# 一般の確率空間

確率・統計 - 第 2 講

村田 昇

## 前回のおさらい

- 有限試行の確率空間
  - 確率論の基本用語 : 試行，標本点，標本空間，事象
  - 事象は標本空間の部分集合
  - 事象の演算は集合の演算と等価
  - 確率測度の基本的な性質 (正値性，加法性，全確率)
  - 確率空間は標本空間，事象の集合，確率測度の 3 つ組

## 有理数の可算性

### 可算集合

- 定義

  集合の全ての要素に自然数で順番に番号が与えられることを**可算 (可付番) (enumerable, countable)** という.

- 自明な可算集合の例
  - 要素が有限個の集合
  - 自然数

### 有理数の可算性

- 区間 $(0, 1)$ に含まれる全ての有理数は可算
  - 有理数と自然数に 1 対 1 の対応があることを示せばよい

| 分子 \ 分母 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/2 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 | $\cdots$ |
| 2 | | 2/3 | ~~2/4~~ | 2/5 | ~~2/6~~ | $\cdots$ |
| 3 | | | 3/4 | 3/5 | ~~3/6~~ | $\cdots$ |
| 4 | | | | 4/5 | ~~4/6~~ | $\cdots$ |
| 5 | | | | | 5/6 | $\cdots$ |
| $\vdots$ | | | | | | $\cdots$ |

  - 対応づけ出来そうだが規則の記述は難しそう

### Bernstein の定理

- 1 対 1 の対応が存在することを示す代わりに，$A$ と $B$ の部分集合，および $A$ の部分集合と $B$ の間にそれぞれ 1 対 1 の対応が存在することを示せばよい.

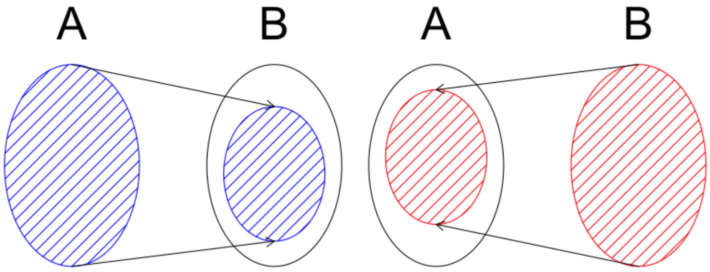


図 1: Bernstein の定理

### 有理数の可算性 (再考)

- Bernstein の定理を用いた場合
  - 全ての自然数 $n$ から有理数の部分集合 $1/q$ への 1 対 1 対応

    $$n \mapsto \frac{1}{q} = \frac{1}{n+1}$$

    (有理数としては $1/q$ の形しか用いない)
  - 全ての有理数 $p/q$ から自然数 $n$ の部分集合への 1 対 1 対応

    $$\frac{p}{q} \mapsto n = 2^p \times 3^q$$

    (自然数としては 2 と 3 の倍数しか用いない)

## 演習

### 練習問題

- 整数が可算であることを示せ.
- 自然数の組 $(m,n)$ が可算であるかどうか論じよ.
- 1 以上の有理数が可算であるかどうか論じよ.

### 整数の可算性

- 示すべきこと

  自然数と整数の間に 1 対 1 の対応づけがある.
- 構成例
  - 奇数の自然数: $n \mapsto z = (n-1)/2$ (非負の整数)
  - 偶数の自然数: $n \mapsto z = -n/2$ (負の整数)
- Bernstein の定理を使った場合も考えてみよ

### 自然数の組の可算性

- 以下の表に番号を振ることを考えればよい

| (m,n) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | |
| $\vdots$ | | | | | | |

- 例えば斜めに振っていく

| (m,n) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | |
| 2 | 3 | 5 | 8 | 12 | 17 | |
| 3 | 6 | 9 | 13 | 18 | 24 | |
| 4 | 10 | 14 | 19 | 25 | | |
| 5 | 15 | 20 | 26 | | | |
| $\vdots$ | | | | | | |

- 規則 (数式) は考えてみよ

### 1 以上の有理数の可算性

- 1 以上の有理数は (自然数，区間 $[0,1)$ の有理数) と分解して考えることができる
- 区間 $[0,1)$ の有理数は番号付けできる (区間 $(0,1)$ に 0 を加えただけ) ので，(自然数，自然数) に対応づけられる
- 前問の結果を用いれば明らか

## 無理数の非可算性

### 非可算集合

- 定義

  可算でないことを**非可算 (unenumerable, uncountable)** という．(不可算と書かれている場合もある)

- 非可算集合の例
  - 区間 $(0,1)$ に含まれる無理数
  - 実数全体

### Cantor の対角線論法

- 無理数の非可算性の証明 (背理法)
- 証明の概要 (詳しくは講義資料)
  - その 1

    区間 $(0,1)$ に含まれる **無理数の集合は可算** と仮定する．

  - その 2

    有理数の集合は可算なので，仮定より無理数と有理数の和である実数も可算となる．

- その 3

自然数との対応付けを行い，番号順に並べる.

$$\begin{array}{ll} 1: & 0.\,d_1^1\,d_2^1\,d_3^1\,d_4^1\cdots \\ 2: & 0.\,d_1^2\,d_2^2\,d_3^2\,d_4^2\cdots \\ 3: & 0.\,d_1^3\,d_2^3\,d_3^3\,d_4^3\cdots \\ 4: & 0.\,d_1^4\,d_2^4\,d_3^4\,d_4^4\cdots \\ \vdots & \quad\vdots \end{array}$$

ただし，有限桁の小数の場合は 0 で埋める.

- その 4

  第 n 番の数の第 n 桁目 $d_n^n$ とは **異なる数** $\tilde{d}_n^n \neq d_n^n$ を選び，これらを並べた次の数を考える.

  $$0.\,\tilde{d}_1^1\,\tilde{d}_2^2\,\tilde{d}_3^3\,\tilde{d}_4^4\cdots$$

- その 5

  区間 $(0,1)$ に含まれるこの数の番号を探す.

- その 6

  第 n 番の数とは第 n 桁目が **違っている** ので，この数は区間 $(0,1)$ の **全ての実数を並べたはずの表にはない** .

- その 7

  番号が振られていない数が存在するので区間 $(0,1)$ の実数が可算である (並べて番号が付けられる) ことに矛盾する.

- その 8

  つまり最初の仮定 **“無理数の集合は可算”** が間違っていたということ.

### 集合の分類

- 無限集合を更に分類 (可算と非可算) する必要がある
- **集合の濃度**
  - この講義で必要な概念は以下の 3 つ

    **有限の濃度** 有限個の要素からなる集合

    **可算の濃度** 自然数，有理数など

    **連続の濃度** 無理数，実数など
- より詳しくは位相と集合の本を参照

## 演習

### 練習問題

- 以下の集合の濃度を答えなさい.
  - 区間 $(0,1)$ に含まれる有理数
  - 区間 $(0,1)$ に含まれる無理数
  - 実数 $\mathbb{R}$ (区間 $(-\infty,\infty)$)
  - 2 つの実数の組 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
  - 2 次元空間で $xy$ 座標がともに整数となる点の集合
  - 表が出るまでコインを投げ続ける試行の標本空間

# 一般の確率測度

## 可測集合

**可測集合 (measurable set)** 確率測度 $P$ で確率の値を測ることができる集合
(標本点の集合の中で事象として考えてよいもの)

**可測 (measurable)** “集合 $A$ が可測” とは集合 $A$ を確率測度 $P$ で測ることができること

## 集合族

- 確率測度 $P$ で確率の値を測ることができる対象全体 (関数 $P$ の **定義域**) を $\mathcal{F}$ と書く
- 定義域 $\mathcal{F}$ は可測な事象 (標本空間の部分集合) $A \subset \Omega$ の集まり
- このような “集合の集合” を**集合族 (family of sets)** という

## $\sigma$-加法族

- 定義

  以下の ($\sigma$.1)-($\sigma$.3) の 3 つの条件を満たす集合族を **$\sigma$-加法族 ($\sigma$-algebra)** と呼ぶ.

$$
\begin{aligned}
&(\sigma.1) \quad \Omega \in \mathcal{F} \\
&(\sigma.2) \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \\
&(\sigma.3) \quad A_n \in \mathcal{F},\ (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}
\end{aligned}
$$

  – ($\sigma$.1)-($\sigma$.3) は定義域 $\mathcal{F}$ の満たすべき条件でもある

## 条件の意味

**($\sigma$.1)** 標本空間 (全事象) は可測である ( $P$ で測ることができる)

**($\sigma$.2)** ある事象が可測なら，その余事象も可測である

**($\sigma$.3)** 可測集合の可算 (自然数で番号付けできる) 無限和も可測である

## 確率測度

- 定義

  集合関数 $P$ は条件 (P.1), (P.2) を満たすとき**測度 (measure)** と呼ばれ，さらに (P.3) まで満たすとき**確率測度 (probability measure)** と呼ばれる．また $P(A)$ を $A$ の**測度**という.

$$
\begin{aligned}
&(P.1) \quad P(A) \geq 0,\ A \in \mathcal{F} \\
&(P.2) \quad P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),\ A_n \in \mathcal{F} \\
&(P.3) \quad P(\Omega) = 1
\end{aligned}
$$

  – (P.2) を **$\sigma$-加法性 ($\sigma$-additivity)** という

## 確率空間

- 定義

  標本空間 $\Omega$ と確率測度 $P$，および $P$ の定義域である $\sigma$-加法族 $\mathcal{F}$ の組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を**確率空間 (probability spcae)** という.

# Lebesgue 測度

## ルーレット回しの確率測度

- 区間 $(0, 1]$ からの無作為抽出

  試行 $T$ を "区間 $(0, 1]$ から無作為に一点抜き出すこと" とする．このとき標本空間は

  $$\Omega = (0, 1]$$

  であり無限試行となる．確率測度は事象 $A$ が区間 $[a, b]$, $(a, b)$, $[a, b)$ または $(a, b]$ といった簡単な集合であれば

  $$P(A) = |A| = b - a,\ (|A| \text{ は区間の長さを表す})$$

  とすればよい．

## 確率測度の定義域

- 確率測度 $P$ の定義域 $\mathcal{F}$ は集合演算で作られる
- **可算個** の区間を組み合わせてつくられる集合

  $$\mathcal{F} = \{\text{可算個の任意の区間の和，差，交，} \\ \text{余集合から作られる集合}\}$$

- 集合の測度 (確率) は (P.2) の性質より排反な区間の長さの和から計算できる

## Lebesgue 測度

- 定義

  "区間 $(0, 1]$ から無作為に一点抜き出す" 試行 $T$ によって考えられる確率測度 $P$ を $(0, 1]$ 上の **Lebesgue 測度 (Lebesgue measure)** という．また Lebesgue 測度の定義域となる $\sigma$-加法族を $\mathbb{R}$ の **Borel 集合族 (Borel field)** という．

  - Lebesgue 測度は $\mu$ で表されることが多い
  - 厳密な定義については Lebesgue 積分の本を参照

## Lebesgue 測度の計算

- 一点が抜き出される確率

  Lebesgue 測度において，$P\{a\}$ (一点 $a$ が抜き出される確率) は 0 となる．

  例えば $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ という可算集合を考えると，

  $$P\left\{\frac{1}{n}\right\} \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow P\left(\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\frac{1}{n}\right\} \to \infty$$

  となり矛盾が生じる．

- 抜き出した点が有理数である確率

  $$\mathbb{R}_{(0,1]} = \{\text{区間 } (0, 1] \text{ 上の実数全体}\}(= \Omega)$$
  $$\mathbb{Q}_{(0,1]} = \{\text{区間 } (0, 1] \text{ 上の有理数全体}\}$$

  と書くことにする．有理数は **可算** であるからその要素に番号が付けられ，

  $$\mathbb{Q}_{(0,1]} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots\}$$

と書けるので，(P.2) の性質により計算できる．

$$\begin{aligned} P(\mathbb{Q}_{(0,1]}) &= P\left(\{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots\}\right) \\ &= P\{q_1\} + P\{q_2\} + P\{q_3\} + \cdots + P\{q_n\} + \cdots \\ &= 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0 \end{aligned}$$

- 抜き出した点が無理数である確率

  $$(\text{区間 } (0,1] \text{ 上の無理数全体}) = \mathbb{R}_{(0,1]} - \mathbb{Q}_{(0,1]}$$

  を用いて求められる．

  $$P(\mathbb{R}_{(0,1]} - \mathbb{Q}_{(0,1]}) = P(\mathbb{R}_{(0,1]}) - P(\mathbb{Q}_{(0,1]}) = 1 - 0 = 1$$

  無理数全体は **可算でない** ため有理数のように成分毎の可算無限和では書けず，したがって (P.2) の性質を使って計算することはできない．

- 異なる区間の場合

  "区間 $(0,5]$ から無作為に一点抜き出す" 試行を考えたとき，その標本空間は $\Omega = (0,5]$ となる．この試行の確率測度は Lebesgue 測度 $\mu$ を定数倍 (正規化) し，

  $$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu(A)}{5}, \ A \in \mathcal{F}$$

  とすることによって構成できる．

### 零集合

- 定義

  空集合でない集合 $A$ でその事象が起こる確率が $P(A) = 0$ となるものがある．こうした集合を **零集合 (null set)** と呼ぶ．

- 以下は等しくないことに注意 (有理数と無理数の例)
  - 事象 $A$ の確率が 0 である
  - 事象 $A$ に含まれる標本点が全く起こらない

### "ほとんど確実"

- 確率での特殊な言い回し

  事象 $A = \{\omega | \alpha(\omega)\}$ の確率が 1 であるとき，**"ほとんど確実に (almost surely)"** あるいは **"条件 $\alpha(\omega)$ が確率 1 で成り立つ"** といい，以下のように書く．

  $$\alpha(\omega) \text{ a.s.}$$

- 別の表現
  - 事象 $A$ の余事象 $A^c$ は零集合
  - 条件 $\alpha$ は成り立たないこともあるが，その確率は 0

## 演習

### 練習問題

- Buffon の針 (Buffon's needle) の問題を考えよ

2 次元平面上に等間隔 $d$ で平行線が引いてある．長さ $l$ の針をこの平面上にランダムに落としたとき，平行線と交わる確率を求めよ．ただし $l < d$ とする．

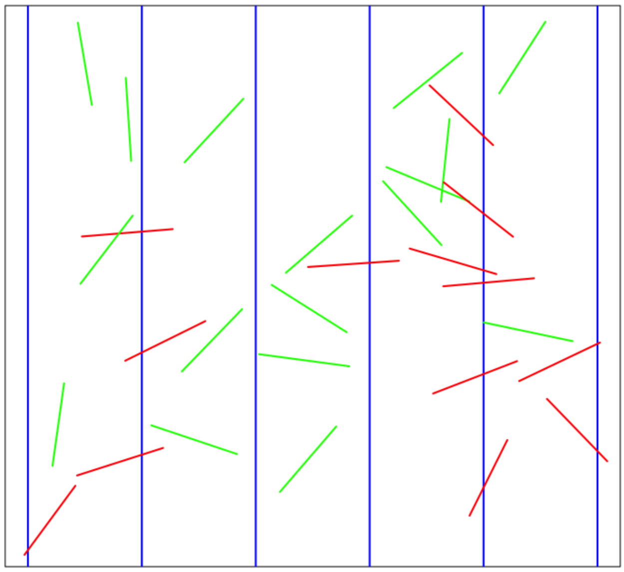


図 2: Buffon の針

### 解答

- 講義資料 20 頁の例 2.11 を参照
- 講義資料 23 頁の練習問題 (4)-(7) にも目を通しておくこと

## 今回のまとめ

- 一般の確率空間
  - 有限集合と無限集合
  - 集合の濃度 (無限集合は更に分類される)
    - 可算集合 : 自然数，整数，有理数
    - 連続集合 : 無理数，実数
  - 一般の確率測度と $\sigma$-加法性の関係
  - Lebesgue 測度と Borel 集合族 (応用上重要な概念)
  - “ほとんど確実に成り立つ”