Ejercicios del capítulo 10 de *Classical Mechanics* de H. Goldstein

Nicolás Quesada M.
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Ejercicio 10.5

Se pide mostrar que $S = \frac{1}{2}m\left(q^2+\alpha^2\right)\omega\cot(\omega t) - mq\alpha\omega\csc(\omega t)$ es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi para el oscilador armónico. Para este caso dicha ecuación es:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Esto se hace directamente calculando las derivadas que aparecen en la anterior ecuación:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = \frac{1}{2m}\left[(mq\omega\cot(\omega t) - m\alpha\omega\csc(\omega t))^2 + m^2\omega^2q^2\right] = \frac{1}{2}m\omega^2\left(q^2 - 2\alpha\cos(\omega t)q + \alpha^2\right)\csc^2(\omega t)$$

La última igualdad se obtiene al tener en cuenta que $1+\cot^2 z = \csc^2 z$ y que $\cot z\csc z = \cos z\csc^2 z$. Por otro lado:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2}m\omega^2\left(q^2 - 2\alpha\cos(t\omega)q + \alpha^2\right)\csc^2(t\omega)$$

Comparando las 2 últimas igualdades se ve que la S dada es efectivamente solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Conocida S podemos escribir las ecuaciones de transformación:

$$p = mq\omega\cot(\omega t) - m\alpha\omega\csc(t\omega) \Rightarrow \alpha = q\cos(\omega t) - \frac{p\sin(\omega t)}{m\omega}$$

$$\beta = m\omega(\alpha\cos(\omega t) - q)\csc(\omega t)$$

Para mostrar que la S dada genera la solución correcta del problema del oscilador armónico lo primero que hay que notar que tanto el nuevo momento conjugado α como su coordenada generalizada β son constantes de movimiento y por lo tanto podemos escribir:

$$\alpha = q\cos(\omega t) - \frac{p\sin(\omega t)}{m\omega} = \alpha(t_0) = q(t_0)\cos(\omega t_0) - \frac{p(t_0)\sin(\omega t_0)}{m\omega}$$

$$\beta = m\omega(\alpha\cos(\omega t) - q)\csc(\omega t) = \beta(t_0) = m\omega(\alpha\cos(\omega t_0) - q(t_0))\csc(\omega t_0)$$

El valor de $\alpha(t_0)$ puede ser sustituido en la última ecuación para obtener:

$$\cot(t\omega)\left(\cos(t_0\omega)q(t_0) - \frac{p(t_0)\sin(t_0\omega)}{m\omega}\right) - \csc(t\omega)q = \cot(t_0\omega)\left(\cos(t_0\omega)q(t_0) - \frac{p(t_0)\sin(t_0\omega)}{m\omega}\right) - \csc(t_0\omega)q(t_0)$$

De la anterior ecuación se puede obtener q asi:

$$q = \cos((t-t_0)\omega)q(t_0) + \frac{p(t_0)\sin((t-t_0)\omega)}{m\omega}$$

Para obtener p basta igualar $\alpha = \alpha(t_0)$ despejar p y sustituir la expresión anterior para obtener:

$$p = \csc(t\omega)(m\omega\cos(t\omega)q - m\omega\cos(\omega t_0)q(t_0) + p(t_0)\sin(t_0\omega))$$

$$p = \cos((t-t_0)\omega)p(t_0) - m\omega q(t_0)\sin((t-t_0)\omega)$$

Que es evidentemente la solución al problema.

Ejercicio 10.6

Para solucionar este problema es mejor comenzar escribiendo el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kr^2 + q\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$$

El campo magnético es homogeneo en la dirección z , $\mathbf{B} = B\ \mathbf{k}$ por lo tanto el vector de potencial magnético viene dado:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r} = \frac{1}{2}B\left(-\mathbf{i}y + \mathbf{j}x\right) = \frac{1}{2}Br\mathbf{u}_\theta$$

Teniendo en cuenta que $v = \dot{r}\mathbf{u_r} + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$ entonces el lagrangiano toma la siguiente forma:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}qr^2\dot{\theta}$$

Con el lagrangiano podemos obtener los momentos conjugados generalizados así:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}Bqr^2 + m\dot{\theta}r^2 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\frac{2p_\theta}{r^2} - Bq}{2m}$$

Conocidos los momentos conjugados generalizados podemos escribir el Hamiltoniano:

$$H = \dot{\theta}p_\theta + \dot{r}p_r - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{B^2q^2r^2}{8m} + \frac{1}{2}kr^2 - \frac{Bqp_\theta}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \left(\frac{p_\theta}{r} - \frac{rqB}{2}\right)^2 + mkr^2\right)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi para el presente problema toma la forma:

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)}{r} - \frac{rqB}{2}\right)^2 + mkr^2\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Como θ es una variable cíclica es útil escribir a la función principal de Hamilton como:

$$S(r,\theta,E,\alpha_\theta,t) = W_r(r,E) + W_\theta(\theta,\alpha_\theta) - Et = W_r(r,\alpha) + \theta\alpha_\theta - Et$$

sustituyendo en la ecuación de Hamilton-Jacobi y teniendo en cuenta que $p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \alpha_\theta$ se obtiene:

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{\partial W_s}{\partial \theta}\right)}{r} - \frac{rqB}{2}\right)^2 + mkr^2\right) = \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{p_\theta}{r} - \frac{rqB}{2}\right)^2 + mkr^2\right) = E$$

la anterior ecuación puede ser resuelta para W_r asi:

$$W_r = \int\sqrt{2mE - mkr^2 - \left(\frac{p_\theta}{r} - \frac{rqB}{2}\right)^2}dr$$

Finalmente obtenemos que la función principal de Hamilton es:

$$S(r,\theta,E,p_\theta) = \int\sqrt{2mE - mkr^2 - \left(\frac{p_\theta}{r} - \frac{rqB}{2}\right)^2}dr + \theta p_\theta - Et$$

Note que si $p_\theta(t=0) = 0 \Rightarrow p_\theta(t) = 0\ \forall t$ (ya que p_θ es constante de movimiento) la integral para W_r se hace mucho mas sencilla:

$$W_r = \int\sqrt{2mE - \left(mk + \left(\frac{qB}{2}\right)^2\right)r^2dr}$$

Al sustituir lo anterior en la función prinicipal de Hamilton se obtiene:

$$S = m\int\sqrt{\frac{2E}{m} - \left(\frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{2m}\right)^2\right) r^2}dr - Et = m\int\sqrt{\frac{2E}{m} - (\omega_0^2 + \omega_c^2)\, r^2}dr - Et =$$

Si $p_\theta = 0$ entonces además

$$\dot{\theta} = \frac{-qB}{2m} \Rightarrow \theta = \frac{-qB}{2m}(t - t_0) + \theta(t_0)$$

Pero $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ no es más que la frecuencia "natural"del oscilador armónico y $\frac{qB}{2m} = \omega_c$ es la frecuencia ciclotrónica debida al campo magnético. Finalmente se ve que si compara la última ecuación con la ecuación de un oscilador armónico que no este en presencia de campo magnético entonces ambas ecuaciones tienen la misma forma excepto por que en este ejemplo el oscilador se mueve con un frecuencia efectiva $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_c^2$. Asi entonces radialmente la partícula se mueve como un oscilador armónico con frecuencia angular $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_c^2}$ y ademas rota con velocidad angular constante $\frac{-qB}{2m} = \omega_c$.

Ejercicio 10.13

El hamiltoniano del problema viene dado por:

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + F|x|$$

De la anterior ecuación podemos obtener a p como función de x asi:

$$p = \sqrt{2m}\sqrt{E - F|x|}$$

Con la anterior ecuación podemos obtener la variable de acción para el problema:

$$J = \oint pdx = \oint \sqrt{2m}\sqrt{E - F|x|}dx = 4\sqrt{2m}\int_0^{E/F} \sqrt{E - F|x|}dx = \frac{8\sqrt{2m}}{3}\frac{E^{3/2}}{F}$$

La integral ha sido evaluada usando el hecho de que la función sobre el contorno cerrado de integración recorre cuatro veces el camino desde 0 hasta $x = \frac{E}{F}$(que es el punto de retorno) y un sencillo cambio de variable $y = E - F|x|$. De la última ecuación se puede obtener a $E = H$ como función de J:

$$H = \frac{3^{2/3}\left(\frac{FJ}{\sqrt{m}}\right)^{2/3}}{4\sqrt[3]{2}}$$

Con lo anterior en mente y usando que la frecuencia $\nu = \frac{\partial H}{\partial J}$ y que $T = \frac{1}{\nu} = \frac{\partial J}{\partial H}$entonces:

$$T = \frac{4\sqrt{2mE}}{F}$$