
سوال ۱. با استفاده از روش دوبخشی [1] به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف. ریشه تابع $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ را در بازه $[1, 2]$ در ۷ گام بیابید.

ب. ریشه تابع $g(x) = x - e^{-x}$ را با دقت 10^{-2} به دست آورید.

سوال ۲. اگر تابع $f(x)$ را به شکل زیر تعریف کنیم،:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

نشان دهید در روش نیوتن [2] ، اگر $x_0 = 0/0001$ باشد، آنگاه به بیش از ۱۰۰ میلیون گام برای رسیدن به مقدار کمتر از ۰/۰۰۰۰۵ نیازمندیم. تابع را پیوسته و مشتق‌پذیر در نظر بگیرید. همچنین $x = 0$ تنها پاسخ تابع است.

پاسخ:

Solution: The differentiation (for $x \neq 0$) is straightforward. (Showing that $f'(0) = 0$ is more delicate, but we don't need that here.) By the Chain Rule,

$$f'(x) = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}.$$

Write down the standard Newton Method iteration. The e^{-1/x_n^2} terms cancel, and we get

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3}{2} \quad \text{or equivalently} \quad x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^3}{2}.$$

Now the analysis is somewhat delicate. It hinges on the fact that if x_n is close to 0, then x_{n+1} is very near to x_n, meaning that each iteration gains us very little additional accuracy.

Start with $x_0 = 0.0001$. It is fairly easy to see that $x_n > 0$ for all n. For $x_1 = x_0(1 - x_0^2/2)$, and in particular $0 < x_1 < x_0$. The same idea shows that $0 < x_2 < x_1$, but then $0 < x_3 < x_2$, and so on forever.

---

[1] Bisection Method
[2] Newton Raphson

Thus if we start with $x_0 = 0.0001$, the difference $x_n - x_{n+1}$ will always be positive and equal to $x_n^3/2$, and in particular less than or equal to $(0.0001)^3/2$. So with each iteration there is a shrinkage of at most 5×10^{-13}. But to get from 0.0001 to 0.00005 we must shrink by more than 5×10^{-5}. Thus we will need more than $(5 \times 10^{-5})/(5 \times 10^{-13})$, that is, 10^8 iterations. (More, because as we get closer to 0.00005, the shrinkage per iteration is less than what we estimated.)

سوال ۳. مقدار $\sqrt[۳]{۴۸}$ را با استفاده از روش نیوتن و نقطه ثابت [3] بیابید و با هم مقایسه کنید.

سوال ۴. فرض کنید $f(x) = x^۲ - a$ با روش نیوتن عبارت زیر را اثبات کنید. همچنین تحقیق کنید این عبارت در کدام روش مشهور ریشه یابی به کار می‌رود.

$$x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad (۱)$$

سوال ۵. دستگاه معادلات خطی زیر را با استفاده از روش گاوس–سیدل و روش ژاکوبی تا حداکثر ۵ مرحله یا خطای $۱۰^{-۲}$ حل کنید.

$$\begin{cases} ۵/۵۱x_۱ + ۰/۸۶x_۲ + ۰/۲۲x_۳ = ۲۰ \\ ۰/۷۶x_۱ + ۸/۸۶x_۲ + ۱/۴۲x_۳ = ۲۹/۳ \\ ۰/۰۳x_۱ + ۰/۵۸x_۲ + ۵/۱۳x_۳ = ۲۲ \end{cases}$$

سوال ۶. دترمینان و وارون ماتریس زیر را با استفاده از روش حذف گاوسی بدست آورید:

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

موفق باشید.

[3] Fixed point