Ejercicios del capítulo 1 de *Classical Mechanics* de H. Goldstein

Nicolás Quesada M.
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Ejercicio 1.6.

Supongamos que en algún instante t la partícula tiene coordenadas (x', y') y que la tangente del ángulo que forma su velocidad con el eje x esta dada por $\frac{dy(t)}{dx(t)}$. La recta tangente a la curva estará dada por:

$$(y - y') = \frac{dy(t)}{dx(t)}(x - x'). \tag{1}$$

Por otro lado según el problema la velocidad siempre debe apuntar a un punto en el eje x, al que llamaremos $f(t)$. Pero este punto no es más que el intercepto con el eje x de la recta anteriormente definida. Así entonces debemos tener lo siguiente:

$$-y' = \frac{dy(t)}{dx(t)}(f(t) - x') \tag{2}$$

$$(f(t) - x)dy + ydx = 0 \tag{3}$$

Que es la ecuación de una ligadura no-holónoma. Para mostrar que la ligadura es no holónoma se trata de buscar un factor integrante para obtener una diferencial total:

$$dF = f_i(f(t) - x)dy + f_i y dx + f_i \times 0dt. \tag{4}$$

De aquí se lee que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = f_i(f(t) - x) \tag{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_i y \tag{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Haciendo derivadas cruzadas entre x y t (y teniendo en cuenta que x y y dependen de t sólo implícitamente):

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)}{\partial t} = y\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Tomando derivadas cruzadas de t y y nos queda que:

$$0 = \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\partial t} = f_i \frac{\partial f(t)}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

Asi o bien $f_i = 0$ o $f(t) = cte$, pero lo anterior va encontra de las hipótesis ya que $f(t)$ es arbitrario.

Ejercicio 1.9

Tenemos que el Lagrangiano para una partícula en presencia de un campo Eléctrico $\vec{E} = \nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ y un campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ está dado por

$$L = \frac{1}{2} m\vec{v} \cdot \vec{v} - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v} \cdot \vec{A}. \tag{10}$$

Se pregunta que efecto tiene sobre el lagrangiano el cambiar el potencial escalar ϕ y el potencial vectorial $\vec{A}$

$$\vec{A} \longmapsto \vec{A} + \nabla\psi \tag{11}$$

$$\phi \longmapsto \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{12}$$

sobre el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento de la partícula sobre la que actúan $\vec{E}$ y $\vec{B}$, siendo $\psi(x, y, z, t)$ una función arbitraria pero diferenciable. Si sustituimos en el Lagrangiano y reorganizamos términos se obtiene lo siguiente:

$$L' = \frac{1}{2} m\vec{v} \cdot \vec{v} - q\left(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\vec{v} \cdot \left(\vec{A} + \nabla\psi\right) \tag{13}$$

$$L' = \left(\frac{1}{2} m\vec{v} \cdot \vec{v} - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v} \cdot \vec{A}\right) + q\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\psi\right) \tag{14}$$

El término dentro del paréntesis es el lagrangiano original L y el segundo es la diferencial total de ψ con respecto a t:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla\psi \cdot \vec{v} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{15}$$

Asi entonces L' se reescribe como L mas la derivada total con respecto a t de una función arbitraria ψ:

$$L' = L + \frac{d\psi}{dt} \tag{16}$$

Pero según la demostración 8 Las ecuaciones de Lagrange se siguen satisfaciendo si a un Lagrangiano L se le adiciona la derivada total con respecto al tiempo de una función arbitraria ψ, es decir las ecuaciones de movimiento de la partícula no cambian.

Ejercicio 1.19

Usando coordenadas esféricas y teniendo en cuenta que el péndulo es inextensible tenemos que la velocidad se puede escribir así:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\sin\theta\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi} = r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\sin\theta\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi} \tag{17}$$

y que el potencial gravitacional se puede escribir como (con z positivo hacia abajo):

$$V = -mgz = -mgr\cos\theta \tag{18}$$

Asi el Lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}mr^2\left(\sin^2(\phi)\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\right) + mgr\cos(\phi) \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 - mgr\sin\theta \tag{22}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \tag{23}$$

luego las ecuaciones de movimiento son:

$$mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 - mgr\sin\theta - mr^2\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right) = 0 \tag{25}$$