数値解析 レポート No. 7

学籍番号 ____________________ 氏名 ____________________

[〆切] 2020/11/12 19:00

[VI. 関数近似と補間 (1)]

VI-B. $f(x) = e^x$, $x \in [-1, 1]$ とした時、点 $(x_0, f(x_0)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ に対してニュートン補間を行い補間多項式 $p_n(x)$ を差分商を用いて表す場合を考える。$x_0 = -1$, $x_n = 1$ とし $x_1, \ldots, x_{n-1}$ を区間 $[-1, 1]$ を n 等分するように取った時、 $n = 2, 4, 8, 16, 32$ の場合の $p_n(x)$ について相対誤差 $E(x)$ を区間 $[-1, 1]$ を 500 等分する点 $(x = -1.0, -0.996, -0.992, \ldots, -0.004, 0.0, 0.004, \ldots, 0.992, 0.996, 1.0)$ で求め、$E(x)$ が最大となる x とその時の $E(x)$ の値をそれぞれ有効数字 10 進 3 桁で 4 桁目を四捨五入して答えよ。作成したプログラムも提出すること。プログラミング言語は問わない。

$n = 2$ の時 $(x, E(x)) = (-0.656, 0.108)$
$n = 4$ の時 $(x, E(x)) = (-0.840, 1.96 \times 10^{-3})$
$n = 8$ の時 $(x, E(x)) = (-0.928, 1.22 \times 10^{-7})$
$n = 16$ の時 $(x, E(x)) = (-0.968, 6.72 \times 10^{-14})$
$n = 32$ の時 $(x, E(x)) = (-0.988, 2.55 \times 10^{-9})$

誤差が増加

補間多項式を高次にし過ぎると
丸め誤差の影響が拡大して旨くなくなる

$\boxed{\text{キーフレーズ}}$

高次の補間多項式の
誤差に注意

```
for n in [2,4,8,16,32]: # degree of polynomial
    x = np.array([2*i/n -1 for i in range(n+1)])
    y = np.exp(x)

    # Newton interpolation
    a = np.zeros(n+1)
    a[0] = y[0]
    for k in range(1,n+1):
        w = 1
        p = 0
        for j in range(k):
            p = p + a[j] * w
            w = w * (x[k] - x[j])
        a[k] = (y[k] - p)/w

    NI_error_max = [0.0, 0.0]
    taylor_error_max = [0.0, 0.0]
    for m in range(mesh+1):
        xi = 2*m/mesh  - 1
        p = a[n]
        for k in range(n-1, -1, -1):
            p = a[k] + p*(xi - x[k])
        relative_error_NI = abs(p - np.exp(xi))/np.exp(xi)
        if NI_error_max[1] < relative_error_NI:
            NI_error_max[0] = xi
            NI_error_max[1] = relative_error_NI
```

数値解析 レポート No. 7　　学籍番号 ＿＿＿＿＿＿　　氏名 ＿＿＿＿＿＿

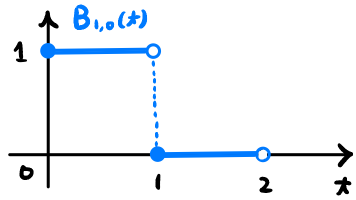
[〆切] 2020/11/12 19:00

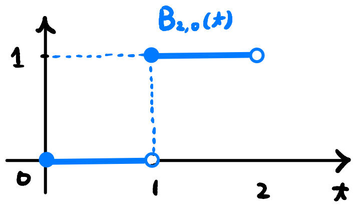
[VII. 関数近似と補間 (2)]

VII-A. (1) 3 つの制御点 $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$, $(x_2, y_2) = (4, 2)$ を持つ 1 次の B-スプライン曲線を区分毎に $y = f(x)$ の形で求めよ。ただしノットベクトルは $\boldsymbol{t} = [0, 0, 1, 2, 2]$ を用いよ。
(2) 問 1 と同じ制御点を用いて 2 次の B-スプライン曲線を区分毎に $y = f(x)$ の形で求めよ。ただしノットベクトルは $\boldsymbol{t} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$ を用いよ。

(1) $\mathbf{t} = [0,0,1,2,2] \quad (t \in [0,2])$

$$\begin{cases} B_{0,0}(t) = 0 \quad (\because t_0 = t_1) \\ B_{1,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [0,1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ B_{2,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [1,2] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \omega_{0,0}(t) = \qquad (\because t_0 = t_1) \\ \omega_{1,0}(t) = \dfrac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \\ \omega_{2,0}(t) = \dfrac{t - t_2}{t_3 - t_2} = \end{cases}$$

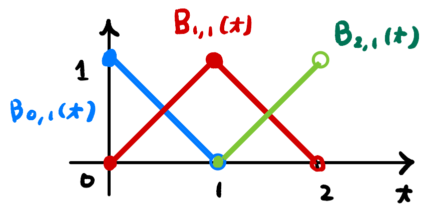




$$\begin{cases} B_{0,1}(t) = \underbrace{\omega_{0,0}(t)}_{0} \underbrace{B_{0,0}(t)}_{0} + \{1 - \underbrace{\omega_{1,0}(t)}_{t}\} B_{1,0}(t) = \begin{cases} & \text{if } t \in [0,1) \\ & \text{otherwise} \end{cases} \\ B_{1,1}(t) = \underbrace{\omega_{1,0}(t)}_{t} B_{1,0}(t) + \{1 - \underbrace{\omega_{2,0}(t)}_{t-1}\} B_{2,0}(t) = \begin{cases} & \text{if } t \in [0,1) \\ & \text{if } t \in [1,2] \end{cases} \\ B_{2,1}(t) = \underbrace{\omega_{2,0}(t)}_{t-1} B_{2,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [1,2] \\ & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases}$$

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{P}_i B_{i,1}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} B_{0,1}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} B_{1,1}(t) + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} B_{2,1}(t)$$



(i) $t \in [0,1)$ のとき

$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

$\therefore\ y = \qquad (x \in [0,1))$

(ii) $t \in [1,2]$ のとき

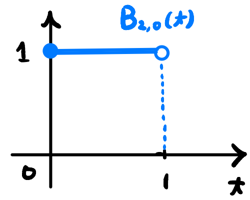
$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

$\therefore\ y = \qquad (x \in [1,4])$

$$y = \begin{cases} & (x \in [0,1)) \\ & (x \in [1,4]) \end{cases}$$ //

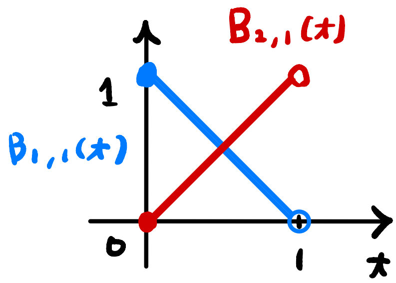
(2) $\quad \mathbb{t} = [0,0,0,1,1,1] \quad (t \in [0,1])$

$$\begin{cases} B_{0,0}(t) = 0 & (\because t_0 = t_1) \\ B_{1,0}(t) = 0 & (\because t_1 = t_2) \\ B_{2,0}(t) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_{0,0}(t) = & (\because t_0 = t_1) \\ \omega_{1,0}(t) = & (\because t_1 = t_2) \\ \omega_{2,0}(t) = \dfrac{t - t_2}{t_3 - t_2} = \end{cases}$$

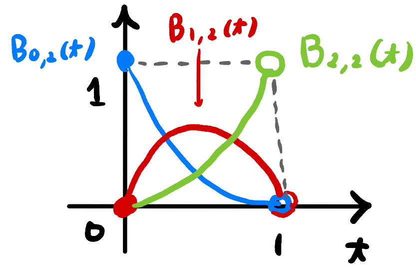


$$\begin{cases} B_{0,1}(t) = \omega_{0,0}(t)\underbrace{B_{0,0}(t)}_{0} + \{1 - \omega_{1,0}(t)\}\underbrace{B_{1,0}(t)}_{0} = \\ B_{1,1}(t) = \omega_{1,0}(t)\underbrace{B_{1,0}(t)}_{0} + \{1 - \underbrace{\omega_{2,0}(t)}_{*}\}B_{2,0}(t) = \\ B_{2,1}(t) = \underbrace{\omega_{2,0}(t)}_{*}B_{2,0}(t) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{0,1}(t) = & (\because t_0 = t_2) \\ \omega_{1,1}(t) = \dfrac{t - t_1}{t_3 - t_1} = \\ \omega_{2,1}(t) = \dfrac{t - t_2}{t_4 - t_2} = \end{cases}$$



$$\begin{cases} B_{0,2}(t) = \omega_{0,1}(t)\underbrace{B_{0,1}(t)}_{0} + \{1 - \underbrace{\omega_{1,1}(t)}_{*}\}B_{1,1}(t) = \\ B_{1,2}(t) = \underbrace{\omega_{1,1}(t)}_{*}B_{1,1}(t) + \{1 - \underbrace{\omega_{2,1}(t)}_{*}\}B_{2,1}(t) = \\ B_{2,2}(t) = \underbrace{\omega_{2,1}(t)}_{*}B_{2,1}(t) = \end{cases}$$



$$\mathbb{r}(t) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}_i B_{i,2}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} B_{0,2}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} B_{1,2}(t) + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} B_{2,2}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 2t^2 + 2t \\ -t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}$$

$x = 2t^2 + 2t =$

$t \in [0,1]$ のとき $x \in [0,4]$ であり両辺は 0 以上である。両辺の平方根をとって

$y = -t^2 + 2t + 1 =$

$=$

________________ //

数値解析 レポート No. 7

学籍番号 　　　　　　　　　 氏名

[〆切] 2020/11/12 19:00

[VI. 関数近似と補間 (1)]

VI-B. $f(x) = e^x$, $x \in [-1, 1]$ とした時、点 $(x_0, f(x_0)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ に対してニュートン補間を行い補間多項式 $p_n(x)$ を差分商を用いて表す場合を考える。$x_0 = -1$, $x_n = 1$ とし $x_1, \ldots, x_{n-1}$ を区間 $[-1, 1]$ を n 等分するように取った時、 $n = 2, 4, 8, 16, 32$ の場合の $p_n(x)$ について相対誤差 $E(x)$ を区間 $[-1, 1]$ を 500 等分する点 $(x = -1.0, -0.996, -0.992, \ldots, -0.004, 0.0, 0.004, \ldots, 0.992, 0.996, 1.0)$ で求め、$E(x)$ が最大となる x とその時の $E(x)$ の値をそれぞれ有効数字 10 進 3 桁で 4 桁目を四捨五入して答えよ。作成したプログラムも提出すること。プログラミング言語は問わない。

$n = 2$ の時 $(x, E(x)) = (-0.656, 0.108)$
$n = 4$ の時 $(x, E(x)) = (-0.840, 1.96 \times 10^{-3})$
$n = 8$ の時 $(x, E(x)) = (-0.928, 1.22 \times 10^{-7})$
$n = 16$ の時 $(x, E(x)) = (-0.968, 6.72 \times 10^{-14})$
$n = 32$ の時 $(x, E(x)) = (-0.988, 2.55 \times 10^{-9})$

誤差が増加

補間多項式を高次にし過ぎると
丸め誤差の影響が拡大して旨くなくなる

$\boxed{\text{キーフレーズ}}$

高次の補間多項式の
誤差に注意.

```
for n in [2,4,8,16,32]: # degree of polynomial
    x = np.array([2*i/n -1 for i in range(n+1)])
    y = np.exp(x)

    # Newton interpolation
    a = np.zeros(n+1)
    a[0] = y[0]
    for k in range(1,n+1):
        w = 1
        p = 0
        for j in range(k):
            p = p + a[j] * w
            w = w * (x[k] - x[j])
        a[k] = (y[k] - p)/w

    NI_error_max = [0.0, 0.0]
    taylor_error_max = [0.0, 0.0]
    for m in range(mesh+1):
        xi = 2*m/mesh  - 1
        p = a[n]
        for k in range(n-1, -1, -1):
            p = a[k] + p*(xi - x[k])
        relative_error_NI = abs(p - np.exp(xi))/np.exp(xi)
        if NI_error_max[1] < relative_error_NI:
            NI_error_max[0] = xi
            NI_error_max[1] = relative_error_NI
```

数値解析 レポート No. 7　　学籍番号　　　　氏名

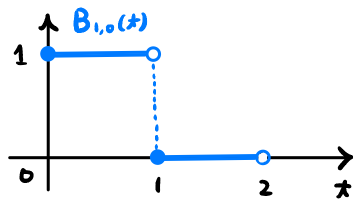
[〆切] 2020/11/12 19:00

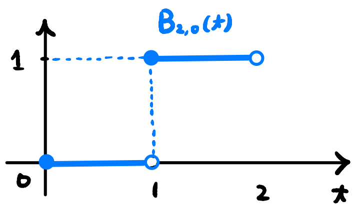
[VII. 関数近似と補間 (2)]

VII-A. (1) 3 つの制御点 $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$, $(x_2, y_2) = (4, 2)$ を持つ 1 次の B-スプライン曲線を区分毎に $y = f(x)$ の形で求めよ。ただしノットベクトルは $\boldsymbol{t} = [0, 0, 1, 2, 2]$ を用いよ。
(2) 問 1 と同じ制御点を用いて 2 次の B-スプライン曲線を区分毎に $y = f(x)$ の形で求めよ。ただしノットベクトルは $\boldsymbol{t} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$ を用いよ。

(1) $\boldsymbol{t} = [0, 0, 1, 2, 2]$ $\quad (t \in [0, 2])$

$$\begin{cases} B_{0,0}(t) = 0 \quad (\because t_0 = t_1) \\ B_{1,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [0,1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ B_{2,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [1,2] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_{0,0}(t) = 0 \quad (\because t_0 = t_1) \\ \omega_{1,0}(t) = \dfrac{t - t_1}{t_2 - t_1} = t \\ \omega_{2,0}(t) = \dfrac{t - t_2}{t_3 - t_2} = t - 1 \end{cases}$$

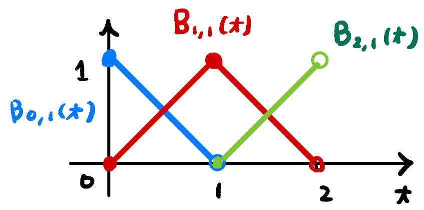




$$\begin{cases} B_{0,1}(t) = \underbrace{\omega_{0,0}(t)}_{0} \underbrace{B_{0,0}(t)}_{0} + \{1 - \underbrace{\omega_{1,0}(t)}_{t}\} B_{1,0}(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{if } t \in [0,1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ B_{1,1}(t) = \underbrace{\omega_{1,0}(t)}_{t} B_{1,0}(t) + \{1 - \underbrace{\omega_{2,0}(t)}_{t-1}\} B_{2,0}(t) = \begin{cases} t & \text{if } t \in [0,1) \\ 2 - t & \text{if } t \in [1,2] \end{cases} \\ B_{2,1}(t) = \underbrace{\omega_{2,0}(t)}_{t-1} B_{2,0}(t) = \begin{cases} t - 1 & \text{if } t \in [1,2] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \sum_{i=0}^{2} \boldsymbol{P}_i B_{i,1}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} B_{0,1}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} B_{1,1}(t) + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} B_{2,1}(t)$$



(i) $t \in [0, 1)$ のとき

$$\begin{cases} x = t \\ y = (1 - t) + 2t = t + 1 \end{cases}$$

$$\therefore y = x + 1 \quad (x \in [0, 1))$$

(ii) $t \in [1, 2]$ のとき

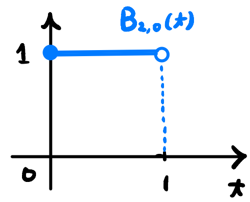
$$\begin{cases} x = (2 - t) + 4(t - 1) = 3t - 2 \\ y = 2(2 - t) + 2(t - 1) = 2 \end{cases}$$

$$\therefore y = 2 \quad (x \in [1, 4])$$

$$y = \begin{cases} x + 1 & (x \in [0, 1)) \\ 2 & (x \in [1, 4]) \end{cases}$$

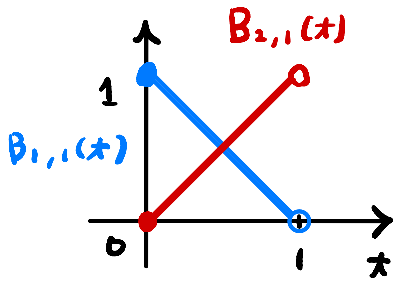
(2) $\mathbb{t} = [0,0,0,1,1,1] \quad (t \in [0,1])$

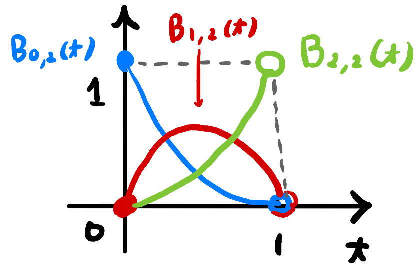
$$\begin{cases} B_{0,0}(t) = 0 & (\because t_0 = t_1) \\ B_{1,0}(t) = 0 & (\because t_1 = t_2) \\ B_{2,0}(t) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_{0,0}(t) = 0 & (\because t_0 = t_1) \\ \omega_{1,0}(t) = 0 & (\because t_1 = t_2) \\ \omega_{2,0}(t) = \dfrac{t - t_2}{t_3 - t_2} = t \end{cases}$$



$$\begin{cases} B_{0,1}(t) = \omega_{0,0}(t)\underbrace{B_{0,0}(t)}_{0} + \{1 - \omega_{1,0}(t)\}\underbrace{B_{1,0}(t)}_{0} = 0 \\ B_{1,1}(t) = \omega_{1,0}(t)\underbrace{B_{1,0}(t)}_{0} + \{1 - \underbrace{\omega_{2,0}(t)}_{t}\}B_{2,0}(t) = 1 - t \\ B_{2,1}(t) = \underbrace{\omega_{2,0}(t)}_{t} B_{2,0}(t) = t \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_{0,1}(t) = 0 & (\because t_0 = t_2) \\ \omega_{1,1}(t) = \dfrac{t - t_1}{t_3 - t_1} = t \\ \omega_{2,1}(t) = \dfrac{t - t_2}{t_4 - t_2} = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{0,2}(t) = \omega_{0,1}(t)\underbrace{B_{0,1}(t)}_{0} + \{1 - \underbrace{\omega_{1,1}(t)}_{t}\}B_{1,1}(t) = (1-t)^2 \\ B_{1,2}(t) = \underbrace{\omega_{1,1}(t)}_{t} B_{1,1}(t) + \{1 - \underbrace{\omega_{2,1}(t)}_{t}\}B_{2,1}(t) = 2t(1-t) \\ B_{2,2}(t) = \underbrace{\omega_{2,1}(t)}_{t} B_{2,1}(t) = t^2 \end{cases}$$





$$\mathbb{r}(t) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}_i B_{i,2}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} B_{0,2}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} B_{1,2}(t) + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} B_{2,2}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 2t^2 + 2t \\ -t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}$$

$$x = 2t^2 + 2t = 2\left(t^2 + t + \tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{2} = 2\left(t + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} \iff 2\left(t + \tfrac{1}{2}\right)^2 = x + \tfrac{1}{2}$$

$t \in [0,1]$ のとき $x \in [0,4]$ であり両辺は 0 以上である。両辺の平方根をとって

$$\therefore \sqrt{2}\left(t + \tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{x + \tfrac{1}{2}} \iff t = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{1}{2}\right)} - \tfrac{1}{2}$$

$$y = -t^2 + 2t + 1 = -\tfrac{1}{2}\underbrace{(2t^2 + 2t)}_{x} + 3t + 1 = -\tfrac{1}{2}x + 3t + 1$$

$$= -\tfrac{1}{2}x + 3\left\{\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{1}{2}\right)} - \tfrac{1}{2}\right\} + 1 \;/\!/$$