سوال ۱.
جدول مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

x	0	1	2
$f(x)$	9.90	7.94	23.00

الف) ابتدا چندجمله‌ای درون‌یاب $P_۲(x)$ را برای داده‌های بالا محاسبه کنید، سپس از این چندجمله‌ای مشتق بگیرید. مقدار x برابر ۰ را در $P'_۲(x)$ قرار دهید و به این ترتیب $f'(۰)$ را تخمین بزنید.

ب) مقدار $f'(۰)$ را با استفاده از فرمولی که خطای آن از $O(h^۲)$ است تخمین بزنید.

ج) مقدار واقعی $f'(۰)$ برابر ۳/۵۱۹۶− است. خطای دو روش محاسبه مشتق را با یک‌دیگر مقایسه کنید.

د) تعداد عملیات‌های ضرب، تقسیم، جمع و تفریق که هرکدام از این دو روش به آن نیازمند بودند را با هم مقایسه کنید.

حل

الف)

x	$f(x)$	مرتبه اول	مرتبه دوم
۰	۹/۹		
		$-$۱/۹۶	
۱	۷/۹۴		۸/۵۱
		۱۵/۰۶	
۲	۲۳		

$$P_۲(x) = ۹/۹ - ۱/۹۶(x-۰) + ۸,۵۱(x-۰)(x-۱)$$
$$\Rightarrow P'_۲(x) = -۱/۹۶ + ۲(۸/۵۱)x - ۸/۵۱$$
$$\Rightarrow f'(۰) \approx P'_۲(۰) = -۱/۹۶ - ۸/۵۱ = -۱۰/۴۷$$

ب)

$$f'(x_۰) \approx \frac{۱}{۲h}(-۳f(x_۰) + ۴f(x_۰+h) - ۳f(x_۰+۲h))$$
$$= \frac{۱}{۲(۱)}(-۳(۹/۹ + ۴(۷/۹۴) - ۲۳) = -۱۰/۴۷$$

ج) هر دو روش به عدد یکسان ۱۰/۴۷− رسیدند پس خطای یکسانی دارند: $|-۳/۵۱۹۶ - (-۱۰/۴۷)|$

د)
- روش اول: حداقل ۱۰ محاسبه
- روش دوم ۶ محاسبه

با توجه به نتایج بالا مشخص است روش دوم بهتر است.

سوال ۲.
جدول مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

x	0	1	2
$f(x)$	9.90	7.94	23.00

الف) به‌کمک سری تیلور تقریبی از $f''(۱)$ ارائه دهید.

ب) حد بالای خطای این تقریب را به‌کمک خطای سری تیلور به دست آورید.

حل

الف) عملا فرمولی که با سری تیلور به آن می‌رسیم همان فرمول نقطه میانی‌ای است که به شکل زیر است:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+۱}) - ۲f(x_i) + f(x_{i-۱})}{h^۲}$$
$$= \frac{۲۳ - ۲(۷/۹۴) + ۹/۹}{۱^۲} = ۱۷/۰۲$$

ب)

$$f(x_i+h) + f(x_i-h) = h \text{ جملات توان زوج}$$
$$= ۲f(x_i) + h^۲ f''(x_i) + \frac{h^۴}{۴!} \times ۲f^{(۴)}(\zeta) \xrightarrow{h=۱} \frac{۱}{۱۲} f^{(۴)}(\zeta)$$

کران بالای بدست آمده به ازای ζ در بازه $[x_i, x_i+h]$ برقرار است.

سوال ۳.
جدول مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

x	0	2	4
$f(x)$	9.90	7.94	23.00

الف) ابتدا به‌روش کمترین مربعات تخمینی از $f(x)$ به‌فرم $ax^۲+bx+c$ بزنید. سپس به‌کمک رابطه به‌دست‌آمده، مقدار $\int_{-۱}^{۵} f(x)dx$ را تخمین بزنید.

ب) به‌کمک روش ذوزنقه‌ای، مقدار $\int_{-۱}^{۵} f(x)dx$ را تخمین بزنید.

حل

الف)

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰+۲+۴ & ۰+۴+۱۶ \\ ۰+۲+۴ & ۰+۴+۱۶ & ۰+۸+۶۴ \\ ۰+۴+۱۶ & ۰+۸+۶۴ & ۰+۱۶+۲۵۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹/۹ + ۷/۹۴ + ۲۳ \\ ۹/۹(۰) + ۷/۹۴(۲) + ۲۳(۴)) \\ ۹/۹(۰) + ۷/۹۴(۴) + ۲۳(۴^۲) \end{bmatrix}$$

با دادن دستگاه بالا به ولفرام خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a \approx ۲/۱۲۷۵ \\ b \approx -۵/۲۳۵ \\ c \approx ۹/۹ \end{cases}$$

پس تخمین نهایی به صورت $۲/۱۲۷۵x^۲ - ۵/۲۳۵x + ۹/۹$ خواهد بود. حال با انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$I = (x^۳ \frac{۲/۱۲۷۵}{۳} - ۵/۲۳۵\frac{x^۲}{۲} + ۹/۹x)\Big|_{-۱}^{۵} = ۸۵/۹۳۵$$

ب)

$$\text{جواب} \approx h \times (۹/۹ + ۷/۹۴ + ۲۳) \overset{h=۱}{=} ۸۱/۶۸$$

سوال ۴.

مقادیر f در نقاط مختلف در جدول زیر آمده است:

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$f(x)$	0.1823216	0.2623642	0.3364722	0.4054651	0.4700036

الف) مقدار تقریبی $\int_{۱/۲}^{۱/۶} f(x)dx$ را به‌روش سیمپسون محاسبه کنید.

ب) خطای تقریب بالا را به دست آورید.

حل

الف)

$$\begin{aligned} \text{جواب} &\approx \frac{h}{۳}(y_۰ + y_{۲m} + ۲(y_۲ + y_۴ + \cdots + y_{۲m-۲}) + ۴(y_۱ + y_۲ + \cdots + y_{۲m-۱})) \\ &= \frac{۰/۱}{۳}(۰/۱۸۲۳۲۱۶ + ۰/۴۷۰۰۰۳۶ + ۲(۰/۳۳۶۴۷۲۲) \\ &+ ۴(۰/۲۶۲۳۶۴۲ + ۰/۴۰۵۴۶۵۱)) = ۰/۱۳۳۲۱۹۵۶ \end{aligned}$$

ب) طبق اسلاید ۲۵ لکچر انتگرال:

$$|\frac{(b-a)h^{۴}}{۱۸۰}f^{(۴)}(\zeta)| = |\frac{(۱/۶-۱/۲)(۰/۱)^{۴}}{۱۸۰}f^{(۴)}(\zeta)| = |\frac{۰/۰۰۰۰۴}{۱۸۰}f^{(۴)}(\zeta)|$$

به ازای $۱/۲ < \zeta < ۱/۶$

سوال ۶.

مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b & \\ y' & = f(x,y) \\ y(x_۰) & = y_۰ \end{cases}$$

در روش آدامز_بشفورث دو گام،

$$y_{n+۱} = y_n + h(b_۱ y'_n + b_۲ y'_{n-۱})$$

مقدار $b_۱$ و $b_۲$ را به گونه‌ای بیابید که خطای موضعی $O(h^۳)$ را داشته باشیم.

حل

$$y_{n+۱} = y_n + (hb_۱)y'_n + (hb_۲)y'_{n-۱} \qquad (۱)$$

از طرفی طبق تیلور اگر $y_{n+۱} = y(x_{n+۱}) = y(x_n + h)$ را در نظر بگیریم:

$$y_{n+۱} = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^۲}{۲}y''(x_n) + \mathcal{O}(h^۳) \qquad (۲)$$

حال اگر $y'_{n-۱}$ را بیابیم می‌توان در اولی جای‌گذاری کرد:

$$y_{n-۱} \approx y(x_n - h) = y(x_n) - hy'(x_n)$$
$$y'_{n-۱} \approx y'_n - hy''_n$$

با جایگذاری در (۱) داریم

$$y_{n+۱} = y_n + (hb_۱)y'_n + (hb_۲)(y'_n - hy''_n)$$

از طرفی با توجه به (۲) داریم:

$$y_{n+۱} \approx y_n + hy'_n + \frac{h^۲}{۲}y''(x_n)$$

با برابر قرار دادن ضرایب h و $h^۲$ در دو رابطه بالا به دستگاه مقابل می‌رسیم:

$$\left\{ \frac{h^۲}{۲} = -h^۲ b_۲ h = hb_۱ + hb_۲ \right. \quad \Rightarrow \begin{cases} b_۱ = ۱/۵ \\ b_۲ = -۰/۵ \end{cases}$$

موفق باشید.