



دانشکده مهندسی کامپیوتر

به نام خدا

آزمون پایان ترم

محاسبات عددی

تاریخ آزمون: ۲۳ دی ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۵۰+۳۰ دقیقه

صفحه ۱ از ۲

۱. الف) چند جمله درونیاب پیشرو نیوتن مرتبه دوم رابنویسید و با مشتق گرفتن از آن تخمین زیر را به دست آورید:

$$f'(x_0) \simeq \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

ب) خطای تخمین را محاسبه کنید.

یادآوری: چند جمله درونیاب پیشرو نیوتن

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0$$

۲. فرض کنید $h = b - a$ و $c_1, c_2 \neq 0$ مقادیر ثابتی هستند به طوری که $c_1 \neq c_2$. فرض کنید دو روش $F_1(h)$ و $F_2(h)$ برای تخمین انتگرال به صورت زیر در دست هستند:

$$I = \int_a^b f(x) dx = F_1(h) + c_1 h^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = F_2(h) + c_2 h^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

به ازای $p > 1$.

الف) یک ترکیب خطی از مقادیر $F_1(h)$ و $F_2(h)$ را تعیین کنید به طوری که تخمین بهتری برای I باشد (دارای خطای برشی بالاتر از مرتبه p باشد).

ب) نتیجه به دست آمده در (الف) را در خصوص روش های دوزنقه ای و مستطیلی به کار بگیرید و فرمول جدید را بر حسب این دو روش تعیین کنید.

پ) روش سیمسون را از فرمول به دست آمده در (ب) به ازای چه فرضی می توان به دست آورد؟

۳. فرض کنید x^* نقطه ثابت تابع g است. دنباله $\{x^k\}$ همگرا به x^* از x^* با شروع از تولید شده است. فرض کنید

$$g'(x^*) = \dots = g^{(p-1)}(x^*) = 0$$


و $g^p(x)$ به ازای همه x در همسایگی x^* به شعاع ϵ یعنی در بازه $(x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$ پیوسته است. در این صورت نشان دهید مرتبه همگرایی دنباله p است.

یادآوری: تعریف همگرایی مرتبه p ام: فرض کنید دنباله $\{x^k\}$ به x^* همگراست. اگر به ازای مقدار ثابت \bar{c} و عدد صحیح $p \geq 1$ داشته باشیم:

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \bar{c} \|x^k - x^*\|^p$$

آنگاه گوئیم همگرایی دنباله $\{x^k\}$ به x^* از مرتبه p ام است.

راهنمایی: استفاده از قضیه تیلور و پیوستگی تابع مشتق مرتبه p ام در همسایگی x^* .

<p>تاریخ آزمون: ۲۳ دی ۱۴۰۲</p> <p>مدت آزمون: ۱۵۰+۳۰ دقیقه</p> <p>صفحه ۲ از ۲</p>	<p>به نام خدا</p> <p>آزمون پایان ترم</p> <p>محاسبات عددی</p>	 <p>دانشکده مهندسی کامپیوتر</p>
<p>۴. قرار دهید</p> $K(A) = \ A^{-1}\ \ A\ $ <p>الف) فرض کنید A وارون پذیر است. \bar{x} را جواب دقیق دستگاه $Ax = b$ و $\bar{x} + d$ را جواب دقیق دستگاه $Ax = b + r$ در نظر بگیرید. نشان دهید</p> $\frac{\ d\ }{\ \bar{x}\ } \leq K(A) \frac{\ r\ }{\ b\ }.$ <p>ب) فرض کنید \tilde{x} تقریبی برای جواب دستگاه خطی $Ax = b$ است. قرار دهید:</p> $e = x - \tilde{x},$ $r = b - A\tilde{x}.$ <p>نشان دهید:</p> $\frac{1}{K(A)} \frac{\ r\ }{\ b\ } \leq \frac{\ e\ }{\ x\ } \leq K(A) \frac{\ r\ }{\ b\ }$ <p>یادآوری:</p> $\ A\ = \max_{\ x\ =1} \ Ax\ .$		
<p>۵. فرض کنید</p> $y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0$ $y'(0) = 1,$ $y(0) = 0.$ <p>با استفاده از روش هوین مقدار $y(0.1)$ را تخمین بزنید.</p>		
<p>موفق باشید</p> <p>حسین قربان</p>		