Ejercicios del capítulo 8 de *Classical Mechanics* de H. Goldstein

Nicolás Quesada M.
Instituto de Física, Universidad de Antioquia

Ejercicio 8.2

Supongamos que tenemos un Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, con su respectivo Hamiltoniano H, y momentos conjugados p_i. Se desea averiguar como queda el nuevo Hamiltoniano H' y los nuevos momentos conjugados p'_i si se usa un nuevo Lagrangiano $L' = L + \frac{dF}{dt}$ donde F es una función arbitraria pero diferenciable. Los nuevos momentos generalizados vienen dados por:

$$p'_i = \frac{\partial L'(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial\left(\frac{dF}{dt}\right)}{\partial \dot{q}_i}$$

Pero el último término puede transformarse asi: (Suma sobre índices repetidos):

$$\frac{\partial\left(\frac{dF}{dt}\right)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}\right)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

Teniendo en cuanto lo anterior y que $p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}$ tenemos que:

$$p'_i = p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

El nuevo Hamiltoniano está dado por:

$$H' = \dot{q}_i p'_i - L' = \dot{q}_i(p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}) - L - \frac{dF}{dt} = \dot{q}_i(p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}) - L - (\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t})$$

$$H' = \dot{q}_i p_i - L - \frac{\partial F}{\partial t} = H - \frac{\partial F}{\partial t}$$

Para mostrar que las ecuaciones que se obtienen con este nuevo Hamiltoniano para p'_i y q_i tienen la misma forma que las que se obtienen para p_i y q_i através del Hamiltoniano original escribamos el principio de Hamilton para el antiguo Hamiltoniano H teniendo en cuenta la adición de $\frac{dF}{dt}$:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L + \frac{dF}{dt} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i\dot{q}_i - H + \frac{dF}{dt})dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i\dot{q}_i - H + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t})dt$$

Los términos dentro de la integral se pueden reorganizar para obtener:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} ((p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i})\dot{q}_i - (H - \frac{\partial F}{\partial t}))dt$$

Pero el primer paréntesis resulta ser p'_i y el segundo H' asi:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p'_i\dot{q}_i - H')dt$$

En este punto podemos asumir que H' esta escrito en términos de las q_i y las nuevas p'_i y asi podemos usar las ecuaciones de Euler-Lagrange para hallar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} = \dot{p}'_i + \frac{\partial H'}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i'}\right)-\frac{\partial f}{\partial p_i'}=\dot{q}_i-\frac{\partial H'}{\partial p_i'}=0$$

Que son las ecuaciones de Hamilton para las variables (q_i, p_i')

Para el resto de ejercicios a' denota la derivada total de la variable a con respecto al tiempo t.

Ejercicio 8.9

Para este problema se hace un procedimiento análogo al que se hace en la formulación lagrangiana. Asi entonces:

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} q_i'p_i-H(q_j,p_j,t)-\lambda_i\psi_i(q_j,p_j,t)dt$$

La variación se puede hacer ahora con n δq_i, n δp_i y m λ_i. Para esta problema las $2n$ ecuaciones de Euler-Lagrange de interes son (siendo f el integrando de la ecuación anterior y $k=1,...,n$):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k'}\right)-\frac{\partial f}{\partial q_k}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k'}\right)-\frac{\partial f}{\partial p_k}=0$$

Sustituyendo para las primeras n ecuaciones obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(q_i'p_i-H(q_j,p_j,t)-\lambda_i\psi_i(q_j,p_j,t))}{\partial q_k'}\right)-\frac{\partial(q_i'p_i-H(q_j,p_j,t)-\lambda_i\psi_i(q_j,p_j,t))}{\partial q_k}=0$$

$$\frac{dp_k}{dt}-(\frac{\partial(-H(q_j,p_j,t)-\lambda_i\psi_i(q_j,p_j,t))}{\partial q_k})=0$$

Reorganizando términos y teniendo en cuenta que hay suma sobre el índice repetido i nos queda:

$$-p_k'=\frac{\partial H}{\partial q_k}+\lambda_i\frac{\partial\psi_i(q_j,p_j,t)}{\partial q_k}$$

Para las restantes n ecuaciones tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(q_i'p_i-H(q_j,p_j,t)-\lambda_i\psi_i(q_j,p_j,t))}{\partial p_k'}\right)-\frac{\partial(q_i'p_i-H(q_j,p_j,t)-\lambda_i\psi_i(q_j,p_j,t))}{\partial p_k}=0$$

Reorganizando los términos tenemos (De nuevo suma sobre i):

$$0-\left(q_k'-\frac{\partial H}{\partial p_k}-\lambda_i\frac{\partial\psi_i(q_j,p_j,t)}{\partial p_k}\right)=0$$

o

$$q_k'=\frac{\partial H}{\partial p_k}+\lambda_i\frac{\partial\psi_i(q_j,p_j,t)}{\partial p_k}$$

Ejercicio 8.12

Usando la convención usada en el capítulo 2 el lagrangiano del sistema se puede escribir como:

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}\mathbf{r'}^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\mathbf{R'}^2-U(R)$$

Usando coordenadas esfericas R,θ,ϕ para $\mathbf{R}$ y coordenadas rectangulares x,y,z para $\mathbf{r}$ y llamando $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ y $M=m_1+m_2$ tenemos:

$$L = \frac{\mu}{2}(R'^2 + R^2\theta'^2 + R^2\sin^2(\theta)\phi'^2) + \frac{M}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U(R)$$

De lo anterior se ve facilmente que el Hamiltoniano del sistema es:

$$H = \frac{1}{2\mu}(p_R^2 + \frac{p_\theta^2}{R^2} + \frac{p_\phi^2}{R^2\sin^2(\theta)}) + \frac{1}{2M}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(R)$$

Ahora obtegamos la ecuaciones de Hamilton para p_x, p_y, p_z, x, y, z que son:

$$p_x' = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x = c_1$$

$$p_y' = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_y = c_2$$

$$p_z' = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \Rightarrow p_z = c_3$$

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x/M \Rightarrow x = x_0 + (p_x/M)t$$

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_x/M \Rightarrow y = y_0 + (p_y/M)t$$

$$z' = \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_x/M \Rightarrow z = z_0 + (p_z/M)t$$

Con lo anterior nos hemos librado de la mitad de las variables y podemos escribir el Hamiltoniano de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{2\mu}(p_R^2 + \frac{p_\theta^2}{R^2} + \frac{p_\phi^2}{R^2\sin^2(\theta)}) + U(R) + c$$

Donde $c = \frac{1}{2M}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$. De ahora en adelante dicha constante se omitira ya que no afecta las ecuaciones de movimiento de las demás variables. En el anterior Hamiltoniano la variable ϕ es cíclica por lo que $p_\phi = l_z$ es constante de movimiento y asi:

$$H = \frac{1}{2\mu}(p_R^2 + \frac{p_\theta^2}{R^2} + \frac{l_z^2}{R^2\sin^2(\theta)}) + U(R) = \frac{1}{2\mu}(p_R^2 + \frac{1}{R^2}(p_\theta^2 + \frac{l_z^2}{\sin^2(\theta)})) + U(R) = \frac{1}{2\mu}(p_R^2 + \frac{f(\theta, p_\theta)}{R^2})) + U(R)$$

Ahora como en ves de θ y p_θ por separado aparece una función $f(\theta, p_\theta)$ de las dos esta debe ser una constante de movimientom *i.e.*

$$f(\theta, p_\theta) = L^2 = p_\theta^2 + \frac{l_z^2}{\sin^2(\theta)} = k$$

De la anterior ecuación podemos obtener p_θ en términos de θ asi:

$$p_\theta = \pm\sqrt{L^2 - \frac{l_z^2}{\sin^2(\theta)}}$$

y ademas podemos escribir el Hamiltoniano asi:

$$H = \frac{1}{2\mu}(p_r^2 + \frac{L^2}{R^2}) + U(r)$$

Finalmente podemos obtener p_R en función de r como ($H = E =$ constante de Movimiento):

$$p_R = \pm\sqrt{2\mu(H - U(r) - \frac{L^2}{2R^2})} = \pm\sqrt{2\mu(E - U(r) - \frac{L^2}{2R^2})}$$

Con lo anterior en mente podemos escribir las restantes ecuaciones de Hamilton:

$$p'_R = -\frac{\partial H}{\partial R} = \frac{L^2}{\mu R^3} - \frac{\partial U}{\partial R} \Rightarrow p_R - p_{R_0} = \int_0^t \frac{L^2}{\mu R^3} - \frac{\partial U}{\partial R} dt$$

$$p'_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} \frac{l_z^2}{\mu R^2} \Rightarrow p_\theta - p_{\theta_0} = \int_0^t \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} \frac{l_z^2}{\mu R^2} dt$$

$$p'_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow p_\phi = l_z$$

$$R' = \frac{\partial H}{\partial p_R} = p_r/\mu \Rightarrow t = \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U - \frac{L^2}{2mR^2})}}$$

$$\theta' = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = p_\theta/(R^2\mu) \Rightarrow \int_0^t \frac{dt}{\mu R^2} = \int_{\theta_0}^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{L^2 - \frac{l_z^2}{\sin^2\theta}}}$$

$$\phi' = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = l_z/(\mu R^2 \sin^2(\theta)) \Rightarrow \phi - \phi_0 = l_z \int_0^t \frac{dt}{mR^2 \sin^2(\theta)}$$

Note que una vez realizada la integral correspodiente a R' y obtenido $R(t)$ en forma explicita este se puede reemplazar en la integral correspodiente a θ' y asi obtener θ como función explicita de t. Con estas dos variables conocidas se puede sustituir en la ecuaciones de las demás variables, realizar las respectivas integraciones e inversiones y resolver el problema completamente.

Ejercicio 8.14

Sea $L = ax'^2 + \frac{by'}{x} + cx'y' + fy^2x'z' + gy' - k\sqrt{x^2+y^2}$. De este obtenemos los momentos conjugados:

$$p_x = fz'y^2 + 2ax' + cy'$$

$$p_y = \frac{b}{x} + g + cx'$$

$$p_z = fy^2x'$$

Con estos podemos obtener el Hamiltoniano:

$$H = q'_i p_i - L = (fx'z'y^2 + \left(\frac{b}{x} + g + cx'\right) y' + x'\left(fz'y^2 + 2ax' + cy'\right))$$

$$-(ax'^2 + \frac{by'}{x} + cx'y' + fy^2x'z' + gy' - k\sqrt{x^2+y^2})$$

$$H = (2fx'z'y^2 + 2ax'^2 + gy' + 2cx'y' + \frac{by'}{x}) - (ax'^2 + \frac{by'}{x} + cx'y' + fy^2x'z' + gy' - k\sqrt{x^2+y^2})$$

$$H = ax'^2 + \left(fz'y^2 + cy'\right) x' + k\sqrt{x^2+y^2}$$

Aunque la transformación (lineal) que manda a las velocidades en los momentos no tiene inversa lo que si se puede hacer es de la ecuación de p_x despejar y' y de la de p_z a x' para obtener:

$$y' = \frac{-fz'y^2 + p_x - 2ax'}{c} = \frac{-fz'y^2 + p_x - 2a\frac{p_z}{fy^2}}{c}$$

$$x' = \frac{p_z}{fy^2}$$

y sustituirlos en la ecuación del Hamiltoniano:

$$H = ax'^2 + \left(fz'y^2 + c\frac{-fz'y^2 + p_x - 2ax'}{c}\right) x' + k\sqrt{x^2+y^2}$$

$$H=\frac{ap_z^2}{f^2y^4}+\frac{\left(p_x-\frac{2ap_z}{fy^2}\right)p_z}{fy^2}+k\sqrt{x^2+y^2}$$

$$H=-\frac{ap_z^2}{f^2y^4}+\frac{p_xp_z}{fy^2}+k\sqrt{x^2+y^2}$$

Este Hamiltoniano no depende ni de p_y ni de z, por lo tanto $y=c$ y $p_z=k$ son constantes de movimiento. Además H no depende explicitamente de t por lo tanto H tambien es constante de movimiento

Ejercicio 8.19

Del dibujo se ve que la posición del cuerpo puede ser escrita asi:

$$\tilde{x}=l\sin(\theta)+x$$

$$\tilde{z}=-l\cos(\theta)+z=ax^2-l\cos(\theta)$$

Donde θ es el ángulo que forma el eje del péndulo con la vertical. Así el lagrangiano toma la siguiente forma:

$$L=\frac{1}{2}m\left(\tilde{x}'^2+\tilde{z}'^2\right)-mg\tilde{z}$$

Usando como coordenadas generalizadas x y θ se reescribe asi:

$$\frac{1}{2}m\left((x'+l\cos(\theta)\theta')^2+(2axx'+l\sin(\theta)\theta')^2\right)-mg\left(ax^2-l\cos(\theta)\right)$$

Expandiendo:

$$L=2a^2mx'^2x^2-agmx^2+2alm\sin(\theta)x'\theta'x+\frac{1}{2}mx'^2+\frac{1}{2}l^2m\cos^2(\theta)\theta'^2+\frac{1}{2}l^2m\sin^2(\theta)\theta'^2+glm\cos(\theta)+lm\cos(\theta)x'\theta'$$

Lo que puede ser reescrito asi:

$$L=L_0+\frac{1}{2}\mathbf{q'}^TT\mathbf{q'}$$

con:

$$\mathbf{q'}=\begin{pmatrix}x'\\ \theta'\end{pmatrix}$$

$$T=\begin{pmatrix}4a^2mx^2+m & lm\cos(\theta)+2alm\sin(\theta)x\\ lm\cos(\theta)+2alm\sin(\theta)x & l^2m\end{pmatrix}$$

$$L_0=glm\cos(\theta)-agmx^2$$

Para hallar el Hamiltoniano se usa el procedimiento de la ecuación 8.27 página 340 capítulo 8:

$$H(q,p,t)=\frac{1}{2}\mathbf{p}^TT^{-1}\mathbf{p}-L_0(q,t)$$

Para este caso la inversa de T es:

$$T^{-1}=\frac{1}{\det(T)}\begin{pmatrix}l^2m & -2alm\sin(\theta)x-lm\cos(\theta)\\ -2alm\sin(\theta)x-lm\cos(\theta) & 4a^2mx^2+m\end{pmatrix}$$

$$\det(T)=l^2m^2-l^2\cos^2(\theta)m^2+4a^2l^2x^2m^2-4a^2l^2\sin^2(\theta)x^2m^2-4al^2\cos(\theta)\sin(\theta)xm^2$$

$$\det(T)=m^2l^2(\sin(\theta)^2+4a^2x^2\cos^2(\theta)-4ax\cos(\theta)\sin(\theta))$$

$$\det(T)=m^2l^2(\sin(\theta)-2ax\cos(\theta))^2$$

$$\frac{\mathbf{p}^TT^{-1}\mathbf{p}}{2}=\frac{1}{2\det(T)}\left(p_xp_\theta\right)\begin{pmatrix}l^2m & -lm\cos(\theta)-2alm\sin(\theta)x\\ -lm\cos(\theta)-2alm\sin(\theta)x & 4a^2mx^2+m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_x\\ p_\theta\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathbf{p}^T T^{-1}\mathbf{p}}{2} = \frac{m\left(l^2 p_x^2 - 2l p_\theta p_x(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)x) + p_\theta^2\left(4a^2x^2+1\right)\right)}{2\det(T)}$$

Finalmente el Hamiltoniano queda asi:

$$H = \frac{m\left(l^2 p_x^2 - 2l p_\theta p_x(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)x) + p_\theta^2\left(4a^2x^2+1\right)\right)}{2\det(T)} - mgl\cos(\theta) + magx^2$$

$$H = \frac{l^2 p_x^2 - 2l p_\theta p_x(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)x) + p_\theta^2\left(4a^2x^2+1\right)}{2l^2 m(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^2} - mgl\cos(\theta) + mgax^2$$

Ahora con el hamiltoniano hallamos las ecuaciones de Hamilton:

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{l p_x - (\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)x)p_\theta}{lm(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^2}$$

$$\theta' = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{\left(4a^2x^2+1\right)p_\theta - l(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)x)p_x}{l^2 m(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^2}$$

$$p_x' = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{2a}{m}\left(-gxm^2 + \frac{p_\theta\left(l\sin(\theta)p_x - 2axp_\theta\right)}{l^2(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{\cos(\theta)\left(l^2p_x^2 - 2l(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)x)p_\theta p_x + \left(4a^2x^2+1\right)p_\theta^2\right)}{l^2(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^3}\right)$$

$$\begin{aligned} p_\theta' &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{l^2 m}\left(-gm^2\sin(\theta)l^3 + \frac{p_x p_\theta l}{2a\cos(\theta)x - \sin(\theta)}\right) \\ &\quad + \frac{1}{l^2 m}\left(\frac{(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)x)\left(l^2p_x^2 - 2l(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)x)p_\theta p_x + \left(4a^2x^2+1\right)p_\theta^2\right)}{(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^3}\right) \end{aligned}$$

La anteriores expresiónes para p_x' y p_θ' se pueden reorganizar asi:

$$p_\theta' = \frac{(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)x)p_x^2}{m(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^3}$$

$$+\left(\frac{2a\cos(\theta)x - \sin(\theta)}{lm(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^2} - \frac{2(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)x)^2}{lm(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^3}\right)p_\theta p_x$$

$$+\frac{(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)x)\left(4a^2x^2+1\right)p_\theta^2}{l^2 m(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^3} - glm\sin(\theta)$$

$$p_x' = -\frac{2a\cos(\theta)p_x^2}{m(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^3}$$

$$+\left(\frac{2a\sin(\theta)}{lm(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^2} + \frac{4a\cos(\theta)(\cos(\theta) + 2a\sin(\theta)x)}{lm(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^3}\right)p_\theta p_x +$$

$$\left(-\frac{4xa^2}{l^2 m(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^2} - \frac{2\cos(\theta)\left(4a^2x^2+1\right)a}{l^2 m(\sin(\theta) - 2a\cos(\theta)x)^3}\right)p_\theta^2 - 2agmx$$