محاسبات عددی **سری شمارهٔ ۲**

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ـ۱۴۰۲ **موعد تحویل: ۸ آذر**

سوال ۱.
پاسخ معادلات خطی زیر را با استفاده از روش کرامر [۱] به دست آورید.
الف)

$$\begin{cases} ۲x_۱ - ۶x_۲ + x_۳ = ۲ \\ x_۱ - x_۲ - x_۳ = ۰ \\ x_۲ + x_۳ = ۱ \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} ۱۱x_۱ - ۱۰x_۲ = ۳۰ \\ ۲۱x_۲ - ۲۰x_۱ = -۴۰ \end{cases}$$

ج)

$$\begin{cases} x_۱ - ۸x_۲ - ۳x_۳ = -۲ \\ ۲x_۱ + ۴x_۲ - x_۳ = ۰ \\ ۲x_۱ - x_۳ = ۱ \end{cases}$$

سوال ۲.
پاسخ معادلات خطی زیر را با استفاده از روش حذفی گاوس [۲] به دست آورید.
الف)

$$\begin{cases} x_۱ - ۴x_۲ - ۱۲x_۳ = ۹ \\ x_۱ - ۲x_۲ - ۶x_۳ = ۵ \\ ۲x_۱ + ۴x_۲ + ۱۲x_۳ = -۶ \end{cases}$$

---

[۱] Cramer
[۲] Gaussian Elimination

ب)

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۵x_۲ = ۹ \\ x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ = ۳ \\ -۳x_۱ - ۴x_۲ + ۷x_۳ = ۱ \end{cases}$$

سوال ۳.

پاسخ معادله‌ی خطی زیر را با استفاده از روش دولیتل [۳] به دست آورید. (محاسبات را با پنج رقم اعشار انجام دهید)

$$\begin{cases} ۳x_۱ + ۲x_۲ + ۹x_۳ = ۲۸ \\ ۵x_۱ + ۲x_۲ - ۴x_۳ = -۱۳ \\ ۲x_۱ - x_۲ + ۶x_۳ = ۱۴ \end{cases}$$

سوال ۴.

فرض کنید $A_{n\times n}$ یک ماتریس حقیقی متقارن باشد. در این‌صورت ثابت کنید روش ریشه‌ی دوم [۴] تجزیه‌ی $A = U^TU$ را با کمیت‌های $a_{jj} - \Sigma_{k=۱}^{j-۱} u_{kj}^۲ > ۰$ برمی‌گرداند اگر و تنها اگر به ازای تمامی مقادیر $j = ۱, ..., n$ ماتریس A مثبت معین باشد.

سوال ۵.

معادله‌ی خطی $Ax = b$ را با مقادیر زیر درنظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} ۴ & ۱ & -۲ \\ -۱ & ۴ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۰ \\ ۴ \end{pmatrix}$$

الف) با تقریب اولیه‌ی $x^{(۰)} = ۰$ و سه تکرار از روش ژاکوبی [۵] مقادیر $x^{(۱)}$ ، $x^{(۲)}$ و $x^{(۳)}$ را محاسبه کنید.

ب) با تقریب اولیه‌ی $x^{(۰)} = ۰$ و سه تکرار از روش گاوس‌ـسایدل [۶] مقادیر $x^{(۱)}$ ، $x^{(۲)}$ و $x^{(۳)}$ را محاسبه کنید.

ج) کدام یک از روش‌های بالا تقریب بهتری از جواب‌ها می‌دهد؟

---

[۳] Doolittle

[۴] Square Root

[۵] Jacobi

[۶] Gauss-Seidel

سوال ۶.

فرض کنید $x^{(0)} = 0$ تقریب اولیه برای x باشد. برای هرکدام از معادلات خطی زیر دو تکرار از روش ژاکوبی را انجام دهید.

الف)

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 6 \end{cases}$$

سوال ۷.

دستگاه زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0/2 \\ -1/2x_1 + x_2 + 1/4x_3 = -1/425 \\ x_1 - 1/2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

پاسخ این دستگاه به‌صورت $(0/9, 0/8, 0/7)^t$ است.

الف) از تقریب اولیه‌ی $x^{(0)}$ و روش گاوس‌ـسایدل استفاده کنید و پاسخ را با خطای 10^{-2} و در حداکثر ۳۰۰ تکرار به‌دست آورید.

ب) درصورتی‌که دستگاه را به شکل زیر تغییر دهیم، پاسخ بخش الف چه خواهد شد؟

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0/2 \\ -1/2x_1 + x_2 - 1/4x_3 = -1/425 \\ x_1 - 1/2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

سوال ۸.

فرض کنید ماشین حسابی در اختیار داریم که تنها از عملیات‌های جمع، ضرب و تفریق پشتیبانی می‌کند. مقدار

۱/۱/۳۷ را با استفاده از ماشین حساب مذکور، معادله‌ی $1/x = 1/37$ و روش نیوتون [۷] محاسبه کنید. (دقت پاسخ نهایی باید ۸ رقم اعشار باشد)

سوال ۹.
فرض کنید تابع f به شکل زیر تعریف شده‌باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{x = ۰ اگر} \\ e^{-1/(x^2)} & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

نشان دهید که اگر $x_0 = 0/0001$ باشد، باید بیشتر از صد میلیون تکرار از روش نیوتون را انجام دهیم تا به جوابی کمتر از ۰/۰۰۰۰۵ برسیم.

سوال ۱۰.
از روش نیوتون استفاده کنید و دو تا کوچکترین ریشه‌های مثبت معادله‌ی $tan(x) = 4x$ را بدست آورید. (دقت پاسخ نهایی باید ۵ رقم اعشار باشد)

موفق باشید.

---

[۷] Newton