



Equations des ondes

TOURE Wagane, ARRAOU Chloe,
RANDRIAMAZOTO Fomeisoa,
N'SIEMO Norayda
Licence de Mathématiques
Sorbonne Université

2 mai 2019

Table des matières

1	Présentation du Sujet	2
1.1	Équation de D'Alembert	2
1.2	Équation de Kirchhoff	3
2	Simulation et études de problèmes	5
2.1	Transfert d'énergie	8
3	Analogie à un problème réel :	
	Chute du pont de Tacoma	9
4	Annexe : Codes Utilisés	12
4.1	Conditions initiales	16
4.2	code de (1)	16
4.3	solution de (5)	16
4.4	solution de (3)	17

1 Présentation du Sujet

Il existe plusieurs type d'ondes : les ondes mécaniques, électromagnétiques et gravitationnelles.

Ici il est question d'ondes mécaniques qui sont un phénomène de propagation d'une perturbation dans un milieu matériel sans transport de matière.

En 1746, Jean Le Rond D'Alembert publie un traité devenu incontournable qui fut cité dans le livre " 17 equations that changed the world " [1] du mathématicien britannique Ian Stewart en 2012. L'équation qui en découle est surtout connu comme la première équation aux dérivées partielles dans le monde scientifique.

La propagation d'onde est un phénomène très général dont nous allons par la suite en étudier les caractéristiques. Par ailleurs, les mécanismes de transfert d'énergie, sont essentiels à la compréhension de certaines propriétés physiques, c'est un phénomène transversal qui expose la tendance des systèmes à exciter spontanément certaines oscillations, le caractère spontané rend ce système contre-intuitif. Nous allons par la suite mettre en évidence ce phénomène sur un modèle de corde vibrante.

1.1 Équation de D'Alembert

Notons deux types d'instruments de musique, ceux à son entretenu et ceux à son limité dans le temps. La deuxième catégorie comprend les instruments à corde (guitare), les instruments frappés (piano) ainsi que les instruments à percussion. Ce type d'instrument nous présente une réponse impulsionnelle du signal. L'équation d'onde de Jean Le Rond D'alembert spécifiée par la suite par Kirchhoff, nous pousse à approfondir l'étude de la propagation d'onde dans un milieu matériel. La mise en équation par les cordes vibrantes est définie tel que l'on ai au repos, une corde fine ,munie d'une masse linéique placé à l'horizontal ($y = 0$). Lors de la perturbation de cette position d'équilibre, il y a une élongation perpendiculaire à la direction de propagation ; ce phénomène communément appelé mouvement de transverse est alors régis par une équation de type propagation. Cette équation a été établit d'après l'étude des vibrations d'une corde de violon, en effet au XVIIIeme siècle, Jean Le Rond D'alembert dispose de notions nécessaires et suffisante pour affirmer que les vibrations de la corde dépendent à la fois de l'espace et du temps selon l'équation suivante.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{pour } t \geq 0, x \in (0, \pi) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

où $u = u(t, x)$ représente le déplacement de la corde au temps t et au point x par rapport à sa position d'équilibre $u = 0$.

La propagation d'onde est un phénomène très général dont nous allons par la suite en étudier les caractéristiques.

Afin de bien comprendre le sens de propagation d'une onde progressive, penchons-nous sur la propagation le long d'une corde infinie.

La déformation de la corde est constante, elle reste la même le long du déplacement. Cette déformation se déplace pendant un intervalle de temps $\delta(t)$, d'une longueur $\delta(x)$, proportionnelle à $\delta(t)$

$\delta(x) = c * \delta(t)$ Avec c la vitesse de propagation d'une onde dans un milieu donné.

$u(x + c\delta(t), t + \delta(t)) = u(x, t)$ Cette équation représente le déplacement de la corde

En posant $v = t - \frac{x}{c}$, on a donc ; $u(x, t) = f(v) = f(t - \frac{x}{c})$

Avec ce changement de variable on observe que la fonction d'onde $u(x, t) = f(v(x, t))$ est alors solution de l'équation de D'Alembert (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(v(x, t))}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} f''(v) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

L'équation de D'Alembert est linéaire et ne fait intervenir que des dérivées partielles d'ordre 2. Notons que si $u(x, t)$ est solution de l'équation alors $\phi(x, t) = \psi(-x, t)$ et $\xi(x, t) = \psi(x, -t)$ sont aussi des solutions.

1.2 Équation de Kirchhoff

Au XIXème siècle Gustav Robert Kirchhoff a établi un modèle unidimensionnel de corde idéalement souple en incluant une non-linéarité due à la variation de tension. Ce modèle a été repris dans le travail de Carrier à partir duquel beaucoup d'autres modèles ont été établis dans la seconde moitié du XXème siècle. L'équation de Kirchhoff modélise les vibrations transverses de la corde et est défini par

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(1 + \int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{pour } t \geq 0, x \in (0, \pi) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Une des propriétés fondamentales de cet équation étant la conservation de l'énergie au cours du temps.

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\right)^2 \right\} dx + \frac{1}{4} \left[\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\right)^2 dx \right]^2 \quad (4)$$

Par la suite l'équation que nous utiliserons est une version dite plus simple que (3).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\int_0^\pi u(t, s)^2 ds\right) u & \text{pour } t \geq 0, x \in (0, \pi) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

Dans le but d'obtenir des modes simples pour (3) et (5), on cherche des solutions de la forme $u(t, x) = f(t) \sin(nx)$
on obtient pour (3)

$$f'' + n^2 \left(1 + \frac{\pi}{2} n^2 f^2\right) f = 0 \quad (6)$$

et pour (5)

$$f'' + n^2 f \frac{\pi}{2} f^3 = 0 \quad (7)$$

On cherche par la suite des solutions qui sont la superposition de deux modes simples et on obtient pour (3)

$$\begin{cases} f'' + j^2 f + j^2 \frac{\pi}{2} (j^2 f^2 + k^2 g^2) f = 0 \\ g'' + k^2 g + k^2 \frac{\pi}{2} (j^2 f^2 + k^2 g^2) g = 0 \end{cases} \quad (8)$$

et pour (5)

$$\begin{cases} f'' + j^2 f + \frac{\pi}{2} (f^2 + g^2) f = 0 \\ g'' + k^2 g + \frac{\pi}{2} (f^2 + g^2) g = 0 \end{cases} \quad (9)$$

On pose

$$f(t) = j\phi(jt)\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad g(t) = j\psi(jt)\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \mu = \left(\frac{k}{j}\right)^2 \quad (10)$$

et le système (8) devient

$$\begin{cases} \phi'' + \phi + (\phi^2 + \mu\psi^2)\phi = 0 \\ \psi'' + \mu\psi + \mu(\phi^2 + \mu\psi^2)\psi = 0 \end{cases} \quad (11)$$

puis on pose

$$f(t) = \frac{1}{j}\phi(jt)\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad g(t) = \frac{1}{j}\psi(jt)\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \mu = \left(\frac{k}{j}\right)^2 \quad (12)$$

et (9) devient

$$\begin{cases} \phi'' + \phi + (\phi^2 + \psi^2)\phi = 0 \\ \psi'' + \mu\psi + (\phi^2 + \psi^2)\psi = 0 \end{cases} \quad (13)$$

qui seront les équations qui nous permettront d'obtenir des résultats exploitables pour les simulations numériques.

2 Simulation et études de problèmes

Nous allons faire une suite de simulations numériques de l'équation de D'Alembert (1) premièrement et étudier les résultats trouvés.

On effectue la simulation numérique au système

$$\begin{cases} \phi'' + \phi = 0 \\ \psi'' + \mu\psi = 0 \end{cases} \quad (14)$$

ayant pour solution générale l'expression $(\phi, \psi) = (a \sin(t+b), c \sin(t\sqrt{\mu}+d))$ et trouve le graphe suivant

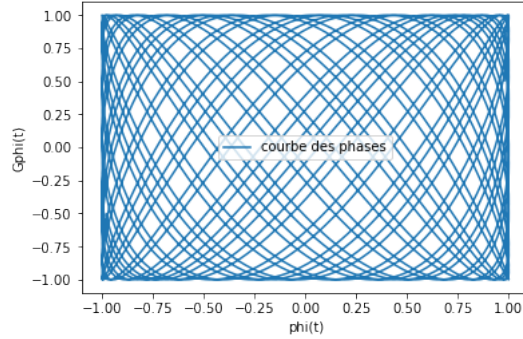


FIGURE 1 – une solution de (1), dans le plan (ϕ, ψ)

On remarque que les oscillations sont régulières.

On cherche des solutions aux équations (11) et (13) afin d'en étudier le comportement pour diverses conditions initiales que nous mettrons en Annexe. Pour faire une simulation numérique, on utilise la méthode `odeint` fourni dans la bibliothèque `scipy.integrate` de Python. Cette dernière nous aide dans la simulation des équations différentielles de degré deux.

Pour l'équation (5) on trouve les résultats de la simulation ci-dessous

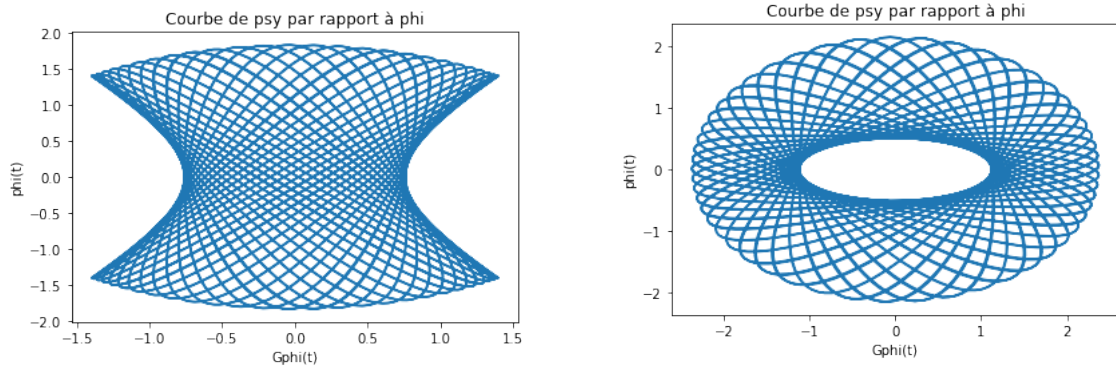


FIGURE 2 – Les deux solutions de (13), dans le plan (ϕ, ψ)

Après application d'une dichotomie entre les conditions initiales des deux graphes ci-dessus, nous avons obtenu ce type de solution.

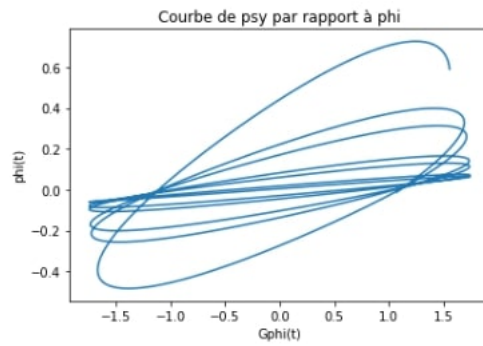
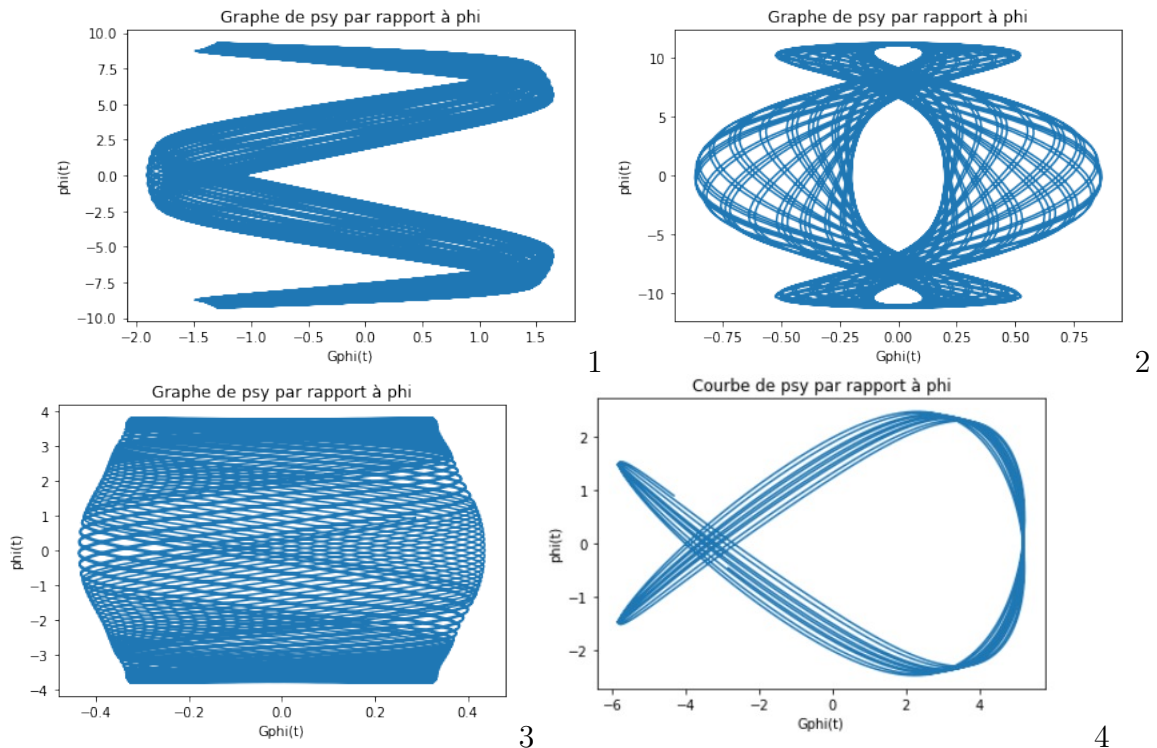
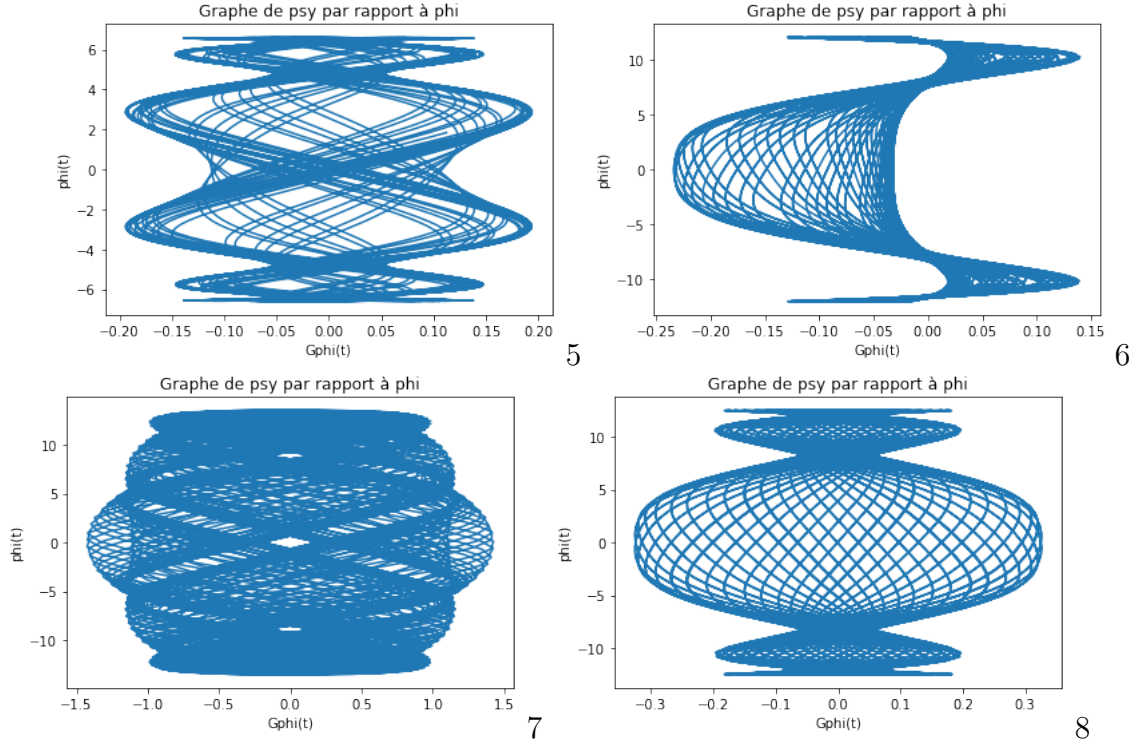


FIGURE 3 – une solution de (13) obtenue après dichotomie

En appliquant un générateur de résultats aléatoires (mis en annexe) pour l'équation (11) on trouve différentes formes de résultats pour la même équation parmi lesquels les figures suivantes :





Les résultats présentés ne nous permettent de tirer aucune conclusion sur l'action des énergies nous nous penchons donc à présent sur le problème de manière théorique.

2.1 Transfert d'énergie

Pour les résultats de (11), observons la superposition des deux fonctions qui traduisent les différentes oscillations de la FIGURE 3, obtenu en faisant la dichotomie des conditions initiales entre les deux solution de la FIGURE 2.

Si au temps $t = 0$ on observe des oscillations similaires durant un certain laps de temps, on constate par la suite une soudaine variation de l'amplitude venant de ces deux fonctions. La fonction qui est en mode simple devient plus périodique avec une plus grande amplitude que son amplitude initiale, tandis que l'autre fonction a une amplitude tendant vers 0. Nous pouvons aussi inverser le sens du temps car notre système est invariant selon t , car en effet, on a une équation du second ordre.

Considérons à présent le cas du pont de Tacoma (qu'on expliquera ultérieurement), avec pour première fonction f , la fonction f caractérisée par des oscillations de torsion puis la fonction g par des oscillations de transverse. Supposons ici que nous débutons de $t = -\infty$ (nous inversons le sens du t ici pour plus de clarté).

La fonction g a une amplitude très faible au temps initial tandis que la fonction f a une amplitude importante. Pour un temps $t = t_0 + \delta(t)$ on observe un changement spontané de l'amplitude dû à l'énergie transférée par l'oscillation de transverse en mode simple à l'oscillation de torsion. La fonction associée à l'oscillation de transverse a alors une amplitude plus basse, et par conséquent la fonction associée à l'oscillation de torsion a une amplitude plus élevée. La fonction associée aux oscillations de torsion est instable car les faibles oscillations présentes au temps initiale ne restent pas constante au cours du temps, elles s'amplifient.

Ce phénomène d'instabilité n'est pas fréquent, le pont n'a pas su gérer l'énergie interne du tablier.

3 Analogie à un problème réel : Chute du pont de Tacoma

Le célèbre pont du détroit de Tacoma a laissé perplexe de nombreux scientifiques se questionnant sur l'effondrement de ce dernier. En effet de nombreuses explications ont été présentées, mais personne n'est sûr de la fiabilité de chacune, c'est pourquoi nous nous sommes penchés sur le sujet afin d'élucider ce mystère.

Les ponts suspendus sont des structures dont le poids du tablier est maintenu par deux câbles porteurs solidement arrimés aux berges. Ces ouvrages métalliques présentent alors une grande souplesse. Le pont concerné est très léger et flexible, et l'étude de ce cas, nous montre que c'est une torsion du tablier qui est concernée. En considérant une coupe transversale du tablier comme une barre ayant 2 degrés de liberté qui sont : le déplacement vertical (y) de son barycentre avec un respect d'un certain équilibre et l'angle lié une torsion, nous cherchons à observer le phénomène des oscillations de torsion qui nous pose problème ici. Sur le pont concerné, une voiture pouvait observer que la voiture de devant se comportait comme si elle se trouvait sur une vague, il n'était donc pas surprenant que des oscillations verticales

aient été visibles le jour de l'effondrement. Le vent soufflait à 70 km heure et les oscillations étaient très faibles. Un mouvement de torsion destructeur a commencé à se manifester ; les oscillations ont changé, et sont passées de petites vagues à d'énormes torsions. Cela s'est passé avec une telle violence que l'on avait l'impression que le tablier allait s'enrouler sur lui-même. Avant l'effondrement du pont, jamais personne n'avait constaté d'oscillations de torsions ; nous pouvions alors nous demander si ce phénomène était arrivé le jour même ? Ou bien alors était-ce une situation perpétuelle mais indétectable à l'œil nu ?

Le profil du tablier du pont semble être le principal responsable de ce phénomène. En effet les variations de vitesse du vent entraînent de petites oscillations qui s'amplifient au cours du temps, la croissance de l'amplitude des oscillations provoquera alors un des plus célèbres accident du génie civil. On parle ici de transfert d'énergie : L'énergie du vent est transférée au pont qui oscille. Les oscillateurs qui ne sont pas couplés de façon linéaire peuvent se transférer mutuellement de l'énergie si ils sont en résonance et ceci arrive uniquement lorsque l'on atteint un certain niveau d'énergie : ce phénomène est plus communément appelé Phénomène de résonance interne . La notion de seuil critique d'énergie est le niveau d'énergie auquel cela arrive. Le seuil critique dépend des paramètres impliqués dans la force non linéaire, la longueur de la coupe transversale et des constantes couplées. Le transfert d'énergie génère la diminution de l'amplitude des oscillations verticales tandis que l'amplitude des oscillations de torsion augmente. Le comportement du pont est lié ses fonctionnalités internes et est totalement indépendant de la force et de l'angle du vent. Une action extérieure qui s'additionne à l'énergie de la structure du pont peut amener ce dernier à dépasser son seuil d'énergie critique et donner naissance à des oscillations incontrôlables. Les apports de torsion qui ont causé la cassure du pont sont dues au phénomène de résonance intérieur qui arrive quand un certain niveau d'énergie est présent dans la structure. Le vent a donné naissance à une résonance intérieure qui a provoqué des oscillations de torsion destructives, cette force aérodynamique a excité les oscillations jusqu'à ce que le pont seffondre. Structurellement le pont est défaillant car il a un seuil d'acceptabilité de toute modification très bas. Comme il est léger et flexible, il présente des oscillations verticales, qui sont tout à fait normales, mais celles-ci, de par la structure du pont , dès qu'elles dépassent un certain seuil, se changent en une énorme torsion ce qui ne devrait pas se produire. Le seuil d'énergie critique des modèles non linéaire de pont dépend seulement de ses paramètres structurels (la largeur, la longueur, l'élasticité,

la rigidité, la masse, etc..) Les futurs ponts doivent être conçus avec des paramètres structurels qui conduisent à avoir des seuils d'énergie critique très haut afin d'éviter une transformation des grandes oscillations en une torsion. La faiblesse de la structure du pont et le transfert d'énergie entre le vent et la structure ont alors entraîné l'irréparable.

4 Annexe : Codes Utilisés

Programmes Python

```
#Bibliotheques
import numpy as np # donne acces a la librairie numpy, et definit l'abbreviation np
from random import *
from __future__ import division
from scipy import *
from pylab import *
import scipy.linalg
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt # donne acces a la librairie matplotlib.pyplot, et definit l'abbreviation plt
import math # donne acces aux fonctions et constantes mathematiques
%matplotlib inline
# ouvre les fenetres graphiques dans le notebook

#definition des fonctions
def deriv(syst, t):
    [x,y,v,u] = syst
    dxdt = v
    dydt = u
    dvdt = -(x+(x**2+y**2)*x)
    dudt = -(mu*y+(x**2+y**2)*y)
    return [dxdt,dydt,dvdt,dudt] # Derivees des variables

def trace(y,x, number):
    plt.subplot(number)
    plt.plot(y, x)
    plt.xlabel('Gphi(t)')
    plt.ylabel('phi(t)')
    plt.title("Courbe de psy par rapport a phi")
    plt.show()

# Parametres temps
start = -100
end = 100
numsteps = 5000
t = np.linspace(start,end,numsteps)

#Premiere version de solutions
#Constantes
mu=.3
# Conditions initiales et resolution
x0,y0 = 1.4, 1.4
v0,u0 = .000, 0.000
syst_CI=np.array([x0,y0,v0,u0]) # Tableau des CI
Sols=odeint(deriv,syst_CI,t)
# Recuperation des solutions
[x,y,v,u] = Sols.T # Decomposition du tableau des solutions : Affectation avec transposition
#affichage
trace(y,x,111)

#Deuxieme version de solutions
#Constantes
mu=.5
# Conditions initiales et resolution
```

```

x0,y0 = -1., 2.
v0,u0 = 2., -0.5
syst_CI=np.array([x0,y0,v0,u0])      # Tableau des CI
Sols=odeint(deriv,syst_CI,t)
# Recuperation des solutions
[x,y,v,u] = Sols . T                  # Decomposition du tableau des solutions : Affectation avec transposition
#affichage
trace(y,x,111)

# Dichotomie

#definition des fonctions
def deriv(syst, t):
    [x,y,v,u] = syst
    dxdt = v
    dydt = u
    dvdt = -(x+(x**2+y**2)*x)
    dudt = -(mu*y+(x**2+y**2)*y)
    return [dxdt,dydt,dvdt,dudt]      # Derivees des variables

def trace(y,x, number):
    plt.subplot(number)
    plt.plot(y, x)
    plt.xlabel('Gphi(t)')
    plt.ylabel('phi(t)')
    plt.title("Courbe de_psy_par_rapport_a_phi")
    plt.show()

# Parametres temps
start = -100
end = 100
numsteps = 5000
t = np.linspace(start,end,numsteps)

#Premiere version de solutions
#Constantes
mu=.3
# Conditions initiales et resolution
x0,y0 = 1.4, 1.4
v0,u0 = .000, 0.000
syst_CI=np.array([x0,y0,v0,u0])      # Tableau des CI
Sols=odeint(deriv,syst_CI,t)
# Recuperation des solutions
[x,y,v,u] = Sols . T                  # Decomposition du tableau des solutions : Affectation avec transposition
#affichage
trace(y,x,111)

#Deuxieme version de solutions
#Constantes
mu=.5
# Conditions initiales et resolution
x0,y0 = -1., 2.
v0,u0 = 2., -0.5
syst_CI=np.array([x0,y0,v0,u0])      # Tableau des CI
Sols=odeint(deriv,syst_CI,t)

```

```

# Recuperation des solutions
[x,y,v,u] = Sols . T # Decomposition du tableau des solutions : Affectation avec transposition
#affichage
trace(y,x,111)

#Equation D'alembert
#Bibliotques
import numpy as np # donne acces a la librairie numpy, et definit l'abbreviation np
import scipy # donne acces aux librairies scipy, scipy.linalg et scipy.integrate
import scipy.linalg
import scipy.integrate
import matplotlib.pyplot as plt # donne acces a la librairie matplotlib.pyplot, et definit l'abbreviation plt
import math # donne acces aux fonctions et constantes mathematiques
%matplotlib inline
# ouvre les fenetres graphiques dans le notebook

#definition des fonctions
mu=0.3
A=np.array([[ -1.,0], [-mu,0]]) # la matrice
#La fonction second membre en respectant l'ordre des arguments
def second_membre(Y,t):
    return Y
def sol_exacte(phi0, Gphi0, t):
    Z=(phi0*math.sin(t), Gphi0*math.sin(t*math.sqrt(mu)))
    return Z

phi0 = 1.
Gphi0 = 1.
t_ =np.linspace(-100,100,10000)

phi=scipy.integrate.odeint(second_membre, phi0, t_)
Gphi=scipy.integrate.odeint(second_membre, Gphi0, t_)
Ye=[sol_exacte(phi0, Gphi0, t) for t in t_] #vecteur de la solution exacte sur le vecteur discretise
xo_=[]
xe_=[]

for ye in Ye:
    xo_.append(ye[0])
    xe_.append(ye[1])

plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(t_,xo_,label='phi_exacte')
plt.plot(t_,xe_,label='Gphi_exacte')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('phi(t), Gphi(t)')
plt.legend()
plt.show()

plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(t_,xo_,label='courbe_des_phases')
plt.xlabel('phi(t)')
plt.ylabel('Gphi(t)')
plt.legend()
plt.show()

#DICHOTOMIE

```

```

# Paramtres temps
start = -12
end = 12
numsteps = 3000
t = np.linspace(start ,end ,numsteps)

#Dichotomie
# Conditions initiales et rsolution
mu=0.38100875
x0=0.59
y0=1.555875
v0=0.81
u0=-0.15587499999999999

syst_CI=np.array([x0,y0,v0,u0])      # Tableau des CI
Sols=odeint(deriv,syst_CI,t)
# Rcupration des solutions
[x,y,v,u] = Sols . T                # Dcomposition du tableau des solutions : Affectation avec transposition
#affichage
trace(y,x,111)

# Code pour gnrer des valeurs initiales pour les resultats

# Paramtres temps
start = -10
end = 10
numsteps = 2500
t = np.linspace(start ,end ,numsteps)

mu=random()*50 # valeurs allant de -30 30

def multiTracage30(n):
    for i in range(n):
        x0, y0= random()*30-15, random()*30-15
        v0, u0= random()*30-15, random()*30-15
        #affichage valeurs
        print('mu='); print(mu)
        print('x0=');print(x0); print('y0='); print(y0)
        print('v0=');print(v0); print('u0='); print(u0)

        syst_CI=np.array([x0,y0,v0,u0])      # Tableau des CI
        Sols=odeint(deriv30,syst_CI,t)
        # Rcupration des solutions
        [x,y,v,u] = Sols . T                # Dcomposition du tableau des solutions : Affectation avec transposition
        #affichage
        trace(y,x,111)

multitracage30(100)

```

4.1 Conditions initiales

4.2 code de (1)

Programmes Python

```
#Equation D'alembert
#Bibliotèques
import numpy as np # donne acces a la librairie numpy, et definit l'abbreviation np
import scipy # donne acces aux librairies scipy, scipy.linalg et scipy.integrate
import scipy.linalg
import scipy.integrate
import matplotlib.pyplot as plt # donne acces a la librairie matplotlib.pyplot, et definit l'abbreviation plt
import math # donne acces aux fonctions et constantes mathematiques
%matplotlib inline
# ouvre les fenetres graphiques dans le notebook

#definition des fonctions
mu=0.3
A =np.array([[ -1.,0], [-mu,0]]) # la matrice
#La fonction second membre en respectant l'ordre des arguments
def second_membre(Y,t):
    return Y
def sol_exacte(phi0, Gphi0, t):
    Z=(phi0*math.sin(t), Gphi0*math.sin(t*math.sqrt(mu)))
    return Z

phi0 = 1.
Gphi0 = 1.
t_ =np.linspace(-100,100,10000)

phi=scipy.integrate.odeint(second_membre, phi0, t_)
Gphi=scipy.integrate.odeint(second_membre, Gphi0, t_)
Ye=[sol_exacte(phi0, Gphi0, t) for t in t_] #vecteur de la solution exacte sur le vecteur discretis
xo_=[]
xe_=[]

for ye in Ye:
    xo_.append(ye[0])
    xe_.append(ye[1])

plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(xe_,xo_,label='courbe_des_phases')
plt.xlabel('phi(t)')
plt.ylabel('Gphi(t)')
plt.legend()
plt.show()
```

4.3 solution de (5)

les deux premières figures ont pour conditions initiales : $\mu = .3$
 $x0, y0 = 1.4, 1.4$
 $v0, u0 = .000, 0.000$

$\mu = .5$
 $x0, y0 = -1., 2.$
 $v0, u0 = 2., -.5$
 la figure trouvée par dichotomie a pour condition initiale
 $\mu = 0.38100875$
 $x0 = 0.59$
 $y0 = 1.555875$
 $v0 = 0.81$
 $u0 = -0.15587499999999999$

4.4 solution de (3)

suivant l'ordre d'affichage,

1 :

$\mu = 17.76209516846714$
 $x0 = -8.763028548303971$
 $y0 = -1.4517922375518602$
 $v0 = -5.179923275833872$
 $u0 = 12.384756224924256$

2 :

$\mu = 17.76209516846714$
 $x0 = -11.118686838051888$
 $y0 = -0.21881292695130483$
 $v0 = 5.547807641316513$
 $u0 = -12.265595832505571$

3 :

$\mu = 41.69698807920737$
 $x0 = 0.9381873199066124$
 $y0 = 0.2873951322589168$
 $v0 = -12.428841168356795$
 $u0 = -5.228845812541882$

4 :

$\mu = 0.38100875$
 $x0 = -0.4633019965256313$
 $y0 = -2.833714620801972$
 $v0 = -5.180815690442547$
 $u0 = 9.776397197817385$

5 :

$$\mu = 41.69698807920737$$

$$x0 = -6.3705263563173435$$

$$y0 = -0.012683770287075902$$

$$v0 = 11.150028526373156$$

$$u0 = 4.83722195004804$$

6 :

$$\mu = 34.54013064474133$$

$$x0 = 11.98222573222031$$

$$y0 = -0.02913813496151363$$

$$v0 = 8.216503909009564$$

$$u0 = -0.24751393691775903$$

7 :

$$\mu = 34.54013064474133$$

$$x0 = 13.063285252753023$$

$$y0 = 0.8659946490856534$$

$$v0 = -6.836730715964199$$

$$u0 = -1.7871105554653184$$

8 :

$$\mu = 34.54013064474133$$

$$x0 = -12.466326296451712$$

$$y0 = -0.15468921584867168$$

$$v0 = 5.520192966890971$$

$$u0 = 4.684215058672521$$

Références

- [1] book Ian Stewart, *17 equations who changed the world*, Profile Books , London, 2012.
- [2] *exemples ondes* <http://villemmin.gerard.free.fr/aScience/Physique/ONDULAT/Onde.htm>
- [3] *Equations d'ondes* <https://shirikyan.u-cergy.fr/afedp-cours4.pdf>
- [4] book Gustav Kirchhoff, *Vorlesungen ber Mathematische Physik : Mechanik*, Leipzig : Teubner, 1877.
- [5] Carrier G.F. : On the vibration problem of an elastic string, Quart. Appl. Math. **3** (1945), 151–165.
- [6] *Thèse de Doctorat UMPC, David Roze* <http://articles.ircam.fr/textes/Roze10b/index.pdf>
- [7] Arioli G. and Gazzola F. : A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the Tacoma Narrows Bridge. Appl. Math. Model. **39** (2015), no. 2, 901–912.
- [8] Arioli G. and Gazzola F. : Torsional instability in suspension bridges : the Tacoma Narrows Bridge case. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **42** (2017), 342–357.
- [9] d'Alembert, Jean-Baptiste le Rond : Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration. Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin, 1747, 214–219. <http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige?band=02-hist/1747seite:int=00000243>
- [10] d'Alembert, Jean-Baptiste le Rond : Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration. Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin, 1747, 220–249. <http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige?band=02-hist/1747seite:int=00000249>
- [11] Tacoma Narrows Bridge collapse. 1940. <http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs>.