دانشکده مهندسی کامپیوتر

آزمون میان ترم

محاسبات عددی

تاریخ آزمون: ۱۳ آذر ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه

لطفاً فقط یکی از دو گزینه پاسخ به هر چهار سوال تشریحی **یا** پاسخ به سه سوال از چهار سوال تشریحی و پاسخ به همه سوالات تستی را انتخاب کنید.

(الف) بخش تستی لطفاً پاسخ درست را در پاسخنامه با ذکر شماره سوال بنویسید.

۱. حداکثر درجه چندجمله‌ای گذرنده از نقاط $(2,22)$، $(3,14)$، $(2,8)$، $(1,4)$ و $(0,2)$ کدام است؟

(الف) ۲ (ب) ۳

(ج) ۴ (د) ۵

---

۲. قراردهید $x_i = i$ به ازای $i = 0,\dots,N$. فرض کنید $L_i(x)$ چند جمله‌ایهای لاگرانژ باشند. حاصل $\sum_{i=0}^{N} iL_i(x)$ کدام است؟

(الف) ۱ (ب) x

(ج) x^2 (د) $L_N(x) - L_0(x)$

---

۳. بهترین خط $y = ax + b$ را بدست آورید که داده‌های مقابل را برازش کند.

x_i	۰	۱	۲	۳
y_i	۱	۴	۶	۹

(الف) $y = -1.1x + 2.6$ (ب) $y = 1.1x + 2.6$

(ج) $y = 2.6x - 1.1$ (د) $y = 2.6x + 1.1$

---

۴. اگر مقدار تابع f در نقاط x_0 و x_1 بەترتیب برابر با f_0 و f_1 باشد، مقدار $f(\frac{x_0+x_1}{2})$ با استفاده از درونیابی f کدام است؟

(الف) $\frac{1}{2}(f_0 + f_1)$ (ب) $\frac{x_0 f_1 + x_1 f_0}{x_0 + x_1}$

(ج) $\frac{x_0 f_0 + x_1 f_1}{x_0 + x_1}$ (د) تعداد نقاط برای محاسبه کافی نیست.

---

۵. قرار دهید $f(x) = \tan\frac{\pi x}{4}$. چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_0 = 0$، $x_1 = 1$ و $x_2 = 3$ کدام است؟

(الف) $\frac{1}{2}(x^2 + x)$ (ب) $\frac{1}{2}(x^2 + 2)$

(ج) $\frac{1}{3}(-2x^2 + 5x)$ (د) $\frac{1}{2}(x^2 + x - 2)$

---

۶. مقادیر تابع f در نقاط $x_0,\dots,x_5$ با فرض $x_{i+1} = x_i + h$ داده شده است. فرض کنید ماکزیمم مقدار $f^{(n+1)}(x)$ روی دامنه تابع برابر با M است. حداکثر مقدار خطای تخمین مقدار تابع در $x = x_0 + \alpha h$ با استفاده از درونیابی کدام است؟

(الف) $\left|\frac{h^5}{5!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-5)\right|M$ (ب) $\left|\frac{h^5}{5!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-5)\right|M^5$

(ج) $\left|\frac{h^6}{6!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-5)\right|M$ (د) $\frac{1}{5}hM$

---

۷. تابع f به صورت جدول زیر داده شده است. فرض کنید به ازای هر $0 \le x \le 3$ بدانیم $|f^{(2)}(x)| \le ۰۸$. یک کران بالای مناسب برای خطای حاصل از تخمین $f(1.5)$ با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب کدام است؟

x_i	۰	۱	۲	۳
y_i	۱	۰۱	۰	-1

(الف) ۰٫۰۱۲۱۶ (ب) ۰٫۰۱۸۷۵

(ج) ۰٫۰۲۴۵۱ (د) ۰٫۰۲۷۸۳

---

۸. اگر در درونیابی توسط چندجمله‌ای‌های مرتبه n محل نقاط را در ریشه‌های چند جمله‌ای $n+1$ چبیشف انتخاب کنیم، آنگاه در محاسبه‌ی تابع درونیاب ...

(الف) به علت منحصر به فرد بودن تابع درونیاب، در میزان خطای محاسباتی ایجاد شده تغییری پدید نمی‌آید.

(ب) خطای محاسباتی کاهش می‌یابد.

(ج) تعداد عملیات لازم کم‌تر می‌شود ولی خطای محاسباتی تغییر نمی‌کند.

(د) تعداد عملیات لازم بیش‌تر می‌شود و در نتیجه خطای محاسباتی افزایش می‌یابد.

دانشکده مهندسی کامپیوتر	به نام خدا آزمون میان ترم **محاسبات عددی**	تاریخ آزمون: ۱۳ آذر ۱۴۰۲ مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه

۹. با توجه به مقادیر داده شده، مقدار تقریبی تابع در $x = ۲$، کدام است؟

x_i	۰	۳	۴	۷
$f(x_i)$	۲	۸	۹	۶

(الف) ۵

(ب) ۵٫۳

(ج) ۶٫۳

(د) صفر

---

۱۰. مقدار خطا در محاسبه $\sqrt{۹۰}$ با استفاده از درونیابی لاگرانژ با در نظر گرفتن نقاط $x_0 = ۸۱, x_1 = ۱۰۰, x_2 = ۱۲۱$ برای تابع $f(x) = \sqrt{x}$ حداکثر کدام است؟

(الف) $۱٫۵۲ \times ۱۰^{-۳}$

(ب) $۱٫۷۵ \times ۱۰^{-۳}$

(ج) $۲٫۸۵ \times ۱۰^{-۳}$

(د) $۴٫۲ \times ۱۰^{-۳}$

(ب) بخش تشریحی

۱. تابع $f(x) = \frac{۱}{۱+x}$ را در نظر بگیرید.

الف) چندجمله‌ای تیلور از درجه n آن را حول $x_0 = ۰$ بنویسید.

ب) نشان دهید سری تیلور فوق بر بازه‌ای مانند $[۰, b]$ به ازای $۰ < b < ۱$ به تابع همگراست.

---

۲. مقادیر تابع f به صورت جدول زیر در دست است:

x_i	-۱	۰	۱	۳
$f(x_i)$	۰	۲	۹	۳۷

معادلات اسپلاین مکعبی طبیعی که تابع f را در نقاط $x_0 = -۱$، $x_1 = ۰$، $x_2 = ۱$ و $x_3 = ۳$ درونیابی نماید را به‌دست آورید.
توجه کنید منظور از اسپلاین مکعبی طبیعی در نظر گرفتن شرط $s''(x_0) = s''(x_n) = ۰$ است که در آن $s(x)$ تابع اسپلاین است.

---

۳. داده‌ها زیر مفروض اند:

x_i	۰٫۸	۰٫۹	۱٫۰	۱٫۱	۱٫۲
y_i	۱٫۰	۱٫۲	۱٫۱	۱٫۵	۲٫۰

الف) چندجمله‌ای‌های $P_0(x)$، $P_1(x)$ و $P_2(x)$ (به ترتیب از درجه های صفر، ۱ و ۲) را پیدا کنید به‌طوری‌که مجموعه‌ی $\{P_0, P_1, P_2\}$ نسبت به داده‌های بالا دوبه‌دو متعامد باشند.

ب) بهترین منحنی به شکل $P(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x)$ را به‌دست بیاورید که داده‌های فوق را برازش می‌کند.

---

۴. فرض کنید $f(t)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ باشد، نشان دهید

$$f[x, y, z] = \frac{۱}{۲} f''\left(\frac{x+y+z}{۳}\right)$$

که x, y, z متمایز هستند.

موفق باشید

حسین قربان

سوال ۱ الف /

$$P_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n$$

زیرا

$$f^{(i)}(x) = \frac{(-1)^i\, i!}{(1+x)^{i+1}}$$

ب) خطای ضمیمه‌ای $P_n(x)$ برای تقریب $f(x)$ حول $x=0$ برابر است با

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+\eta_x)^{n+2}} = \frac{(-x)^{n+1}}{(1+\eta_x)^{n+2}}$$

ثابت می‌کنیم دنباله $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ به ازای هر $0<b<1$ به صورت یکنواخت روی $[0,b]$ همگرا به صفر است.

به ازای $0 \le x \le b$ داریم $0 < \eta_x < x$ و لذا $\frac{1}{1+\eta_x} \le 1$ و پس

$$|R_n(x)| \le x^{n+1}$$

چون $x \le b$ پس

$$\sup_{x\in[0,b]} |R_n(x)| \le b^{n+1}$$

چون $0<b<1$ پس $\lim_{n\to\infty} b^{n+1} = 0$ و لذا $\{R_n(x)\}$ یکنواخت همگرا به صفر

پس سری تیلور به طور یکنواخت همگرا است.

پاسخ سوال ۲.

فرض کنید $h_i = x_{i+1} - x_i$ و $m_i = 1/6\, s''(x_i)$ در این صورت با استفاده از تعریف اسپلاین:

$$h_{i-1} m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) m_i + h_i m_{i+1} =$$

$$f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]$$

شرط اسپلاین طبیعی طبیعی $\Rightarrow$ $m_0 = m_n = 0$ (یعنی: $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$)

همچنین در این مسئله، $n = 3$،

$$h_0 = x_1 - x_0 = 1$$

$$h_1 = x_2 - x_1 = 1$$

$$h_2 = x_3 - x_2 = 2$$

$$f[x_0, x_1] = 2, \quad f[x_1, x_2] = 7, \quad f[x_2, x_3] = 14$$

پس

$$\begin{cases} 4m_1 + m_2 = 5 \\ m_1 + 6m_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 1 \end{cases}$$

پس

$$d_i = f_i - h_i^2 m_i$$

$$c_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + h_i (m_i - m_{i+1})$$

بدست آمده

$$d_0 = 0, \quad c_0 = 1$$

$$d_1 = 1, \quad c_1 = 7$$

$$d_2 = 5, \quad c_2 = 14$$

$$s(x) = \begin{cases} (x+1)^3 + x + 1 & -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 4x + 2 & 0 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{2} & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

سوال ۳

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x - 1$$

$$P_2(x) = x^2 - 2x + ۰٫۹۸$$

$$p(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x)$$

$$c_i = \frac{\langle y, P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} \qquad P_i = \begin{bmatrix} P_i(x_1) \\ \vdots \\ P_i(x_n) \end{bmatrix}$$

$$0 \leq i \leq 2$$

$$1 \leq n \leq 5$$

$$c_0 = \frac{\langle y, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{6,8}{5} = 1,36$$

$$c_1 = \frac{\langle y, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = \frac{0,23}{۰٫۱} = 2,3$$

$$c_2 = \frac{\langle y, P_2 \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle} = \frac{0,0111}{۰٫۰۰14} = ۷٫۹$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P_1 = \begin{bmatrix} -۰٫۲ \\ -۰٫۱ \\ ۰ \\ ۰٫۱ \\ ۰٫۲ \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} ۰٫۰۲ \\ -۰٫۰۱ \\ -۰٫۰۲ \\ -۰٫۰۱ \\ 0,02 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱٫۲ \\ ۱٫۱ \\ ۱٫۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$P(x) = ۱٫۳۶ + ۲٫۳(x-1) + ۷٫۹(x^2 - 2x + ۰٫۹۸)$$

سوال ۴

فرض کنید u نقطه‌ای باشد بطوری که چهار نقطه x، y، z، u دو به دو متمایز باشند. منحنی $P_3(t)$

از درجه ۳ که $f(t)$ را در این چهار نقطه درونیابی می‌کند در اینجا از فرم نیوتن استفاده میکنیم

$$P_3(t) = f(t) = f(x) + (t-x)\, f[x,y] +$$
$$(t-x)(t-y)\, f[x,y,z] +$$
$$(t-x)(t-y)(t-z)\, f[x,y,z,u]$$

با دو بار مشتق‌گیری نسبت به t :

$$f'(t) = -x\, f[x,y]$$
$$\big((t-y) + t - y\big)\, f[x,y,z]$$
$$\big((t-y)(t-z) + (t-x)(t-z) + (t-x)(t-y)\big)\, f[x,y,z,u]$$

$$f''(t) = 2f[x,y,z]$$
$$\big(6t - 2(x+y+z)\big)\, f[x,y,z,u]$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 2f[x,y,z]$$