数値解析 レポート No. 6

学籍番号

氏名

[〆切] 2020/11/05 19:00

[V. 連立一次方程式の数値解法]

V-B. 5×5 の行列 A および 5 次元の縦ベクトル $\boldsymbol{b}$ がそれぞれ以下のように与えられたとする。

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 14 & -9 & 3 & -5 \\ 14 & 52 & -15 & 2 & -32 \\ -9 & -15 & 36 & -5 & 16 \\ 3 & 2 & -5 & 47 & 49 \\ -5 & -32 & 16 & 49 & 79 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -15 \\ -100 \\ 106 \\ 329 \\ 463 \end{bmatrix}.$$

この時行列 A に対してガウス-ザイデル法を実行するプログラムを作成し連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^\mathsf{T}$ を有効数字 10 進 3 桁まで求め 4 桁を四捨五入して答えよ。作成したプログラムも提出すること。プログラミング言語は問わない。

初期ベクトル x は $[0,0,0,0,0]^T$ とした.

```
# Gauss-Seidel
for k in range(10000):
    for i in range(5):
        sum = 0
        for j in range(0,i):
            sum += A[i][j] * x[j]
        for j in range(i+1, n):
            sum += A[i][j] * x[j]
        x[i] = (-sum+b[i])/A[i][i]
```

$$x = \begin{bmatrix} -4.01 \times 10^{-14} \\ 1.00 \\ 2.00 \\ 3.00 \\ 4.00 \end{bmatrix}$$

十分小さかったら正解.

数値解析 レポート No. 6

学籍番号 氏名

[〆切] 2020/11/05 19:00

[VI. 関数近似と補間 (1)]

VI-A. (1) 2 つのデータ点 $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$ を通る 1 次の補間多項式 $p_1(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$ を以下の 3 通りの方法により求めよ。(a) 連立方程式を解く方法、(b) ラグランジュ補間を用いる方法、(c) ニュートン補間を用いる方法。
(2) 問 1 の 2 点に $(x_2, y_2) = (4, 2)$ を加えた 3 点を通る 2 次の補間多項式 $p_2(x) = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$ を問 1 と同様の 3 通りの方法により求めよ。

(1) (a) $P_1(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$ とおく.

$P_1(x_0) = y_0$, $P_1(x_1) = y_1$ より以下の連立方程式を得る.

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 2 - \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

従って $\underline{P_1(x) = x + 1}$ //

(b) 1次のラグランジュ補間の準備として $L_i^{(1)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{1} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$ $(i = 0, 1)$ を求める.

$$\begin{cases} L_0^{(1)} = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \\ L_1^{(1)} = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \end{cases}$$

これより

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} y_k L_k^{(1)}(x) = y_0 L_0^{(1)} + y_1 L_1^{(1)} =$$

(c) 1次のニュートン補間の準備として差分商 a_0, a_1 を求める.

$$a_0 = y_0 = 1 \quad (= P_0(x))$$

$$a_1 = \frac{y_1 - P_0(x_1)}{\omega_0(x_1)} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} =$$

これより

$$P_1(x) = \underbrace{P_0(x)}_{= a_0} + a_1 \omega_0(x) =$$

(2) (a) $P_2(x) = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$ とおく.

$P_2(x_0) = y_0$, $P_2(x_1) = y_1$, $P_2(x_2) = y_2$ より以下の連立方程式を得る.

$$\begin{cases} \beta_2 \cdot 0^2 + \beta_1 \cdot 0 + \beta_0 = 1 & \cdots ① \\ \beta_2 \cdot 1^2 + \beta_1 \cdot 1 + \beta_0 = 2 & \cdots ② \\ \beta_2 \cdot 4^2 + \beta_1 \cdot 4 + \beta_0 = 2 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より

$$\beta_0 = 1 \quad \cdots ①'$$

①', ②, ③ より

$$\begin{cases} \beta_2 + \beta_1 = 1 & \cdots ②' \\ 16\beta_2 + 4\beta_1 = 1 & \cdots ③' \end{cases}$$

③' − 4 × ②' より

$$12\beta_2 = -3 \qquad \therefore \beta_2 = -\frac{1}{4} \quad \cdots ③''$$

②', ③'' より

$$\beta_1 = \frac{5}{4}$$

従って

$$P_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + 1$$

(b) 2次のラグランジュ補間の準備として $L_i^{(2)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{2} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$ $(i = 0, 1, 2)$ を求める.

$$\begin{cases} L_0^{(2)} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \\ L_1^{(2)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \\ L_2^{(2)} = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \end{cases}$$

これより

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} y_k L_k^{(1)}(x) = y_0 L_0^{(2)} + y_1 L_1^{(2)} + y_2 L_2^{(2)}$$

$$=$$

(c) 2次のニュートン補間の準備として差分商 a_0, a_1, a_2 を求める必要があるが、a_0, a_1 は問1ですでに求めているため a_2 のみ求めればよい。

$$a_2 = \frac{y_2 - P_1(x_2)}{\omega_1(x_2)} = \frac{y_2 - (x_2 + 1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

これより

$$P_2(x) = P_1(x) + a_2 \omega_1(x)$$

$$=$$

数値解析 レポート No. 6

学籍番号

氏名

[〆切] 2020/11/05 19:00

[V. 連立一次方程式の数値解法]

V-B. 5×5 の行列 A および 5 次元の縦ベクトル $\boldsymbol{b}$ がそれぞれ以下のように与えられたとする。

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 14 & -9 & 3 & -5 \\ 14 & 52 & -15 & 2 & -32 \\ -9 & -15 & 36 & -5 & 16 \\ 3 & 2 & -5 & 47 & 49 \\ -5 & -32 & 16 & 49 & 79 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -15 \\ -100 \\ 106 \\ 329 \\ 463 \end{bmatrix}.$$

この時行列 A に対してガウス-ザイデル法を実行するプログラムを作成し連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^{\mathsf{T}}$ を有効数字 10 進 3 桁まで求め 4 桁を四捨五入して答えよ。作成したプログラムも提出すること。プログラミング言語は問わない。

初期ベクトル x は $[0,0,0,0,0]^T$ とした.

```
# Gauss-Seidel
for k in range(10000):
    for i in range(5):
        sum = 0
        for j in range(0,i):
            sum += A[i][j] * x[j]
        for j in range(i+1, n):
            sum += A[i][j] * x[j]
        x[i] = (-sum+b[i])/A[i][i]
```

$$x = \begin{bmatrix} \underbrace{-4.01 \times 10^{-14}} \\ 1.00 \\ 2.00 \\ 3.00 \\ 4.00 \end{bmatrix}$$

十分小さかったら正解.

数値解析 レポート No. 6　　学籍番号　　氏名

[〆切] 2020/11/05 19:00

[VI. 関数近似と補間 (1)]

VI-A. (1) 2 つのデータ点 $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$ を通る 1 次の補間多項式 $p_1(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$ を以下の 3 通りの方法により求めよ。(a) 連立方程式を解く方法、(b) ラグランジュ補間を用いる方法、(c) ニュートン補間を用いる方法。

(2) 問 1 の 2 点に $(x_2, y_2) = (4, 2)$ を加えた 3 点を通る 2 次の補間多項式 $p_2(x) = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$ を問 1 と同様の 3 通りの方法により求めよ。

(1) (a) $P_1(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$ とおく.

$P_1(x_0) = y_0$, $P_1(x_1) = y_1$ より以下の連立方程式を得る.

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 2 - \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

従って $\underline{P_1(x) = x + 1}$ //

(b) 1次のラグランジュ補間の準備として $L_i^{(1)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{1} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$ $(i = 0, 1)$ を求める.

$$\begin{cases} L_0^{(1)} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 1}{0 - 1} = -(x - 1) \\ L_1^{(1)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 0}{1 - 0} = x \end{cases}$$

これより

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} y_k L_k^{(1)}(x) = y_0 L_0^{(1)} + y_1 L_1^{(1)} = 1 \cdot \{-(x-1)\} + 2 \cdot x = \underline{x + 1}$$ //

(c) 1次のニュートン補間の準備として差分商 a_0, a_1 を求める.

$$a_0 = y_0 = 1 \quad (= P_0(x))$$

$$a_1 = \frac{y_1 - P_0(x_1)}{\omega_0(x_1)} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2 - 1}{1 - 0} = 1$$

これより

$$P_1(x) = \underbrace{P_0(x)}_{a_0} + a_1 \omega_0(x) = 1 + 1 \cdot (x - \underbrace{x_0}_{0}) = \underline{x + 1}$$ //

(2) (a) $P_2(x) = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$ とおく.

$P_2(x_0) = y_0$, $P_2(x_1) = y_1$, $P_2(x_2) = y_2$ より以下の連立方程式を得る.

$$\begin{cases} \beta_2 \cdot 0^2 + \beta_1 \cdot 0 + \beta_0 = 1 & \cdots ① \\ \beta_2 \cdot 1^2 + \beta_1 \cdot 1 + \beta_0 = 2 & \cdots ② \\ \beta_2 \cdot 4^2 + \beta_1 \cdot 4 + \beta_0 = 2 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より

$$\beta_0 = 1 \quad \cdots ①'$$

①', ②, ③ より

$$\begin{cases} \beta_2 + \beta_1 = 1 & \cdots ②' \\ 16\beta_2 + 4\beta_1 = 1 & \cdots ③' \end{cases}$$

③' $- 4 \times$ ②' より

$$12\beta_2 = -3 \qquad \therefore \beta_2 = -\frac{1}{4} \quad \cdots ③''$$

②', ③'' より

$$\beta_1 = \frac{5}{4}$$

従って

$$P_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + 1$$

(b) 2次のラグランジュ補間の準備として $L_i^{(2)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{2} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$ $(i = 0, 1, 2)$ を求める.

$$\begin{cases} L_0^{(2)} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x-1}{0-1} \frac{x-4}{0-4} = \frac{1}{4}(x-1)(x-4) \\ L_1^{(2)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x-0}{1-0} \frac{x-4}{1-4} = -\frac{1}{3}x(x-4) \\ L_2^{(2)} = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x-0}{4-0} \frac{x-1}{4-1} = \frac{1}{12}x(x-1) \end{cases}$$

これより

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} y_k L_k^{(1)}(x) = y_0 L_0^{(2)} + y_1 L_1^{(2)} + y_2 L_2^{(2)}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{4}(x-1)(x-4) + 2 \cdot \left\{-\frac{1}{3}x(x-4)\right\} + 2 \cdot \frac{1}{12}x(x-1)$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)x^2 + \left(-\frac{5}{4} + \frac{8}{3} - \frac{1}{6}\right)x + 1 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + 1$$

(c) 2次のニュートン補間の準備として差分商 a_0, a_1, a_2 を求める必要があるが、a_0, a_1 は問1ですでに求めているため a_2 のみ求めればよい。

$P_1(x) = x+1$

$$a_2 = \frac{y_2 - \boxed{P_1(x_2)}}{\boxed{\omega_1(x_2)}} = \frac{\overset{2}{y_2} - (\overset{4}{x_2}+1)}{(\underset{4}{x_2}-\underset{0}{x_0})(\underset{4}{x_2}-\underset{1}{x_1})} = \frac{2-(4+1)}{(4-0)(4-1)} = -\frac{1}{4}$$

$\omega_1(x) = (x-x_0)(x-x_1)$

これより

$$P_2(x) = P_1(x) + a_2\,\omega_1(x)$$

$$= x+1-\frac{1}{4}(x-\overset{0}{x_0})(x-\overset{1}{x_1})$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + 1 \quad //$$