محاسبات عددی **سری شمارهٔ ۱**

نیم‌سال دوم ۰۱-۰۲ **پاسخنامه**

سوال ۱.

ریشه معادله $f(x) = x - \cos x = ۰$ را که در فاصله $[۰, ۱]$ قرار دارد به روش نیوتن با چهار رقم اعشار به دست آورید به طوری که $|x_n - x_{n-۱}| < ۱۰^{-۴}$ که x_n تقریب ریشه مورد نظر در تکرار nام است. (مقدار $x_۰$ را ۰/۵ قرار دهید)

پاسخ

با توجه به روش نیوتن خواهیم داشت:

$$x_۱ = x_۰ - \frac{f(x_۰)}{f'(x_۰)} \implies x_۱ = x_۰ - \frac{x_۰ - \cos x_۰}{۱ + \sin x_۰}$$

$$x_۰ = \frac{۱}{۲} \implies x_۱ = ۰/۵ - \frac{۰/۵ - \cos ۰/۵}{۱ + \sin ۰/۵} \simeq ۰/۷۵۵۲۲$$

$$x_۲ = x_۱ - \frac{f(x_۱)}{f'(x_۱)} = \frac{x_۱ - \cos x_۱}{۱ + \sin x_۱} \simeq ۰/۷۳۹۱۴$$

$$x_۳ = x_۲ - \frac{f(x_۲)}{f'(x_۲)} = \frac{x_۲ - \cos x_۲}{۱ + \sin x_۲} \simeq ۰/۷۳۹۰۸$$

$$|x_۳ - x_۲| \leq ۱۰^{-۴} \implies x = ۰/۷۳۹۰۸$$

سوال ۲.

می‌خواهیم با استفاده از فرمول $V = \frac{۱}{۳}a^۲h$ حجم یک هرم را به دست آوریم. خطاهای محتمل از انواع خطای مدل، خطای اندازه‌گیری، خطای گرد کردن و خطای عملیات را در این آزمایش به‌طور مختصر توضیح دهید.

پاسخ

خطای مدل: شکل مورد نظر دقیقا به شکل هرم نبوده و حجم به دست آمده از فرمول ممکن است با جواب واقعی تفاوت داشته باشد.

خطای اندازه‌گیری: عدم دقت در اندازه‌گیری ارتفاع هرم یا ضلع قاعده

خطای گرد کردن: به خاطر وجود $\frac{۱}{۳}$ مجبور به نگه داری چند رقم اعشار آن خواهیم بود. پس در اینجا و همچنین می‌توان در متغیرهای a و h دچار خطای اندازه‌گیری شویم.

خطای عملیات: در محاسبه حجم، چندین بار از ضرب یا تقسیم استفاده می‌شود که هر عملیات ریاضی خطا دارد.

سوال ۳.

عدد y را به k رقم اعشار گرد می‌کنیم و آن را $\overline{y}$ می‌نامیم. حال براساس آن عبارت زیر را اثبات نمایید.

$$|\frac{y - \overline{y}}{y}| \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-k+۱}$$

می‌توانید برای اثبات این قسمت عدد y را به صورت $y = ۰.d_۱ \dots d_k d_{k+۱} \dots \times ۱۰^n$ درنظر بگیرید و مسئله را حالت‌بندی کنید.

پاسخ
فرض می‌کنیم $d_۱ > ۰$.

$$|y-\bar{y}|= \begin{cases} (۱۰.d_{k+۱}\dots)\times ۱۰^{n-k} & d_{k+۱} \geq ۵ \\ ۰.d_{k+۱}\dots \times ۱۰^{n-k} & d_{k+۱} < ۵ \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \ |y-\bar{y}|\leq ۰/۵ \times ۱۰^{n-k}$$

$$|\frac{y-\bar{y}}{y}| \leq \frac{۰/۵\times ۱۰^{n-k}}{۰.d_۱d_۲\dots \times ۱۰^{n}} \leq \frac{۰/۵\times ۱۰^{n-k+۱}}{d_۱.d_۲d_۳\dots\times ۱۰^{n}}$$
$$\leq \frac{۰/۵\times ۱۰^{n-k+۱}}{۱۰^{n}} = ۰/۵\times ۱۰^{-k+۱}$$

سوال ۴.
جواب‌های معادله‌ی $\frac{۱}{۳}x^۲ - \frac{۱۲۳}{۴}x + \frac{۱}{۶} = ۰$ را با استفاده از فرمول‌های $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$ و $x = \frac{-۲c}{b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}$ تا ۴ رقم اعشار و با روش گرد کردن به دست آورید. با محاسبه‌ی خطای نسبی جواب‌ها، بگویید که کدام فرمول دقیق‌تر عمل کرده است و چرا.

پاسخ
در ابتدا پاسخ حقیقی معادله را به دست می‌آوریم. برای اینکار می‌توان از سایت http://symbolab.com کمک گرفت.

ریشه‌های حقیقی $\longrightarrow x_۱ = ۵/۴۲\times ۱۰^{-۳},\ x_۲ = ۹/۲۲۴۴۵ \times ۱۰^{۱}$

$$\Longrightarrow \ a = \frac{۱}{۳} \simeq ۰/۳۳۳۳,\ b = \frac{-۱۲۳}{۴} = -۳۰/۷۵,\ c = \frac{۱}{۶}\simeq ۰/۱۶۶۷$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac \simeq (-۳۰/۷۵)^۲ - ۴\times ۰/۳۳۳۳\times ۰/۱۶۶۷$$
$$= ۹۴۵/۵۶۲۵ - ۰/۲۲۲۲ = ۹۴۵/۳۴۰۳$$
$$\Longrightarrow \ \sqrt{\Delta}\simeq ۳۰/۷۴۶۴$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \simeq \frac{۳۰/۷۵ \pm ۳۰/۷۴۶۴}{۰/۶۶۶۶}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_۱ \simeq \frac{۳۰/۷۵-۳۰/۷۴۶۴}{۰/۶۶۶۶} = \frac{۰/۰۰۳۶}{۰/۶۶۶۶} \simeq ۰/۰۰۵۴ \Longrightarrow e_{x_۱} = ۰/۰۰۳۷ \\ x_۲ \simeq \frac{۳۰/۷۵+۳۰/۷۴۶۴}{۰/۶۶۶۶} = \frac{۶۱/۴۹۶۴}{۰/۶۶۶۶} \simeq ۹۲/۲۵۳۸ \Longrightarrow e_{x_۲} = ۰/۰۰۰۱ \end{cases}$$

$$x^{'} = \frac{-۲c}{b\pm\sqrt{\Delta}} \simeq \frac{-۰/۳۳۳۴}{-۳۰/۷۵\pm ۳۰/۷۴۶۴}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^{'}_۱ \simeq \frac{-۰/۳۳۳۴}{-۳۰/۷۵-۳۰/۷۴۶۴} = \frac{-۰/۳۳۳۴}{-۶۱/۴۹۶۴} \simeq ۰/۰۰۵۴ \Longrightarrow e^{'}_{x_۱} = ۰/۰۰۳۷ \\ x^{'}_۲ \simeq \frac{-۰/۳۳۳۴}{-۳۰/۷۵+۳۰/۷۴۶۴} = \frac{-۰/۳۳۳۴}{-۰/۰۰۳۶} \simeq ۹۲/۶۱۱۱ \Longrightarrow e_{x_۲} = ۰/۰۰۴۰ \end{cases}$$

همانطور که مشاهده شد، خطای روش دوم بیشتر از روش اول است. علت آن نیز کوچک بودن مخرج و در نتیجه نادقیق‌تر بودن آن در محاسبه $x'_۲$ است.

سوال ۵.
چند جمله‌ای $f(x) = x^۳ - ۴x^۲ + ۲x - ۲/۲$ در نظر بگیرید.

الف) مقدار تابع را در $x = ۲/۴۱$ یک‌بار با روش قطع کردن و یک‌بار با روش گرد کردن تا سه رقم اعشار به دست آورید و خطاهای نسبی را محاسبه کنید.

ب) $f(x)$ را به‌گونه‌ای تغییر دهید که خطاهای نسبی قسمت قبل، کاهش یابند.

پاسخ

الف)

$$x = ۲/۴۱ \implies x^۳ = ۱۳/۹۹۷۵۲۱,\ ۴x^۲ = ۲۳/۲۳۲۴$$
$$۲x = ۴/۸۲,\ f(x) = -۶/۶۱۴۸۷۹$$

$$\implies f_{\text{round}}(x) \simeq ۱۳/۹۹۸ - ۲۳/۲۳۲ + ۴/۸۲ - ۲/۲ = -۶/۶۱۴ \implies e_{\text{round}} = ۱/۳۲۹ \times ۱۰^{-۴}$$

$$\implies f_{\text{truncate}}(x) \simeq ۱۳/۹۹۷ - ۲۳/۲۳۲ + ۴/۸۲ - ۲/۲ = -۶/۶۱۵ \implies e_{\text{truncate}} = ۱/۸۲۹ \times ۱۰^{-۵}$$

ب) تابع را به صورت زیر تغییر می‌دهیم. در این صورت بین محاسبه از طریق گرد کردن و قطع کردن تفاوتی وجود نخواهد داشت.

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x^۲ - ۲(۲x - ۱)) - ۲/۲ = ۲/۴۱(۵/۸۰۸ - ۷/۶۴) - ۲/۲ \\ &= -۴/۴۱۵ - ۲/۲ = -۶/۶۱۵ \end{aligned}$$

که این پاسخ با پاسخ بدست آمده با روش قطع کردن در حالت قبل برابر است، اما خطای روش گرد کردن کاهش پیدا می‌کند.

سوال ۶.
اگر رشه معادله‌ی $x^۲ = c$ را با یک روش همگرا به دست آوریم و x_n تقریب ریشه در مرحله nام باشد، مقدار خطای $|x_n - \sqrt{c}|$ را برحسب x_n و c به دست آورید.

پاسخ

$$\begin{aligned} |x_n - \sqrt{c}| &= |(x_n - \sqrt{c})\frac{x_n + \sqrt{c}}{x_n + \sqrt{c}}| = \frac{|x_n^۲ - c|}{|x_n + \sqrt{c}|} \\ &\simeq \frac{|x_n^۲ - c|}{|x_n + x_n|} = \frac{|x_n^۲ - c|}{|۲x_n|} = \frac{۱}{۲}|x_n - \frac{c}{x_n}| \end{aligned}$$

سوال ۷.

برای حل معادله‌ی $x^۲ + x - ۱ = ۰$ در فاصله $(۰, ۱)$ به روش نقطه ثابت، می‌خواهیم $g(x)$ را تعیین کنیم. نشان دهید در کدام حالات پایین برای $g(x)$ شرط همگرایی برقرار بوده و در کدام حالات برقرار نخواهد بود.

الف) $g_۱(x) = \frac{x^۲+۱}{۲x+۱}$

ب) $g_۲(x) = \frac{۱}{۱+x}$

ج) $g_۳(x) = \sqrt{۱ - x}$

د) $g_۴(x) = ۱ - x^۲$

پاسخ

الف)

$$g'(x) = \frac{۱}{۲} - \frac{۵}{۸x^۲ + ۸x + ۲} \implies \lim_{x \to ۰} |g'(x)| = ۲$$

بنابراین شرط همگرایی ندارد.

ب)

$$۰ < x < ۱ \implies ۱ < x + ۱ < ۲ \implies \frac{۱}{۲} < \frac{۱}{x + ۱} < ۱ \implies g_۲(x) \in (۰, ۱)$$

$$|g_۲'(x)| = \frac{۱}{(۱ + x)^۲} \implies \frac{۱}{۴} < |g_۲'(x)| < ۱ \implies |g_۲'(x)| < ۱$$

این مورد شرط همگرایی را دارا می‌باشد.

ج)

$$g_۳'(x) = \frac{-۱}{۲\sqrt{۱ - x}} \implies \lim_{x \to ۱} |g_۳'(x)| \to \infty$$

شرط همگرایی ندارد.

د)

$$g_۴'(x) = -۲x \implies \lim_{x \to ۱} |g_۴'(x)| = ۲$$

در اینجا نیز شرط همگرایی نداریم.

سوال ۸.

ریشه تابع $g(x)$ را با درنظر گرفتن حدس اولیه $x_۰ = -۱$، $x_۱ = ۰$ با روش نابه‌جایی تقریب بزنید به طوری که داشته باشیم: $|f(x_n)| < ۰/۰۵$

$$g(x) = -۲/۷۵x^۳ + ۱۸x^۲ - ۲۱x - ۱۲$$

پاسخ

با توجه به روش نابه‌جایی خواهیم داشت.

$$\frac{y - f(x_۱)}{x - x_۱} = \frac{f(x_۱) - f(x_۰)}{x_۱ - x_۰} \implies \frac{۰ + ۱۲}{x} = \frac{-۱۲ - ۲۹/۷۵}{۱} \implies x \simeq -۰/۲۸۷۴$$

$$\Longrightarrow \frac{۰ + ۴/۴۱۲۵}{x - (-۰/۲۸۷۴)} = \frac{-۴/۴۱۲۵ - ۲۹/۷۵}{-۰/۲۸۷۴ - (-۱)} \Longrightarrow x \simeq -۰/۳۷۹۴۴$$

$$\Longrightarrow \frac{۰ + ۱/۲۸۹۹}{x - (-۰/۳۷۹۴۴)} = \frac{-۱/۲۸۹۹ - ۲۹/۷۵}{-۰/۳۷۹۴۴ - (-۱)} \Longrightarrow x \simeq -۰/۴۰۵۲۲$$

$$\Longrightarrow \frac{۰ + ۰/۳۵۱۴}{x - (-۰/۴۰۵۲۲)} = \frac{۰/۳۵۱۴ - ۲۹/۷۵}{-۰/۴۰۵۲۲ - (-۱)} \Longrightarrow x \simeq -۰/۴۱۲۱۷$$

$$\Longrightarrow \frac{۰ + ۰/۰۹۳۸۸}{x - (-۰/۴۱۲۱۷)} = \frac{۰/۰۹۳۸۸ - ۲۹/۷۵}{-۰/۴۱۲۱۷ - (-۱)} \Longrightarrow x \simeq -۰/۴۱۴۰۲$$

$$f(x) = -۰/۰۲۴۹ \Longrightarrow |f(x)| < ۰/۰۵ \Longrightarrow x = -۰/۴۱۴۰۲$$

سوال ۹.

ریشه معادله‌ی $\cos x + e^x - ۳$ را با دقت سه رقم اعشار از روش نیوتن با شروع از نقطه $x_۰ = ۲$ حساب کنید. (تا سه مرحله جلو بروید)

پاسخ

$$x_n = x_{n-۱} - \frac{f(x_{n-۱})}{f'(x_{n-۱})}, \quad f'(x) = e^x - \sin x$$

$$\Longrightarrow x_۱ = ۲ - \frac{\cos(۲) + e^۲ - ۳}{e^۲ - \sin(۲)} \simeq ۱/۳۸۷$$

$$\Longrightarrow x_۲ = ۱/۳۸۷ - \frac{\cos(۱/۳۸۷) + e^۱/۳۸۷ - ۳}{e^۱/۳۸۷ - \sin(۱/۳۸۷)} \simeq ۰/۹۹۴$$

$$\Longrightarrow x_۲ = ۰/۹۹۴ - \frac{\cos(۰/۹۹۴) + e^۰/۹۹۴ - ۳}{e^۰/۹۹۴ - \sin(۰/۹۹۴)} \simeq ۰/۸۶۱$$

سوال ۱۰.

می‌دانیم که یک شی در حال سقوط در هوا در معرض اصطکاک است. یعنی دو نیروی جاذبه و نیروی مقاومت هوا بر آن وارد می‌شود. تابعی که موقعیت این جسم را نشان می‌دهد به صورت زیر است:

$$s(t) = s_۰ - \frac{mg}{k}t + \frac{m^۲ g}{k^۲}(۱ - e^{-kt/m})$$

به طوری که در آن m مقدار جرم شی به کیلوگرم، g ثابت شتاب گرانش و $s_۰$ موقعیت اولیه شی بوده است.

الف) اگر جرم شی یک کیلوگرم، ضریب k برابر ۰/۱ و موقعیت اولیه شی $s_۰ = ۱۰۰m$ باشد، با استفاده از روش نیوتن در سه گام زمانی که شی به سطح زمین می‌رسد را محاسبه کنید.

ب) می‌دانیم مقدار k براساس شکل و ایرودینامیک شی در حال سقوط تعیین می‌شود و اندازه‌گیری مقدار دقیق آن می‌تواند چالش‌انگیز باشد. حال می‌خواهیم یک دقت‌سنجی روی جواب قسمت الف داشته باشیم. اگر بدانیم که مقدار ضریب k با دقت ده درصد در اختیار ما قرار دارد، تخمین خود را با احتساب خطا از زمان رسیدن شی به سطح زمین را محاسبه کنید.

پاسخ

نکته حائز اهمیت در این سوال این است که جواب یکتا ندارد و براساس تحلیل هر فرد به این قسمت نمره داده خواهد شد.

الف)

$$g = ۹/۸۱ \implies s(t) = ۱۰۰ - \frac{۹/۸۱}{۰/۱}t + \frac{۹/۸۱}{۰/۱^{۲}}(۱ - e^{-۰/۱t}) = ۱۰۸۱ - ۹۸/۱t - ۹۸۱e^{-۰/۱t}$$

$$x_n = x_{n-۱} - \frac{s(x_{n-۱})}{s' x_{n-۱}},\ s'(t) = ۹۸/۱e^{-۰/۱t} - ۹۸/۱$$

$$x_۰ = ۱$$

$$x_۱ = ۱ - \frac{۱۰۸۱ - ۹۸/۱ - ۹۸۱e^{-۰/۱}}{۹۸/۱e^{-۰/۱} - ۹۸/۱} \simeq ۱۱/۲۰۳۵$$

$$x_۲ = ۱۱/۲۰۳۵ - \frac{۱۰۸۱ - ۹۸/۱(۱۱/۲۰۳۵) - ۹۸۱e^{-۰/۱(۱۱/۲۰۳۵)}}{۹۸/۱e^{-۰/۱(۱۱/۲۰۳۵)} - ۹۸/۱} \simeq ۶/۰۸۹۸$$

$$x_۳ = ۶/۰۸۹۸ - \frac{۱۰۸۱ - ۹۸/۱(۶/۰۸۹۸) - ۹۸۱e^{-۰/۱(۶/۰۸۹۸)}}{۹۸/۱e^{-۰/۱(۶/۰۸۹۸)} - ۹۸/۱} \simeq ۴/۹۷۲۷$$

ب) یک جواب این قسمت می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$۰/۰۹ \leq k \leq ۰/۱۱$$

$$k = ۰/۰۹ \implies$$

$$s(t) = ۱۰۰ - \frac{۹/۸۱}{۰/۰۹}t + \frac{۹/۸۱}{۰/۰۹^{۲}}(۱ - e^{-۰/۰۹t}) \simeq ۱۳۱۱/۱۱ - ۱۰۹t - ۱۲۱۱/۱۱e^{-۰/۰۹t}$$

$$x_n = x_{n-۱} - \frac{s(x_n)}{s'(x_{n-۱})}$$

$$x_۰ = ۱$$

$$\vdots$$

$$x_۳ = ۶/۱ - \frac{۱۳۱۱/۱۱ - ۱۰۹(۶/۱) - ۱۲۱۱/۱۱e^{-۰/۰۹(۶/۱)}}{۱۰۸/۹۹e^{-۰/۰۹(۶/۱)} - ۱۰۹} \simeq ۴/۹۴$$

$$k = ۰/۱۱ \implies$$

$$s(t) = ۱۰۰ - \frac{۹/۸۱}{۰/۱۱}t + \frac{۹/۸۱}{۰/۱۱^{۲}}(۱ - e^{-۰/۱۱t}) \simeq ۹۱۰/۷ - ۸۹/۲t - ۸۱۰/۷e^{-۰/۱۱t}$$

$$x_n = x_{n-۱} - \frac{s(x_n)}{s'(x_{n-۱})}$$

$$x_۰ = ۱$$

$$\vdots$$

$$x_۳ = ۶/۰۷ - \frac{۹۱۰/۷ - ۸۹/۲(۶/۰۷) - ۸۱۰/۷e^{-۰/۱۱(۶/۰۷)}}{۸۹/۲e^{-۰/۱۱(۶/۰۷)} - ۸۹/۲} \simeq ۵/۰۱$$

در نتیجه جواب در بازه خطای ۴/۹۴ و ۵/۰۱ خواهد بود.