数値解析 レポート No. 11

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

[〆切] 2021/1/6 19:00

[X. 固有値問題と特異値分解 (2)]

X-B. (1) IX-B の表 1 にあるデータをそれぞれのステータスが平均が 0、分散が 1 となるように正規化するプログラムを作成し、正規化されたデータを元に IX-B 表 1 に相当する表を作成せよ。値は有効数字 4 桁で 5 桁目を四捨五入して求めよ。

(2) 問 1 で正規化したデータの 3 次元ベクトル空間の基底を IX-B および X-A で求めた 3 つの固有ベクトルに置き換え、新しい基底での座標を求めて IX-B 表 1 に相当する表を作成せよ。値は有効数字 4 桁で 5 桁目を四捨五入して求めよ。

※ 問 1, 2 において表は手書き作っても良いし、プログラムの出力をコピーペーストしたものでも良い。

(1) ポケモンの数を $n=8$ とおき、i番目 $(i=1,2,\cdots,n)$ のポケモンのHP,攻撃,防御のステータスを

それぞれ $\overset{HP}{h_i}$, $\overset{attack}{a_i}$, $\overset{defense}{d_i}$ とおと IX-B の解答から平均値 $\bar{h}, \bar{a}, \bar{d}$ および

標準偏差 s_h, s_a, s_d は

$$\begin{cases} \bar{h} = 185.3 \\ \bar{a} = 171.9 \\ \bar{d} = 149.1 \end{cases} \qquad \begin{cases} s_h = 77.76 \\ s_a = 85.77 \\ s_d = 45.85 \end{cases}$$

であり、これらの値を使い、以下の式を用いてデータを正規化する。

$$h'_i = \frac{h_i - \bar{h}}{s_h}, \quad a'_i = \frac{a_i - \bar{a}}{s_a}, \quad d'_i = \frac{d_i - \bar{d}}{s_d}$$

```
H = np.zeros(n)
A = np.zeros(n)
D = np.zeros(n)

for i in range(n):
    H[i] = (h[i] - h_ave)/s_h
    A[i] = (a[i] - a_ave)/s_a
    D[i] = (d[i] - d_ave)/s_d

print(H)
print(A)
print(D)
```

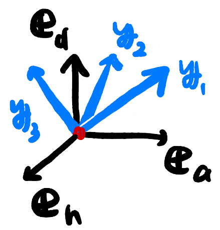
得られた値を表にして以下に示す。

ポケモン	HP	攻撃	防御
ピカチュウ	-0.9549	-0.6981	-1.159
ライチュウ	-0.3890	0.2463	0.04090
イーブイ	-0.5048	-0.7914	-0.7662
コイキング	-1.289	-1.666	-1.399
ギャラドス	0.3955	0.7593	0.8043
カビゴン	1.862	0.2113	0.4335
ミュウ	0.5112	0.4445	1.328
ミュウツー	0.3697	1.494	0.7171

(2) IX-B および X-A の解答で得られた相関行列の固有ベクトルを $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ とする。
これらは長さ1に正規化されているとする。

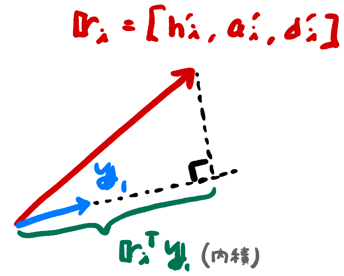
i 番目のポケモンの3つのステータス h_i, a_i, d_i を成分に持つベクトル $\mathbf{r}_i$ を考える。

このベクトルの基底は今 $\mathbf{e}_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり、



$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} h'_i \\ a'_i \\ d'_i \end{bmatrix} = h'_i \mathbf{e}_h + a'_i \mathbf{e}_a + d'_i \mathbf{e}_d \quad \cdots ①$$

と表される。この基底ベクトル $(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_d)$ の組を $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$ を使って書き換えた時の座標を f_i, g_i, h_i とおくと $\mathbf{r}_i$ は



$$\mathbf{r}_i = f_i \mathbf{y}_1 + g_i \mathbf{y}_2 + h_i \mathbf{y}_3 \quad \cdots ②$$

と表せる。②に左から $\mathbf{y}_1^T$ をかけると $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ は互いに直交するため

$$\mathbf{y}_1^T \mathbf{r}_i = \mathbf{y}_1^T (f_i \mathbf{y}_1 + g_i \mathbf{y}_2 + h_i \mathbf{y}_3) = f_i \underbrace{\mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1}_{=1} + g_i \underbrace{\mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_2}_{=0} + h_i \underbrace{\mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_3}_{=0} = f_i$$

$$\therefore \ f_i = \mathbf{y}_1^T \mathbf{r}_i \quad \cdots ③$$

同様に

$$g_i = \mathbf{y}_2^T \mathbf{r}_i \quad \cdots ④ \quad , \quad h_i = \mathbf{y}_3^T \mathbf{r}_i \quad \cdots ⑤$$

求めた③,④,⑤に①を代入

$$f_i = \mathbf{y}_1^T \begin{bmatrix} h'_i \\ a'_i \\ d'_i \end{bmatrix} = [y_{11}, y_{12}, y_{13}] \begin{bmatrix} h'_i \\ a'_i \\ d'_i \end{bmatrix} = y_{11} h'_i + y_{12} a'_i + y_{13} d'_i$$

$$g_i = \mathbf{y}_2^T \begin{bmatrix} h'_i \\ a'_i \\ d'_i \end{bmatrix} = [y_{21}, y_{22}, y_{23}] \begin{bmatrix} h'_i \\ a'_i \\ d'_i \end{bmatrix} = y_{21} h'_i + y_{22} a'_i + y_{23} d'_i$$

$$h_i = \mathbf{y}_3^T \begin{bmatrix} h'_i \\ a'_i \\ d'_i \end{bmatrix} = [y_{31}, y_{32}, y_{33}] \begin{bmatrix} h'_i \\ a'_i \\ d'_i \end{bmatrix} = y_{31} h'_i + y_{32} a'_i + y_{33} d'_i$$

これらの式をもとに $i = 1, 2, \cdots, 8$ について f_i, g_i, h_i を求めて表にすればよい。

● プログラム1

```
y_1 = np.array([0.54847651, 0.57878772, 0.60347186])
y_2 = np.array([-0.80399165, 0.5633186, 0.19044575])
y_3 = np.array([-0.22971926, -0.58964136, 0.77430752])

PC1 = np.zeros(n)
PC2 = np.zeros(n)
PC3 = np.zeros(n)

for i in range(n):
    PC1[i] = y_1[0] * H[i] + y_1[1] * A[i] + y_1[2] * D[i]
    PC2[i] = y_2[0] * H[i] + y_2[1] * A[i] + y_2[2] * D[i]
    PC3[i] = y_3[0] * H[i] + y_3[1] * A[i] + y_3[2] * D[i]

print(PC1)
print(PC2)
print(PC3)
```

[別解] プログラム2

```
params = 3
y_1 = np.array([0.54847651, 0.57878772, 0.60347186])
y_2 = np.array([-0.80399165, 0.5633186, 0.19044575])
y_3 = np.array([-0.22971926, -0.58964136, 0.77430752])

r = np.zeros(n * params)
r = r.reshape(n, params)

for i in range(n):
    r[i][0] = H[i]
    r[i][1] = A[i]
    r[i][2] = D[i]

PC1 = np.zeros(n)
PC2 = np.zeros(n)
PC3 = np.zeros(n)

for i in range(n):
    for j in range(params):
        PC1[i] += y_1[j] * r[i][j]
        PC2[i] += y_2[j] * r[i][j]
        PC3[i] += y_3[j] * r[i][j]

print(PC1)
print(PC2)
print(PC3)
```

numpyの機能を使う場合

```
for i in range(n):
    PC1[i] = np.dot(y_1, r[i])
    PC2[i] = np.dot(y_2, r[i])
    PC3[i] = np.dot(y_3, r[i])
```

でもOK.

(dotはベクトルの内積を計算する関数)

ポケモン	PC1	PC2	PC3
ピカチュウ	-1.627	0.1538	-0.2663
ライチュウ	-0.04613	0.4593	-0.02420
イーブイ	-1.197	-0.1859	-0.01064
コイキング	-2.515	-0.1682	0.1954
ギャラドス	1.142	0.2630	0.08422
カビゴン	1.405	-1.295	-0.2166
ミュウ	1.339	0.09228	0.6486
ミュウツー	1.500	0.6808	-0.4106

数値解析 レポート No. 11　　　学籍番号　　　　氏名

[〆切] 2021/1/6 19:00

[XI. 数値積分法]

XI-A. 定積分 $\int_0^1 (e^x+1)dx$ を考える。

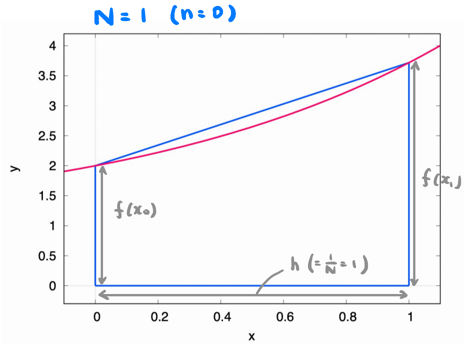
(1) 上記の定積分を計算しネイピア数 e を用いて表せ。

(2) 上記の定積分を複合台形則を用いて数値積分する問題を考える。ニュートン・コーツ則で台形近似を行う区間の数を $N=2^n$ (積分点の数は $N+1=2^n+1$) とした時 の $n \geq 0$ を 1 ずつ増やして積分値を求めるプログラムを作成し、数値積分の値の相対誤差が 10^{-8} を下回る最も小さい n を求めよ。作成したプログラムも提出すること。プログラミング言語は問わない。

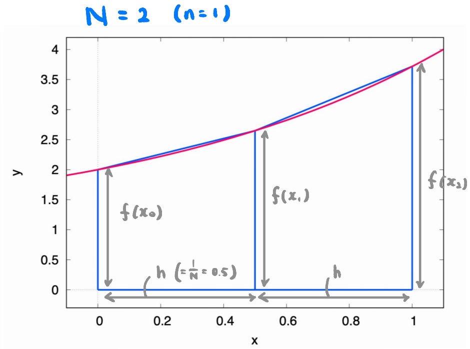
(1) $\int_0^1 (e^x+1)\,dx = \left[e^x + x\right]_0^1 = (e+1) - e^0 = \underline{e}$

(2) 複合台形則を $I_N = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i f(x_i)$ と表した時の重み α_i を求める.

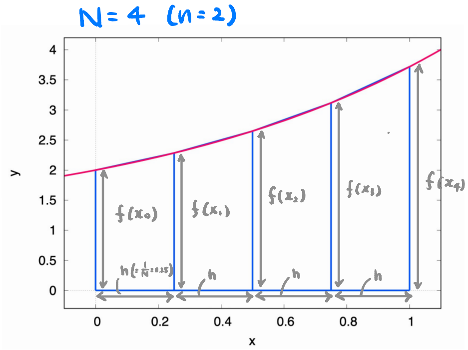
N=1 (n=0)



N=2 (n=1)



N=4 (n=2)



$$I_1 = h\left\{\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1)\right\}$$

α_0/h　α_1/h

$$I_2 = \frac{h}{2}\{f(x_0)+f(x_1)\} + \frac{h}{2}\{f(x_1)+f(x_2)\}$$
$$= h\left\{\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\right\}$$

α_0/h　$\alpha_1/h=1$　α_2/h

$$I_3 = \frac{h}{2}\{f(x_0)+f(x_1)\} + \frac{h}{2}\{f(x_1)+f(x_2)\} + \frac{h}{2}\{f(x_2)+f(x_3)\} + \frac{h}{2}\{f(x_3)+f(x_4)\}$$
$$= h\left\{\frac{1}{2}f(x_0) + \underbrace{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}_{\alpha_1/h=\alpha_2/h=\alpha_3/h=1} + \frac{1}{2}f(x_4)\right\}$$

α_0/h　α_4/h

```
import numpy as np

def f(x):
    return np.exp(x) + 1

ans = np.e
n_max = 21
a = 0.0
b = 1.0
width = b - a

for n in range(0, n_max+1):
    N = 2**n
    h = width/N
    I = 0.5 * f(a)
    for i in range(1, N):
        I += f(a + i * h)
    I += 0.5 * f(b)
    I *= h
    if abs(I - ans)/ans < 10**-8:
        print(n, N, I, abs(I - ans)/ans)
        break
```

$f(x) = e^x + 1$ とおく.

α_0/h

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{N-1} = 1$

α_N/h

相対誤差

キーワード

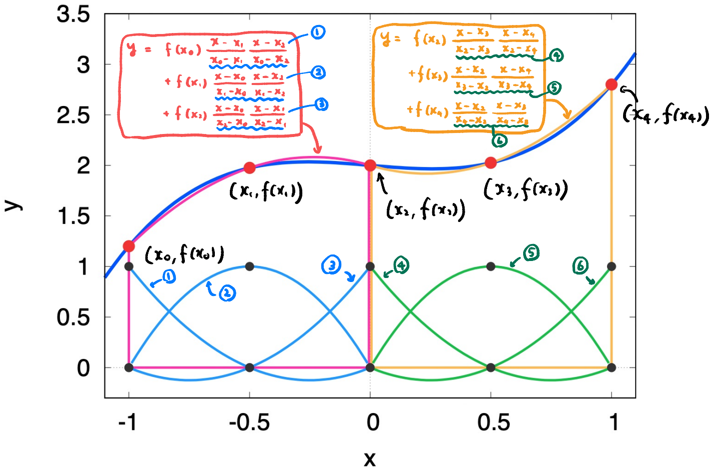
複合台形則

◎ シンプソン則の重み α_i の導出

2020 12/17

ラグランジュ補間で3点の積分点をつなぐ2次多項式 $P_2(x)$ を求める.

$$L_i^{(2)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{2} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \quad (i=0,1,2)$$



とおくと $P_2(x)$ は

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\, L_k^{(2)}(x)$$

と表せる. $P_2(x)$ を小区間 $x_0 \leq x \leq x_2$ の範囲で積分すると

$$I(P_2) = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\, L_k^{(2)}(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{2} f(x_k) \left\{ \int_{x_0}^{x_2} L_k^{(2)}(x)\,dx \right\}$$

- **$k=0$ のとき**

$$\int_{x_0}^{x_2} L_0^{(2)}(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{x-x_1}{\underbrace{x_0-x_1}_{-h}} \, \frac{x-x_2}{\underbrace{x_0-x_2}_{-2h}}\,dx = \frac{1}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[\frac{1}{2}(x-x_1)(x-x_2)^2\right]_{x_0}^{x_2} - \frac{1}{4h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_2)^2\,dx$$

$$= -\frac{1}{4h^2}\underbrace{(x_0-x_1)}_{-h}\underbrace{(x_0-x_2)^2}_{(-2h)^2} - \frac{1}{4h^2}\left[\frac{1}{3}(x-x_2)^3\right]_{x_0}^{x_2}$$

$$= h + \frac{1}{4h^2}\times\frac{1}{3}(-2h)^3 = h - \frac{2}{3}h = \boxed{\frac{h}{3}}$$

- **$k=1$ のとき**

$$\int_{x_0}^{x_2} L_1^{(2)}(x)\,dx = \boxed{\frac{4}{3}h}$$

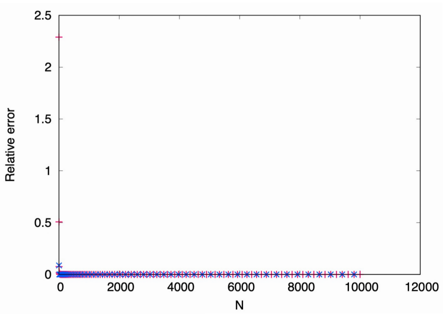
- **$k=2$ のとき**

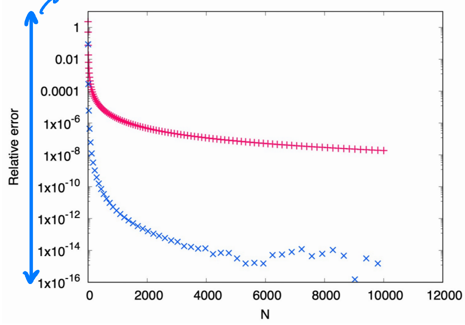
$$\int_{x_0}^{x_2} L_2^{(2)}(x)\,dx = \boxed{\frac{h}{3}}$$

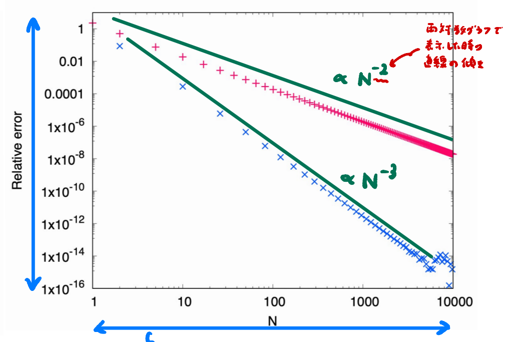
◎ 複合台形則とシンプソン則の比較

2020
12/17

y軸を対数でとる.







x軸も対数でとる.

◎複合台形則の誤差

2020
12/17