Ejercicios del capítulo 2 de *Classical Mechanics* de H. Goldstein

Nicolás Quesada M.
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Ejercicio 2.1

En el problema de la braquístocrona, se llega a que se debe minizar el funcional

$$S = \int_1^2 \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}}dx \tag{1}$$

$$f = \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}}. \tag{2}$$

La ecuación de Euler-Lagrange para el problema se obtiene facilmente haciendo los siguientes cálculos:

$$\frac{\partial f}{\partial y'(x)} = \frac{y'(x)}{\sqrt{(2gy(x))(1+y'(x)^2)}} \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y(x)} = \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{2y\sqrt{2gy}} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y'(x)}\right)}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y(x)} = \frac{d\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{(2gy(x))(1+y'(x)^2)}}\right)}{dx} - \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{2y\sqrt{2gy}} \\ =& -\frac{y'(x)^2+2y(x)y''(x)+1}{2\sqrt{2}g^2y(x)^3\left(\frac{y'(x)^2+1}{gy(x)}\right)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

La ecuación diferencial que debemos resolver es entonces:

$$y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) + 1 = 0. \tag{6}$$

Podemos notar que f no depende explictamente de x, entonces la cantidad $h = \frac{\partial f}{\partial y'(x)}y'(x) - f$ es una cantidad conservada. Para este caso h tiene la siguiente forma:

$$h = -\frac{1}{\sqrt{2gy(x)(1+y'(x)^2)}} = \text{cte} \tag{7}$$

$$\frac{1}{h^2} = 2gy(x)(1+y'(x))^2. \tag{8}$$

Si se deriva la última de las ecuaciones con respecto a x se llega a :

$$0 = \frac{d\left(\frac{1}{h^2}\right)}{dx} = gy'(x)\left(y'(x)^2+1\right) + 2gy(x)y'(x)y''(x) \tag{9}$$

Que es la misma ecuación (6) multiplicada por $gy'(x)$. Es decir la ecuación (6) es equivalente a $y(x)(1+y'(x)^2) = 2c$. De esta ecuación se puede despejar $y'(x)$ separar variables e integrar para obtener :

$$y'(x)^2 = \frac{2c}{y} - 1 \tag{10}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{2c}{y}-1}} = dx \tag{11}$$

$$2c\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2c}{y}-1}}\right) - \sqrt{(2c-y)y} = x. \tag{12}$$

Pero $\tan^{-1}(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ entonces:

$$2c\cos^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{y}{2c}}\right) - \sqrt{(2c-y)y} = x \tag{13}$$

$$1 - \frac{y}{2c} = \cos^2\left(\frac{x+\sqrt{y(2c-y)}}{2c}\right). \tag{14}$$

Llamando $\alpha = \frac{x+\sqrt{y(2c-y)}}{c}$ y despejando:

$$\frac{y}{2c} = 1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2} \tag{15}$$

$$\frac{y}{c} = 1-\cos\left(\frac{x+\sqrt{y(2c-y)}}{c}\right) \tag{16}$$

La última igualdad se obtiene de las identidades de ángulo mitad para el coseno. De esta igualdad tambien se ve que y sólo puede tomar valores en el intervalo $[0, 2a]$ (ya que la que la cantidad dentro del radical del coseno sólo es mayor que 0 en este intervalo) y que uno de sus mínimos está en $(0,0)$(que fue de donde se lanzó la partícula), es decir allí hay una cúspide.

Por otro lado para mostrar que si la partícula se proyecta con una energia cinética inicial $\frac{1}{2}mv_0^2$ entonces tambien está se mueve sobre un cicloide basta notar que la integral (1) se reescribe de esta forma (Conservación de Energia: $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$):

$$S = \int_1^2 \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)+v_0^2}}dx \tag{17}$$

Esta puede ser devuelta a su forma original haciendo el cambio de variable $\hat{y} = y + \frac{v_0^2}{2g}$, esto equivale a mover el sistema de coordenadas $\frac{v_0^2}{2g}$ unidades, por lo tanto la cúspide que estaba en $y = 0$ quedará $\frac{v_0^2}{2g}$ unidades mas arriba.

Ejercicio 2.3

La solución a este problema consiste en minimizar el funcional

$$J = \int_1^2 \sqrt{dx^2 + dy_1^2 + dy_2^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2} dx, \tag{18}$$

para esto resolvemos:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right) \tag{19}$$

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \tag{20}$$

$$\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dx}, \tag{21}$$

con f así definida obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\dot{y}_1}{\sqrt{1 + \sum_i \dot{y}_i^2}}. \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

así llegamos a que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}_i}{\sqrt{1 + \sum_i \dot{y}_i^2}}\right) = 0 \tag{25}$$

$$\frac{\dot{y}_i}{\sqrt{1 + \sum_i \dot{y}_i^2}} = c_i. \tag{26}$$

La última ecuación se puede solucionar para las y_i:

$$\dot{y}_i^2 = \frac{c_i^2}{1 - \sum_i c_i} \tag{27}$$

y finalmente:

$$y_i = a_i x + b_i \tag{28}$$

Las anteriores son las ecuaciones de una recta parametrizadas por la primera de sus coordenadas.

Ejercicio 2.4

Con un procedimiento análogo al anterior pero usando coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) (con r fijo) llegamos a que $ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ llegamos al siguiente funcional

$$F = \int_1^2 \sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2} d\theta. \tag{29}$$

Haciendo uso de (19) pero con $f = \sqrt{1 + \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2}$, $y_i = \phi$, $x = \theta$ y $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\theta}$ obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = 0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\sin^2\theta\dot{\phi}}{\sqrt{1 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2}} \tag{31}$$

$$0 = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin^2\theta\dot{\phi}}{\sqrt{1 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2}}\right). \tag{32}$$

De la última ecuación deducimos que:

$$\frac{\sin^2\theta\dot{\phi}}{\sqrt{1 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2}} = C_1. \tag{33}$$

De esta y la anterior podemos despejar $\dot{\phi}$ e integrar para obtener:

$$\dot{\phi} = \pm\frac{C_1\csc(\theta)}{\sqrt{\sin^2(\theta) - C_1^2}} \tag{34}$$

$$\phi(\theta) = C_2 \pm \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}C_1\cos(\theta)}{\sqrt{-2C_1^2 - \cos(2\theta) + 1}}\right) = C_2 \pm \tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{C_1^2} - 1}}\right). \tag{35}$$

Ahora nos falta mostrar que la anterior ecuación define un círculo máximo. Para esto es suficiente con mostrar que el plano en el que esta la curva que hemos encontrado anteriormente pasa por el origen. Para lo anterior note que $\tan^{-1}(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ y por lo tanto la ecuación (35) se puede reescribir así :

$$\phi - C_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\cot\theta}{\sqrt{\frac{1}{C_1^2} - \csc^2\theta}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\frac{\cot\theta}{\sqrt{1/C_1^2 - \csc^2\theta}}}{\sqrt{1 + \frac{\cot^2\theta}{1/C_1^2 - \csc^2\theta}}}\right) \tag{36}$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{\cot\theta}{\sqrt{1/C_1^2 + \cot^2\theta - \csc^2\theta}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\cot\theta}{\sqrt{1/C_1^2 - 1}}\right) \tag{37}$$

o:

$$\sin\phi - C_2 = \left(\frac{\cot\theta}{\sqrt{1/C_1^2-1}}\right) \tag{38}$$

$$\sin\phi\cos C_2 - \sin C_2\cos\phi = \left(\frac{\cot\theta}{\sqrt{1/C_1^2-1}}\right) \tag{39}$$

$$\sin\theta\sin\phi\cos C_2 - \sin\theta\sin C_2\cos\phi = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1/C_1^2-1}}. \tag{40}$$

Pero $x = r\cos\phi\sin\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ y la última ecuacion queda:

$$y\cos C_2 - x\sin C_2 = \frac{z}{\sqrt{1/C_1^2-1}} \tag{41}$$

que define un plano que pasa por (0,0,0). Note que en la ecuacion anterior x, y y z son funciones de θ por lo que describen una curva y no un plano.

Ejercicio 2.6

Del problema que estamos considerando se nota facilmente que la fuerza que atrae a la partícula es proporcional a la distancia y está en la dirección radial, por lo tanto el potencial asociado a dicha fuerza es de la forma $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Escogeremos nuestro sistema de referencia con el origen en el centro de la esfera y con el eje z perpendicular al plano donde se hara el tunel. Asi entonces llegamos a que la energia de la partícula que estamos considerando viene dada por:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}ka^2 \tag{42}$$

Donde a es el radio de la esfera en la que se moverá la partícula, $\dot{w}$ denota derivada total con respecto a t mientras w' denota derivada con respecto θ y $k = \frac{GMm}{a^3}$. De la anterior ecuación se puede despejar facilmente "dt" para obtener:

$$\int dt = \int f d\theta = \sqrt{\frac{m}{k}}\int\sqrt{\frac{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}{a^2 - r(\theta)^2}}d\theta \tag{43}$$

Al escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange para minimizar $\int dt$ se obtiene:

$$\frac{r(\theta)\sqrt{\frac{m(r(\theta)^2+r'(\theta)^2)}{k(a^2-r(\theta)^2)}}\left(r''(\theta)r(\theta)^3 + \left(a^2 - r'(\theta)^2\right)r(\theta)^2 - a^2r''(\theta)r(\theta) + 2a^2r'(\theta)^2\right)}{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} = 0 \tag{44}$$

De la anterior igualdad la ecuación relevante es:

$$r''(\theta)r(\theta)^3 + \left(a^2 - r'(\theta)^2\right)r(\theta)^2 - a^2r''(\theta)r(\theta) + 2a^2r'(\theta)^2 = 0 \tag{45}$$

Aunque la anterior ecuación se ve algo complicada esta se puede integrar una vez al notar que f no depende de θ y por lo tanto:

$$\sqrt{I} = \frac{\partial f}{\partial r'(\theta)} r'(\theta) - f = \frac{r(\theta)^2 \sqrt{\frac{m(r(\theta)^2 + r'(\theta)^2)}{k(a^2 - r(\theta)^2)}}}{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} \tag{46}$$

Es una cantidad conservada. La última igualdad se puede escribir de manera mas conveniente como:

$$\frac{a^2 r^2}{a^2 - r^2} \left(\frac{r^2}{I a^2} - 1 + \frac{r^2}{a^2} \right) = r'(\theta)^2 \tag{47}$$

Si redefinimos a $\frac{1}{I} = \left(-1 + \frac{a^2}{r_0^2}\right)$ entonces la ecuación anterior queda asi:

$$\frac{a^2 r^2}{a^2 - r^2} \frac{r^2 - r_0^2}{r_0^2} = r'(\theta)^2 \tag{48}$$

Note que la ecuación anterior restringe los posibles valores r a $r_0 \leq r \leq a$ ya que la derivada de r debe ser real. De la anterior ecuación basta mostrar que es satisfecha por una hipocicloide

Las ecuaciones parámetricas de una hipocicloide son:

$$x(\phi) = \frac{1}{2} \left((a + r_0) \cos(\phi) + (r_0 - a) \cos\left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) \right) \tag{49}$$

$$y(\phi) = \frac{1}{2} \left((a + r_0) \sin(\phi) + (a - r_0) \sin\left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) \right) \tag{50}$$

De estas se puede obtener $r(\phi)^2$ asi:

$$\begin{aligned} r(\phi)^2 = x(\phi)^2 + y(\phi)^2 = &\frac{1}{4} \left((a + r_0) \cos(\phi) + (r_0 - a) \cos\left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) \right)^2 \\ &+ \frac{1}{4} \left((a + r_0) \sin(\phi) + (a - r_0) \sin\left(\frac{(a + r_0)\phi}{a - r_0} \right) \right)^2 \end{aligned} \tag{51}$$

Que al simplificar teniendo en cuenta que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ y que $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ queda:

$$r(\phi)^2 = \frac{1}{2} \left(a^2 + r_0^2 + \left(r_0^2 - a^2\right) \cos\left(\frac{2a\phi}{a - r_0} \right) \right) \tag{52}$$

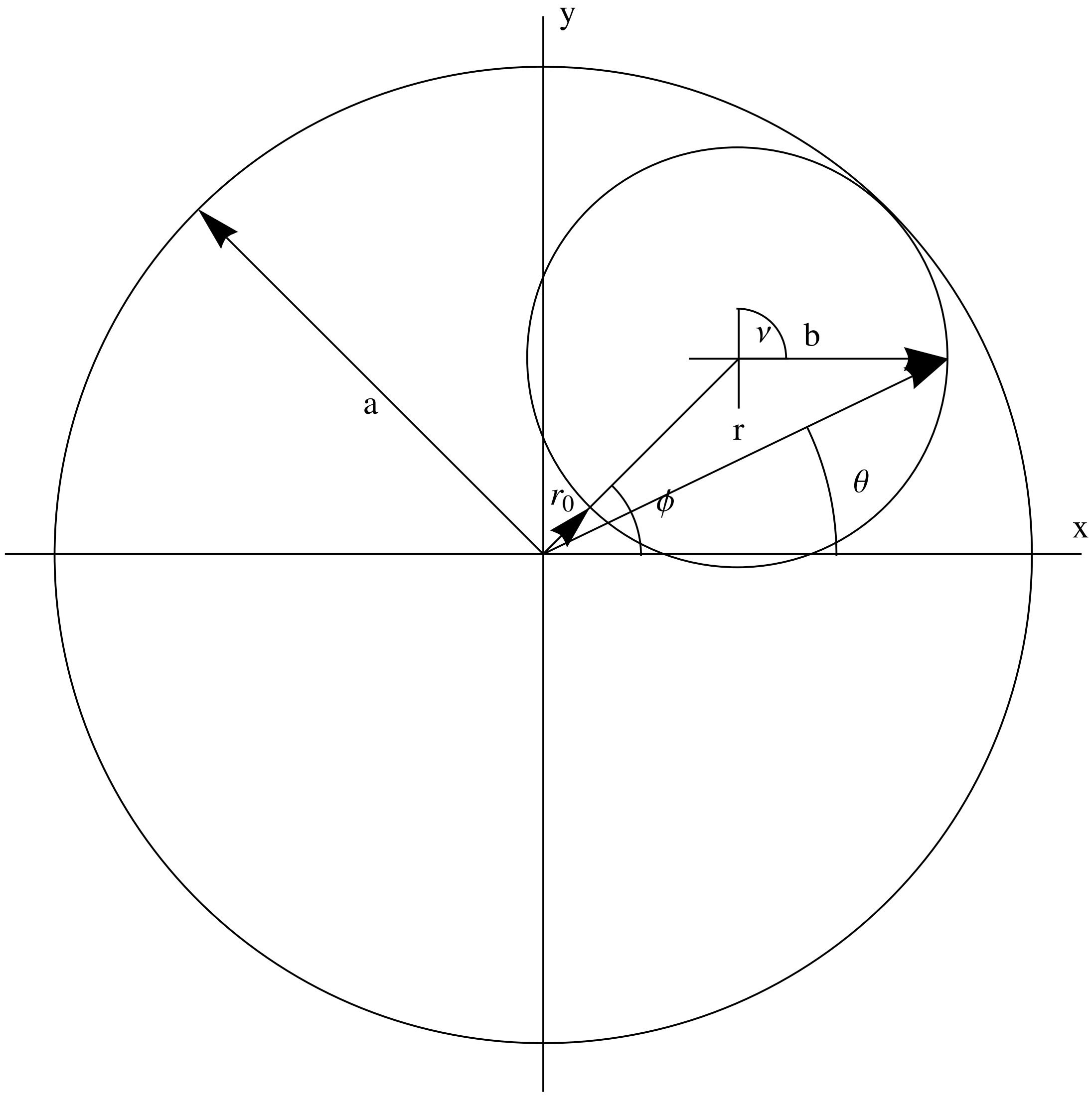

Figura 1: Contrucción de una hipocicloide: Sea a el radio del circulo mayor y b el radio del circulo menor. Sea θ el ángulo que forma el vector de posición del punto sobre el circulo menor con el eje x, sea ϕ el ángulo que forma el centro del circulo menor y el eje x, finalmente sea ν el ángulo que rota el circulo menor sobre un eje fijo. De la condición de no deslizamiento se obtiene que $\nu = \frac{a-b}{b}\phi$. Podemos escribir la posición del punto en términos de ϕ y ν asi (definimos a $r_0 = a - 2b$, la distancia mas cercana al centro): $x = (a-b)\cos\phi - b\cos\nu = \frac{1}{2}\left((a+r_0)\cos(\phi) + (r_0 - a)\cos\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)\right)$ $y = (a-b)\sin\phi + b\sin\nu = \frac{1}{2}\left((a+r_0)\sin(\phi) + (a-r_0)\sin\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)\right)$

Por otro lado tambien podemos calcular $\theta(\phi)$:

$$\tan(\theta(\phi)) = \frac{y(\phi)}{x(\phi)} = \frac{(a+r_0)\sin(\phi) + (a-r_0)\sin\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)}{(a+r_0)\cos(\phi) + (r_0-a)\cos\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)} \tag{53}$$

$$= \frac{a\sin(\phi) + r_0\sin(\phi) + a\sin\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right) - r_0\sin\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)}{a\cos(\phi) + r_0\cos(\phi) - a\cos\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right) + r_0\cos\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)} \tag{54}$$

$$= \frac{r_0\left(\sin(\phi) - \sin\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)\right) + a\left(\sin(\phi) + \sin\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)\right)}{a\left(\cos(\phi) - \cos\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)\right) + r_0\left(\cos(\phi) + \cos\left(\frac{(a+r_0)\phi}{a-r_0}\right)\right)} \tag{55}$$

Pero recordando las identidades de suma a producto de funciones trigonometricas se puede reescribir

$$= \frac{2r_0\cos\left(\frac{(a+r_0)\phi}{2(a-r_0)} + \frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2} - \frac{(a+r_0)\phi}{2(a-r_0)}\right) + 2a\cos\left(\frac{\phi}{2} - \frac{(a+r_0)\phi}{2(a-r_0)}\right)\sin\left(\frac{(a+r_0)\phi}{2(a-r_0)} + \frac{\phi}{2}\right)}{2r_0\cos\left(\frac{\phi}{2} - \frac{(a+r_0)\phi}{2(a-r_0)}\right)\cos\left(\frac{(a+r_0)\phi}{2(a-r_0)} + \frac{\phi}{2}\right) - 2a\sin\left(\frac{\phi}{2} - \frac{(a+r_0)\phi}{2(a-r_0)}\right)\sin\left(\frac{(a+r_0)\phi}{2(a-r_0)} + \frac{\phi}{2}\right)} \tag{56}$$

$$= \frac{a\cos\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)\sin\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right) - r_0\cos\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\sin\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}{r_0\cos\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\cos\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right) + a\sin\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\sin\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)} \tag{57}$$

si la anterior ecuación se divide en el numerador y en el denominador por $\cos\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\cos\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)$ obtenemos:

$$\tan\theta(\phi) = \frac{a\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right) - r_0\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}{r_0 + a\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)} \tag{58}$$

Note que la última ecuación tiene un notable parecido con la identidad suma de la tangente. Con lo anterior calculado es directo calcular la siguiente cantidad:

$$\tan\left(\theta + \frac{r_0\phi}{a-r_0}\right) = \frac{\tan(\theta) + \tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}{1 - \tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)\tan(\theta)} \tag{59}$$

$$= \frac{\frac{a\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right) - r_0\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right) + r_0\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right) + a\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}{r_0 + a\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}}{\frac{r_0 + a\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right) - \left(a\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right) - r_0\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)\right)\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}{r_0 + a\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\tan\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)}} \tag{60}$$

$$= \frac{a\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\left(1 - \tan^2\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)\right)}{r_0\left(1 - \tan^2\left(\frac{r_0\phi}{a-r_0}\right)\right)} \tag{61}$$

Finalmente

$$\tan\left(\theta + \frac{r_0\phi}{a-r_0}\right) = \frac{a\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{r_0} \tag{62}$$

asi $\theta(\phi)$ es:

$$\theta(\phi) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{r_0}\tan\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)\right) - \frac{r_0\phi}{a-r_0} \tag{63}$$

Ahora que conocemos $r(\phi)$ y $\theta(\phi)$ podemos calcular $r'(\theta)^2$ asi:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{\frac{dr}{d\phi}}{\frac{d\theta}{d\phi}}\right)^2 = \left(\frac{-\frac{a\left(r_0^2-a^2\right)\sin\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)}{\sqrt{2}(a-r_0)\sqrt{a^2+r_0^2+\left(r_0^2-a^2\right)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)}}}{\frac{a^2\sec^2\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{(a-r_0)r_0\left(\frac{a^2\tan^2\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{r_0^2}+1\right)} - \frac{r_0}{a-r_0}}\right)^2 \tag{64}$$

$$= -\frac{a^2\left(-a^2-r_0^2+(a^2-r_0^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)\tan^2\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{2r_0^2} \tag{65}$$

Por otro lado si calculamos el lado izquierdo de la ecuación diferencial

$$\frac{a^2r^2}{a^2-r^2}\frac{r^2-r_0^2}{r_0^2} \tag{66}$$

$$= \frac{a^2\left(a^2+r_0^2+(r_0^2-a^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(a^2+r_0^2+(r_0^2-a^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)-r_0^2\right)}{2r_0^2\left(a^2+\frac{1}{2}\left(-a^2-r_0^2-(r_0^2-a^2)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)\right)} \tag{67}$$

Que al simplificar se convierte en:

$$-\frac{a^2\left(-a^2-r_0^2+(a-r_0)(a+r_0)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right)\tan^2\left(\frac{a\phi}{a-r_0}\right)}{2r_0^2} \tag{68}$$

Lo que muestra que efectivamente la hipocicloide es la solucion del problema.
Por último queremos calcular el tiempo de viaje y la profundidad máxima alcanzada en función de la separación angular de los puntos sobre la tierra. Para encontrar las anteriores cantidades primero notemos $r_0 \leq r \leq a$ y que $r_0 = r \to \phi = 0 \to \theta = 0$, es decir por la forma como construimos la solución r es mínimo en $\theta = 0$. Ahora podemos buscar θ tal que $r = a$, para ello primero encontremos a ϕ que cumpla esa condición:

$$a^2 = \frac{1}{2}\left(a^2+r_0^2+\left(r_0^2-a^2\right)\cos\left(\frac{2a\phi}{a-r_0}\right)\right) \to \phi = \frac{\pi}{2}\frac{a-r_0}{a} \tag{69}$$

Si reemplazamos lo anterior en la ecuación para θ se obtiene que:

$$\theta(r=a) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{r_0}{a}\right)$$

Asi entonces el anterior es el ángulo se barre entre ir de la superficie al punto de maximo acercamiento, por razones de simetría este debe ser igual al ángulo que se barre en ir desde el punto de máximo acercamiento al centro hasta la superficie de nuevo. De lo anterior se deduce entonces que si en el trayecto de viaje de el vehiculo se acerca hasta el centro r_0 entonces los puntos estan separados angularmente una distancia $\alpha = \pi\left(1 - \frac{r_0}{a}\right)$. Como es de esperarse si los dos puntos son diametramente opuestos entonces $r_0 = 0$ y la trayectoria pasa por el centro y ademas como se comprueba facilmente es una linea recta en la que se presenta movimiento armónico simple.
Finalmente la integral que da el tiempo de viaje se puede reparametrizar en terminos de ϕ para obtener:

$$t_{min} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-\frac{\pi}{2}(1-\frac{r_0}{a})}^{\frac{\pi}{2}(1-\frac{r_0}{a})} \sqrt{\frac{\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2(\phi)\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2}{a^2 - r^2(\phi)}} d\phi \tag{70}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\pi}{a}\sqrt{a^2 - r_0^2} = \sqrt{\frac{m}{k}}\pi\sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{a}\right)^2} \tag{71}$$

Pero $\frac{r_0}{a} = 1 - \frac{\alpha}{\pi}$ así que el tiempo mínimo en términos de la separación angular es:

$$t_{min} = \sqrt{\frac{m}{k}}\pi\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)^2}$$

Finalmente se pide hallar el tiempo de viaje entre Los Ángeles y Nueva York. Estas ciudades estan separadas por una distancia de 4800 km.AAdemas se sabe que el diametro de la Tierra es de aproximadamente $a = 6400$ km luego su separación angular es de $\alpha = \frac{4800}{6400} = 0{,}75$ ademas la masa de la Tierra es de $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg y la constante de Cavendish tiene un valor de $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} entonces $\frac{k}{m} = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ s^{-2}.
El tiempo de viaje de Nueva York a Los Ángeles es $t_{NY-LA} = 1{,}64 \cdot 10^3$ s$= 27'$ y el radio mínimo es $r_0 = a\left(1 - \frac{0{,}75}{\pi}\right) = 4{,}9 \cdot 10^3$ km.

Ejercicio 2.16

Para el presente problema el Lagrangiano está dado por :

$$L = e^{t\gamma}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}(t)^2 - \frac{1}{2}kq(t)^2\right) \tag{72}$$

La ecuación de Euler Lagrange para el anterior Lagrangiano es:

$$e^{t\gamma}\left(kq(t) + m\left(\gamma\dot{q}(t) + \ddot{q}(t)\right)\right) = 0 \tag{73}$$

Que es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico amortiguado. Si se hace la transformación de coordenadas $q = e^{-\frac{t\gamma}{2}}s$ el Lagrangiano toma la forma siguiente:

$$L' = \frac{1}{8}\left(\left(m\gamma^2 - 4k\right)s(t)^2 - 4m\gamma\dot{s}(t)s(t) + 4m\dot{s}(t)^2\right) \tag{74}$$

La ecuación de Euler lagrange es:

$$\left(m\gamma^2 - 4k\right)s(t) = 4m\ddot{s}(t) \tag{75}$$

Esta es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico. Finalmente la función h de Jacobi para el anterior Lagrangiano es constante de movimiento, si se expresa en términos de $q(t)$ queda ($\omega^2 = k/m$):

$$h = \frac{1}{2}e^{t\gamma}\left(\omega^2 q(t)^2 + \gamma\dot{q}(t)q(t) + \dot{q}(t)^2\right) \tag{76}$$

Que es la constante de movimiento para el oscilador armónico amortiguado.

Ejercicio 2.18

Para este caso usando coordenadas esféricas tenemos lo siguiente:

$$T = \frac{1}{2}a^2m\left(\theta'^2 + \sin^2(\theta)\phi'^2\right) \tag{77}$$

$$V = mgz = mga\cos(\theta) \tag{78}$$

Pero $\phi = \omega t$. Así el lagrangiano es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}a^2m\left(\theta'^2 + \sin^2(\theta)(\omega)^2\right) - mga\cos(\theta) \tag{79}$$

La ecuación de Euler-Lagrange que satisface θ es:

$$am\left(\left(a\cos(\theta)\omega^2 + g\right)\sin(\theta) - a\theta''\right) = 0 \tag{80}$$

Como se ve de el lagrangiano la cantidad h (la función de energia) es conservada ya que el lagrangiano no depende explicitamente del tiempo. Como además contiene θ el momento generalizado $p_\theta = a^2m\theta'$ no se conserva. Para hallar condiciones de equilibrio hagamos $\theta' = 0 \implies \theta'' = 0$. Esto implica en (80) que:

$$\left(a\cos(\theta)\omega^2 + g\right)\sin(\theta) = 0 \tag{81}$$

La anterior ecuación implica o bien que $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ o que $\omega = \sqrt{\frac{-g}{a\cos(\theta)}}$. El mínimo valor que toma ω es $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$. Para valores de ω menores que ω_0 la ecuación (81) no tiene soluciones reales excepto las triviales(0 y π), es decir no hay mas puntos de equilibrio.

Ejercicio 2.24

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) \tag{82}$$

$$\dot{x} = -\sum_{j=0}^{\infty} a_j \omega j \sin(j\omega t) \tag{83}$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \tag{84}$$

$$S = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} L dt \tag{85}$$

Si sustitimos x y $\dot{x}$ en L obtenemos:

$$L = \frac{m(-\sum_{j=0}^{\infty} a_j \omega j \sin(j\omega t))^2}{2} - \frac{k(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(j\omega t))^2}{2} \tag{86}$$

$$L = \frac{m(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \omega^2 j^2 \sin^2(j\omega t) - 2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{i<j}^{\infty} a_j a_i \omega^2 ij \sin(j\omega t)\sin(i\omega t))}{2} - \frac{k(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \cos^2(j\omega t) + 2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{i<j}^{\infty} a_j a_i \cos(j\omega t)\sin(i\omega t))}{2} \tag{87}$$

Al hacer la integral los términos cruzados con diferente índice se anulan i.e. si $i \neq j$:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(i\omega t)\sin(j\omega t) dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(i\omega t)\cos(j\omega t) dt = 0 \tag{88}$$

Por otro lado las integrales con términos no cruzados son facilmente calculadas así:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(0) dt = \frac{2\pi}{\omega} \tag{89}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(0) dt = 0 \tag{90}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(j\omega t) dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(j\omega t) dt = \frac{\pi}{\omega} \tag{91}$$

La acción S toma la siguiente forma:

$$S = \frac{m\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \omega^2 j^2 \frac{\pi}{\omega}}{2} - \frac{k\left(\frac{2\pi}{\omega} a_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \frac{\pi}{\omega}\right)}{2} \tag{92}$$

$$S = -\frac{k\pi}{\omega} a_0^2 + \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \left(m\omega j^2 - \frac{k}{\omega}\right) \tag{93}$$

La acción es ahora una función de las a_j, por lo tanto para que sea extremo el gradiente ∇_a de la acción con respecto a las a_j debe ser 0, es decir el vector infinito con entradas:

$$\left(\frac{-2k\pi a_0}{\omega}, ..., \pi a_j\left(mj^2\omega - \frac{k}{\omega}\right), ...\right) \tag{94}$$

Debe ser el vector nulo. Claramente lo anterior implica que $a_0 = 0$ y que

$$a_j \text{ o } \omega = \sqrt{\frac{k}{j^2 m}} \tag{95}$$

Supongamos que $a_l \neq 0$. Esto implica que $\omega = \sqrt{\frac{k}{l^2 m}}$ y que $a_{j\neq l} = 0$. Reescribiendo la solucion tenemos

$$x = a_l \cos\left(\frac{l}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = a_l \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{96}$$