Ejercicios del capítulo 9 de *Classical Mechanics* de H. Goldstein

Nicolás Quesada M.
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Ejercicio 9.9

Sea u una función de $r^2, p^2, \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$. Para mostar que $[u,\mathbf{L}] = 0$ es suficiente ver que $[r^2,\mathbf{L}] = 0$, $[p^2,\mathbf{L}] = 0$ y $[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p},\mathbf{L}] = 0$ ya que:

$$[u,\mathbf{L}] = \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial(r^2)}\frac{\partial r^2}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial(p^2)}\frac{\partial p^2}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\frac{\partial \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} - \left(\frac{\partial u}{\partial(r^2)}\frac{\partial r^2}{\partial p_i} + \frac{\partial u}{\partial(p^2)}\frac{\partial p^2}{\partial p_i} + \frac{\partial u}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\frac{\partial \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{\partial p_i}\right)\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial(r^2)}\left(\frac{\partial r^2}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} - \frac{\partial r^2}{\partial p_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}\right)\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial(p^2)}\left(\frac{\partial p^2}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} - \frac{\partial p^2}{\partial p_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}\right)\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}\left(\frac{\partial \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial(r^2)}[r^2,\mathbf{L}] + \frac{\partial u}{\partial(p^2)}[p^2,\mathbf{L}] + \frac{\partial u}{\partial(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p},\mathbf{L}]$$

Ahora calculemos los corchetes de Poisson de la anterior expresión:

$$[x_l x_l, \epsilon_{ijk} x_i p_j] = \epsilon_{ijk}([x_l x_l, x_i]p_j + x_i[x_l x_l, p_j]) = -\epsilon_{ijk}(p_j([x_i,x_l]x_l + x_l[x_i,x_l]) + x_i([p_j,x_l]x_l + x_l[p_i,x_l]))$$

Pero $[x_i,x_j] = [p_i,p_j] = 0$ y $[x_i,p_j] = -[p_j,x_i] = \delta_{ij}$. Asi entonces:

$$[x_l x_l, \epsilon_{ijk} x_i p_j] = -\epsilon_{ijk}(2x_i x_l[p_j,x_l]) = 2\epsilon_{ijk}x_i x_j = \epsilon_{ijk}x_i x_j + \epsilon_{jik}x_j x_i = 0$$

Para el segundo término tenemos:

$$[p_l p_l, \epsilon_{ijk} x_i p_j] = \epsilon_{ijk}(p_j[p_l p_l, x_i] + x_i[p_l p_l, p_j]) = -\epsilon_{ijk}(p_j[x_i, p_l p_l]) = -\epsilon_{ijk}2p_j p_l[x_i,p_l] = -2\epsilon_{ijk}p_j p_i = 0$$

Finalmente:

$$[x_l p_l, \epsilon_{ijk} x_i p_j] = \epsilon_{ijk}([x_l p_l, x_i]p_j + x_i[x_l p_l, p_j]) = -\epsilon_{ijk}(p_j([x_i,x_l]p_l + x_l[x_i,p_l]) + x_i([p_j,x_l]p_l + x_l[p_j,p_l])) =$$

$$-\epsilon_{ijk}p_j x_i + \epsilon_{ijk}x_i p_j = 0$$

Ahora si $\mathbf{F} = u\mathbf{r} + v\mathbf{p} + w\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ donde u,v,w son funciones del mismo tipo que las del literal anterior. Entonces se pide mostrar que $[F_i, L_j] = \epsilon_{ijk}F_k$. Para ver lo anterior calculemos por separado los siguientes expresiones:

$$[ux_i, L_j] = u[x_i, L_j]$$

$$[vp_i, L_j] = v[p_i, L_j]$$

$$[wL_i, L_j] = w[L_i, L_j]$$

ya que $[u,L_j] = [v,L_j] = [w,L_j] = 0$. Ahora basta calcular las anteriores expresiones.

$$[x_l, \epsilon_{ijk}x_i p_j] = \epsilon_{ijk}(p_j[x_l,x_i] + x_i[x_l,p_j]) = \epsilon_{ilk}x_i$$

$$[p_l, \epsilon_{ijk}x_ip_j] = \epsilon_{ijk}(x_i[p_l,p_j] + p_j[p_l,x_i]) = -\epsilon_{ljk}p_j = \epsilon_{jlk}p_j$$

$$[\epsilon_{lmi}x_lp_m, \epsilon_{abj}x_ap_b] = \epsilon_{lmi}\epsilon_{abj}(x_a[x_lp_m,p_b]+p_b[x_lp_m,x_a]) = -\epsilon_{lmi}\epsilon_{abj}(x_a([p_b,x_l]p_m)+p_b([x_a,p_m]x_l)) =$$

$$-\epsilon_{lmi}\epsilon_{abj}(-x_ap_m\delta_{bl} + \delta_{am}p_bx_l)$$

Finalmente: $[L_i, L_j] = \epsilon_{lmi}\epsilon_{abj}\delta_{bl}x_ap_m - \epsilon_{lmi}\epsilon_{abj}\delta_{am}p_bx_l = \epsilon_{lmi}\epsilon_{alj}x_ap_m - \epsilon_{lmi}\epsilon_{mbj}p_bx_l = \epsilon_{ijk}L_k$
Reuniendo todo lo anterior tenemos que (haciendo los cambios de indices adecuados en la anteriores ecuaciones):

$$[F_i, L_j] = u\epsilon_{ijk}x_k + v\epsilon_{ijk}p_k + \epsilon_{ijk}wL_k$$

Ejercicio 9.28

Para este problema tenemos que los momentos canonicos estan dados por:

$$p_k = m\dot{x}_k + \frac{q}{2}\epsilon_{ijk}B_ix_j$$

De estos se obtiene facilmente que:

$$v_k = \dot{x}_k = \frac{p_k - \frac{q}{2}\epsilon_{ijk}B_ix_j}{m}$$

Así entonces:

$$[v_k, v_l] = [\frac{p_k - \frac{q}{2}\epsilon_{ijk}B_ix_j}{m}, \frac{p_l - \frac{q}{2}\epsilon_{abl}B_ax_b}{m}] = \frac{1}{m^2}([p_k, -\frac{q}{2}\epsilon_{abl}B_ax_b] - [\frac{q}{2}\epsilon_{ijk}B_ix_j, p_l])$$

$$= \frac{1}{m^2}(-\frac{q}{2}\epsilon_{abl}B_a[p_k,x_b] - \frac{q}{2}\epsilon_{ijk}B_i[x_j,p_l]) = \frac{1}{m^2}(\frac{q}{2}\epsilon_{abl}B_a\delta_{kb} - \frac{q}{2}\epsilon_{ijk}B_i\delta_{jl} = \frac{1}{m^2}(\frac{q}{2}\epsilon_{akl}B_a - \frac{q}{2}\epsilon_{ilk}B_i)$$

$$= \frac{1}{m^2}\frac{q}{2}(\epsilon_{akl}B_a + \epsilon_{ikl}B_i) = \frac{q}{m^2}\epsilon_{akl}B_a$$

Por otro lado:

$$[x_l, v_k] = [x_l, \frac{p_k - \frac{q}{2}\epsilon_{ijk}B_ix_j}{m}] = \frac{\delta_{lk}}{m}$$

$$[p_l, \dot{x}_k] = \frac{p_k - \frac{q}{2}\epsilon_{ijk}B_ix_j}{m}] = \frac{-q\epsilon_{ijk}B_i}{2m}[p_l, x_j] = \frac{q\epsilon_{ijk}B_i}{2m}\delta_{lj} = \frac{q\epsilon_{ilk}B_i}{2m}$$

$$[x_k, \dot{p}_l] = [x_k, [p_l, H]] = -[H, [x_k, p_l]] - [p_l, [H, x_k]] = -[p_l, -\dot{x}_k] = [p_l, \dot{x}_k] = \frac{q\epsilon_{ilk}B_i}{2m}$$

Para el último cálculo es necesario encontrar una expresión para $\dot{p}_a$, para esto usamos las ecuaciones de Hamilton:

$$H = \frac{\left(p_i - \frac{q}{2}B_jx_k\epsilon_{ijk}\right)\left(p_i - \frac{q}{2}B_lx_n\epsilon_{iln}\right)}{2m}$$

Con estas se encuentran facilmente los $\dot{p}_a$:

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial x_a} = \frac{q}{2}B_l\epsilon_{ila}\left(p_i - \frac{q}{2}B_jx_k\epsilon_{ijk}\right) + \frac{q}{2}B_j\epsilon_{ija}\left(p_i - \frac{q}{2}B_lx_n\epsilon_{iln}\right)$$

y se calcula el corchete de Poisson:

$$[p_b, \dot{p}_a] = \frac{1}{2m}\left(-\frac{q^2}{4}B_jB_l\epsilon_{ijk}\epsilon_{ila}[p_b, x_k] - \frac{q^2}{4}B_lB_j\epsilon_{iln}\epsilon_{ija}[p_b, x_n]\right)$$

$$= \frac{q^2}{8m}B_lB_j(\epsilon_{ijb}\epsilon_{ila} + \epsilon_{ilb}\epsilon_{ija}) = \frac{q^2}{4m}(B_lB_l\delta_{ba} - B_aB_b)$$

Ejercicio 9.30

Supongamos que Q, R son constantes de movimiento entonces::

$$[Q,H] = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$[R,H] = -\frac{\partial R}{\partial t}$$

Evaluemos las siguientes cantidades:

$$[[Q,R],H] = [R,[H,Q]] + [Q,[R,H]] = [R,\frac{\partial Q}{\partial t}] + [Q,-\frac{\partial R}{\partial t}] =$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)\frac{\partial R}{\partial p_i} - \frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)\frac{\partial Q}{\partial p_i}$$

Por otro lado:

$$-\frac{\partial [Q,R]}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial R}{\partial p_i} - \frac{\partial Q}{\partial p_i}\frac{\partial R}{\partial x_i}\right) =$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Q}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right)\frac{\partial R}{\partial p_i} - \frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\right)\frac{\partial Q}{\partial p_i}$$

Para ver que $[Q,R]$ es constante de movimiento es suficiente comparar las 2 últimas expresiones y notar que las derivadas parciales conmutan.

Para mostrar que si F y H son constantes de movimiento entonces $\frac{\partial^n F}{\partial t^n}$ es constante de movimiento basta notar que $[F,H] = -\frac{\partial F}{\partial t}$ es constante de movimiento i.e:

$$\frac{d[F,H]}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0$$

Para probar que esto cierto para la n-esima derivada se usa inducción:
Se probo para $n=1$ se cumple i.e. : $\frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0$
Ahora supongamos que se cumple para n es decir: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^n F}{\partial t^n}\right) = [\frac{\partial^n F}{\partial t^n}, H] + \frac{\partial^{n+1} F}{\partial t^{n+1}} = 0$ pero como por hipotesis $\frac{\partial^n F}{\partial t^n}$ es constante de movimiento entonces $[\frac{\partial^n F}{\partial t^n}, H]$ tambien lo es y por lo tanto $\frac{\partial^{n+1} F}{\partial t^{n+1}} = -[\frac{\partial^n F}{\partial t^n}, H]$ tambien es constante de movimiento.

Finalmente tomando $F = x - \frac{pt}{m}$ y $H = \frac{p^2}{2m}$ se verifica facilmente que:

$$[x - \frac{pt}{m}, \frac{p^2}{2m}] = [x, \frac{p^2}{2m}] = \frac{2p}{2m}[x,p] = \frac{2p}{2m} = -\frac{\partial F}{\partial t} = -(-\frac{p}{m})\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{p}{m}$$

Ejercicio 9.31

Sea $u = \ln(p + im\omega q) - i\omega t$ y $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ Entonces:

$$[u,H] = \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial p} = \left(\frac{im\omega}{p + imq\omega}\right)\frac{p}{m} - mq\omega^2\left(\frac{1}{p + imq\omega}\right) = i\omega\frac{p + imq\omega}{p + imq\omega} = i\omega$$

Por otro lado claramente $\frac{\partial u}{\partial t} = -i\omega$, por lo tanto u es una constante de movimiento.
Como sabemos las soluciones explicitas del problema podemos ver que es exactamente u. Si $q = A\sin(\omega t + \phi)$ entonces $p = m\omega A\cos(\omega t + \phi)$ y la cantidad dentro del logaritmo es: $m\omega A e^{i(\omega t + \phi)}$. De acuerdo a lo anterior $u = \ln m\omega A + i(\omega t + \phi) - i\omega t = i\phi + \ln\sqrt{2Em}$, donde se ha usado que $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$. Asi pues vemos que u no es mas que el logaritmo de una función de la energía mas i veces la fase inicial del oscilador.