سوال ۱. با استفاده از روش دوبخشی [1] به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف. ریشه تابع $f(x) = x^۳ + ۴x^۲ - ۱۰$ را در بازه $[۱, ۲]$ در ۷ گام بیابید.

ب. ریشه تابع $g(x) = x - e^{-x}$ را با دقت $۱۰^{-۲}$ به دست آورید.

پاسخ:
هرگونه پاسخی که با الگوریتم درست به دست آمده باشد، قابل قبول است

الف.

$f(p_n)$	p_n	b_n	a_n	Iter
2.375	1.5	2.0	1.0	1
-1.797	1.25	1.5	1.0	2
0.162	1.375	1.5	1.25	3
-0.848	1.3125	1.375	1.25	4
-0.351	1.34375	1.375	1.3125	5
-0.096	1.359375	1.375	1.34375	6
0.032	**1.367188**	1.375	1.359375	7

ب.

$f(p_n)$	p_n	b_n	a_n	Iter
-0.1065	0.5	1	0	1
0.2776	0.75	1	0.5	2
0.0897	0.625	0.75	0.5	3
-0.0072	0.5625	0.625	0.5	4
0.0414	0.59375	0.625	0.5625	5
0.0171	0.578125	0.59375	0.5625	6
0.0049	0.5703125	0.578125	0.5625	7
-0.0011	0.56640625	0.5703125	0.5625	8
0.0019	0.568359375	0.5703125	0.56640625	9
0.0003	**0.5673828125**	0.568359375	0.56640625	10

سوال ۲. اگر تابع $f(x)$ را به شکل زیر تعریف کنیم،:

[1] Bisection Method

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{۱}{x^۲}} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

نشان دهید در روش نیوتن[۲] ، اگر $x_۰ = ۰/۰۰۰۱$ باشد، آنگاه به بیش از ۱۰۰ میلیون گام برای رسیدن به مقدار کمتر از ۰/۰۰۰۰۵ نیازمندیم. تابع را پیوسته و مشتق‌پذیر در نظر بگیرید. همچنین $x = ۰$ تنها پاسخ تابع است.

پاسخ:

Solution: The differentiation (for $x \neq 0$) is straightforward. (Showing that $f'(0) = 0$ is more delicate, but we don't need that here.) By the Chain Rule,

$$f'(x) = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}.$$

Write down the standard Newton Method iteration. The e^{-1/x_n^2} terms cancel, and we get

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3}{2} \quad \text{or equivalently} \quad x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^3}{2}.$$

Now the analysis is somewhat delicate. It hinges on the fact that if x_n is close to 0, then x_{n+1} is very near to x_n, meaning that each iteration gains us very little additional accuracy.

Start with $x_0 = 0.0001$. It is fairly easy to see that $x_n > 0$ for all n. For $x_1 = x_0(1 - x_0^2/2)$, and in particular $0 < x_1 < x_0$. The same idea shows that $0 < x_2 < x_1$, but then $0 < x_3 < x_2$, and so on forever.

Thus if we start with $x_0 = 0.0001$, the difference $x_n - x_{n+1}$ will always be positive and equal to $x_n^3/2$, and in particular less than or equal to $(0.0001)^3/2$. So with each iteration there is a shrinkage of at most 5×10^{-13}. But to get from 0.0001 to 0.00005 we must shrink by more than 5×10^{-5}. Thus we will need more than $(5 \times 10^{-5})/(5 \times 10^{-13})$, that is, 10^8 iterations. (More, because as we get closer to 0.00005, the shrinkage per iteration is less than what we estimated.)

[2] Newton Raphson

سوال ۳. مقدار $\sqrt[۳]{۴۸}$ را با استفاده از روش نیوتن و نقطه ثابت [3] بیابید و با هم مقایسه کنید.

پاسخ: روش نیوتن:

$$f(x) = x^{۳} - ۴۸$$
$$f'(x) = ۳x^{۲}$$
$$f(۳) = -۲۱, f(۴) = ۱۶ \longrightarrow x_{\cdot} = ۳/۵$$

x_1	f'(x_0)	f(x_0)	x_0	Iter
3.6395	36.75	-5.125	3.5	۱
3.6342	39.7369	0.2069	3.6395	۲
3.6342	39.6233	0.0003	3.6342	۳

روش نقطه ثابت:

$$۴۸ - x^{۳} = \cdot \rightarrow ۱\cdot x = ۴۸ - x^{۳} + ۱\cdot x$$

$$\phi(x) = \frac{۴۸-x^{۳}+۱\cdot x}{۱\cdot}$$

$$x_{۱} = \phi(۳/۵) = ۴/\cdot۱۲۵$$

$$x_{۲} = \phi(۴/\cdot۱۲۵) = ۲/۳۵۲$$

$$x_{۳} = \phi(۲/۳۵۲) = ۵/۸۵۱$$

$$x_{۴} = \phi(۵/۸۵۱) = -۹/۳۷۹$$

$$\cdots$$

می‌بینیم که این الگوریتم واگرا می‌باشد
نکته: درنظر گرفتن هر تابع صحیح دیگری و ارائه الگوریتم درست نیز نمره کامل را دریافت می‌کند.

سوال ۴. فرض کنید $f(x) = x^{۲} - a$ با روش نیوتن عبارت زیر را اثبات کنید. همچنین تحقیق کنید این عبارت در کدام روش مشهور ریشه یابی به کار می‌رود.

$$x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad (۱)$$

پاسخ:

[3] Fixed point

Heron of Alexandria (60 CE?) used a pre-algebra version of the above recurrence. It is still at the heart of computer algorithms for finding square roots.

Solution: We have $f(x) = 2x$. The Newton Method therefore leads to the recurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}.$$

Bring the expression on the right hand side to the common denominator $2x_n$. We get

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - (x_n^2 - a)}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

سوال ۵. دستگاه معادلات خطی زیر را با استفاده از روش گاوس_سیدل و روش ژاکوبی تا حداکثر ۵ مرحله یا خطای $۱۰^{-۲}$ حل کنید.

$$\begin{cases} ۵/۵۱x_۱ + ۰/۸۶x_۲ + ۰/۲۲x_۳ = ۲۰ \\ ۰/۷۶x_۱ + ۸/۸۶x_۲ + ۱/۴۲x_۳ = ۲۹/۳ \\ ۰/۰۳x_۱ + ۰/۵۸x_۲ + ۵/۱۳x_۳ = ۲۲ \end{cases}$$

پاسخ: در روش ژاکوبی داریم که:

$$x^{(i+۱)} = \beta + Bx^{(i)}, \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

$$A = \begin{pmatrix} ۵/۵۱ & ۰/۸۶ & ۰/۲۲ \\ ۰/۷۶ & ۸/۸۶ & ۱/۴۲ \\ ۰/۰۳ & ۰/۵۸ & ۵/۱۳ \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} ۲۰ \\ ۲۹/۳ \\ ۲۲ \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} ۳/۶۲۹۸ \\ ۳/۳۰۷ \\ ۴/۲۸۸۵ \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} ۰/۰ & -۰/۱۵۶۱ & -۰/۰۳۹۹ \\ -۰/۰۸۵۸ & ۰/۰ & -۰/۱۶۰۳ \\ -۰/۰۰۵۸ & -۰/۱۱۳۱ & ۰/۰ \end{bmatrix} x^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$x^{(۱)} = \beta + Bx^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۳/۶۲۹۸ \\ ۳/۳۰۷ \\ ۴/۲۸۸۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰/۰ & -۰/۱۵۶۱ & -۰/۰۳۹۹ \\ -۰/۰۸۵۸ & ۰/۰ & -۰/۱۶۰۳ \\ -۰/۰۰۵۸ & -۰/۱۱۳۱ & ۰/۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۶۲۹۸ \\ ۳/۳۰۷ \\ ۴/۲۸۸۵ \end{bmatrix}$$

$$x^{(۲)} = \beta + Bx^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۳/۶۲۹۸ \\ ۳/۳۰۷ \\ ۴/۲۸۸۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰/۰ & -۰/۱۵۶۱ & -۰/۰۳۹۹ \\ -۰/۰۸۵۸ & ۰/۰ & -۰/۱۶۰۳ \\ -۰/۰۰۵۸ & -۰/۱۱۳۱ & ۰/۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳/۶۲۹۸ \\ ۳/۳۰۷ \\ ۴/۲۸۸۵ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ۳/۶۲۹۸ \\ ۳/۳۰۷ \\ ۴/۲۸۸۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۰/۶۸۷۳ \\ -۰/۹۹۸۹ \\ -۰/۳۹۵۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲/۹۴۲۵ \\ ۲/۳۰۸۱ \\ ۳/۸۹۳۴ \end{bmatrix}$$

$$x^{(۲)} - x^{(۱)} = \begin{bmatrix} -۰/۶۸۷۳ \\ -۰/۹۹۸۹ \\ -۰/۳۹۵۱ \end{bmatrix}$$

$$x^{(۳)} = \beta + Bx^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۳/۶۲۹۸ \\ ۳/۳۰۷ \\ ۴/۲۸۸۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰/۰ & -۰/۱۵۶۱ & -۰/۰۳۹۹ \\ -۰/۰۸۵۸ & ۰/۰ & -۰/۱۶۰۳ \\ -۰/۰۰۵۸ & -۰/۱۱۳۱ & ۰/۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲/۹۴۲۵ \\ ۲/۳۰۸۱ \\ ۳/۸۹۳۴ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ۳/۶۲۹۸ \\ ۳/۳۰۷ \\ ۴/۲۸۸۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۰/۵۱۵۶ \\ -۰/۸۷۶۶ \\ -۰/۲۷۸۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۱۱۴۲ \\ ۲/۴۳۰۴ \\ ۴/۰۱۰۴ \end{bmatrix}$$

$$x^{(۳)} - x^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۰/۱۷۱۷ \\ ۰/۱۲۲۳ \\ ۰/۱۱۷ \end{bmatrix}$$

$$x^{(۴)} = \beta + Bx^{(۳)} = \begin{bmatrix} ۳/۶۲۹۸ \\ ۳/۳۰۷ \\ ۴/۲۸۸۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰/۰ & -۰/۱۵۶۱ & -۰/۰۳۹۹ \\ -۰/۰۸۵۸ & ۰/۰ & -۰/۱۶۰۳ \\ -۰/۰۰۵۸ & -۰/۱۱۳۱ & ۰/۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳/۱۱۴۲ \\ ۲/۴۳۰۴ \\ ۴/۰۱۰۴ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ۳/۶۲۹۸ \\ ۳/۳۰۷ \\ ۴/۲۸۸۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۰/۵۳۹۴ \\ -۰/۹۱۰۱ \\ -۰/۲۹۲۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۰۹۰۴ \\ ۲/۳۹۶۹ \\ ۳/۹۹۵۶ \end{bmatrix}$$

$$x^{(۴)} - x^{(۳)} = \begin{bmatrix} -۰/۰۲۳۸ \\ -۰/۰۳۳۵ \\ -۰/۰۱۴۸ \end{bmatrix}$$

$$x^{(۵)} = \beta + Bx^{(۴)} = \begin{bmatrix} ۳/۶۲۹۸ \\ ۳/۳۰۷ \\ ۴/۲۸۸۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰/۰ & -۰/۱۵۶۱ & -۰/۰۳۹۹ \\ -۰/۰۸۵۸ & ۰/۰ & -۰/۱۶۰۳ \\ -۰/۰۰۵۸ & -۰/۱۱۳۱ & ۰/۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳/۰۹۰۴ \\ ۲/۳۹۶۹ \\ ۳/۹۹۵۶ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ۳/۶۲۹۸ \\ ۳/۳۰۷ \\ ۴/۲۸۸۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۰/۵۳۳۶ \\ -۰/۹۰۵۶ \\ -۰/۲۸۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۰۹۶۲ \\ ۲/۴۰۱۴ \\ ۳/۹۹۹۵ \end{bmatrix}$$

$$x^{(۵)} - x^{(۴)} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۵۸ \\ ۰/۰۰۴۴ \\ ۰/۰۰۳۹ \end{bmatrix}$$

ب)حال با روش گاوس‌ـ سایدل داریم که:

$$A = \begin{pmatrix} ۵/۵۱ & ۰/۸۶ & ۰/۲۲ \\ ۰/۷۶ & ۸/۸۶ & ۱/۴۲ \\ ۰/۰۳ & ۰/۵۸ & ۵/۱۳ \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} ۲۰ \\ ۲۹/۳ \\ ۲۲ \end{pmatrix}, x^{(۰)} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$x_i^{(j)} = \frac{۱}{A[i][i]}(b[i] - \Sigma_{k!=i} x_k^{(j)} * A[i][k])$$

$$x^{(i+۱)} = \begin{pmatrix} ۳/۶۲۹۸ - ۰/۱۵۶۱ * x_۲^{(i)} - ۰/۰۳۹۹ * x_۳^{(i)} \\ ۳/۳۰۷ - ۰/۰۸۵۸ * x_۱^{(i+۱)} - ۰/۱۶۰۳ * x_۳^{(i)} \\ ۴/۲۸۸۵ - ۰/۰۰۵۸ * x_۱^{(i+۱)} - ۰/۱۱۳۱ * x_۲^{(i+۱)} \end{pmatrix}$$

$$x^{(۱)} = \begin{pmatrix} ۳/۶۲۹۸ - ۰/۱۵۶۱ * ۰ - ۰/۰۳۹۹ * ۰ \\ ۳/۳۰۷ - ۰/۰۸۵۸ * ۳/۶۲۹۸ - ۰/۱۶۰۳ * ۰ \\ ۴/۲۸۸۵ - ۰/۰۰۵۸ * ۳/۶۲۹۸ - ۰/۱۱۳۱ * ۲/۹۹۵۶ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳/۶۲۹۸ \\ ۲/۹۹۵۶ \\ ۳/۹۲۸۶ \end{pmatrix}$$

$$x^{(۲)} = \begin{pmatrix} ۳/۶۲۹۸ - ۰/۱۵۶۱ * ۲/۹۹۵۶ - ۰/۰۳۹۹ * ۳/۹۲۸۶ \\ ۳/۳۰۷ - ۰/۰۸۵۸ * ۳/۰۰۵۴ - ۰/۱۶۰۳ * ۳/۹۲۸۶ \\ ۴/۲۸۸۵ - ۰/۰۰۵۸ * ۳/۰۰۵۴ - ۰/۱۱۳۱ * ۲/۴۱۹۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳/۰۰۵۴ \\ ۲/۴۱۹۴ \\ ۳/۹۹۷۴ \end{pmatrix}$$

$$x^{(۲)} - x^{(۱)} = \begin{bmatrix} -۰/۶۲۴۴ \\ -۰/۵۷۶۲ \\ ۰/۰۶۸۸ \end{bmatrix}$$

$$x^{(۳)} = \begin{pmatrix} ۳/۶۲۹۸ - ۰/۱۵۶۱ * ۲/۴۱۹۴ - ۰/۰۳۹۹ * ۳/۹۹۷۴ \\ ۳/۳۰۷ - ۰/۰۸۵۸ * ۳/۰۹۲۶ - ۰/۱۶۰۳ * ۳/۹۹۷۴ \\ ۴/۲۸۸۵ - ۰/۰۰۵۸ * ۳/۰۹۲۶ - ۰/۱۱۳۱ * ۲/۴۰۰۹ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳/۰۹۲۶ \\ ۲/۴۰۰۹ \\ ۳/۹۹۹ \end{pmatrix}$$

$$x^{(۳)} - x^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۰/۰۸۷۲ \\ -۰/۰۱۸۵ \\ ۰/۰۰۱۶ \end{bmatrix}$$

$$x^{(۴)} = \begin{pmatrix} ۳/۶۲۹۸ - ۰/۱۵۶۱ * ۲/۴۰۰۹ - ۰/۰۳۹۹ * ۳/۹۹۹ \\ ۳/۳۰۷ - ۰/۰۸۵۸ * ۳/۰۹۵۵ - ۰/۱۶۰۳ * ۳/۹۹۹ \\ ۴/۲۸۸۵ - ۰/۰۰۵۸ * ۳/۰۹۵۵ - ۰/۱۱۳۱ * ۲/۴۰۰۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳/۰۹۵۵ \\ ۲/۴۰۰۴ \\ ۳/۹۹۹۱ \end{pmatrix}$$

$$x^{(۴)} - x^{(۳)} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۲۹ \\ -۰/۰۰۰۵ \\ ۰/۰۰۰۱ \end{bmatrix}$$

سوال ۶. دترمینان و وارون ماتریس زیر را با استفاده از روش حذف گاوسی بدست آورید:

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۳ \end{vmatrix} = ۴\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & \frac{۱}{۴} & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۳ \end{vmatrix} = ۴\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & \frac{۱}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۲} & ۲ \\ ۰ & -۲ & \frac{۵}{۲} & ۱ \\ ۰ & -۱ & \frac{۵}{۲} & ۳ \end{vmatrix} = ۴\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & \frac{۱}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۲} & ۲ \\ ۰ & ۰ & \frac{۳}{۲} & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۵ \end{vmatrix} =$$

$$۶\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & \frac{۱}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۲} & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۱۰}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & -\frac{۵}{۳} \end{vmatrix} = -۱۰\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & \frac{۱}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۲} & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۱۰}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۱۰$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} ۴ & ۴ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۱ & ۰/۲۵ & ۰ & ۰/۲۵ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۰/۵ & ۲ & -۰/۵ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۲/۵ & ۱ & -۰/۵ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲/۵ & ۳ & -۰/۵ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۱ & ۰/۲۵ & ۰ & ۰/۲۵ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۰/۵ & ۲ & -۰/۵ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱/۵ & ۵ & -۱/۵ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۵ & -۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۱ & ۰/۲۵ & ۰ & ۰/۲۵ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۰/۵ & ۲ & -۰/۵ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۱۰}{۳} & -۱ & \frac{۴}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۰/۶ & ۱ & ۰/۸ & -۰/۶ \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۱ & ۰/۲۵ & ۰ & ۰/۲۵ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۰/۵ & ۰ & ۰/۷ & -۱ & -۱/۶ & ۱/۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۲ & -۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۰/۶ & ۱ & ۰/۸ & -۰/۶ \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۵ & ۰/۵ & -۰/۵ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱/۲ & -۲ & -۲/۶ & ۲/۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۲ & -۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۰/۶ & ۱ & ۰/۸ & -۰/۶ \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱/۲ & ۲/۵ & ۳/۱ & -۲/۷ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱/۲ & -۲ & -۲/۶ & ۲/۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۲ & -۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۰/۶ & ۱ & ۰/۸ & -۰/۶ \end{array}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} ۴ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۳ \end{pmatrix}^{-۱} = \begin{pmatrix} -۱/۲ & ۲/۵ & ۳/۱ & -۲/۷ \\ ۱/۲ & -۲ & -۲/۶ & ۲/۲ \\ ۱ & -۲ & -۲ & ۲ \\ -۰/۶ & ۱ & ۰/۸ & -۰/۶ \end{pmatrix}$$

موفق باشید.