

Ejercicios del capítulo 2 de *Classical Mechanics* de H. Goldstein

Nicolás Quesada M.
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Ejercicio 2.1

En el problema de la braquistocrona, se llega a que se debe minizar el funcional

$$S = \int_1^2 \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}} dx \quad (1)$$

$$f = \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}} \quad (2)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para el problema se obtiene facilmente haciendo los siguientes cálculos:

$$\frac{\partial f}{\partial y'(x)} = \frac{y'(x)}{\sqrt{(2gy(x))(1+y'(x)^2)}} \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y(x)} = \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{2y\sqrt{2gy}} \quad (4)$$

$$0 = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y'(x)}\right)}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y(x)} = \frac{d\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{(2gy(x))(1+y'(x)^2)}}\right)}{dx} - \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{2y\sqrt{2gy}} = -\frac{y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) + 1}{2\sqrt{2}g^2y(x)^3 \left(\frac{y'(x)^2+1}{gy(x)}\right)^{3/2}} \quad (5)$$

La ecuación diferencial que debemos resolver es entonces:

$$y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) + 1 = 0 \quad (6)$$

Podemos notar que f no depende explícitamente de x , entonces la cantidad $h = \frac{\partial f}{\partial y'(x)}y'(x) - f$ es una cantidad conservada. Para este caso h tiene la siguiente forma:

$$h = -\frac{1}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}} = cte \quad (7)$$

$$\frac{1}{h^2} = 2gy(x)(1+y'(x)^2) \quad (8)$$

Si se deriva la última de las ecuaciones con respecto a x se llega a :

$$0 = \frac{d\left(\frac{1}{h^2}\right)}{dx} = gy'(x)(y'(x)^2 + 1) + 2gy(x)y'(x)y''(x) \quad (9)$$

Que es la misma ecuación (6) multiplicada por $gy'(x)$. Es decir la ecuación (6) es equivalente a $y(x)(1+y'(x)^2) = 2c$. De esta ecuación se puede despejar $y'(x)$ separar variables e integrar para obtener :

$$y'(x)^2 = \frac{2c}{y} - 1 \quad (10)$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{2c}{y} - 1}} = dx \quad (11)$$

$$2c \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2c}{y} - 1}} \right) - \sqrt{(2c-y)y} = x \quad (12)$$

Pero $\tan^{-1}(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$2c \cos^{-1}\left(\sqrt{1 - \frac{y}{2c}}\right) - \sqrt{(2c-y)y} = x \quad (13)$$

$$1 - \frac{y}{2c} = \cos^2\left(\frac{x + \sqrt{y(2c-y)}}{2c}\right) \quad (14)$$

Llamando $\alpha = \frac{x + \sqrt{y(2c-y)}}{c}$ y despejando:

$$\frac{y}{2c} = 1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2} \quad (15)$$

$$\frac{y}{c} = 1 - \cos\left(\frac{x + \sqrt{y(2c-y)}}{c}\right) \quad (16)$$

La última igualdad se obtiene de las identidades de ángulo mitad para el coseno. De esta igualdad tambien se ve que y sólo puede tomar valores en el intervalo $[0, 2a]$ (ya que la que la cantidad dentro del radical del coseno sólo es mayor que 0 en este intervalo) y que uno de sus mínimos está en $(0, 0)$ (que fue de donde se lanzó la partícula), es decir allí hay una cúspide.

Por otro lado para mostrar que si la partícula se proyecta con una energia cinética inicial $\frac{1}{2}mv_0^2$ entonces tambien está se mueve sobre un cicloide basta notar que la integral (1) se reescribe de esta forma (Conservación de Energia: $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$):

$$S = \int_1^2 \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x) + v_0^2}} dx \quad (17)$$

Esta puede ser devuelta a su forma original haciendo el cambio de variable $\hat{y} = y + \frac{v_0^2}{2g}$, esto equivale a mover el sistema de coordenadas $\frac{v_0^2}{2g}$ unidades, por lo tanto la cúspide que estaba en $y = 0$ quedará $\frac{v_0^2}{2g}$ unidades mas arriba.

Ejercicio 2.3

La solución a este problema es minimizar el funcional

$$J = \int_1^2 \sqrt{dx^2 + dy_1^2 + dy_2^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2} dx$$

, para esto resolvemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)}{dx} = 0 \quad (18)$$

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \quad (19)$$

$$\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dx} \quad (20)$$

Con f así definida obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\dot{y}_i}{\sqrt{1 + \sum_i \dot{y}_i^2}} \quad (22)$$

$$(23)$$

así llegamos a que:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}_i}{\sqrt{1 + \sum_i \dot{y}_i^2}} \right) = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\dot{y}_i}{\sqrt{1 + \sum_i \dot{y}_i^2}} = c_i \quad (25)$$

Las última ecuación se puede solucionar para las y_i :

$$\dot{y}_i^2 = \frac{c_i^2}{1 - \sum_i c_i} \quad (26)$$

y finalmente:

$$y_i = a_i x + b_i \quad (27)$$

Las anteriores son las ecuaciones de una recta parametrizadas por la primera de sus coordenadas.

Ejercicio 2.4

Con un procedimiento análogo al anterior pero usando coordenadas polares (r, θ, ϕ) (con r fijo) llegamos a que $ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ llegamos al siguiente funcional

$$F = \int_1^2 \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)^2} d\theta \quad (28)$$

Haciendo uso de (18) pero con $f = \sqrt{1 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)^2}$, $y_i = \phi$, $x = \theta$ y $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\theta}$ obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\sin^2 \theta \dot{\phi}}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2}} \quad (30)$$

$$\frac{d \left(\frac{\sin^2 \theta \dot{\phi}}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2}} \right)}{d\theta} = 0 \quad (31)$$

De la última ecuación deducimos que:

$$\frac{\sin^2 \theta \dot{\phi}}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2}} = C_1 \quad (32)$$

De esta y la anterior podemos despejar $\dot{\phi}$ e integrar para obtener:

$$\dot{\phi} = \pm \frac{C_1 \csc(\theta)}{\sqrt{\sin^2(\theta) - C_1^2}} \quad (33)$$

$$\phi(\theta) = C_2 \pm \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2} C_1 \cos(\theta)}{\sqrt{-2C_1^2 - \cos(2\theta) + 1}} \right) = C_2 \pm \tan^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{C_1^2} - 1}} \right) \quad (34)$$

Ahora nos falta mostrar que la anterior ecuación define un círculo máximo. Para esto es suficiente con mostrar que el plano en el que esta la curva que hemos encontrado anteriormente pasa por el origen. Para lo anterior note que $\tan^{-1}(x) = \sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$ y por tanto la ecuación (34) se puede reescribir así :

$$\phi - C_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\cot \theta}{\sqrt{\frac{1}{C_1^2} - \csc^2 \theta}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{\frac{\cot \theta}{\sqrt{1/C_1^2 - \csc^2 \theta}}}{\sqrt{1 + \frac{\cot^2 \theta}{1/C_1^2 - \csc^2 \theta}}} \right) \quad (35)$$

$$\sin^{-1} \left(\frac{\cot \theta}{\sqrt{1/C_1^2 + \cot^2 \theta - \csc^2 \theta}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{\cot \theta}{\sqrt{1/C_1^2 - 1}} \right) \quad (36)$$

o:

$$\sin \phi - C_2 = \left(\frac{\cot \theta}{\sqrt{1/C_1^2 - 1}} \right) \quad (37)$$

$$\sin \phi \cos C_2 - \sin C_2 \cos \phi = \left(\frac{\cot \theta}{\sqrt{1/C_1^2 - 1}} \right) \quad (38)$$

$$\sin \theta \sin \phi \cos C_2 - \sin \theta \sin C_2 \cos \phi = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1/C_1^2 - 1}} \quad (39)$$

Pero $x = r \cos \phi \sin \theta$, $y = r \sin \phi \sin \theta$ y $z = r \cos \theta$ y la última ecuación queda:

$$y \cos C_2 - x \sin C_2 = \frac{z}{\sqrt{1/C_1^2 - 1}} \quad (40)$$

que es un plano que pasa por (0,0,0). Note que en la ecuación anterior x, y y z son funciones de θ por lo que describen una curva y no un plano.

Ejercicio 2.6

Del problema que estamos considerando se nota fácilmente que la fuerza que atrae a la partícula es proporcional a la distancia y está en la dirección radial, por lo tanto el potencial asociado a dicha fuerza es de la forma $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Escogeremos nuestro sistema de referencia con el origen en el centro de la esfera y con el eje z perpendicular al plano donde se hará el túnel. Así entonces llegamos a que la energía de la partícula que estamos considerando viene dada por:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}ka^2$$

Donde a es el radio de la esfera en la que se moverá la partícula, \dot{w} denota derivada total con respecto a t mientras w' denota derivada con respecto a θ y $k = \frac{GMm}{a^3}$. De la anterior ecuación se puede despejar fácilmente “ dt ” para obtener:

$$\int dt = \int f d\theta = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \sqrt{\frac{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}{a^2 - r(\theta)^2}} d\theta$$

Al escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange para minimizar $\int dt$ se obtiene:

$$\frac{r(\theta) \sqrt{\frac{m(r(\theta)^2 + r'(\theta)^2)}{k(a^2 - r(\theta)^2)}} (r''(\theta)r(\theta)^3 + (a^2 - r'(\theta)^2)r(\theta)^2 - a^2r''(\theta)r(\theta) + 2a^2r'(\theta)^2)}{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} = 0$$

De la anterior igualdad la ecuación relevante es:

$$r''(\theta)r(\theta)^3 + (a^2 - r'(\theta)^2)r(\theta)^2 - a^2r''(\theta)r(\theta) + 2a^2r'(\theta)^2 = 0$$

Aunque la anterior ecuación se ve algo complicada esta se puede integrar una vez al notar que f no depende de θ y por lo tanto:

$$\sqrt{I} = \frac{\partial f}{\partial r'(\theta)} r'(\theta) - f = \frac{r(\theta)^2 \sqrt{\frac{m(r(\theta)^2 + r'(\theta)^2)}{k(a^2 - r(\theta)^2)}}}{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}$$

Es una cantidad conservada. La última igualdad se puede escribir de manera más conveniente como:

$$\frac{a^2 r^2}{a^2 - r^2} \left(\frac{r^2}{I a^2} - 1 + \frac{r^2}{a^2} \right) = r'(\theta)^2$$

Si redefinimos a $\frac{1}{I} = \left(-1 + \frac{a^2}{r_0^2} \right)$ entonces la ecuación anterior queda así:

$$\frac{a^2 r^2}{a^2 - r^2} \frac{r^2 - r_0^2}{r_0^2} = r'(\theta)^2$$

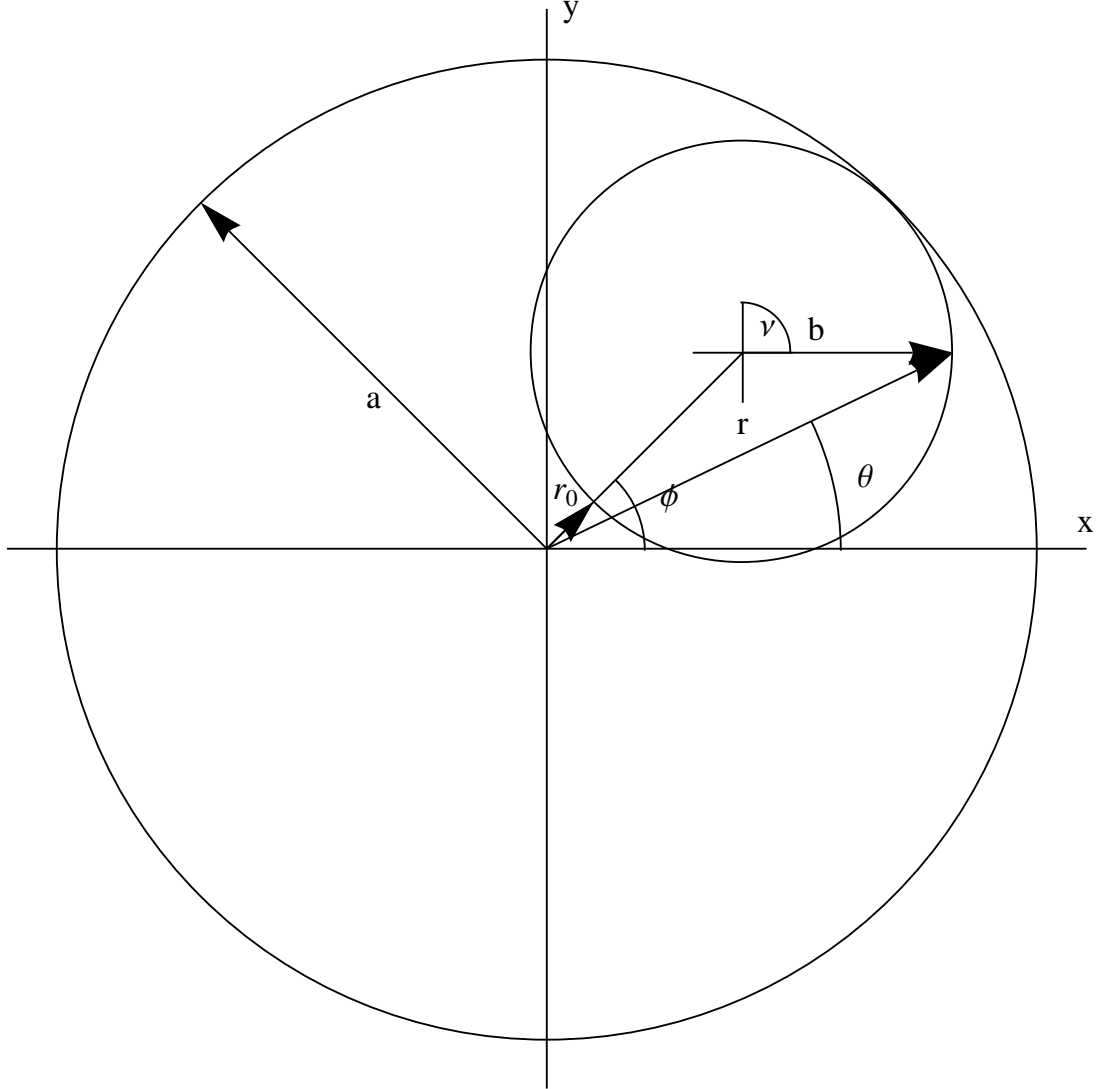


Figura 1: Contrucción de una hipocicloide: Sea a el radio del círculo mayor y b el radio del círculo menor. Sea θ el ángulo que forma el vector de posición del punto sobre el círculo menor con el eje x , sea ϕ el ángulo que forma el centro del círculo menor y el eje x , finalmente sea ν el ángulo que rota el círculo menor sobre un eje fijo. De la condición de no deslizamiento se obtiene que $\nu = \frac{a-b}{b}\phi$. Podemos escribir la posición del punto en términos de ϕ y ν así (definimos a $r_0 = a - 2b$, la distancia mas cercana al centro): $x = (a - b) \cos \phi - b \cos \nu = \frac{1}{2} \left((a + r_0) \cos(\phi) + (r_0 - a) \cos \left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0} \right) \right)$ $y = (a - b) \sin \phi + b \sin \nu = \frac{1}{2} \left((a + r_0) \sin(\phi) + (a - r_0) \sin \left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0} \right) \right)$

Note que la ecuación anterior restringe los posibles valores r a $r_0 \leq r \leq a$ ya que la derivada de r debe ser una cantidad positiva. De la anterior ecuación basta mostrar que es satisfecha por una hipocicloide

Las ecuaciones paramétricas de una hipocicloide son:

$$x(\phi) = \frac{1}{2} \left((a + r_0) \cos(\phi) + (r_0 - a) \cos \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) \right)$$

$$y(\phi) = \frac{1}{2} \left((a + r_0) \sin(\phi) + (a - r_0) \sin \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) \right)$$

De estas se puede obtener $r(\phi)^2$ así:

$$r(\phi)^2 = x(\phi)^2 + y(\phi)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \left((a + r_0) \cos(\phi) + (r_0 - a) \cos \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) \right)^2 + \frac{1}{4} \left((a + r_0) \sin(\phi) + (a - r_0) \sin \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) \right)^2$$

Que al simplificar teniendo en cuenta que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ y que $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ queda:

$$r(\phi)^2 = \frac{1}{2} \left(a^2 + r_0^2 + (r_0^2 - a^2) \cos \left(\frac{2a\phi}{a - r_0} \right) \right)$$

Por otro lado tambien podemos calcular $\theta(\phi)$:

$$\tan(\theta(\phi)) = \frac{y(\phi)}{x(\phi)} = \frac{(a + r_0) \sin(\phi) + (a - r_0) \sin \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right)}{(a + r_0) \cos(\phi) + (r_0 - a) \cos \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right)}$$

$$= \frac{a \sin(\phi) + r_0 \sin(\phi) + a \sin \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) - r_0 \sin \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right)}{a \cos(\phi) + r_0 \cos(\phi) - a \cos \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) + r_0 \cos \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right)}$$

$$= \frac{r_0 \left(\sin(\phi) - \sin \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) \right) + a \left(\sin(\phi) + \sin \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) \right)}{a \left(\cos(\phi) - \cos \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) \right) + r_0 \left(\cos(\phi) + \cos \left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) \right)}$$

Pero recordando las identidades de suma a producto de funciones trigonometricas se tiene:

$$= \frac{2r_0 \cos \left(\frac{(a + r_0)\phi}{2(a - r_0)} + \frac{\phi}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi}{2} - \frac{(a + r_0)\phi}{2(a - r_0)} \right) + 2a \cos \left(\frac{\phi}{2} - \frac{(a + r_0)\phi}{2(a - r_0)} \right) \sin \left(\frac{(a + r_0)\phi}{2(a - r_0)} + \frac{\phi}{2} \right)}{2r_0 \cos \left(\frac{\phi}{2} - \frac{(a + r_0)\phi}{2(a - r_0)} \right) \cos \left(\frac{(a + r_0)\phi}{2(a - r_0)} + \frac{\phi}{2} \right) - 2a \sin \left(\frac{\phi}{2} - \frac{(a + r_0)\phi}{2(a - r_0)} \right) \sin \left(\frac{(a + r_0)\phi}{2(a - r_0)} + \frac{\phi}{2} \right)}$$

$$= \frac{a \cos \left(\frac{r_0\phi}{a - r_0} \right) \sin \left(\frac{a\phi}{a - r_0} \right) - r_0 \cos \left(\frac{a\phi}{a - r_0} \right) \sin \left(\frac{r_0\phi}{a - r_0} \right)}{r_0 \cos \left(\frac{a\phi}{a - r_0} \right) \cos \left(\frac{r_0\phi}{a - r_0} \right) + a \sin \left(\frac{a\phi}{a - r_0} \right) \sin \left(\frac{r_0\phi}{a - r_0} \right)}$$

si la anterior ecuación se divide arriba y abajo por $\cos \left(\frac{a\phi}{a - r_0} \right) \cos \left(\frac{r_0\phi}{a - r_0} \right)$ obtenemos:

$$\tan \theta(\phi) = \frac{a \tan \left(\frac{a\phi}{a - r_0} \right) - r_0 \tan \left(\frac{r_0\phi}{a - r_0} \right)}{r_0 + a \tan \left(\frac{a\phi}{a - r_0} \right) \tan \left(\frac{r_0\phi}{a - r_0} \right)}$$

Note que la última ecuación tiene un notable parecido con la identidad para suma de la tangente. Con lo anterior calculado es directo calcular la siguiente cantidad:

$$\tan \left(\theta + \frac{r_0\phi}{a - r_0} \right) = \frac{\tan(\theta) + \tan \left(\frac{r_0\phi}{a - r_0} \right)}{1 - \tan \left(\frac{r_0\phi}{a - r_0} \right) \tan(\theta)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{a \tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right) - r_0 \tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right) + r_0 \tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right) + a \tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right) \tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right) \tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}{r_0 + a \tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right) \tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)} \\
&= \frac{\frac{r_0 + a \tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right) \tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right) - \left(a \tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right) - r_0 \tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)\right) \tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}{r_0 + a \tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right) \tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)} \\
&= \frac{a \tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right) \left(1 - \tan^2\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)\right)}{r_0 \left(1 - \tan^2\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)\right)}
\end{aligned}$$

Finalmente entonces:

$$\tan\left(\theta + \frac{r_0\phi}{a-r_0}\right) = \frac{a \tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{r_0}$$

asi $\theta(\phi)$ es:

$$\theta(\phi) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{r_0} \tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\right) - \frac{r_0\phi}{a-r_0}$$

Ahora que conocemos $r(\phi)$ y $\theta(\phi)$ podemos calcular $r'(\theta)^2$ asi:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{-\frac{a(r_0^2-a^2)\sin\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)}{\sqrt{2}(a-r_0)\sqrt{a^2+r_0^2+(r_0^2-a^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)}}}{\frac{a^2\sec^2\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{(a-r_0)r_0\left(\frac{a^2\tan^2\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{r_0^2}+1\right)} - \frac{r_0}{a-r_0}}\right)^2 = -\frac{a^2\left(-a^2-r_0^2+(a^2-r_0^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)\tan^2\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{2r_0^2}$$

Por otro lado si calculamos el lado izquierdo de la ecuación diferencial

$$\frac{a^2r^2}{a^2-r^2} \frac{r^2-r_0^2}{r_0^2} = \frac{a^2\left(a^2+r_0^2+(r_0^2-a^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(a^2+r_0^2+(r_0^2-a^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)-r_0^2\right)}{2r_0^2\left(a^2+\frac{1}{2}\left(-a^2-r_0^2-(r_0^2-a^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)\right)}$$

Que al simplificar se convierte en:

$$-\frac{a^2\left(-a^2-r_0^2+(a-r_0)(a+r_0)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)\tan^2\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{2r_0^2}$$

Lo que muestra que efectivamente hemos encontrado la solución al problema.

Por último queremos calcular el tiempo de viaje y la profundidad máxima alcanzada en función de la separación angular de los puntos sobre la tierra. Para encontrar las anteriores cantidades primero notemos $r_0 \leq r \leq a$ y que $r_0 = r \rightarrow \phi = 0 \rightarrow \theta = 0$, es decir por la forma como construimos la solución r es mínimo en $\theta = 0$. Ahora podemos buscar θ tal que $r = a$, para ello primero encontremos a ϕ que cumpla esa condición:

$$a^2 = \frac{1}{2}\left(a^2+r_0^2+(r_0^2-a^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right) \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \frac{a-r_0}{a}$$

Si reemplazamos lo anterior en la ecuación para θ se obtiene que:

$$\theta(r=a) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{r_0}{a}\right)$$

Asi entonces el anterior es el ángulo se barre entre ir de la superficie al punto de maximo acercamiento, por razones de simetría este debe ser igual al ángulo que se barre en ir desde el punto de máximo acercamiento al centro hasta la superficie de nuevo. De lo anterior se deduce entonces que si en el trayecto de viaje de el vehiculo se acerca hasta el centro r_0 entonces los puntos estan separados angularmente una distancia $\alpha = \pi \left(1 - \frac{r_0}{a}\right)$. Como es de esperarse si los dos puntos son diametramente opuestos entonces $r_0 = 0$ y la trayectoria pasa por el centro y ademas como se comprueba facilmente es una linea recta en la que se

presenta movimiento armónico simple.

Finalmente la integral que da el tiempo de viaje se puede reparametrizar en terminos de ϕ para obtener:

$$t_{min} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-\frac{\pi}{2}(1-\frac{r_0}{a})}^{\frac{\pi}{2}(1-\frac{r_0}{a})} \sqrt{\frac{\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2(\phi) \left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2}{a^2 - r^2(\phi)}} d\phi = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\pi}{a} \sqrt{a^2 - r_0^2} = \sqrt{\frac{m}{k}} \pi \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{a}\right)^2}$$

Pero $\frac{r_0}{a} = 1 - \frac{\alpha}{\pi}$ así que el tiempo mínimo en términos de la separación angular es:

$$t_{min} = \sqrt{\frac{m}{k}} \pi \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)^2}$$

Finalmente se pide hallar el tiempo de viaje entre Los Ángeles y Nueva York, estos estan separados una distancia de $4800km$, ademas se sabe que el diametro de la Tierra es de aproximadamente $a = 6400km$ luego su separación angular es de $\alpha = \frac{4800}{6400} = 0,75$ ademas la masa de la Tierra es de $M = 6,0 \cdot 10^{24}kg$ y la constante de Cavendish tiene un valor de $G = 6,7 \cdot 10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$ entonces $\frac{k}{m} = 1,5 \cdot 10^{-6}s^{-2}$.

El tiempo de viaje de Nueva York a Los Ángeles es $t_{NY-LA} = 1,64 \cdot 10^3s = 27'$ y el radio mínimo es $r_0 = a \left(1 - \frac{0,75}{\pi}\right) = 4,9 \cdot 10^3km$.

Ejercicio 2.16

Para el presente problema el Lagrangiano está dado por :

$$e^{t\gamma} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}(t)^2 - \frac{1}{2} k q(t)^2 \right) \quad (41)$$

La ecuación de Euler Lagrange para el anterior Lagrangiano es:

$$e^{t\gamma} (k q(t) + m (\gamma \dot{q}(t) + \ddot{q}(t))) = 0 \quad (42)$$

Que es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico amortiguado. Si se hace la transformación de coordenadas $q = e^{-\frac{t\gamma}{2}} s$ el Lagrangiano toma la forma siguiente:

$$\frac{1}{8} ((m\gamma^2 - 4k) s(t)^2 - 4m\gamma \dot{s}(t)s(t) + 4m\dot{s}(t)^2) \quad (43)$$

La ecuación de Euler lagrange es:

$$(m\gamma^2 - 4k) s(t) = 4m\ddot{s}(t) \quad (44)$$

Esta es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico. Finalmente la función h de Jacobi para el anterior Lagrangiano es constante de movimiento, si se expresa en términos de $q(t)$ queda ($\omega^2 = k/m$):

$$\frac{1}{2} e^{t\gamma} (\omega^2 q(t)^2 + \gamma \dot{q}(t)q(t) + \dot{q}(t)^2) \quad (45)$$

Que es la constante de movimiento para el oscilador armónico amortiguado.

Ejercicio 2.18

Para este caso usando coordenadas esféricas tenemos lo siguiente:

$$T = \frac{1}{2} a^2 m (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2) \quad (46)$$

$$V = mgz = mga \cos(\theta) \quad (47)$$

Pero $\phi = \omega t$. Así el lagrangiano es:

$$L = T - V = \frac{1}{2} a^2 m (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) (\omega)^2) - mga \cos(\theta) \quad (48)$$

La ecuación de Euler-Lagrange que satisface θ es:

$$am \left((a \cos(\theta)\omega^2 + g) \sin(\theta) - a\theta'' \right) = 0 \quad (49)$$

Como se ve de el lagrangiano la cantidad h (la función de energía) es conservada ya que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo. Como además contiene θ el momento generalizado $p_\theta = a^2 m \theta'$ no se conserva. Para hallar condiciones de equilibrio hagamos $\theta' = 0 \implies \theta'' = 0$. Esto implica en (49) que:

$$(a \cos(\theta)\omega^2 + g) \sin(\theta) = 0 \quad (50)$$

La anterior ecuación implica o bien que $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ o que $\omega = \sqrt{\frac{-g}{a \cos(\theta)}}$. El mínimo valor que toma ω es $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$. Para valores de ω menores que ω_0 la ecuación (50) no tiene soluciones reales excepto las triviales (0 y π), es decir no hay mas puntos de equilibrio.

Ejercicio 2.24

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) \quad (51)$$

$$\dot{x} = - \sum_{j=0}^{\infty} a_j \omega j \sin(j\omega t) \quad (52)$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \quad (53)$$

$$S = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} L dt \quad (54)$$

Si sustituimos x y \dot{x} en L obtenemos:

$$L = \frac{m(-\sum_{j=0}^{\infty} a_j \omega j \sin(j\omega t))^2}{2} - \frac{k(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(j\omega t))^2}{2} \quad (55)$$

$$L = \frac{m(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \omega^2 j^2 \sin^2(j\omega t) - 2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i<j}^{\infty} a_j a_i \omega^2 i j \sin(j\omega t) \sin(i\omega t))}{2} - \quad (56)$$

$$\frac{k(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \cos^2(j\omega t) + 2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i<j}^{\infty} a_j a_i \cos(j\omega t) \sin(i\omega t))}{2} \quad (57)$$

Al hacer la integral los términos cruzados con diferente índice se anulan i.e. si $i \neq j$:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(i\omega t) \sin(j\omega t) dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(i\omega t) \cos(j\omega t) dt = 0 \quad (58)$$

Por otro lado las integrales con términos no cruzados son facilmente calculadas así:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(0) dt = \frac{2\pi}{\omega} \quad (59)$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(0) dt = 0 \quad (60)$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(j\omega t) dt = \frac{\pi}{\omega} \quad (61)$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(j\omega t) dt = \frac{\pi}{\omega} \quad (62)$$

La acción S toma la siguiente forma:

$$S = \frac{m \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \omega^2 j^2 \frac{\pi}{\omega}}{2} - \frac{k(\frac{2\pi}{\omega} a_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \frac{\pi}{\omega})}{2} \quad (63)$$

$$S = -\frac{k\pi}{\omega} a_0^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 (m\omega j^2 - \frac{k}{\omega}) \quad (64)$$

La acción es ahora una función de las a_j , por lo tanto para que sea extremo el gradiente ∇_a de la acción con respecto a las a_j debe ser 0, es decir el vector infinito con entradas:

$$\left(\frac{-2k\pi a_0}{\omega}, \dots, \pi a_j (mj^2 \omega - \frac{k}{\omega}), \dots \right) \quad (65)$$

Debe ser el vector nulo. Claramente lo anterior implica que $a_0 = 0$ y que todos los a_j excepto uno deben ser 0. El que no es cero debe ser tal que $\pi a_i (mi^2 \omega - \frac{k}{\omega}) = 0$ es decir $\omega = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{k}{m}}$. Si reemplazamos en (51) obtenemos que

$$x = a_i \cos(i \frac{1}{i} \sqrt{\frac{k}{m}} t) = a_i \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) \quad (66)$$

Pero por hipótesis el periodo de x es $\frac{2\pi}{\omega}$ y por otro lado el periodo de la función de la ecuación (66) es $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$, entonces $\omega^2 = \frac{k}{m}$ y $a_i = a_1$.