سوال ۱. در معادله $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ مقدار $y(0.1)$ را با استفاده از فرمول رانگ - کوتای مرتبه چهارم و از $h = 0.1$ کدام است؟

۱) ۱٫۱۱۸ ۲) ۱٫۱۴۵ ۳) ۱٫۱۲۰۵ ۴) ۱٫۱۱۰۳۴

حل

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + h/2,\ y_n + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(x_n + h/2,\ y_n + k_2/2)$$

$$k_4 = hf(x_n + h,\ y_n + k_3)$$

$$\Rightarrow y(0.1) = y(0) + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(0, 1) = 0.1(0 + 1) = 0.1$$

$$k_2 = 0.1 f(0.05, 1.05) = 0.11$$

$$k_3 = 0.1 f(0.05, 1.055) = 0.1105$$

$$k_4 = 0.1 f(0.1, 1.1105) = 0.12105$$

$$y(0.1) = 1 + \frac{1}{6}(0.1 + 0.22 + 0.221 + 0.12105) = 1.11034$$

سوال ۲. مقدار $y(0.1)$ و $y(0.2)$ از معادله $y' = x + y$ با شرط اولیه $y(0) = 0$ با استفاده از روش تیلور مرتبه دوم کدام است؟

	$y(0.2)$	,	$y(0.1)$
۱)	0.02		0.1
۲)	0.021	,	0.005
۳)	0.025	,	0.005
۴)	1.005	,	0.05

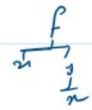
حل.

$$f(x, y) = y' = x + y \qquad y(0) = 0$$

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x)$$

$$y'(x) = f(x, y) = x + y$$

$$y''(x) = 1 + y'(x) = 1 + x + y$$



$$\frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y(x+h) = y(x) + h(x + y) + \frac{h^2}{2}(1 + x + y)$$

$$\Rightarrow y(0.1) = y(0) + 0.1(0 + 0) + \frac{0.1^2}{2}(1 + 0) = 0.005$$

$$\Rightarrow y(0.2) = y(0.1) + 0.1(0.1 + 0.005) + \frac{0.1^2}{2}(1 + 0.1 + 0.005)$$

$$= 0.005 + 0.0105 + 0.005525 = 0.021025$$

پس ۳۰ باتری شارژ نشده (۲) صحیح است.

سوال ۳. خطای فرمول $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ کدام است؟

۱) $O(1)$ ۲) $O(h)$ ۳) $O(h^2)$ ✓ ۴) $O(h^3)$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

$$\Rightarrow f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f''(x) + \cdots$$

$$\Rightarrow f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = O(h^2)$$

سوال ۴. چنانچه مقدار تابع f در نقاط x_0 و x_1 به ترتیب برابر f_0، f_1 باشد مقدار $f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$ با استفاده از درونیابی خطی کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(f_0+f_1)$ ✓ ۲) $\dfrac{x_0f_0 + x_1f_1}{x_0+x_1}$

۳) $\dfrac{x_0f_1 + x_1f_0}{x_0+x_1}$ ۴) تعداد نقاط برای تقریب کافی نیست.

با استفاده از فرمول لاگرانژ:

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1$$

$$= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f_1$$

$$= \frac{(x-x_1)f_0 - (x-x_0)f_1}{(x_0-x_1)}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{x_0+x_1}{2} - x_1\right)f_0 - \left(\frac{x_0+x_1}{2} - x_0\right)f_1}{x_0-x_1}$$

$$= \frac{(x_0-x_1)\frac{f_0}{2} + (x_0-x_1)\frac{f_1}{2}}{x_0-x_1}$$

$$= \frac{1}{2}(f_0+f_1)$$

سوال ۵. جدول تفاضلات زیر مفروض است.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	1	1.105	1.22	1.344	1.482

برای $0 \le x \le 0.4$ و $|f''(x)| \le 3$. در این صورت کدام یک از عبارت زیر درمورد انتگرال

$I = \int_0^{0.4} f(x)dx$ صحیح است ؟

۱) $0.490 < I < 0.492$

۲) $0.488 < I < 0.490$

۳) $0.492 < I < 0.494$

۴) $0.466 < I < 0.488$

حل :

$$\int_0^{0.4} f(x)dx \simeq 0.05\left(f(0)+2f(0.1)+2f(0.2)+2f(0.3)+f(0.4)\right)$$

$$= 0.491 = T(h)$$

$$E_T(h) \le \frac{b-a}{12} h^2 M$$

$$E_T(h) \le \frac{0.4}{12} 0.1^2 \times 3 = 0.001$$

$$\Rightarrow 0.491 - 0.001 \le I \le 0.491 + 0.001$$

$$\Rightarrow \boxed{0.490 \le I \le 0.492}$$

سوال ۲. با داشتن نقاط $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ با فرض $x_{i+1} = x_i + h$

اگر برای درونیابی مقدار تابع در $x = x_0 + \alpha h$ از فرمول درونیابی پیشرو استفاده نماییم و بزرگترین مقدار $f^{(n+1)}(x)$

برابر با M باشد. R : آنگاه حداکثر خطا برابر با کدام گزینه است.

۱) $\left|\dfrac{h^5}{5!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-5)\right| M$

۲) $\left|\dfrac{h^5}{5!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-5)\right| M^5$

۳) $\left|\dfrac{h^6}{6!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-5)\right| M$ ✓

۴) $\dfrac{hM}{5}$

حل. فرض کنید $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط متمایز $x_0, \dots, x_n$ و f دارای مشتق مرتبه $n+1$ باشد آنگاه

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

که $x_0 < c < x_n$ در بازه (x_0, x_n) تعریف شده باشد.

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \frac{M}{(n+1)!}$$

$$|f(x) - P(x)| \leq \underbrace{\underbrace{|x-x_0|}_{\alpha h}\ \underbrace{|x-x_1|}_{(\alpha-1)h} \cdots \underbrace{|x-x_5|}_{(\alpha-5)h} \frac{M}{6!}}_{\frac{h^6}{6!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-5)M}$$

سوال ۷. محاسبه انتگرال $I = \int_{2.2}^{3.2} e^x dx$ با استفاده از قاعده ذوزنقه خواسته شده است. در صورتی که بخواهیم قدر مطلق ماکزیمم خطای حاصل از محاسبه این انتگرال کمتر از 10^{-5} باشد، ماکزیمم مقدار ممکن h برابر است با:

۱) $e^{-3.2} \times 10^{-2}$

۲) $e^{-1.7} \times 10^{-1}$

۳) $10^{-2} \times e^{-2.4}$

۴) $10^{-2} \times e^{-1.6}$ ✓

سوال ۸. محاسبه انتگرال $I = \int_{2.2}^{3.4} e^x dx$ با استفاده از قاعده ذوزنقه خواسته شده است. در صورتی که بخواهیم قدرمطلق ماکزیمم خطای حاصل از محاسبه این انتگرال کمتر از 10^{-5} باشد، ماکزیمم مقدار ممکن h برابر است با:

قدرمطلق ماکزیمم خطای حاصل از محاسبه این انتگرال کمتر از 10^{-5} باشد، ماکزیمم مقدار h برابر است با:

۱) $e^{3.2}\times 10^{-2}$

۲) $e^{-1.7}\times 10^{-1}$

۳) $e^{3.4}\times 10^{-2}$

۴) $e^{-1.7}\times 10^{-2}$

حل:
$$|E_T(h)| \le \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2 \quad \text{و} \quad |f''(x)| \le M_2$$

$$f''(x)=e^{x} \Rightarrow |f''(x)|<e^{3.4} \Rightarrow |E_T(h)| \le \frac{3.4-2.2}{12}\times h^2\times e^{3.4}$$

$$\Rightarrow 0.1\, h^2 e^{3.4} \le 10^{-5} \Rightarrow h^2 \le 10^{-4} e^{-3.4}$$

$$\Rightarrow h \le 10^{-2}\sqrt{e^{-3.4}} = 10^{-2}\times e^{-1.7}$$

سوال ۹. اگر در درونیابی داده های زیر از $P(x)=\sum_{k=0}^{n} L_k(x) f_k$ استفاده کنیم که $L_k(x)$ ضرایب لاگرانژ است.
در این صورت $L_1(x)$ کدام است؟

x_i	-1	0	1	2
f_i	-2	-1	0	7

۱) $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{2}$ ۲) $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{-6}$

۳) $\dfrac{x^3-x}{6}$ ۴) $\dfrac{x^3-1}{2}$

حل
$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)}=\frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

سوال ۱۰. با توجه به مقادیر داده شده، مقدار تقریبی تابع در $x=2$ کدام است؟

x_i	0	3	4	7
f_i	2	8	9	6

۱) 5 ۲) 5.3 ۳) 6.3 ۴) صفر

حل. با استفاده از درونیابی لاگرانژ داریم:

$$f(x) \simeq f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)$$

$$= 3\,\frac{(x-3)(x-4)(x-7)}{(0-3)(0-4)(0-7)} + 8\,\frac{(x-0)(x-4)(x-7)}{(3-0)(3-4)(3-7)}$$

$$+ 9\,\frac{(x-0)(x-3)(x-7)}{(4-0)(4-3)(4-7)} + 6\,\frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(7-0)(7-3)(7-4)}$$

$$\Rightarrow f(x) \simeq \frac{5}{21} + \frac{40}{3} - \frac{15}{2} + \frac{2}{7} = 6.357$$

سوالات تشریحی

سوال ۱. بهترین منحنی به شکل $c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ که داده های زیر را برازش کند، به دست آورید.

x_i	۱۰/۰	۱۰/۲	۱۰/۴	۱۰/۶	۱۰/۸	۱۱/۰
f_i	۰/۰۰۰	۰/۰۰۴	۰/۰۱۶	۰/۰۳۶	۰/۰۶۴	۰/۱۰۰

جواب را با انجام محاسبات با چهار رقم صحیح ارقام به دست آورید.

حل: قرار دهید

$$F(x, c_1, c_2, c_3) = \sum \left[f_i - (c_1 + c_2 x_i + c_3 x_i^2)\right]^2$$

$$\min_{c_1, c_2, c_3} F(x, c_1, c_2, c_3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial c_1} &= 2\sum_i \left[f_i - (c_1 + c_2 x_i + c_3 x_i^2)\right] = 0\\
\frac{\partial F}{\partial c_2} &= 2\sum_i x_i \left[f_i - (c_1 + c_2 x_i + c_3 x_i^2)\right] = 0\\
\frac{\partial F}{\partial c_3} &= 2\sum_i x_i^2 \left[f_i - (c_1 + c_2 x_i + c_3 x_i^2)\right] = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}
n c_1 + c_2 \sum_i x_i + c_3 \sum_i x_i^2 &= \sum f_i\\
c_1 \sum_i x_i + c_2 \sum x_i^2 + c_3 \sum x_i^3 &= \sum x_i f_i\\
c_1 \sum x_i^2 + c_2 \sum x_i^3 + c_3 \sum x_i^4 &= \sum x_i^2 f_i
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \\ \sum_i x_i & \sum x_i^2 & \sum_i x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{7} f_i \\ \sum_{i=1}^{7} x_i f_i \\ \sum_{i=1}^{7} x_i^2 f_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 63 & 662.2 \\ 63 & 662.2 & 6967.8 \\ 662.2 & 6967.8 & 73393.5668 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.22 \\ 2.48 \\ 25.75664 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = 10 \qquad C_2 = -2 \qquad C_3 = 0.1$$

$$F = 10 - 2x + 0.1x^2$$

سوال ۲

الف. فرض کنید تابع f روی (a,b) به دفعات لازم مشتق‌پذیر است. نشان دهید کران بالا برای خطای ایجاد شده توسط درونیابی خطی بین داده‌های $(x_i, f(x_i))$ و $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ برابر است با $|E_1(x)| \le \frac{M}{8}(x_{i+1}-x_i)^2$ که در آن M بیشینه قدر مطلق $f^{(2)}(x)$ روی بازه‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ است.

ب. فرض کنید می‌خواهیم جدولی از مقادیر تقریبی برای $\sqrt{x}$ را در بازه $[1,2]$ با استفاده از درونیابی خطی روی بازه‌هایی با فاصله‌های برابر از یکدیگر تهیه کنیم. بازه‌ی $[1,2]$ را به چند زیربازه‌های برابر تقسیم کنیم تا خطای درونیابی خطی روی بازه‌ها کمتر از 10^{-4} باشد؟

حل الف:

$$E_1(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{f^{(2)}(\theta_x)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

$$\Rightarrow |E_1(x)| \le \max\left|\frac{f^{(2)}(\theta_x)}{2!}\right| \max\left|(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|$$

$$\le \frac{M}{2} \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \left|(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|$$

$$\max\left|(x-x_i)(x-x_{i+1})\right| = \left|(\bar{x}-x_i)(\bar{x}-x_{i+1})\right| \quad , \quad \bar{x} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$$

$$= \left|\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1}) - x_i\right| \left|\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1}) - x_{i+1}\right|$$

$$= \frac{1}{4}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$\Rightarrow |E_1(x)| \le \frac{M}{8}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$\Rightarrow \quad |E_1(x)| \le \frac{M}{8}(x_{i+1}-x_i)^2$$

$h = \frac{1}{n}$ ب) فرض کنید که بازه را به n زیربازه‌ی برابر تقسیم کرده باشیم [illegible]

$|E_1(x)| \le \frac{M}{8} h^2$ (با استفاده از قسمت الف)

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} = \frac{-1}{4x^{3/2}}$$

$$M = \max_{x\in[1,2]} |f''(x)| = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad |E_1(x)| \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right) h^2 < 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \quad h^2 < 32\times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \quad h < 4\sqrt{2}\times 10^{-2} \simeq 0.05657$$

$$h = \frac{1}{n} < 0.05657$$

$$n > \frac{1}{0.05657} \simeq 17.7$$

$$\boxed{n = 18}$$

سوال ۲. فرض کنید $I = \int_a^b f(x)\,dx$ ، $b>a$ ، $b-a$ را به n زیربازه برابر تقسیم کرده‌ایم. قرار دهید

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_0 = a \qquad x_{i+1} = x_i + h \qquad 1 \le i \le n-1$$

بنابراین زیربازه‌ها به طول بازه برابر با h به صورت $[x_i, x_{i+1}]$ ، $i = 0, \dots, n-1$ هستند. با استفاده از قاعده نقطه میانی برای زیربازه‌ها

تعمیم دهید $\int_a^b f(x)\,dx$ محاسبه کنید و سپس خطای تقریب انتگرال را به دست آورید.

حل.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) = h\,\frac{f_i + f_{i+1}}{۲} - \frac{f''(\theta_i)}{۱۲}\,h^{۳}$$

$$\Rightarrow I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} h\,\frac{f_i + f_{i+1}}{۲} - \sum_{i=0}^{n-1} f''(\theta_i)\,\frac{h^3}{12}$$

$$= h\left[\frac{f_0 + f_n}{۲} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right] - \frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\theta_i)$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین

$$E_{T(n)} = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\theta_i)$$

$$= -\frac{h^3}{12} f''(\theta) \sum 1$$

$$= -\frac{h^3}{12} f''(\theta)\cdot n$$

$$= -(b-a)\,\frac{h^2}{12}\,f''(\theta)$$

$$\theta \in [a, b]$$