

# 一般の確率空間

## 確率・統計 - 第 2 講

村田 昇

### 前回のおさらい

- 有限試行の確率空間
  - 確率論の基本用語: 試行, 見本点, 見本空間, 事象
  - 事象は見本空間の部分集合
  - 事象の演算は集合の演算と等価
  - 確率測度の基本的な性質 (正值性, 加法性, 全確率)
  - 確率空間は見本空間, 事象の集合, 確率測度の 3 つ組

### 有理数の可算性

#### 可算集合

- 定義

集合の全ての要素に自然数で順番に番号が与えられることを**可算 (可付番) (enumerable, countable)** という.
- 自明な可算集合の例
  - 要素が有限個の集合
  - 自然数

#### 有理数の可算性

- 区間  $(0, 1)$  に含まれる全ての有理数は可算

有理数と自然数に 1 対 1 の対応があることを示せばよい.

分子 \ 分母	2	3	4	5	6	...
1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	...
2		2/3	<del>2/4</del>	2/5	<del>2/6</del>	...
3			3/4	3/5	<del>3/6</del>	...
4				4/5	<del>4/6</del>	...
5					5/6	...
⋮						...

対応づけ出来そうだが規則の記述は難しそう

#### Bernstein の定理

- 1 対 1 の対応が存在することを示す代わりに,  $A$  と  $B$  の部分集合, および  $A$  の部分集合と  $B$  の間にそれぞれ 1 対 1 の対応が存在することを示せばよい.

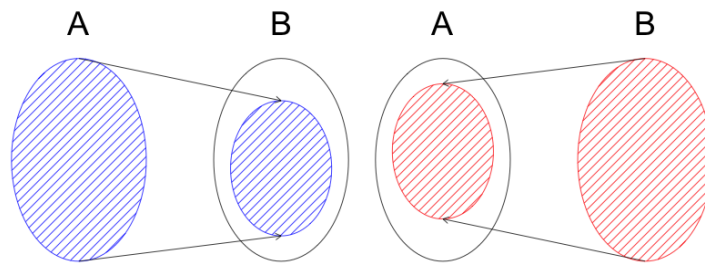


図 1: Bernstein の定理

## 有理数の可算性 (再考)

- Bernstein の定理を用いた場合
  - 全ての自然数  $n$  から有理数の部分集合  $1/q$  への 1 対 1 対応

$$n \mapsto \frac{1}{q} = \frac{1}{n+1}$$

(有理数としては  $1/q$  の形しか用いない)

- 全ての有理数  $p/q$  から自然数  $n$  の部分集合への 1 対 1 対応

$$\frac{p}{q} \mapsto n = 2^p \times 3^q$$

(自然数としては 2 と 3 の倍数しか用いない)

## 演習

### 練習問題

- 整数が可算であることを示せ.
- 自然数の組  $(m, n)$  が可算であるかどうか論じよ.
- 1 以上の有理数が可算であるかどうか論じよ.

### 整数の可算性

- 示すべきこと
  - 自然数と整数の間に 1 対 1 の対応づけがある.
- 構成例
  - 奇数の自然数:  $n \mapsto z = (n-1)/2$  (非負の整数)
  - 偶数の自然数:  $n \mapsto z = -n/2$  (負の整数)
- Bernstein の定理を使った場合も考えてみよ

### 自然数の組の可算性

- 以下の表に番号を振ることを考えればよい

(m,n)	1	2	3	4	5	...
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	
⋮						

- 例えば斜めに振っていく

(m,n)	1	2	3	4	5	...
1	1	2	4	7	11	
2	3	5	8	12	17	
3	6	9	13	18	24	
4	10	14	19	25		
5	15	20	26			
⋮						

- 規則 (数式) は考えてみよ

## 1 以上の有理数の可算性

- 1 以上の有理数は (自然数, 区間  $[0, 1)$  の有理数) と分解して考えることができる
- 区間  $[0, 1)$  の有理数は番号付けできる (区間  $(0, 1)$  に 0 を加えただけ) ので, (自然数, 自然数) に対応づけられる
- 前問の結果を用いれば明らか

## 無理数の非可算性

### 非可算集合

- 定義  
可算でないことを**非可算** (unenumerable, uncountable) という. (不可算と書かれている場合もある)
- 非可算集合の例
  - 区間  $(0, 1)$  に含まれる無理数
  - 実数全体

### Cantor の対角線論法

- 無理数の非可算性の証明 (背理法)
- 証明の概要 (詳しくは講義資料)
  - その 1  
区間  $(0, 1)$  に含まれる **無理数の集合は可算** と仮定する.
  - その 2  
有理数の集合は可算なので, 仮定より無理数と有理数の和である実数も可算となる.
  - その 3

自然数との対応付けを行い、番号順に並べる.

$$\begin{array}{lcl} 1: & 0.d_1^1 d_2^1 d_3^1 d_4^1 \cdots \\ 2: & 0.d_1^2 d_2^2 d_3^2 d_4^2 \cdots \\ 3: & 0.d_1^3 d_2^3 d_3^3 d_4^3 \cdots \\ 4: & 0.d_1^4 d_2^4 d_3^4 d_4^4 \cdots \\ & \vdots \end{array}$$

ただし、有限桁の小数の場合は 0 で埋める.

• その 4

第  $n$  番の数の第  $n$  桁目  $d_n^n$  とは **異なる数**  $\tilde{d}_n^n \neq d_n^n$  を選び、これらを並べた次の数を考える.

$$0.\tilde{d}_1^1 \tilde{d}_2^2 \tilde{d}_3^3 \tilde{d}_4^4 \cdots$$

• その 5

区間  $(0, 1)$  に含まれるこの数の番号を探す.

• その 6

第  $n$  番の数とは第  $n$  桁目が **違っている** ので、この数は区間  $(0, 1)$  の **全ての実数を並べたはずの表にはない**.

• その 7

番号が振られていない数が存在するので区間  $(0, 1)$  の実数が可算である (並べて番号が付けられる) ことに矛盾する.

• その 8

つまり最初の仮定 “**無理数の集合は可算**” が間違っていたということ.

## 集合の分類

- 無限集合を更に分類 (可算と非可算) する必要がある

- 集合の濃度

- この講義で必要な概念は以下の 3 つ

**有限の濃度** 有限個の要素からなる集合

**可算の濃度** 自然数, 有理数など

**連続の濃度** 無理数, 実数など

- より詳しくは位相と集合の本を参照

## 演習

### 練習問題

- 以下の集合の濃度を答えなさい.
  - 区間  $(0, 1)$  に含まれる有理数
  - 区間  $(0, 1)$  に含まれる無理数
  - 実数  $\mathbb{R}$  (区間  $(-\infty, \infty)$ )
  - 2 つの実数の組  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
  - 2 次元空間で  $xy$  座標がともに整数となる点の集合
  - 表が出るまでコインを投げ続ける試行の見本空間

## 一般の確率測度

### 可測集合

**可測集合 (measurable set)** 確率測度  $P$  で確率の値を測ることができる集合  
(見本空間の集合の中で事象として考えてよいもの)

**可測 (measurable)** “集合  $A$  が可測” とは集合  $A$  を確率測度  $P$  で測ることができること

### 集合族

- 確率測度  $P$  で確率の値を測ることができる対象全体 (関数  $P$  の **定義域**) を  $\mathcal{F}$  と書く
- 定義域  $\mathcal{F}$  は可測な事象 (見本空間の部分集合)  $A \subset \Omega$  の集まり
- このような “集合の集合” を **集合族 (family of sets)** という

### $\sigma$ -加法族

- 定義

以下の  $(\sigma.1)$ -( $\sigma.3$ ) の 3 つの条件を満たす集合族を  **$\sigma$ -加法族 ( $\sigma$ -algebra)** と呼ぶ.

$$(\sigma.1) \quad \Omega \in \mathcal{F}$$

$$(\sigma.2) \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

$$(\sigma.3) \quad A_n \in \mathcal{F}, (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

- $(\sigma.1)$ -( $\sigma.3$ ) は定義域  $\mathcal{F}$  の満たすべき条件でもある

### 条件の意味

$(\sigma.1)$  見本空間 (全事象) は可測である (  $P$  で測ることができる )

$(\sigma.2)$  ある事象が可測なら, その余事象も可測である

$(\sigma.3)$  可測集合の可算 (自然数で番号付けできる) 無限和も可測である

### 確率測度

- 定義

集合関数  $P$  は条件 (P.1), (P.2) を満たすとき **測度 (measure)** と呼ばれ, さらに (P.3) まで満たすとき **確率測度 (probability measure)** と呼ばれる. また  $P(A)$  を  $A$  の **測度** という.

$$(P.1) \quad P(A) \geq 0, A \in \mathcal{F}$$

$$(P.2) \quad P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n), A_n \in \mathcal{F}$$

$$(P.3) \quad P(\Omega) = 1$$

- (P.2) を  $\sigma$ -加法性 ( $\sigma$ -additivity) という.

### 確率空間

- 定義

見本空間  $\Omega$  と確率測度  $P$ , および  $P$  の定義域である  $\sigma$ -加法族  $\mathcal{F}$  の組  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を **確率空間 (probability space)** という.

## Lebesgue 測度

### ルーレット回しの確率測度

- 区間  $(0, 1]$  からの無作為抽出

試行  $T$  を“区間  $(0, 1]$  から無作為に一点抜き出すこと”とする。このとき見本空間は

$$\Omega = (0, 1]$$

であり無限試行となる。確率測度は事象  $A$  が区間  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$  または  $(a, b]$  といった簡単な集合であれば

$$P(A) = |A| = b - a, \quad (|A| \text{ は区間の長さを表す})$$

とすればよい。

### 確率測度の定義域

- 確率測度  $P$  の定義域  $\mathcal{F}$  は集合演算で作られる
- 可算個** の区間を組み合わせてつくられる集合

$$\mathcal{F} = \{\text{可算個の任意の区間の和, 差, 交, 余集合から作られる集合}\}$$

- 集合の測度 (確率) は (P.2) の性質より排反な区間の長さの和から計算できる

### Lebesgue 測度

- 定義  
“区間  $(0, 1]$  から無作為に一点抜き出す” 試行  $T$  によって考えられる確率測度  $P$  を  $(0, 1]$  上の **Lebesgue 測度 (Lebesgue measure)** という。また Lebesgue 測度の定義域となる  $\sigma$ -加法族を  $\mathbb{R}$  の **Borel 集合族 (Borel field)** という。
- Lebesgue 測度は  $\mu$  で表されることが多い
- 厳密な定義については Lebesgue 積分の本を参考

### Lebesgue 測度の計算

- 一点が抜き出される確率

Lebesgue 測度において,  $P\{a\}$  (一点  $a$  が抜き出される確率) は 0 となる。

例えば  $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$  という可算集合を考えると,

$$P\left\{\frac{1}{n}\right\} \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow P\left(\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\frac{1}{n}\right\} \rightarrow \infty$$

となり矛盾が生じる。

- 抜き出した点が有理数である確率

$$\mathbb{R}_{(0,1]} = \{\text{区間 } (0, 1] \text{ 上の実数全体}\} (= \Omega)$$

$$\mathbb{Q}_{(0,1]} = \{\text{区間 } (0, 1] \text{ 上の有理数全体}\}$$

と書くことにする。有理数は **可算** であるからその要素に番号が付けられ,

$$\mathbb{Q}_{(0,1]} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots\}$$

と書けるので、(P.2)の性質により計算できる.

$$\begin{aligned}P(\mathbb{Q}_{(0,1]}) &= P(\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots\}) \\&= P\{q_1\} + P\{q_2\} + P\{q_3\} + \dots + P\{q_n\} + \dots \\&= 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 0\end{aligned}$$

- 抜き出した点が無理数である確率

$$(\text{区間 } (0, 1] \text{ 上の無理数全体}) = \mathbb{R}_{(0,1]} - \mathbb{Q}_{(0,1]}$$

を用いて求められる.

$$P(\mathbb{R}_{(0,1]} - \mathbb{Q}_{(0,1]}) = P(\mathbb{R}_{(0,1]}) - P(\mathbb{Q}_{(0,1]}) = 1 - 0 = 1$$

無理数全体は **可算でない** ため有理数のように成分毎の可算無限和では書けず, したがって (P.2) の性質を使って計算することはできない.

- 異なる区間の場合

“区間  $(0, 5]$  から無作為に一点抜き出す” 試行を考えたとき, その見本空間は  $\Omega = (0, 5]$  となる. この試行の確率測度は Lebesgue 測度  $\mu$  を定数倍 (正規化) し,

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu(A)}{5}, \quad A \in \mathcal{F}$$

とすることによって構成できる.

## 零集合

- 定義

空集合でない集合  $A$  でその事象が起こる確率が  $P(A) = 0$  となるものがある. こうした集合を **零集合 (null set)** と呼ぶ.

- 以下は等しくないことに注意 (有理数と無理数の例)
  - 事象  $A$  の確率が 0 である
  - 事象  $A$  に含まれる見本点が全く起こらない

## “ほとんど確実”

- 確率での特殊な言い回し

事象  $A = \{\omega | \alpha(\omega)\}$  の確率が 1 であるとき, “**ほとんど確実に (almost surely)**” あるいは “**条件  $\alpha(\omega)$  が確率 1 で成り立つ**” といい, 以下のように書く.

$$\alpha(\omega) \text{ a.s.}$$

- 別の表現
  - 事象  $A$  の余事象  $A^c$  は零集合
  - 条件  $\alpha$  は成り立たないこともあるが, その確率は 0

## 演習

### 練習問題

- Buffon の針 (Buffon's needle) の問題を考えよ

2次元平面上に等間隔  $d$  で平行線が引いてある. 長さ  $l$  の針をこの平面上にランダムに落とし, 平行線と交わる確率を求めよ. ただし  $l < d$  とする.

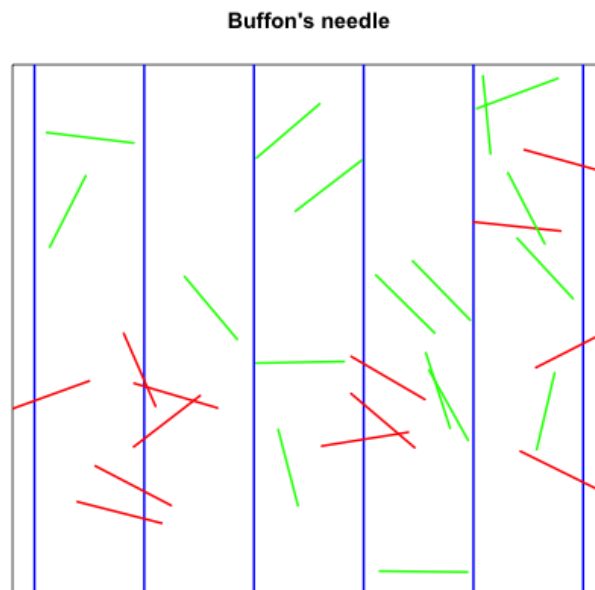


図 2: Buffon の針

## 今回のまとめ

- 一般の確率空間
  - 有限集合と無限集合
  - 集合の濃度 (無限集合は更に分類される)
    - \* 可算集合: 自然数, 整数, 有理数
    - \* 連続集合: 無理数, 実数
  - 一般の確率測度と  $\sigma$ -加法性の関係
  - Lebesgue 測度と Borel 集合族 (応用上重要な概念)
  - “ほとんど確実に成り立つ”