Theorem 1.10 **(Generalized Rolle's Theorem)**

Suppose $f \in C[a,b]$ is n times differentiable on (a,b). If $f(x) = 0$ at the $n+1$ distinct numbers $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$, then a number c in (x_0, x_n), and hence in (a,b), exists with $f^{(n)}(c) = 0$. ■

We will also make frequent use of the Intermediate Value Theorem. Although its statement seems reasonable, its proof is beyond the scope of the usual calculus course. It can, however, be found in most analysis texts.

Theorem 1.11 **(Intermediate Value Theorem)**

If $f \in C[a,b]$ and K is any number between $f(a)$ and $f(b)$, then there exists a number c in (a,b) for which $f(c) = K$. ■

Theorem 1.13 **(Weighted Mean Value Theorem for Integrals)**

Suppose $f \in C[a,b]$, the Riemann integral of g exists on $[a,b]$, and $g(x)$ does not change sign on $[a,b]$. Then there exists a number c in (a,b) with

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \qquad ■$$

When $g(x) \equiv 1$, Theorem 1.13 is the usual Mean Value Theorem for Integrals. It gives the **average value** of the function f over the interval $[a,b]$ as (See Figure 1.9.)

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

تیلور :

فرض کنیم همه توابع $f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)$ روی بازه $[a,b]$ تعریف شده و پیوسته باشند و به ازای هر $a < x_\circ < b$ مقدار $f^{(n+1)}(x)$ موجود باشد. در این صورت تقریب چندجمله ای $P_n(x)$ با خطای $R_n(x)$ از $f(x)$ حول $x_\circ$ یافت میشود به طوری که :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad (۱)$$

$$P_n(x) = f(x_\circ) + (x - x_\circ)f'(x_\circ) + (x - x_\circ)^2\frac{f''(x_\circ)}{2!} + ... + (x - x_\circ)^n\frac{f^{(n)}(x_\circ)}{n!}$$
$$= \sum_{i=\circ}^{n}(x - x_\circ)^i\frac{f^{(i)}(x_\circ)}{i!} \qquad (۲)$$

$h = x - x_\circ$ ها سینم الزار

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mu_x)}{(n+1)!}(x - x_\circ)^{n+1} \quad , \quad \mu_x \in (a,b)$$

$$\frac{f^{(n+1)}(x_\circ + \theta_n h)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad , \quad \circ < \theta < 1 \qquad (۴)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + ...$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{5} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

ایده همگرایی

$$f(x) = \sum_{i=\circ}^{\infty}x^i\frac{f^{(i)}(x_\circ)}{i!} + R_n(x) = \sum_{i=\circ}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\frac{(-1)^{i+1}i!}{(1+x_\circ)^{i+1}} + R_n(x)$$
$$= 1 - x + x^2 + ... + (-x)^n + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(1+\mu_x)^{n+1}}$$
$$\rightarrow |R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{|1+\mu_x|^{n+1}} \quad , \quad \mu_x \in (\circ, b)$$

به ازای هر بازه $[\circ, b]$ که $\circ < b < 1$ دنباله $\{|R_n(x)|\}$ همگرا به صفر است چون $\frac{1}{1+\mu_x} < \frac{1}{1+b} < 1$ پس $sup_{x\in[\circ,b]}|R_n(x)| \leqslant b^{n+1}$ که با فرض $\circ < b < 1$ معادل همگرا شدن $\{|R_n(x)|\}$ به صفر است.
به طور مشابه میتوان نشان داد برای هر b خارج این بازه، همگرایی رخ نمیدهد.

تیلور چند متغیره :

فرض کنیم تابع دومتغیره $f(x,y)$ در یک همسایگی بسته $(x_\circ, y_\circ)$ مشتقات نسبی تا مرتبه $n+1$ داشته باشد، آنگاه برای هر $(x_\circ + h, y_\circ + k)$ در این همسایگی داریم :

$$f(x,y) = f(x_\circ, y_\circ) + (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})f(x_\circ, y_\circ) + \frac{1}{2}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_\circ, y_\circ) + ...$$
$$+ \frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_\circ, y_\circ) + R_n(x_\circ + h, y_\circ + k) \qquad (۱۱)$$

$$R_n(x_\circ + h, y_\circ + k) = \frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_\circ + \theta_h h, y_\circ + \theta_k k) \quad , \quad \circ < \theta_h, \theta_k < 1 \qquad (۱۲)$$

فرض کنیم تابع $f(x)$ تابعی باشد که $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ و $g(x)$ تابع دیگری باشد که به ازای ثابت k روی بازه باز شامل $x = a$ داشته باشیم :

$$\frac{|f(x) - \alpha|}{|g(x)|} \leqslant k$$

آنگاه مینویسیم :

$$f(x) = \alpha + (g(x))$$

که گفته میشود $f(x) - \alpha$ در نزدیکی a از مرتبه $(g(x))$ است.

با این تعریف میتوان دقت :

$$f(x) = P_n(x) + ((x-a)^{n+1}) \qquad (۱۳)$$

قضیه زیر بیان میدارد چندجمله ای تیلور $P_n(x)$ تنها چندجمله ای حداکثر از درجه n است که با نرخ همگرایی $((x-a)^{n+1})$ تابع $f(x)$ را تقریب میزند.

درون یابی

این تعریف، تضمین میکند $f(x_j) = P_n(x_j)$ برای $n+1$ نقطه اولیه، برقرار باشد. ضرایب $L_i(x)$ که **ضرایب لاگرانژ** نامیده میشوند، از رابطه زیر به دست میایند :

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \qquad (۵)$$

لاگرانژ، با وارون واندرموند نیز حل میشود، ولی بسیار زمان بر است.

فرض کنیم نقاط متمایز $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ عضو بازه $[a,b]$ مفروض باشند. اگر $f, f', ..., f^{(n)}$ روی این بازه پیوسته باشند و $f^{(n+1)}$ روی (a,b) تعریف شده باشد، برای هر $x \in [a,b]$ و چندجمله ای درون یاب $P_n(x)$ از تابع $f(x)$ داریم :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mu_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) \ , \quad \mu_x \in (a,b) \qquad (۶)$$

این قضیه بیان میدارد با داشتن کران بالای $f^{(n+1)}(x)$ میتوان حداکثر خطای درون یابی را محاسبه کرد.

$$P_n(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + ... + (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)$$

نیوتن

$$\begin{cases} a_0 = f(x_0) = f[x_0] \\ a_1 = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = f[x_1, x_0] \\ a_2 = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0} = f[x_2, x_1, x_0] \\ \vdots \\ a_n = f[x_0, x_1, ..., x_n] = \dfrac{f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] - f[x_1, ..., x_n]}{x_n - x_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i) \\ f[x_{i+1}, x_i] = \frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{xi+1-x_i} \\ f[x_{i+k}, ..., x_i] = \dfrac{f[x_{i+k}, ..., x_{i+1}] - f[x_{i+k-1}, ..., x_i]}{x_{i+k} - x_i} \end{cases}$$

نکته

در همه روابط بالا، ترتیب نقاط دلخواه است. به عبارت دیگر میتوان نشان داد

$$f[\pi_1] = f[\pi_2]$$

به طوری که π_1, π_2 هر دو جایگشت دلخواهی از $\{x_0, x_1, ..., x_i\}$ هستند.

نحوه بدست آوردن : همه را به ترتیب عمودی می‌نویسیم، دونه دونه اختلاف هرکدام را می‌نویسیم.

فرض کنید تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و n مرتبه مشتق پذیر باشد. آنگاه :

$$\exists \mu \in (a,b) \quad : \quad f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f^n(\mu)}{n!} \qquad (۹)$$

برای اثبات این قضیه میتوانید از تعریف تابع $g(x) = f(x) - P_n(x)$ و استفاده از تعمیم قضیه رول استفاده کنید.

$$\begin{cases} f_i := f(x_i) \\ \Delta f(x_i) = f(x_i+h) - f(x_i) = f_{i+1} - f_i \\ \Delta^n f(x_i) = \Delta^{n-1}(\Delta f_i) = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i \ , \quad \Delta^0 f_i = f_i \end{cases}$$

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f_0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \ , \quad s = \frac{x-x_0}{h} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \qquad (۱۲)$$

برای نقاط هم‌فاصله:

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

این چندجمله ای را **چندجمله ای درون یاب پیشروی نیوتن** مینامند.

مشابه آنچه برای تفاضلات پیشرو نوشتیم، برای تفاضلات پسرو داریم:

$$P_n(x) = P_n(x_n + sh) = f_n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f_n \ , \quad s = \frac{x-x_n}{h} \in \mathbb{Z} \cup \{0\} \qquad (۱۳)$$

نقاط هم‌فاصله:

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

این چندجمله ای را **چندجمله ای درون یاب پسروی نیوتن** مینامند.

در این درون یابی، بین هر دو نقطه متوالی، یک خط درون یابی میشود. به عبارت دیگر برای هر $x \in [x_i, x_{i+1}]$ داریم :

$$P_{1i}(x) = f_i + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) \qquad (۱۹)$$

[۴] بیشتر بخ

در قسمت قبلی نشان دادیم کران بالای خطای تقریب خطی از رابطه $\frac{M}{8}(x_{i+1}-x_i)^2$ به دست میاید پس میتوان کران بالای خطا را از رابطه زیر به دست آورد :

$$|E_1(x)| \leqslant max_{i=0,...,n-1} \left|\frac{M}{8}(x_{i+1}-x_i)^2\right|$$

$$\boxed{M : \max f''(x)}$$

در حالت کلی، چندجمله ای تکه ای درون یاب خطی، وجود مشتق در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه را تضمین نمی‌کند

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j).$$

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j.$$

and **b** and **x** are the vectors

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

$S_0''(x_0)=f_0''(x_0)=0$

برای اسپلاین طبیعی متشا

$S_i(x_i)=a_i=f(x_i)$

$S_i=a_i+(x-x_i)b+c(x-x_i)^2+d(x-x_i)^3$ درست شبیه چندجمله‌ای‌های نرم هستند

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix},$$

اسپلاین مقید

$$\boxed{h_j = x_{j+1} - x_j}$$

$S'(x_0)=f'(x_0)$

$S'(x_n)=f'(x_n)$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

خطای اسپلاین :

تحت شرایط محاسبه اسپلاین درون یاب میتوان نشان داد وقتی $h = max\{h_i\} \to 0$ آنگاه

$$max_{x\in[a,b]} \left| f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x) \right| \leqslant ch^{\epsilon-k} \quad , \quad k = 0, 1, ... \qquad (۳۱)$$

این قضیه بیان میکند نه تنها f بلکه مشتقات آن را نیز میتوان با انتخاب نقاط به اندازه کافی نزدیک به هم، با دقت مورد نظر تقریب زد.

همیشه با افزایش n مقدار $\frac{f^{(n+1)}(\mu_x)}{(n+1)!}$ کاهش نمیابد. حتی اگر رفتار $f^{(n+1)}(x)$ مطلوب باشد، باز هم ممکن است خطا به علت رفتار چندجمله ای $\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ مطلوب نباشد. یک تلاش منطقی میتواند انتخاب x_j ها به گونه ای باشد که $max_{x\in[x_0,x_n]} \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ خود کمترین مقدار ممکن شود. نقاط چبیشف که به صورت زیر تعریف میشوند، این شرط اضافی را تضمین میکنند. فرض کنیم $n+1$ نقطه در بازه $[a,b]$ مطلوب باشند. تعریف کنیم :

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right) \quad , \quad j = 0, 1, ..., n \qquad (۱۸)$$

میتوان نشان داد [۴] با انتخاب این مجموعه نقاط داریم :

$$max_{x\in[a,b]} \prod_{j=0}^{n}(x - x_j) = 2\left[\frac{b-a}{4}\right]^{n+1}$$

راهکار منطقی دیگر برای کنترل خطا روی بازه، میتواند استفاده از چندجمله ای درون یاب قطعه قطعه ای باشد. این ایده بیان میدارد برای کاهش خطای درون یابی روی تمام بازه، چندجمله ای درون یاب برای هر m نقطه متوالی تقریب زده شود و چندجمله ای درون یاب نهایی، تابعی قطعه قطعه باشد.

نقاط چبیشف

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & & x_n \end{bmatrix}$$

"واندرموند ها"

وارون پذیر

Three-Point Endpoint Formula

- $$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0),$$

where ξ_0 lies between x_0 and $x_0 + 2h$.

Three-Point Midpoint Formula

- $$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1),$$

Five-Point Midpoint Formula

- $$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi), \qquad (4.6)$$

where ξ lies between $x_0 - 2h$ and $x_0 + 2h$.

The derivation of this formula is considered in Section 4.2. The other five-point formula is used for approximations at the endpoints.

Five-Point Endpoint Formula

- $$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)] + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi), \qquad (4.7)$$

where ξ lies between x_0 and $x_0 + 4h$.

که مقدار عددی مشتق را به صورت زیر تقریب میزند :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+۱}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{۲} f''(x_i) + \dots \qquad (۲)$$

که در آن

$$h = x_{i+۱} - x_i$$

و بدین ترتیب مشتق مرتبه اول به صورت زیر تقریب زده میشود :

$$f'_i = \frac{f_{i+۱} - f_i}{h} + O(h)$$

را از طریق تفاضل مستقیم پسرو نیز تقریب زد :

$$f(x_{i-۱}) = f(x_i) + (x_{i-۱} - x_i) f'(x_i) + \frac{(x_{i-۱} - x_i)^۲}{۲} f''(x_i) + \dots$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-۱}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{۲} f''(x_i) \rightarrow f'_i = \frac{f_i - f_{i-۱}}{h} + O(h) \qquad (۳)$$

به طور کلی برای تقریب مشتقات مراتب بالاتر، از بسط تیلور استفاده میشود. با صفر کردن ضریب جملات غیر مطلوب و رسیدن به رابطه ای برای مشتق مرتبه موردنظر، این مشتقات حاصل میشوند. در اینجا یک نمونه برای محاسبه مشتق درجه دوم را بررسی میکنیم :

$$f(x_۰+h) = f(x_۰) + f'(x_۰)h + \frac{۱}{۲} f''(x_۰)h^۲ + \frac{۱}{۶} f'''(x_۰)h^۳ + \frac{۱}{۲۴} f^{(۴)}(\mu_۱)h^۴ \ , \quad x_۰ < \mu_۱ < x_۰ + h$$

$$f(x_۰-h) = f(x_۰) - f'(x_۰)h + \frac{۱}{۲} f''(x_۰)h^۲ - \frac{۱}{۶} f'''(x_۰)h^۳ + \frac{۱}{۲۴} f^{(۴)}(\mu_۲)h^۴ \ , \quad x_۰ - h < \mu_۲ < x_۰$$

$$f(x_۰+h) + f(x_۰-h) = ۲f(x_۰) + f''(x_۰)h^۲ + \frac{۱}{۲۴}[f^{(۴)}(\mu_۱) + f^{(۴)}(\mu_۲)]h^۴$$

$$\rightarrow f''(x_۰) = \frac{f(x_۰-h) - ۲f(x_۰) + f(x_۰+h)}{h۲} - \frac{h^۲}{۲۴}[f^{(۴)}(\mu_۱) + f^{(۴)}(\mu_۲)] \qquad (۱۹)$$

روابط بالا با نوشتن دنباله تیلور و
گرفتن مشتق از آنها بدست میاید
تعیین مقدار مناسب نیز به کمک ما می‌آید.

نوشته میشود :

$$f''(x_۰) = \frac{f(x_۰-h) - ۲f(x_۰) + f(x_۰+h)}{h^۲} - \frac{h^۲}{۱۲}(f^{(۴)}(\mu) \quad , \quad \mu \in (x_۰ - h, x_۰ + h) \qquad (۲۰)$$

به طور مشابه میتوان نشان داد برای فرمول ۵ نقطه ای، مشتق دوم از رابطه زیر محاسبه میشود :

$$f''(x_۰) \approx \frac{-f(x_۰+۳h) + ۴f(x_۰+۲h) - ۵f(x_۰+h) + ۲f(x_۰)}{h^۲} \qquad (۲۱)$$

، مقادیر $\tilde{f}$ مقدار ناشی از گزارش با خطا را نشان میدهند. با این تعریف میتوان خطای کلی را به
ورت زیر محاسبه کرد :

$$f'(x_۰) - \frac{\tilde{f}(x_۰+h) - \tilde{f}(x_۰-h)}{۲h} = \frac{e(x_۰+h) - e(x_۰-h)}{۲h} - \frac{h^۲}{۶} f^{(۳)}(\mu_۰) \qquad (۲$$

، جمله اول خطای ناشی از گرد کردن و جمله دوم، خطای برشی است. فرض کنیم خطاهای ناشی
گرد کردن کران بالا دارند و مشتق سوم تابع نیز کران بالا دارد. آنگاه مقدار خطای کلی نیز کران
بالای زیر را خواهد داشت :

$$|e(x_۰ \mp h)| \leqslant \epsilon \ , \ |f^{(۳)}(\mu_۰)| \leqslant M \rightarrow |f'(x_۰) - \frac{\tilde{f}(x_۰+h) - \tilde{f}(x_۰-h)}{۲h}| \leqslant \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^۲ M}{۶} \qquad (۲۴)$$

این عبارت نشان میدهد برای کاهش دادن خطای برشی، کافی است h کاهش یابد. اما با کاهش یافتن این مقدار، خطای ناشی از گرد کردن افزایش میابد. همچنین با افزایش دادن مقدار h خطای برشی افزایش میابد و خطای ناشی از گرد کردن کاهش میابد. در عمل، کوچک قرار دادن مقدار h غالبا مفید نیست چرا که خطای ناشی از گرد کردن، بر نتایج محاسبات غلبه میکند. برای یافتن بهترین مقدار h به صورت تجربی، کافی است مینیمم کران بالای خطا را در نظر بگیریم :

$$h^* = argmin(\frac{\epsilon}{h} + \frac{h^۲ M}{۶}) \rightarrow \frac{\delta}{\delta h}[\frac{\epsilon}{h} + \frac{h^۲ M}{۶}] = ۰ \rightarrow h^* = \sqrt[۳]{\frac{۳\epsilon}{M}} \qquad (۲۵)$$

ϵ: max error , M: max f''' (۲۴)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx$$

$$I_0 \approx \int_a^b P_0(x)dx = f(a)(b-a) \to I_0 \approx f(b)(b-a) \ , \ I_0 \approx f(b)(b-a) \qquad (۷)$$

یک نقطه

آن هم سر بازه

خطای تقریب مستطیلی از رابطه زیر به دست می آید :

$$E_0 = \int_a^b R_0(x) = \int_a^b f'(\theta)(x-x_0)dx \implies E_0 = \frac{(b-a)^2}{2}f'(\theta) \ , \ \theta \in [a,b] \qquad (۸)$$

$$I_0 \approx \int_a^b P_0(x)dx = f(\frac{a+b}{2})(b-a) \qquad (۹)$$

یک نقطه، وسط بازه

خطای تقریب میانی از رابطه زیر به دست می آید :

$$E_0 = \int_a^b f(x) - f(\frac{a+b}{2})dx = \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2})dx + \int_a^b \frac{(x-\frac{(a+b)}{2})^2}{2}f''(\mu_x)dx$$
$$= \frac{f''(\theta)}{2}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2dx = \frac{(b-a)^3}{24}f''(\theta) \ , \ \theta \in [a,b] \qquad (۱۰)$$

error

$x_{-1}\ x_0\ x_1 \to h = \frac{b-a}{2}$

$$I_1 \approx \int_a^b P_1(x)dx = \int_a^b [f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \qquad (۱۱)$$

$$E_1 = \int_a^b \frac{f''(\theta)}{2}(x-a)(x-b)dx = \frac{f''(\theta)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \frac{-(b-a)^3}{12}f''(\theta) \ , \ \theta \in [a,b] \qquad (۱۲)$$

Simpson's Rule:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi).$$

$h = \frac{x_{n+1}-x_{-1}}{n+2}$

$n = 1$: Trapezoidal rule closed newton → $x_0, \dots, x_n \to h = \frac{x_n - x_0}{n}$

برای ۲ نقطه

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad \text{where} \quad x_0 < \xi < x_1. \qquad (4.25)$$

$n = 2$: Simpson's rule → برای ۳ نقطه

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad \text{where} \quad x_0 < \xi < x_2. \qquad (4.26)$$

$n = 3$: Simpson's Three-Eighths rule

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)] - \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi), \qquad (4.27)$$

where $x_0 < \xi < x_3$.

$n = 4$:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{2h}{45}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi),$$

where $x_0 < \xi < x_4$. (4.28)

for $x_{-1}\ x_0 \dots x_{n+1}$ → open!

$n = 0$: Midpoint rule $h = \frac{b-a}{n+2}$

برای ۱ نقطه

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3}f''(\xi), \quad \text{where} \quad x_{-1} < \xi < x_1. \qquad (4.29)$$

$n = 1$: برای ۲ نقطه

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{3h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] + \frac{3h^3}{4}f''(\xi), \quad \text{where} \quad x_{-1} < \xi < x_2. \qquad (4.30)$$

$n = 2$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{4h}{3}[2f(x_0)-f(x_1)+2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45}f^{(4)}(\xi), \qquad (4.31)$$

where $x_{-1} < \xi < x_3$.

$n = 3$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{5h}{24}[11f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+11f(x_3)] + \frac{95}{144}h^5 f^{(4)}(\xi), \qquad (4.32)$$

where $x_{-1} < \xi < x_4$.

Theorem 4.4 Let $f \in C^4[a,b]$, n be even, $h = (b-a)/n$, and $x_j = a + jh$, for each $j = 0, 1, \dots, n$. There exists a $\mu \in (a,b)$ for which the **Composite Simpson's rule** for n subintervals can be written with its error term as

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] - \frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\mu).$$

Theorem 4.5 Let $f \in C^2[a,b]$, $h = (b-a)/n$, and $x_j = a + jh$, for each $j = 0, 1, \dots, n$. There exists a $\mu \in (a,b)$ for which the **Composite Trapezoidal rule** for n subintervals can be written with its error term as

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu). \quad ■$$

Theorem 4.6 Let $f \in C^2[a,b]$, n be even, $h = (b-a)/(n+2)$, and $x_j = a + (j+1)h$ for each $j = -1, 0, \dots, n+1$. There exists a $\mu \in (a,b)$ for which the **Composite Midpoint rule** for $n+2$ subintervals can be written with its error term as

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) + \frac{b-a}{6}h^2 f''(\mu). \quad ■$$

این نتیجه نشان میدهد با کاهش مقدار h ، خطای حاصل از گرد کردن افزایش نمیابد چرا که مستقل از h میباشد. پس به طور کلی با افزایش تعداد بازه ها، میتوان به دقت بیشتری برای تقریب مقدار عددی انتگرال دست یافت.