数値解析 レポート No. 14

学籍番号 氏名

[〆切] 2021/1/27 19:00

[XIII. 常微分方程式の数値解法 (2)]

XIII-B. (1) 単振動を表す運動方程式 $m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$ を考える。$x(t)$ の一般解を求めよ。また速度 $v(t) = \frac{dx}{dt}$ を新たに定義し $v(t)$ の一般解を求めよ。

(2) 以下の問題では質量およびバネ定数の値を $m = 1,\ k = 1$ とおく。問 1 で得られた $x(t)$ および $v(t)$ について $t = 0$ で $x(0) = 1,\ v(0) = 0$ とした時の解を求めよ。

(3) 問 1 で示した 2 階の常微分方程式を 2 本の 1 階微分方程式に書き換え、蛙飛び法を用いて数値的に解く場合を考える。時間の刻み幅 $\Delta t = 0.01$、 初期値を $(x_0, v_0) = (1, -\sin\left(-\frac{\Delta t}{2}\right))$ (x_0 は $x(0)$ に、 v_0 は $v\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)$ に対応する)、質量およびバネ定数の値を $m = 1,\ k = 1$ と設定した時、蛙飛び法を用いて時間発展を計算するプログラムを作成し時刻 $t = 10$ での位置と速度の値を相対誤差とともに数値で求めよ。数値は有効数字 3 桁で 4 桁目を四捨五入して答えよ。作成したプログラムも提出すること。プログラミング言語は問わない。

(1) 運動方程式より

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) \quad \cdots ①$$

①の解を仮に

$$x(t) = \cos(\alpha t+\theta)$$

とおいて①に代入すると

$$(\text{左辺}) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\alpha^2\cos(\alpha t+\theta)$$

$$(\text{右辺}) = -\frac{k}{m}\cos(\alpha t+\theta)$$

両辺を比較して

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$

となる。従って

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\theta\right) \\ x_2(t) = \cos\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t+\theta\right) \end{cases}$$

がどちらも①の解であり、x_1 と x_2 の線形結合

$$x(t) = A\,x_1(t) + B\,x_2(t)$$

もまた①の解となる。従って一般解は

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\theta\right) + B\cos\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t+\theta\right)$$

となる。また新しい変数 $v(t)$ を

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

と定義すると一般解は

$$v(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\theta\right) - B\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t+\theta\right)$$

(2) 問1で求めた一般解に $t=0,\ k=1,\ m=1$ を代入すると

$$\begin{cases} x(0) = (A+B)\cos\theta \quad \cdots ② \\ v(0) = -(A+B)\sin\theta \end{cases}$$

となる。$v(0)=0$ より $A+B=0$ または $\sin\theta=0$ であるが、$A+B=0$ だと $x(0)=1$ の条件を満たさないため $\sin\theta=0$ が成り立つ。

従って $\theta=n\pi$ (nは整数) であり ②の右辺は

$$(②\text{右辺}) = (A+B)\cos(n\pi) = (-1)^n(A+B)$$

となる。ここで $x(0)=1$ より

$$(-1)^n(A+B) = 1$$

$$\therefore\ A+B = (-1)^n$$

$$\Leftrightarrow\ B = (-1)^n - A$$

θ および B を問2で求めた一般解に代入して

$$x(t) = A\cos(t+n\pi) + \{(-1)^n - A\}\cos(-t+n\pi)$$

ここで

$$\begin{cases} \cos(t+n\pi) = (-1)^n\cos(t) \\ \cos(-t+n\pi) = (-1)^n\cos(-t) = (-1)^n\cos(t) \end{cases}$$

より

$$x(t) = \cancel{(-1)^n A}\cos(t) + \underbrace{(-1)^{2n}}_{1}\cos(t) - \cancel{(-1)^n A}\cos(t)$$

$$= \cos(t)$$

同様に

$$v(t) = -\sin(t)$$

(3) 解くべき2本の1階常微分方程式は

$$
\begin{cases}
\dfrac{du(t)}{dt} = -x(t) \\[2ex]
\dfrac{dx(t)}{dt} = u(t)
\end{cases}
$$

である。蛙飛び法により数値解を求めるには与えられた初期値 $(x_0 = x(0),\ u_0 = u(-\frac{\Delta t}{2}))$ からスタートして以下の漸化式

$$
\begin{cases}
u_{i+1} = u_i - x_i \Delta t \\
x_{i+1} = x_i + u_{i+1} \Delta t
\end{cases}
$$

を繰り返し用いて $\tilde{x}(10) = x_{\frac{10}{\Delta t}}$, $\tilde{u}(10) = u_{\frac{10}{\Delta t}} - x_{\frac{10}{\Delta t}} \frac{\Delta t}{2}$ を求めればよい。また相対誤差は $\left(\dfrac{|\tilde{x}(10) - x(10)|}{|x(10)|},\ \dfrac{|\tilde{u}(10) - u(10)|}{|u(10)|} \right)$ と表される。

```python
import numpy as np

h = 0.01
n = 1000

t = 0
x = 1
v = np.sin(h/2.)
ans_x = np.cos(10)
ans_v = - np.sin(10)

for i in range(n):
    v = v - x * h
    x = x + v * h
    t += h

print(t, x, abs(x-ans_x)/abs(ans_x), v, abs(v - x * h /2.  - ans_v)/abs(ans_v))
```

$$
\tilde{x}(10) = -0.839,\ \frac{|\tilde{x}(10) - x(10)|}{|x(10)|} = 2.70 \times 10^{-5}
$$
$$
\tilde{v}(10) = 0.540,\ \frac{|\tilde{v}(10) - v(10)|}{|v(10)|} = 5.18 \times 10^{-5}
$$

キーワード

蛙飛び法.

```
9.999999999999831 -0.839048849212152 2.702971500588655e-05 0.5398540446148364 5.1795731752700956e-05
```

数値解析 レポート No. 14

学籍番号 氏名

[〆切] 2021/1/27 19:00

[XIV. 偏微分方程式の数値解法]

XIV-A. 一辺を他の辺よりも高い温度に保った正方形の鉄板の定常状態における温度分布 $T(x,y)$ を数値的に求める問題を考える。解くべき方程式は 2 次元のラプラス方程式 $\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0$ であり鉄板の領域は $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ であるとする。境界条件は $y = 0,\ 0 \le x \le 1$ の辺を $T(x,y) = 1$、その他の辺は $T(x,y) = 0$ とする。x, y 方向に離散化し $x_i = \frac{i}{N+1}$, $y_i = \frac{i}{N+1}$ $(0 \le i \le N+1)$ という格子点を使ってラプラス方程式を差分を用いた式に書き換え、ガウス・ザイデル法を用いて格子点での温度分布を求めるプログラムを作成せよ。$N = 10$ とし、ガウス・ザイデル法は 200 回反復すること。また温度分布は $(N+2)^2$ の格子点での $T(x,y)$ の値を有効数字 3 桁で 4 桁目以降を切り捨てて計算し、格子点同士の位置と対応するように 2 次元的に出力せよ。作成したプログラムも提出すること。プログラミング言語は問わない。

```python
import numpy as np

N = 10
T = np.zeros((N+2)**2)
T = T.reshape(N+2, N+2) # T[X, Y]
T[:, 0] = 1

for k in range(200):
    for i in range(1, N+1):
        for j in range(1, N+1):
            T[i, j] = 0.25 * (T[i-1, j] + T[i+1, j] + T[i, j-1] + T[i, j+1])

for i in range(N+2):
    for j in range(N+2):
        print("{:.2f} ".format(T[j, N+1 - i]), end="")
    print()
```

○ 各格子点で残差 r_{tmp} を計算し残差の最大値 r_{max} が $r_{max} \le 10^{-8}$ となる k を探すコード.

```python
for k in range(200):
    r_max = 0
    for i in range(1, N+1):
        for j in range(1, N+1):
            T_tmp = T[i-1, j] + T[i+1, j] + T[i, j-1] + T[i, j+1]
            r_tmp = abs(T[i,j] - 0.25 * T_tmp)
            T[i, j] = 0.25 * T_tmp
            if r_max < r_tmp and r_tmp > 0:
                r_max = r_tmp
    if r_max <= 10**-8:
        print("k", k, "r_max", r_max)
        break
```

出力: k 180 r_max 9.457142680080466e-09

出力:

```
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
0.00 0.01 0.02 0.02 0.03 0.03 0.03 0.03 0.02 0.02 0.01 0.00
0.00 0.02 0.04 0.05 0.06 0.07 0.07 0.06 0.05 0.04 0.02 0.00
0.00 0.03 0.06 0.08 0.10 0.11 0.11 0.10 0.08 0.06 0.03 0.00
0.00 0.05 0.09 0.12 0.14 0.15 0.15 0.14 0.12 0.09 0.05 0.00
0.00 0.06 0.12 0.17 0.20 0.21 0.21 0.20 0.17 0.12 0.06 0.00
0.00 0.09 0.17 0.23 0.27 0.29 0.29 0.27 0.23 0.17 0.09 0.00
0.00 0.13 0.23 0.31 0.36 0.38 0.38 0.36 0.31 0.23 0.13 0.00
0.00 0.18 0.32 0.42 0.48 0.50 0.50 0.48 0.42 0.32 0.18 0.00
0.00 0.28 0.46 0.57 0.62 0.65 0.65 0.62 0.57 0.46 0.28 0.00
0.00 0.49 0.68 0.76 0.80 0.82 0.82 0.80 0.76 0.68 0.49 0.00
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
```

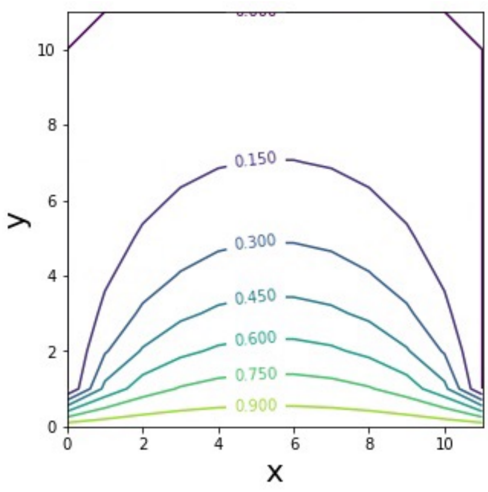
キーワード

ラプラス方程式

● matplotlibを使って等高線の図を作成するPythonコード

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

fig = plt.figure(figsize=(5, 5))
ax = fig.add_subplot(111)
cntr = ax.contour(T.transpose())
ax.clabel(cntr)
ax.set_aspect('equal')
ax.set_xlabel('x', fontsize=20)
ax.set_ylabel('y', fontsize=20)
plt.show()
```



テイラー展開の2つの形式について

三重大学 総合情報処理センター
白井 伸宙
Jan. 20, 2021.

テイラー展開には以下の2種類の形式が存在する。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)\mid_{x=a}\ (x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=a}(x-a)^n \tag{1}$$

$$f(t+\mathit{\Delta} t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)\ (\Delta t)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^n f(t)}{dt^n}\ (\Delta t)^n. \tag{2}$$

ここではこの2つの形式が互いに変換可能で等価な式であることを示す。まず式1の変数を $x\to t+\mathit{\Delta} t$ と変換する。ここで $\mathit{\Delta} t$ が変数で t が定数とする。この時全微分は $dx=d(t+\mathit{\Delta} t)=d(\mathit{\Delta} t)$ となり x 微分は $\dfrac{d}{dx}\to\dfrac{d}{d(\mathit{\Delta} t)}$ と書き換えられるため式1は

$$f(t+\mathit{\Delta} t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n f(t+\mathit{\Delta} t)}{d(\mathit{\Delta} t)^n}\right|_{\mathit{\Delta} t=a-t}(t+\mathit{\Delta} t-a)^n,$$

となる。また式1における点 $x=a$ は自由に選ぶ事ができたため a として定数 t を取ると

$$\begin{aligned}f(t+\mathit{\Delta} t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n f(t+\mathit{\Delta} t)}{d(\mathit{\Delta} t)^n}\right|_{\mathit{\Delta} t=t-t}(t+\mathit{\Delta} t-t)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n f(t+\mathit{\Delta} t)}{d(\mathit{\Delta} t)^n}\right|_{\mathit{\Delta} t=0}(\mathit{\Delta} t)^n,\end{aligned}$$

と変形できる。今度は $\mathit{\Delta} t\to s-t$ と変換すると t が定数であるため $d(\mathit{\Delta} t)=d(s-t)=ds$ となり $\frac{d}{d(\mathit{\Delta} t)}=\frac{d}{ds}$ となる。これより $\left.\dfrac{d^n f(t+\mathit{\Delta} t)}{d(\mathit{\Delta} t)^n}\right|_{\mathit{\Delta} t=0}$ の部分は

$$\left.\frac{d^n f(t+\mathit{\Delta} t)}{d(\mathit{\Delta} t)^n}\right|_{\mathit{\Delta} t=0}=\left.\frac{d^n f(s)}{ds^n}\right|_{s=t}=f^{(n)}(t)=\frac{d^n f(t)}{dt^n}, \tag{3}$$

と書き換えられ式2が得られる[1]。従って2つの形式のテイラー展開の式は互いに変換可能であり等価な式であることが示された。

[1]式3の最右辺において定数として扱っていた t を変数と取り直している事に注意。