Ejercicios del capítulo 8 de *Classical Mechanics* de H. Goldstein

Nicolás Quesada M.
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Ejercicio 8.2

Supongamos que tenemos un Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, con su respectivo Hamiltoniano H, y momentos conjugados p_i. Se desea averiguar como queda el nuevo Hamiltoniano H' y los nuevos momentos conjugados p_i' si se usa un nuevo Lagrangiano $L' = L + \frac{dF}{dt}$ donde F es una función arbitraria pero diferenciable. Los nuevos momentos generalizados vienen dados por:

$$p_i' = \frac{\partial L'(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \left(\frac{dF}{dt}\right)}{\partial \dot{q}_i} \tag{1}$$

Pero el último término puede transformarse asi: (Suma sobre índices repetidos):

$$\frac{\partial \left(\frac{dF}{dt}\right)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}\right)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \tag{2}$$

Teniendo en cuanto lo anterior y que $p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}$ tenemos que:

$$p_i' = p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i} \tag{3}$$

El nuevo Hamiltoniano está dado por:

$$H' = \dot{q}_i p_i' - L' = \dot{q}_i \left(p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}\right) - L - \frac{dF}{dt} = \dot{q}_i \left(p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}\right) - L - \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\right) \tag{4}$$

$$H' = \dot{q}_i p_i - L - \frac{\partial F}{\partial t} = H - \frac{\partial F}{\partial t} \tag{5}$$

Para mostrar que las ecuaciones que se obtienen con este nuevo Hamiltoniano para p_i' y q_i tienen la misma forma que las que se obtienen para p_i y q_i através del Hamiltoniano original escribamos el principio de Hamilton para el antiguo Hamiltoniano H teniendo en cuenta la adición de $\frac{dF}{dt}$:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L + \frac{dF}{dt} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}_i - H + \frac{dF}{dt} \right) dt \tag{6}$$
$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}_i - H + \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \right) dt$$

Los términos dentro de la integral se pueden reorganizar para obtener:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \left(H - \frac{\partial F}{\partial t} \right) \right) dt \tag{7}$$

Pero el primer paréntesis resulta ser p_i' y el segundo H' asi:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i' \dot{q}_i - H' \right) dt \tag{8}$$

En este punto podemos asumir que H' esta escrito en términos de las q_i y las nuevas p_i' y asi podemos usar las ecuaciones de Euler-Lagrange para hallar:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} = \dot{p}_i' + \frac{\partial H'}{\partial q_i} = 0 \tag{9}$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i'} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_i'} = \dot{q}_i - \frac{\partial H'}{\partial p_i'} = 0 \tag{10}$$

Que son las ecuaciones de Hamilton para las variables (q_i, p_i')

Para el resto de ejercicios a' denota la derivada total de la variable a con respecto al tiempo t.

Ejercicio 8.9

Para este problema se hace un procedimiento análogo al que se hace en la formulación lagrangiana. Asi entonces

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} q_i' p_i - H \left(q_j, p_j, t \right) - \lambda_i \psi_i \left(q_j, p_j, t \right) dt \tag{11}$$

La variación se puede hacer ahora con n δq_i, n δp_i y m λ_i. Para esta problema las $2n$ ecuaciones de Euler-Lagrange de interes son (siendo f el integrando de la ecuación anterior y $k = 1, ..., n$):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k'} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_k} = 0 \tag{12}$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial p_k'} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_k} = 0 \tag{13}$$

Sustituyendo para las primeras n ecuaciones obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(q_i'p_i - H\left(q_j,p_j,t\right) - \lambda_i\psi_i\left(q_j,p_j,t\right)\right)}{\partial q_k'}\right) - \frac{\partial\left(q_i'p_i - H\left(q_j,p_j,t\right) - \lambda_i\psi_i\left(q_j,p_j,t\right)\right)}{\partial q_k} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{dp_k}{dt} - \left(\frac{\partial\left(-H\left(q_j,p_j,t\right) - \lambda_i\psi_i\left(q_j,p_j,t\right)\right)}{\partial q_k}\right) = 0 \tag{15}$$

Reorganizando términos y teniendo en cuenta que hay suma sobre el índice repetido i nos queda:

$$-p_k' = \frac{\partial H}{\partial q_k} + \lambda_i\frac{\partial\psi_i\left(q_j,p_j,t\right)}{\partial q_k} \tag{16}$$

Para las restantes n ecuaciones tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(q_i'p_i - H\left(q_j,p_j,t\right) - \lambda_i\psi_i\left(q_j,p_j,t\right)\right)}{\partial p_k'}\right) - \frac{\partial\left(q_i'p_i - H\left(q_j,p_j,t\right) - \lambda_i\psi_i\left(q_j,p_j,t\right)\right)}{\partial p_k} = 0 \tag{17}$$

Reorganizando los términos tenemos (De nuevo suma sobre i):

$$0 - \left(q_k' - \frac{\partial H}{\partial p_k} - \lambda_i\frac{\partial\psi_i\left(q_j,p_j,t\right)}{\partial p_k}\right) = 0 \tag{18}$$

$$q_k' = \frac{\partial H}{\partial p_k} + \lambda_i\frac{\partial\psi_i\left(q_j,p_j,t\right)}{\partial p_k} \tag{19}$$

Ejercicio 8.12

Usando la convención usada en el capítulo 2 el lagrangiano del sistema se puede escribir como:

$$L = \frac{m_1+m_2}{2}\mathbf{r'}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\mathbf{R'}^2 - U\left(R\right) \tag{20}$$

Usando coordenadas esfericas R,θ,ϕ para $\mathbf{R}$ y coordenadas rectangulares x,y,z para $\mathbf{r}$ y llamando $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ y $M = m_1+m_2$ tenemos:

$$L = \frac{\mu}{2}\left(R'^2 + R^2\theta'^2 + R^2\sin^2\left(\theta\right)\phi'^2\right) + \frac{M}{2}\left(x'^2+y'^2+z'^2\right) - U\left(R\right) \tag{21}$$

De lo anterior se ve facilmente que el Hamiltoniano del sistema es:

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_R^2 + \frac{p_\theta^2}{R^2} + \frac{p_\phi^2}{R^2\sin^2\left(\theta\right)}\right) + \frac{1}{2M}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right) + U\left(R\right) \tag{22}$$

Ahora obtegamos la ecuaciones de Hamilton para p_x, p_y, p_z, x, y, z que son:

$$p'_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x = c_1 \tag{23}$$
$$p'_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_y = c_2 \tag{24}$$
$$p'_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \Rightarrow p_z = c_3 \tag{25}$$
$$x' = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x/M \Rightarrow x = x_0 + (p_x/M)\,t \tag{26}$$
$$y' = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_x/M \Rightarrow y = y_0 + (p_y/M)\,t \tag{27}$$
$$z' = \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_x/M \Rightarrow z = z_0 + (p_z/M)\,t \tag{28}$$

Con lo anterior nos hemos librado de la mitad de las variables y podemos escribir el Hamiltoniano de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_R^2 + \frac{p_\theta^2}{R^2} + \frac{p_\phi^2}{R^2\sin^2(\theta)}\right) + U(R) + c \tag{29}$$

Donde $c = \frac{1}{2M}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$. De ahora en adelante dicha constante se omitira ya que no afecta las ecuaciones de movimiento de las demás variables. En el anterior Hamiltoniano la variable ϕ es cíclica por lo que $p_\phi = l_z$ es constante de movimiento y asi:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\mu}\left(p_R^2 + \frac{p_\theta^2}{R^2} + \frac{l_z^2}{R^2\sin^2(\theta)}\right) + U(R) && (30)\\ &= \frac{1}{2\mu}\left(p_R^2 + \frac{1}{R^2}\left(p_\theta^2 + \frac{l_z^2}{\sin^2(\theta)}\right)\right) + U(R) && (31)\\ &= \frac{1}{2\mu}\left(p_R^2 + \frac{f(\theta, p_\theta)}{R^2}\right) + U(R) && (32)\end{aligned}$$

Ahora como en ves de θ y p_θ por separado aparece una función $f(\theta, p_\theta)$ de las dos esta debe ser una constante de movimientom *i.e.*

$$f(\theta, p_\theta) = L^2 = p_\theta^2 + \frac{l_z^2}{\sin^2(\theta)} = k \tag{33}$$

De la anterior ecuación podemos obtener p_θ en términos de θ asi:

$$p_\theta = \pm\sqrt{L^2 - \frac{l_z^2}{\sin^2(\theta)}} \tag{34}$$

y ademas podemos escribir el Hamiltoniano asi:

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{L^2}{R^2}\right) + U(r) \tag{35}$$

Finalmente podemos obtener p_R en función de r como ($H = E =$ constante de Movimiento):

$$p_R = \pm\sqrt{2\mu\left(H - U(r) - \frac{L^2}{2R^2}\right)} = \pm\sqrt{2\mu\left(E - U(r) - \frac{L^2}{2R^2}\right)} \tag{36}$$

Con lo anterior en mente podemos escribir las restantes ecuaciones de Hamilton:

$$p'_R = -\frac{\partial H}{\partial R} = \frac{L^2}{\mu R^3} - \frac{\partial U}{\partial R} \Rightarrow p_R - p_{R_0} = \int_0^t \frac{L^2}{\mu R^3} - \frac{\partial U}{\partial R} dt \tag{37}$$

$$p'_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)}\frac{l_z^2}{\mu R^2} \Rightarrow p_\theta - p_{\theta_0} = \int_0^t \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)}\frac{l_z^2}{\mu R^2} dt \tag{38}$$

$$p'_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow p_\phi = l_z \tag{39}$$

$$R' = \frac{\partial H}{\partial p_R} = \frac{p_r}{\mu} \Rightarrow t = \int_{R_0}^{R} \frac{dR}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U - \frac{L^2}{2mR^2}\right)}} \tag{40}$$

$$\theta' = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{(R^2\mu)} \Rightarrow \int_0^t \frac{dt}{\mu R^2} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{L^2 - \frac{l_z^2}{\sin^2\theta}}} \tag{41}$$

$$\phi' = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{l_z}{\left(\mu R^2 \sin^2(\theta)\right)} \Rightarrow \phi - \phi_0 = l_z \int_0^t \frac{dt}{mR^2\sin^2(\theta)} \tag{42}$$

Note que una vez realizada la integral correspodiente a R' y obtenido $R(t)$ en forma explicita este se puede reemplazar en la integral correspodiente a θ' y asi obtener θ como función explicita de t. Con estas dos variables conocidas se puede sustituir en la ecuaciones de las demás variables, realizar las respectivas integraciones e inversiones y resolver el problema completamente.

Ejercicio 8.14

Sea $L = ax'^2 + \frac{by'}{x} + cx'y' + fy^2x'z' + gy' - k\sqrt{x^2+y^2}$. De este obtenemos los momentos conjugados:

$$p_x = fz'y^2 + 2ax' + cy' \tag{43}$$

$$p_y = \frac{b}{x} + g + cx' \tag{44}$$

$$p_z = fy^2x' \tag{45}$$

Con estos podemos obtener el Hamiltoniano:

$$H = q_i' p_i - L = \left(f x' z' y^2 + \left(\frac{b}{x} + g + c x' \right) y' + x' \left(f z' y^2 + 2 a x' + c y' \right) \right) \tag{46}$$
$$- \left(a x'^2 + \frac{b y'}{x} + c x' y' + f y^2 x' z' + g y' - k \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$H = \left(2 f x' z' y^2 + 2 a x'^2 + g y' + 2 c x' y' + \frac{b y'}{x} \right) \tag{47}$$
$$- \left(a x'^2 + \frac{b y'}{x} + c x' y' + f y^2 x' z' + g y' - k \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$H = a x'^2 + \left(f z' y^2 + c y' \right) x' + k \sqrt{x^2 + y^2} \tag{48}$$

Aunque la transformación (lineal) que manda a las velocidades en los momentos no tiene inversa lo que si se puede hacer es de la ecuación de p_x despejar y' y de la de p_z a x' para obtener:

$$y' = \frac{-f z' y^2 + p_x - 2 a x'}{c} = \frac{-f z' y^2 + p_x - 2 a \frac{p_z}{f y^2}}{c} \tag{49}$$

$$x' = \frac{p_z}{f y^2} \tag{50}$$

y sustituirlos en la ecuación del Hamiltoniano:

$$H = a x'^2 + \left(f z' y^2 + c \frac{-f z' y^2 + p_x - 2 a x'}{c} \right) x' + k \sqrt{x^2 + y^2} \tag{51}$$

$$H = \frac{a p_z^2}{f^2 y^4} + \frac{\left(p_x - \frac{2 a p_z}{f y^2} \right) p_z}{f y^2} + k \sqrt{x^2 + y^2} \tag{52}$$

$$H = -\frac{a p_z^2}{f^2 y^4} + \frac{p_x p_z}{f y^2} + k \sqrt{x^2 + y^2} \tag{53}$$

Este Hamiltoniano no depende ni de p_y ni de z, por lo tanto $y = c$ y $p_z = k$ son constantes de movimiento. Además H no depende explicitamente de t por lo tanto H tambien es constante de movimiento

Ejercicio 8.19

Del dibujo se ve que la posición del cuerpo puede ser escrita asi:

$$\tilde{x} = l \sin(\theta) + x \tag{54}$$

$$\tilde{z} = -l \cos(\theta) + z = a x^2 - l \cos(\theta) \tag{55}$$

Donde θ es el ángulo que forma el eje del péndulo con la vertical. Así el lagrangiano toma la siguiente forma:

$$L = \frac{1}{2} m \left(\tilde{x}'^2 + \tilde{z}'^2 \right) - m g \tilde{z} \tag{56}$$

Usando como coordenadas generalizadas x y θ se reescribe asi:

$$\frac{1}{2}m\left(\left(x'+l\cos\left(\theta\right)\theta'\right)^2+\left(2axx'+l\sin\left(\theta\right)\theta'\right)^2\right)-mg\left(ax^2-l\cos\left(\theta\right)\right) \tag{57}$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned} L =& 2a^2mx'^2x^2-agmx^2+2alm\sin\left(\theta\right)x'\theta'x+\frac{1}{2}mx'^2 \\ &+\frac{1}{2}l^2m\cos^2\left(\theta\right)\theta'^2+\frac{1}{2}l^2m\sin^2\left(\theta\right)\theta'^2+glm\cos\left(\theta\right)+lm\cos\left(\theta\right)x'\theta' \end{aligned} \tag{58}$$

Lo que puede ser reescrito asi:

$$L = L_0+\frac{1}{2}\mathbf{q'}^T T\mathbf{q'} \tag{59}$$

con:

$$\mathbf{q'} = \left(\begin{array}{l} x' \\ \theta' \end{array}\right) \tag{60}$$

$$T = \left(\begin{array}{ll} 4a^2mx^2+m & lm\cos\left(\theta\right)+2alm\sin\left(\theta\right)x \\ lm\cos\left(\theta\right)+2alm\sin\left(\theta\right)x & l^2m \end{array}\right) \tag{61}$$

$$L_0 = glm\cos\left(\theta\right)-agmx^2 \tag{62}$$

Para hallar el Hamiltoniano se usa el procedimiento de la ecuación 8.27 página 340 capítulo 8:

$$H\left(q,p,t\right) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T T^{-1}\mathbf{p}-L_0\left(q,t\right) \tag{63}$$

Para este caso la inversa de T es:

$$T^{-1} = \frac{1}{\det\left(T\right)}\left(\begin{array}{ll} l^2m & -2alm\sin\left(\theta\right)x-lm\cos\left(\theta\right) \\ -2alm\sin\left(\theta\right)x-lm\cos\left(\theta\right) & 4a^2mx^2+m \end{array}\right) \tag{64}$$

$$\begin{aligned} \det\left(T\right) =& l^2m^2-l^2\cos^2\left(\theta\right)m^2+4a^2l^2x^2m^2-4a^2l^2\sin^2\left(\theta\right)x^2m^2 \\ &-4al^2\cos\left(\theta\right)\sin\left(\theta\right)xm^2 \end{aligned} \tag{65}$$

$$\det\left(T\right) = m^2l^2\left(\sin\left(\theta\right)^2+4a^2x^2\cos^2\left(\theta\right)-4ax\cos\left(\theta\right)\sin\left(\theta\right)\right) \tag{66}$$

$$\det\left(T\right) = m^2l^2\left(\sin\left(\theta\right)-2ax\cos\left(\theta\right)\right)^2 \tag{67}$$

$$\frac{\mathbf{p}^T T^{-1}\mathbf{p}}{2} = \frac{m\left(l^2p_x^2-2lp_\theta p_x\left(\cos\left(\theta\right)+2a\sin\left(\theta\right)x\right)+p_\theta^2\left(4a^2x^2+1\right)\right)}{2\det\left(T\right)} \tag{68}$$

Finalmente el Hamiltoniano queda asi:

$$H = \frac{m\left(l^2 p_x^2 - 2l p_\theta p_x \left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right) + p_\theta^2\left(4a^2x^2+1\right)\right)}{2\det(T)} - mgl\cos(\theta) + magx^2 \tag{69}$$

$$H = \frac{l^2 p_x^2 - 2l p_\theta p_x \left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right) + p_\theta^2\left(4a^2x^2+1\right)}{2l^2 m\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^2} - mgl\cos(\theta) + mgax^2 \tag{70}$$

Ahora con el hamiltoniano hallamos las ecuaciones de Hamilton:

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{l p_x - \left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right) p_\theta}{lm\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^2} \tag{71}$$

$$\theta' = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{\left(4a^2x^2+1\right) p_\theta - l\left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right) p_x}{l^2 m\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^2} \tag{72}$$

$$\begin{aligned} p_x' = -\frac{\partial H}{\partial x} =& \frac{2a}{m}\Bigg(- gxm^2 + \frac{p_\theta\left(l\sin(\theta)\,p_x - 2axp_\theta\right)}{l^2\left(\sin\theta - 2ax\cos\theta\right)^2} \\ & - \frac{\cos(\theta)\left(l^2p_x^2 - 2l\left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right)p_\theta p_x + \left(4a^2x^2+1\right)p_\theta^2\right)}{l^2\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^3}\Bigg) \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned} p_\theta' = -\frac{\partial H}{\partial \theta} =& \frac{1}{l^2 m}\left(-gm^2\sin(\theta)\,l^3 + \frac{p_x p_\theta l}{2a\cos(\theta)\,x - \sin(\theta)}\right) \\ & + \frac{1}{l^2 m}\frac{\left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right)}{\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^3} \\ & \quad \times \left(l^2p_x^2 - 2l\left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right)p_\theta p_x + \left(4a^2x^2+1\right)p_\theta^2\right) \end{aligned} \tag{74}$$

La anteriores expresiónes para p_x' y p_θ' se pueden reorganizar asi:

$$\begin{aligned} p_\theta' =& \frac{\left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right)p_x^2}{m\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^3} \\ & + \left(\frac{2a\cos(\theta)\,x - \sin(\theta)}{lm\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^2} - \frac{2\left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right)^2}{lm\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^3}\right)p_\theta p_x \\ & + \frac{\left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right)\left(4a^2x^2+1\right)p_\theta^2}{l^2 m\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^3} - glm\sin(\theta) \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} p_x' =& -\frac{2a\cos(\theta)\,p_x^2}{m\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^3} \\ & + \left(\frac{2a\sin(\theta)}{lm\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^2} + \frac{4a\cos(\theta)\left(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)\,x\right)}{lm\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^3}\right)p_\theta p_x \\ & + \left(-\frac{4xa^2}{l^2 m\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^2} - \frac{2\cos(\theta)\left(4a^2x^2+1\right)a}{l^2 m\left(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)\,x\right)^3}\right)p_\theta^2 - 2agmx \end{aligned} \tag{76}$$