) = 0$  となってしまうので、全事象の確率がうまく定義できない。

- この問題を解決するためには**加法性**を考え直す必要がある

## まとめ

- 有限試行の確率空間
  - 確率論の基本用語: 試行, 見本点, 見本空間, 事象
  - 事象は見本空間の部分集合
  - 事象の演算は集合の演算と等価
  - 確率測度の基本的な性質 (正值性, 加法性, 全確率)
  - 確率空間は見本空間, 事象の集合, 確率測度の 3 つ組