正規分布に基づく検定

確率・統計 - 第 *11* 講

村田 昇

前回のおさらい

- 統計的仮説検定
  - 検定の手続き
  - 帰無仮説と対立仮説
  - 有意水準，棄却域，p-値
  - 過誤と検出力
  - 両側検定と片側検定
- 正規分布を用いた検定
  - 平均値の差の検定
  - 平均値の検定

統計的仮説検定

- ある現象・母集団に対して仮定された仮説の真偽をデータに基づいて統計的に検証する方法
- 推定と大きく異なるのは，母集団の分布に対して何らかの仮説を考えるところ

検定における仮説

- **帰無仮説** H_0
  検定統計量の分布を予想するために立てる仮説
- **対立仮説** H_1
  “帰無仮説が誤っているときに起こりうるシナリオ” として想定する仮説

検定の基本的手続き

1. 仮説を立てる
2. 仮説のもとで **検定統計量** が従う **帰無分布** を調べる
3. 実際のデータから検定統計量の値を計算する
4. 計算された検定統計量の値が仮説が正しいときに十分高い確率で得られるかどうかを判断する
   - **棄却域** を用いる方法
   - p**-値** を計算する方法

検定の用語

- 仮説の判定
  - 帰無仮説を **棄却** : 帰無仮説は誤っていると判断すること
  - 帰無仮説を **受容** : 帰無仮説を積極的に棄却できないこと
- 検定の誤り
  - **第一種過誤** : “正しい帰無仮説を棄却する” 誤り
  - **第二種過誤** : “誤った帰無仮説を受容する” 誤り
- 検定の設計
  - **サイズ** : “第一種過誤が起きる確率” を小さく
  - **検出力** : “第二種過誤が起きない確率” を大きく

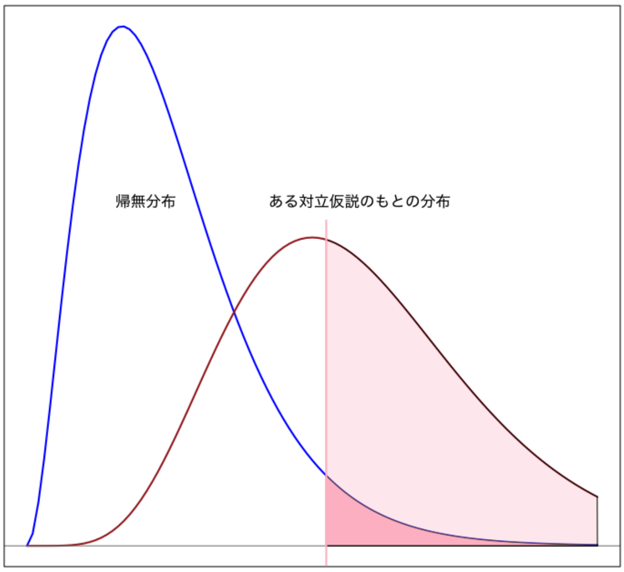


図 1: 有意水準が小さい場合

有意水準と p-値

- **有意水準**

  第一種過誤が起きる確率 (サイズ) として許容する上限
- p**-値 (有意確率)** : (検定統計量 T, 棄却域 R_α)

$$(p\text{-値}) = \min\{\alpha \in (0,1) | T \text{ が } R_\alpha \text{ に含まれる}\}$$

  - 検定統計量の値が棄却域に含まれる有意水準の最小値
- 有意水準と p-値の関係

  p-値が有意水準未満のときに帰無仮説を棄却する

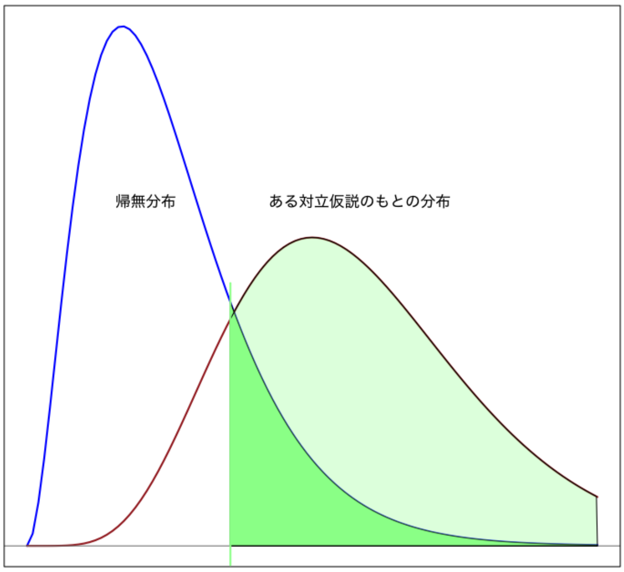


図 2: 有意水準が大きい場合

正規分布を用いた平均値の検定

- 問題

  確率変数列の平均値が μ と等しいか検定せよ.

  $$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

- 検定問題

  $$X_i = \theta + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n \qquad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

  を観測値の確率モデル (σ^2 は既知) とするとき

  $$H_0 : \theta = \mu \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq \mu$$

- 検定統計量

  $$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$$

  は 帰無仮説が正しいとき標準正規分布に従う.

- 棄却域 (両側検定の場合)

  $$R_\alpha = \left(-\infty, -z_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(z_{1-\alpha/2}, \infty\right)$$

正規分布を用いた平均値の差の検定

- 問題

  2 つの確率変数列の平均値が等しいか検定せよ.

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \qquad Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$$

- 検定問題

$$\begin{aligned} X_i &= \theta_1 + \varepsilon_{1i}, \quad i = 1, \ldots, n \qquad \varepsilon_{1i} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ Y_j &= \theta_2 + \varepsilon_{2j}, \quad j = 1, \ldots, m \qquad \varepsilon_{2j} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

  を観測値の確率モデル (σ^2 は既知) とするとき

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$$

- 検定統計量

$$T = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma}$$

  は仮説が正しいとき標準正規分布に従う.

- 棄却域 (両側検定の場合)

$$R_\alpha = \left(-\infty, -z_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(z_{1-\alpha/2}, \infty\right)$$

両側検定と片側検定

- 対立仮説によって棄却域の形は変わりうる
  - 2 つの薬の治験結果に対する仮説 :
    - 古い薬 (高価) と新しい薬 (安価) の効能が変わらない
    - 古い薬に比べて新しい薬の効能が改善した
  - 両側検定

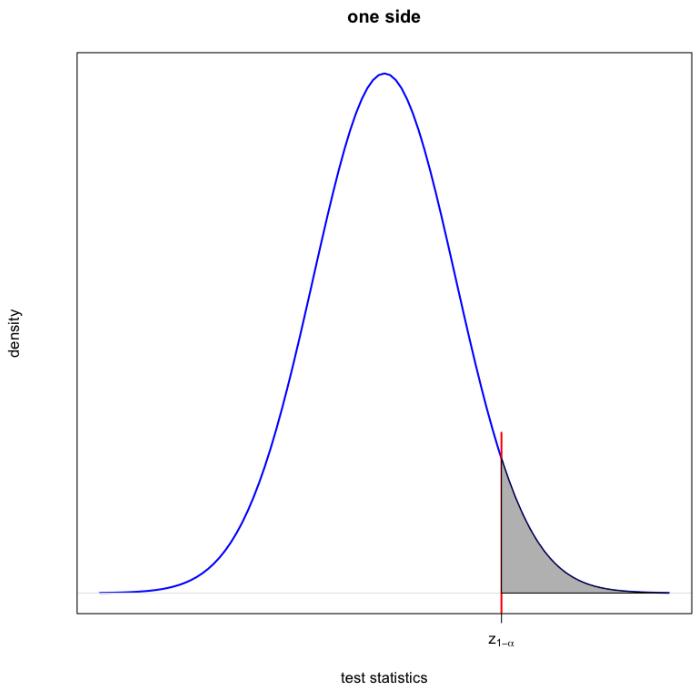
    棄却域がある定数 $a < b$ によって

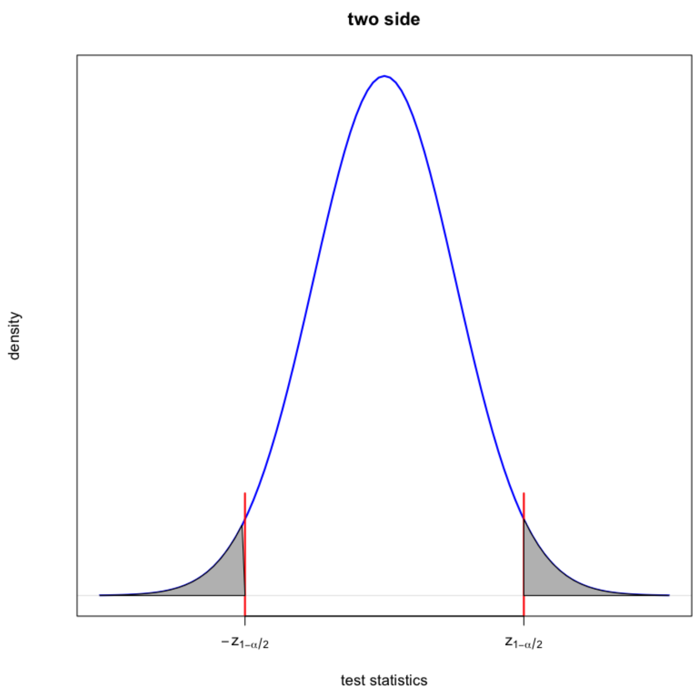
$$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

  - 片側検定

    棄却域がある定数 a によって

$$\begin{aligned} &(a, \infty) && \text{(右片側検定)} \\ &(-\infty, a) && \text{(左片側検定)} \end{aligned}$$





演習

練習問題

- 以下の問に答えよ．

  学生 30 人に，一週間の昼食代を尋ねたところ，平均 3280 円，標準偏差 950 円であることがわかった．昼食代は正規分布に従い，上記の標準偏差は正確に求められているとする．

  このとき，学生の平均的な一週間の昼食代は 3000 円より高いと言えるかを有意水準 0.05 で考えなさい．

- $z_{0.95} = 1.64, z_{0.975} = 1.96$

解答例

- 検定統計量

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$$

- 棄却域 (有意水準 $\alpha = 0.05$ の右片側検定)

$$R_\alpha = (z_{0.95}, \infty) = (1.64, \infty)$$

- 観測データ

  $n = 30, \bar{X} = 3280, \mu = 3000, \sigma = 950$

- 検定統計量の計算

$$T = \frac{\sqrt{30}(3280 - 3000)}{950} = 1.614$$

- 検定の結果

  平均 3000 円という帰無仮説は棄却されない

  (帰無仮説を受容)

練習問題

- 前問において p-値を計算する方法を考えよ.

解答例

- p-値 (有意確率) の定義

  検定統計量の値が棄却域に含まれる有意水準の最小値

$$(p\text{-値}) = \min\{\alpha \in (0,1) | T \text{ が } R_\alpha \text{ に含まれる}\}$$

- 両側検定の場合

  観測データに対する検定統計量の値を t とする

$$(p\text{-値}) = 2\int_{|t|}^{\infty} f(x)dx$$

  - $f(x)$ は検定統計量 T の帰無分布 (標準正規分布) の密度関数

- p-値と有意水準 α の関係

$$\begin{aligned}
&|t| > z_{1-\alpha/2} \\
&\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{|t|} f(x)dx > \int_{-\infty}^{z_{1-\alpha/2}} f(x)dx = 1-\alpha/2 \\
&\Leftrightarrow (p\text{-値}) = 2\int_{|t|}^{\infty} f(x)dx < \alpha
\end{aligned}$$

- p-値が α 未満なら帰無仮説を棄却すればよい
- 右片側検定の場合

$$(p\text{-値}) = \int_t^\infty f(x)dx$$

- 左片側検定の場合

$$(p\text{-値}) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$$

- 右片側検定で $t = 1.614$

$$(p\text{-値}) = \int_{1.614}^\infty f(x)dx = 0.0532$$

平均に関する検定

観測値の仮定

- 確率モデル

$$X = \mu + \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

- σ^2 が未知の場合を考える

平均の検定

- 問題

  μ_0 を既知の定数として，平均 μ が真の平均 μ_0 であるか否かを検定する．

  $H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$

考え方

- 平均と分散の推定量の性質
  - 標本平均 : (正規分布に従う)

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

  - 不偏分散 : (定数倍すると χ^2-分布に従う)

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

  - 標本平均と不偏分散は互いに独立

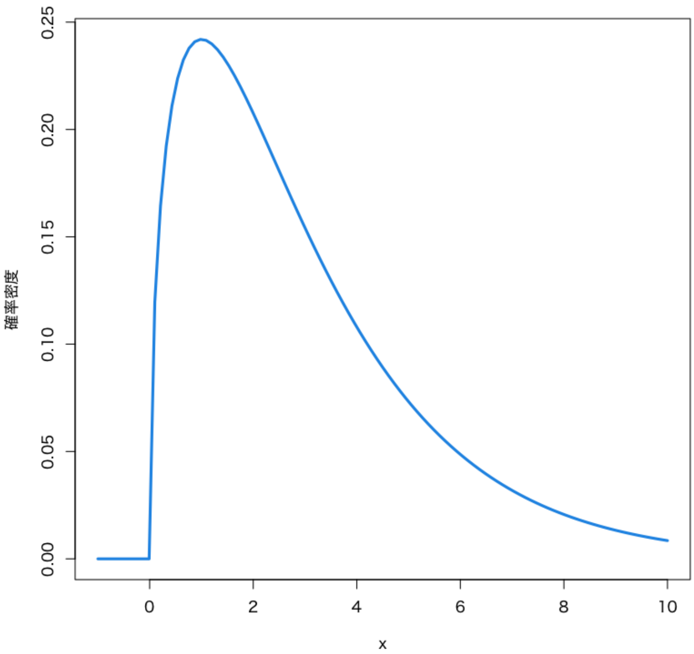


図 3: χ^2-分布 (自由度 3)

χ^2-分布

- 見本空間 : $[0, \infty)$
- 母数 : 自由度 ν
- 密度関数 :

$$f(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

  – 特徴付け : **標準正規分布に従う ν 個の確率変数の 2 乗和の分布**

t-分布

- 見本空間 : $(-\infty, \infty)$
- 母数 : 自由度 ν
- 密度関数 :

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}$$

  – 特徴付け : **標準正規分布と自由度 ν の χ^2-分布に従う確率変数 Z, Y の比 $Z/\sqrt{Y/\nu}$ の分布**

Student の t-検定

- 検定統計量

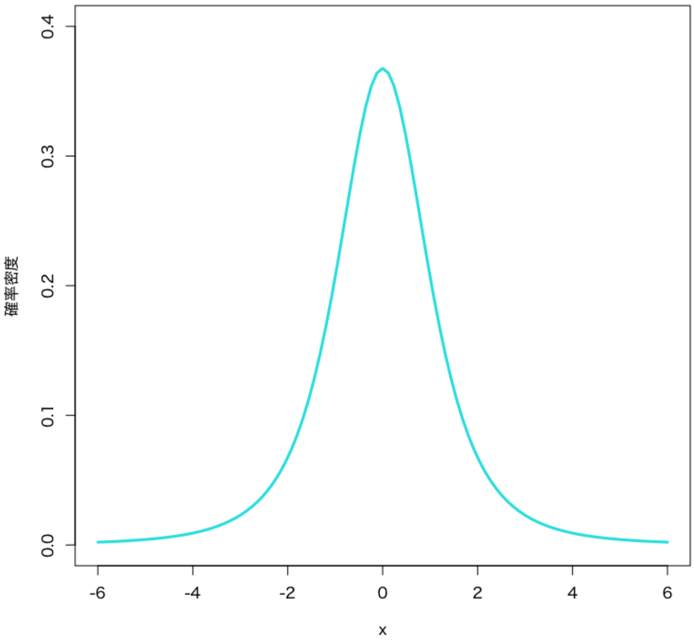


図 4: t-分布 (自由度 3)

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{s} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma}{\sqrt{(n-1)s^2/\sigma^2/(n-1)}}$$

- 帰無分布は自由度 $n-1$ の t-分布
  - $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma$ は標準正規分布に従う
  - $(n-1)s^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2-分布に従う
- 両側検定
  - 有意水準 : α

    $t_{1-\alpha/2}(n-1)$: 自由度 $n-1$ の t-分布の $1-\alpha/2$ 分位点を計算
  - 棄却域

$$R_\alpha = \big(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)\big) \cup \big(t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty\big)$$

平均の差の検定

- 問題

  2 種類のデータの平均が等しいか否かを検定する

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

- Behrens-Fisher 問題
  - 分散が同じ場合は t-検定に帰着
  - 分散が異なる場合は正確かつ適切な検定は難しい

考え方

- 標本平均と不偏分散の性質
  - $X_1, \ldots, X_m$ および $Y_1, \ldots, Y_m$ の不偏分散

$$s_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2.$$

  - $\bar{X} - \bar{Y}, s_1^2, s_2^2$ は互いに独立
  - $(m-1)s_1^2/\sigma_1^2$ は自由度 $m-1$ の χ^2-分布に従う
  - $(n-1)s_2^2/\sigma_2^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2-分布に従う

Welch の t-検定

- 検定統計量

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{s_1^2/m + s_2^2/n}}$$

- 帰無分布は自由度 $\hat{\nu}$ の t-分布 (**Welch の近似**)

$$\hat{\nu} = \frac{(s_1^2/m + s_2^2/n)^2}{(s_1^2/m)^2/(m-1) + (s_2^2/n)^2/(n-1)}$$

- 両側検定
  - 有意水準 : α
    $t_{1-\alpha/2}(\hat{\nu})$: 自由度 $\hat{\nu}$ の t-分布の $1-\alpha/2$ 分位点を計算
  - 棄却域

$$R_\alpha = \bigl(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(\hat{\nu})\bigr) \cup \bigl(t_{1-\alpha/2}(\hat{\nu}), \infty\bigr)$$

演習

練習問題

- Welch の t-検定において p-値はどのように計算すればよいか述べよ.

解答例

- 検定統計量 T の帰無分布を自由度 ν

$$\hat{\nu} = \frac{(s_1^2/m + s_2^2/n)^2}{(s_1^2/m)^2/(m-1) + (s_2^2/n)^2/(n-1)}$$

  の t-分布で近似する (この密度関数を f とする)

- 両側検定の場合

観測データに対する検定統計量の値を t とする

$$(p\text{-値}) = 2\int_{|t|}^{\infty} f(x)dx$$

- 右片側検定の場合

$$(p\text{-値}) = \int_{t}^{\infty} f(x)dx$$

- 左片側検定の場合

$$(p\text{-値}) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

分散に関する検定

分散の検定

- 問題

  σ_0^2 を既知の定数として，分散 σ^2 が σ_0^2 であるか否かを検定する．

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

考え方

- 分散の推定量の性質
  - 不偏分散 : (定数倍すると χ^2-分布に従う)

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

χ^2-検定

- 検定統計量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

- 帰無分布は自由度 $n-1$ の χ^2-分布

- 両側検定
  - 有意水準 : α

    $\chi^2_{\alpha/2}(n-1), \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$: 自由度 $n-1$ の χ^2-分布の $\alpha/2, 1-\alpha/2$ 分位点を計算
  - 棄却域

$$R_\alpha = \Big(0, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\Big) \cup \Big(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty\Big)$$

分散の比の検定

- 問題

  2 種類のデータの分散が等しいか否かを検定する.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

考え方

- 不偏分散の性質
  - $X_1, \dots, X_m$ および $Y_1, \dots, Y_n$ の不偏分散

$$s_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X})^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2.$$

  - s_1^2, s_2^2 は互いに独立
  - $(m-1)s_1^2/\sigma_1^2$ 自由度 $m-1$ の χ^2-分布に従う
  - $(n-1)s_2^2/\sigma_2^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2-分布に従う

F-分布

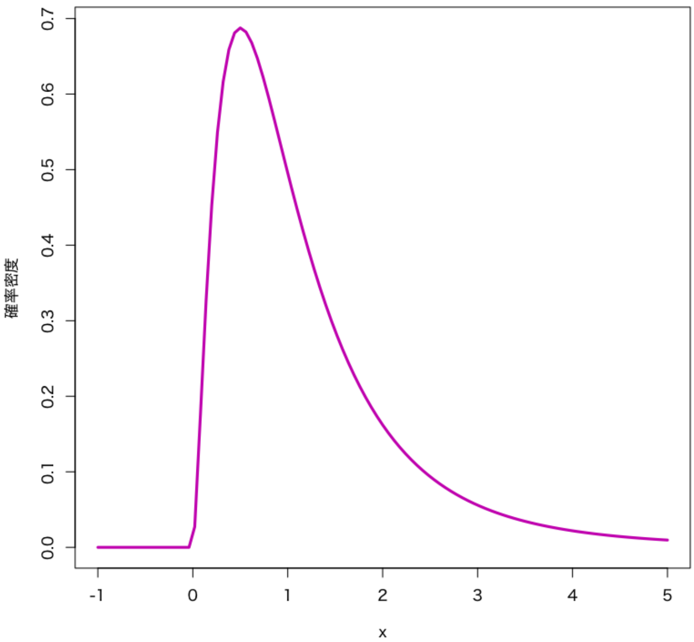


図 5: F-分布 (自由度 5, 10)

- 見本空間 : $[0, \infty)$
- 母数 : 自由度 ν_1, ν_2

- 密度関数 :

$$f(x) = \frac{(\frac{\nu_1}{\nu_2})^{\frac{\nu_1}{2}}}{B(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2})} \frac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}$$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

  - 特徴付け : **自由度 ν_1, ν_2 の χ^2-分布に従う確率変数 Y_1, Y_2 の比 $(Y_1/\nu_1)/(Y_2/\nu_2)$ の分布**

F-検定

- 検定統計量

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{(m-1)s_1^2/\sigma_1^2/(m-1)}{(n-1)s_2^2/\sigma_2^2/(n-1)}$$

- 帰無分布は自由度 $m-1, n-1$ の F-分布
  - $(m-1)s_1^2/\sigma_1^2$ 自由度 $m-1$ の χ^2-分布に従う
  - $(n-1)s_2^2/\sigma_2^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2-分布に従う
- 両側検定
  - 有意水準 : α

    $F_{\alpha/2}(m-1, n-1), F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)$: 自由度 $m-1, n-1$ の F-分布の $\alpha/2$, $1-\alpha/2$ 分位点を計算
  - 棄却域

$$R_\alpha = \bigl(0, F_{\alpha/2}(m-1, n-1)\bigr) \cup \bigl(F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1), \infty\bigr)$$

演習

練習問題

- 以下の問に答えよ.

  1 年生 40 人と 2 年生 35 人に，年間の書籍代を尋ねたところ，1 年生は平均 13300 円，標準偏差 900 円，2 年生は平均 12800 円，標準偏差 800 円であることがわかった．各学年の書籍代は正規分布に従うことがわかっており，上記の平均，標準偏差は標本平均および不偏分散から求めたものとする.

  このとき，1 年生と 2 年生の平均的な書籍代は同じと言えるかを有意水準 0.05 で考えなさい.

  - $F_{0.05}(39,34) = 0.58, F_{0.025}(39,34) = 0.52$, $F_{0.95}(39,34) = 1.74, F_{0.975}(39,34) = 1.95$, $t_{0.95}(73) = 1.67, t_{0.975}(73) = 1.99$

解答例

- 分散の比の検定を行う
- 検定統計量

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

- 帰無分布は自由度 $m-1, n-1$ の F-分布
- 棄却域

$$
\begin{aligned}
R_\alpha &= \big(0, F_{\alpha/2}(m-1, n-1)\big) \cup \big(F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1), \infty\big) \\
&= (0, 0.52) \cup (1.95, \infty)
\end{aligned}
$$

- 観測データ
  $m = 40, n = 35, s_1 = 900, s_2 = 800$
- 検定統計量の計算

$$
F = \frac{900^2}{800^2} = 1.266
$$

- 検定の結果
  分散の比が 1 であるという帰無仮説は棄却されない
  (等分散とみなしてよい)
- 分散の再計算

$$
s^2 = \frac{(m-1) \cdot s_1^2 + (n-1) \cdot s_2^2}{(m-1) + (n-1)} = 854.9^2
$$

  - $(m+n-2)s^2/\sigma^2$ は自由度 $m+n-2$ の χ^2-分布に従う
- 検定統計量

$$
T = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s}
$$

  - 自由度 $m+n-2$ の t-分布に従う
- 棄却域 (有意水準 $\alpha = 0.05$ の両側検定)

$$
\begin{aligned}
R_\alpha &= (-\infty, -t_{0.975}(73)) \cup (t_{0.975}(73), \infty) \\
&= (-\infty, -1.99) \cup (1.99, \infty)
\end{aligned}
$$

- 観測データ
  $m = 40, \bar{X} = 13300, n = 35, \bar{Y} = 12800,$
- 検定統計量の計算

$$
T = \sqrt{\frac{40 \cdot 35}{40 + 35}} \frac{13300 - 12800}{854.9} = 2.53
$$

- 検定の結果
  平均が同じという帰無仮説は棄却される

今回のまとめ

- 分散未知の正規分布を用いた検定
  - 平均値の検定
  - 平均値の差の検定
  - 分散の検定
  - 分散の比の検定