محاسبات عددی | **سری شمارهٔ ۲**

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ | **موعد تحویل: ۲۷ آبان**

سوال ۱.
می‌خواهیم یک اسپلاین مکعبی $S(x)$ بسازیم که از نقاط $(۲, \frac{۱}{۲})$ ، $(۱, ۱)$ و $(\frac{۱}{۲}, ۲)$ عبور کند.

الف) اسپلاین مکعبی طبیعی [۱] گذرا از نقاط گفته شده را بدست آورید.

ب) اسپلاین مکعبی مقیّد [۲] گذرا از نقاط گفته شده و با شروط $S'(\frac{۱}{۲}) = -۴$ و $S'(۲) = -\frac{۱}{۴}$ بدست آورید.

ج) با استفاده از توابع به دست آمده در دو بخش قبل مقدار $S(x)$ در $x = ۱/۵$ بدست آورید.

سوال ۲.
بهترین منحنی به شکل $y = ae^{bx}$ را که داده های زیر را برازش می‌کند بدست آورید.

x	۱	۳	۴	۵
y	۱	۱/۵	۲/۵	۴

سوال ۳.

الف) بهترین تقرب خطی $y = ax + b$ را برای برازش داده [۳] های زیر، بر حسب $y_۱$ و $y_۲$ بدست آورید.

x	۱	۳	۵
y	۲	$y_۱$	$y_۲$

ب) یک با قرار دادن $y_۱ = ۵$ و $y_۲ = ۱۱$، a و b را بدست آورید (حالت ۱) و بار دیگر با قرار دادن $y_۱ = ۱۰$ و $y_۲ = ۵/۵$ مقدار a و b را محاسبه کرده (حالت ۲) و زاویه بین دو خط بدست آمده را بیابید.
(راهنمایی: برای پیدا کردن زاویه از ضرب داخلی استفاده کنید)

سوال ۴.

الف) ثابت کنید مجموع ضرایب چندجمله‌ای درون‌یابی لاگرانژ

$$L_k(x) = \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

[۱] Natural Cubic Spline
[۲] Clamped Cubic Spline
[۳] Data Fitting

برابر یک است:

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(x) = 1$$

ب) فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n با ضرایب حقیقی باشد:

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$$

اگر $x_0, ..., x_n$ اعداد صحیح متمایز باشند، ثابت کنید حداقل یک $|P(x_0)|, ..., |P(x_n)|$ وجود دارد که مقدار آن مساوی یا بیشتر از $\frac{n!}{2^n}$ است.

سوال ۵.

چندجمله‌ای درجه nام P را در نظر بگیرید به طوری که رابطه

$$P(k) = \frac{k!\,(n+1-k)!}{(n+1)!}$$

به ازای مقادیر $k = 0, 1, ..., n$ برای آن صدق می‌کند. $P(n+1)$ را به دست آورید (راهنمایی: $P(k)$ را به صورت ضرایب درون‌یابی لاگرانژ بنویسید.)

سوال ۶.

تابع $f(x) = \frac{1}{x+c}$ را به ازای عدد حقیقی c در نظر بگیرید. ثابت کنید ضرایب درون‌یابی تفاضل تقسیم‌شده نیوتن برای $n+1$ نقطه متمایز $x_0, x_1, ..., x_n$ روی تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{(-1)^n}{(x_0+c)...(x_n+c)}$$

موفق باشید.