数値解析 レポート No. 13

学籍番号

氏名

[〆切] 2021/1/20 19:00

[XII. 常微分方程式の数値解法 (1)]

XII-B. 1 階の常微分方程式 $\frac{dy}{dt} = y$ を 4 次のルンゲ・クッタ法を用いて数値的に解く場合を考える。初期値を $(t_0, y_0) = (0, 1)$、時間の刻み幅を $h = 0.01$ とした時、 $y(10)$ の数値解を求めるプログラムを作成し解答せよ。また $y(10)$ の真値である 22026.4657948067 と比べることにより相対誤差を求めよ。数値解は有効数字 10 桁で 11 桁目を四捨五入し、相対誤差は有効数字 3 桁で 4 桁目を四捨五入して答えよ。作成したプログラムも提出すること。プログラミング言語は問わない。

```python
import numpy as np

h = 0.01
n = 1000

t = 0
y = 1
for i in range(n):
    v1 = y * h
    v2 = (y + v1/2) * h
    v3 = (y + v2/2) * h
    v4 = (y + v3) * h
    y = y + (1/6)*(v1 + 2*(v2 + v3) + v4)
    t += h

print(t, y)
print(abs(y-np.exp(10))/np.exp(10))
```

$$\tilde{y}(10) = 22026.46578$$

$$\frac{|\tilde{y}(10) - y(10)|}{|y(10)|} = 8.26 \times 10^{-10}$$

$\boxed{\text{キーワード}}$

ルンゲ・クッタ法

```
9.999999999999831 22026.465776603676
8.264168142289631e-10
```

数値解析 レポート No. 13

学籍番号　　　　　　　　氏名

[〆切] 2021/1/20 19:00

[XIII. 常微分方程式の数値解法 (2)]

XIII-A. 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = f(t,y)$ に対する 2 次のルンゲ・クッタ法が 2 次の数値スキームであることを示せ。

2次のルンゲ・クッタ法の定義より

$$\begin{cases} u_1 = f(t,y)\Delta t \\ u_2 = f(t+\Delta t, y+u_1)\Delta t \\ \tilde{y}(t+\Delta t) = y(t) + \frac{1}{2}(u_1+u_2) \end{cases}$$

が成り立つ。2変数関数のテイラー展開より

$$f(t+\varepsilon, y+\delta) = f + f_t\varepsilon + f_y\delta + \frac{1}{2}\{f_{tt}\varepsilon^2 + f_{ty}\varepsilon\delta + f_{yy}\delta^2\} + \cdots \quad \cdots ①$$

となる。ここで

$$f_t = \frac{\partial f(t,y)}{\partial t}, \quad f_y = \frac{\partial f(t,y)}{\partial y},$$

$$f_{tt} = \frac{\partial^2 f(t,y)}{\partial t^2}, \quad f_{ty} = \frac{\partial^2 f(t,y)}{\partial t \partial y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f(t,y)}{\partial y^2}$$

である。① 式において $\varepsilon = \Delta t$, $\delta = u_1$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t+\Delta t, y+u_1) &= f + f_t\Delta t + f_y u_1 + \frac{1}{2}\{f_{tt}\Delta t^2 + f_{ty}\Delta t\, u_1 + f_{yy}u_1^2\} + \cdots \\ &= f + \{f_t + f_y f\}\Delta t + \frac{1}{2}\{f_{tt} + f_{ty}f + f_{yy}f^2\}\Delta t^2 + \cdots \end{aligned}$$

となるため

$$\begin{aligned} u_2 &= f(t+\Delta t, y+u_1)\Delta t \\ &= f\Delta t + \{f_t + f_y f\}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\{f_{tt} + f_{ty}f + f_{yy}f^2\}\Delta t^3 + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t+\Delta t) &= y(t) + \frac{1}{2}(u_1+u_2) \\ &= y + \frac{1}{2}f\Delta t + \frac{1}{2}f(t+\Delta t, y+u_1)\Delta t \\ &= y + f\Delta t + \frac{1}{2}\{f_t + f_y f\}\Delta t^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\{f_{tt} + f_{ty}f + f_{yy}f^2\}\Delta t^3 + \cdots \quad \cdots ② \end{aligned}$$

また、$y(t+\Delta t)$ に関するテイラー展開より

$$\begin{aligned} y(t+\Delta t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{d^k y(t)}{dt^k}\Delta t^k \\ &= y(t) + \frac{dy(t)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3y}{dt^3}\Delta t^3 + \cdots \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t,y) \quad \text{(微分方程式より)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= \frac{df(t,y)}{dt} \quad \text{(微分方程式より)} \\ &= f_t(t,y) + f_y(t,y)\frac{dy}{dt} \quad \text{(連鎖率より)} \\ &= f_t(t,y) + f_y(t,y)f(t,y) \quad \text{(微分方程式より)} \\ &= f_t + f_y f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3y(t)}{dt^3} &= \frac{d}{dt}\{f_t(t,y) + f_y(t,y)f(t,y)\} \\ &= f_{tt} + f_{ty}f + \{f_{yt} + f_{yy}f\}f + f_y\{f_t + f_y f\} \\ &= f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 f \end{aligned}$$

であるから ③ は

$$\begin{aligned} y(t+\Delta t) &= y(t) + f\Delta t + \frac{1}{2}\{f_t + f_y f\}\Delta t^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\{f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 f\}\Delta t^3 \\ &\quad + \cdots \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

② と ④ を比較すると

確かに $\Delta t^0, \Delta t^1, \Delta t^2$ の係数が一致していることが確認でき、2次のルンゲ・クッタ法が2次の数値スキームであることが示された」

キーワード

連鎖律