

سوال ۱.

تعداد زیربازه‌هایی که نیاز است روش‌های قاعده‌ی دوزنقه‌ای^۱ و قاعده‌ی سیمپسون^۲ اجرا شوند تا پاسخ انتگرال‌های زیر با دقت 10^{-6} محاسبه شوند، بدست آورید.

(الف)

$$\int_0^{\pi} x \cos(x) dx$$

(ب)

$$\int_0^4 \sqrt{4+x^2} dx$$

(ج)

$$\int_1^4 x \ln(x) dx$$

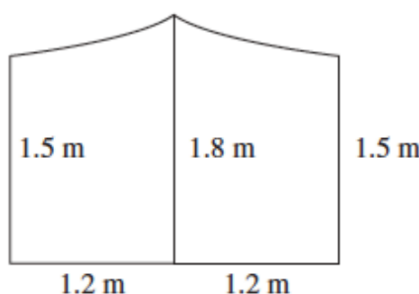
سوال ۲.

شکل زیر جلوی چادری را نشان می‌دهد که توسط سه تیرک ایستاده نگه داشته شده است. فاصله‌ی تیرک‌ها از یک‌دیگر $1/2$ متر است. ارتفاع تیرک میانی $1/8$ متر است و ارتفاع دو تیرک جانبی $1/5$ متر است. فرض کنید مساحت جلوی چادر S است.

(الف) مساحت S را با استفاده از روش قاعده‌ی دوزنقه‌ای تقریب بزنید.

(ب) مساحت S را با استفاده از روش قاعده‌ی سیمپسون تقریب بزنید.

(ج) کدام یک از روش‌ها تقریب بهتری می‌دهد؟ چرا؟



سوال ۳.

ثابت‌های c_1 ، c_2 و x_1 را به گونه‌ای محاسبه کنید که فرمول زیر برای چندجمله‌ای‌های با حداکثر درجه‌ی ممکن، دقیق باشد.

$$\int_a^b f(x)dx = c_0 f(a) + c_1 f(x_1)$$

سوال ۴.

الف) یک five-point formula از $O(h^4)$ برای تقریب $f'(x_0)$ با استفاده از $f(x_0 - h), f(x_0), f(x_0 + h)$ ارائه دهید. (از سری تیلور مرتبه چهار استفاده کنید.)
 $f(x_0 + 2h), f(x_0 + 3h)$

ب) با استفاده از فرمولی که در مرحله قبل به آن دست یافتید مشتق تابع $f(x) = \sin x \cos x$ را در $x_0 = 1$ با $h = 0.1$ بدست آورید.

سوال ۵.

الف) فرض کنید قصد داریم از رابطه three-point midpoint formula برای تخمین مشتق تابع $f(x)$ در نقطه x_0 استفاده کنیم، اما در تخمین مقادیر $f(x_0 + h)$ و $f(x_0 - h)$ خطای رند کردن $e(x_0 + h)$ و $e(x_0 - h)$ داریم، با در نظر گرفتن این خطاها یک کران بالای جدید برای خطای محاسبه مشتق به روش formula three-point midpoint بدهید.

ب) در صورتی که h خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد چه اتفاقی می افتد؟

ج) بازه مناسب برای انتخاب h را محاسبه کنید.

موفق باشید.