

سوال ۱. معادله دیفرانسیل $y' = \lambda y$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید روش اویلر برای این معادله به ازای $\lambda < 0$ و مقدار ابتدایی $y(0) = 1$ برای طول گام $0 < \lambda h < 1$ پایدار است؛ یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

ب) نشان دهید در حل معادله بالا می توان روش رانگ - کوتای مرتبه چهارم را به صورت زیر نوشت:

$$y_{i+1} = (1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4)y_i$$

حل

(الف)

$$y_1 = y_0 + h \underbrace{(\lambda y_0)}_{f(x_0, y_0)} = y_0(\lambda h + 1)$$

$$y_2 = y_1 + h \underbrace{(\lambda y_1)}_{f(x_1, y_1)} = y_1(\lambda h + 1) = y_0(\lambda h + 1)^2$$

⋮

$$y_n = y_{n-1} + h \underbrace{(\lambda y_{n-1})}_{f(x_{n-1}, y_{n-1})} = y_{n-1}(\lambda h + 1) = y_0(\lambda h + 1)^n$$

$$-2 < \lambda h < 0 \Rightarrow -1 < \lambda h + 1 < 1$$

و عددی بین -1 و 1 اگر به توان $n \rightarrow \infty$ برسد، عملاً صفر می شود. پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_0(\lambda h + 1)^n = 0$$

ب) می دانیم در رانگ کوتای مرتبه ۴:

$$k_1 = hf(x_n, y_n) = h\lambda y_n$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) = h\lambda(y_n + \frac{h\lambda y_n}{2}) = h\lambda y_n(\frac{h\lambda}{2} + 1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) = h\lambda(y_n + \frac{k_2}{2}) = h\lambda(y_n + \frac{h\lambda y_n}{2}(\frac{h\lambda}{2} + 1)) = h\lambda y_n(1 + \frac{h^2\lambda^2}{4} + \frac{h\lambda}{2})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$k_4 = h\lambda(y_n + k_3) = h\lambda(y_n + h\lambda y_n(1 + \frac{h^2\lambda^2}{4} + \frac{h\lambda}{2})) = h\lambda y_n(1 + h\lambda + \frac{h^3\lambda^3}{4} + \frac{h^2\lambda^2}{2})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n \frac{1 + 2(\frac{h\lambda}{2} + 1) + 2(1 + \frac{h^2\lambda^2}{4} + \frac{h\lambda}{2}) + 1 + h\lambda + \frac{h^3\lambda^3}{4} + \frac{h^2\lambda^2}{2}}{6}$$

حال با جایگذاری i به جای n و سپس فاکتورگیری از y_i خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i \left(1 + h\lambda \frac{1 + h\lambda + 2 + 2 + \frac{h^2\lambda^2}{2} + h\lambda + 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + \frac{h^2\lambda^2}{2}}{6} \right) \\ &= y_i \left(1 + (h\lambda) \frac{6}{6} + (h\lambda) \left(\frac{3h\lambda}{6} \right) + (h\lambda) \left(\frac{h^2\lambda^2}{6} \right) + (h\lambda) \left(\frac{h^2\lambda^2}{4 \times 6} \right) \right) \\ &= y_i \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \frac{(h\lambda)^4}{24} \right) \end{aligned}$$

که همان صورت سوال است.

سوال ۲.

مقدار تقریبی $y(0.3)$ و $y'(0.3)$ را در معادله دیفرانسیل زیر با گام 0.1 با استفاده از روش رانگ - کوتای مرتبه چهارم محاسبه کنید:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = \sinh(2x) \sin(x) \\ y(0) = -0.4 \\ y'(0) = -0.6 \end{cases}$$

حل

از روش تبدیل دستگاه به ۲ معادله:

$$\begin{aligned} p = y' &\Rightarrow p(0) = -0.6 \\ p' = y'' &\Rightarrow p' = 2y' - 2y + \sin(x) \sinh(2x) = 2p - 2y + \sin(x) \sinh(2x) \end{aligned}$$

رانگ کوتای مرتبه ۴ : (دوبار در هر دور به ازای دو معادله)

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \end{aligned}$$

با حل دستگاه‌های بالا به جواب مقابل می‌رسیم:

$$y(0.3) \approx -0.5941 \quad y'(0.3) \approx -0.6726$$

سوال ۳.

تقریبی از $y(1/2)$ را در معادله دیفرانسیل زیر با استفاده از روش اویلر و گام $0/1$ بیابید:

$$\begin{cases} x^2 y'' + 3xy' + 2y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 3 \end{cases}$$

حل

مشابه سوال قبل،

$$p = y' \Rightarrow p(1) = 3$$

$$p' = y'' \Rightarrow p' = -\frac{3}{x}y' - \frac{2}{x^2}y$$

$$y(1/1) = y(1) + 0/1 \underbrace{f(1, 2, 3)}_3 = 2 + 0/3 = 2/3$$

$$p(1/1) = p(1) + 0/1 f(1, 2, 3) = 3 - 0/1(13) = 1/7$$

$$y(1/2) = y(1/1) + 0/1 f(1/1, 2/3, 1/7) = 2/3 + 0/1(1/7) = 2/47$$

$$p(1/2) = p(1/1) + 0/1 f(1/1, 2/3, 3/7) \approx 1/7 + 0/1(-16/21) = 0/079$$

موفق باشید.