محاسبات عددی **سری شمارهٔ ۲**

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲ **موعد تحویل: پاسخنامه تمرین**

سوال ۱.
جواب دستگاه خطی زیر را با استفاده از روش کرامر [1] به دست آورید.

$$\begin{cases} ۲x_۱ - ۶x_۲ + x_۳ = ۲ \\ x_۱ - x_۲ - x_۳ = ۰ \\ x_۲ + x_۳ = ۱ \end{cases}$$

حل

$$D = \begin{vmatrix} ۲ & -۶ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۷$$

$$D_۱ = \begin{vmatrix} ۲ & -۶ & ۱ \\ ۰ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۷ \rightarrow x_۱ = \frac{D_۱}{D} = \frac{۷}{۷} = ۱$$

$$D_۲ = \begin{vmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۱ \rightarrow x_۲ = \frac{D_۲}{D} = \frac{۱}{۷}$$

$$D_۳ = \begin{vmatrix} ۲ & -۶ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۶ \rightarrow x_۳ = \frac{D_۳}{D} = \frac{۶}{۷}$$

سوال ۲.
جواب دستگاه خطی زیر را با استفاده از روش حذفی گاوس [2] به دست آورید.

$$\begin{cases} x_۱ - ۴x_۲ - ۱۲x_۳ = ۹ \\ x_۱ - ۲x_۲ - ۶x_۳ = ۵ \\ ۲x_۱ + ۴x_۲ + ۱۲x_۳ = -۶ \end{cases}$$

[1] Cramer
[2] Gaussian Elimination

حل

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۴ & -۱۲ & ۹ \\ ۱ & -۲ & -۶ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۱۲ & -۶ \end{array}\right)$$

افزودن منفی سطر اول به سطر دوم:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۴ & -۱۲ & ۹ \\ ۰ & ۲ & ۶ & -۴ \\ ۲ & ۴ & ۱۲ & -۶ \end{array}\right)$$

افزودن منفی دوبرابر سطر اول به سطر سوم:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۴ & -۱۲ & ۹ \\ ۰ & ۲ & ۶ & -۴ \\ ۰ & ۱۲ & ۳۶ & -۲۴ \end{array}\right)$$

افزودن منفی شش برابر سطر دوم به سطر سوم:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۴ & -۱۲ & ۹ \\ ۰ & ۲ & ۶ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right)$$

تقسیم سطر دوم بر ۲:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۴ & -۱۲ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۳ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right)$$

افزودن ۴ برابر سطر دوم به سطر اول:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ + ۳x_۳ = -۲ \rightarrow (I) \end{cases}$$

هر $x_۲$ و $x_۳$ ای که در معادله‌ی I صدق کنند به همراه $x_۱ = ۱$ جواب دستگاه هستند.

سوال ۳.

معادله‌ی خطی $Ax = b$ را با مقادیر زیر درنظر بگیرید:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} ۴ & ۱ & -۲ \\ -۱ & ۴ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{pmatrix} \text{ و } \mathrm{b} = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۰ \\ ۴ \end{pmatrix}$$

الف) با تقریب اولیه‌ی $x^{(۰)} = ۰$ و سه تکرار از روش ژاکوبی[۳] مقادیر $x^{(۱)}$ ، $x^{(۲)}$ و $x^{(۳)}$ را محاسبه کنید.

ب) با تقریب اولیه‌ی $x^{(۰)} = ۰$ و سه تکرار از روش گاوس‌ـسایدل[۴] مقادیر $x^{(۱)}$ ، $x^{(۲)}$ و $x^{(۳)}$ را محاسبه کنید.

ج) کدام یک از روش‌های بالا تقریب بهتری از جواب‌ها می‌دهد؟

حل

الف) دور اول:

$$\begin{cases} ۴x_۱ + ۰ - ۲(۰) = ۴ \\ -(۰) + ۴x_۲ - (۰) = ۰ \\ ۰ - (۰) + ۴x_۳ = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = ۰ \\ x_۳ = ۱ \end{cases}$$

دور دوم:

$$\begin{cases} ۴x_۱ + ۰ - ۲(۱) = ۴ \\ -۱ + ۴x_۲ - ۱ = ۰ \\ ۱ - ۰ + ۴x_۳ = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۱/۵ \\ x_۲ = ۰/۵ \\ x_۳ = ۰/۷۵ \end{cases}$$

دور سوم:

$$\begin{cases} ۴x_۱ + ۰/۵ - ۲(۰/۷۵) = ۴ \\ -۱/۵ + ۴x_۲ - ۰/۷۵ = ۰ \\ ۱/۵ - ۰/۵ + ۴x_۳ = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۱/۲۵ \\ x_۲ = ۰/۵۶۲۵ \\ x_۳ = ۰/۷۵ \end{cases}$$

ب) دور اول:

$$۴x_۱ + ۱(۰) - ۲(۰) = ۴ \rightarrow x_۱ = ۱$$

$$- ۱(x_۱) + ۴x_۲ - ۱(۰) = ۰ \rightarrow ۴x_۲ = x_۱ \xrightarrow{x_۱=۱} x_۲ = ۰/۲۵$$

$$x_۱ - ۱(x_۲) + ۴x_۳ = ۴ \xrightarrow{(x_۱,x_۲)=(۱,۰/۲۵)} ۱ - ۰/۲۵ + ۴x_۳ = ۴ \rightarrow x_۳ = ۰/۸۱۲۵$$

دور دوم:

$$۴x_۱ + ۰/۲۵ - ۲(۰/۸۱۲۵) = ۴ \rightarrow x_۱ = ۱/۳۴۳۷۵$$

$$- x_۱ + ۴x_۲ - ۰/۸۱۲۵ = ۰ \xrightarrow{\text{از بالایی}} x_۲ = ۰/۵۳۹۰۶۲۵$$

$$x_۱ - x_۲ + ۴x_۳ = ۴ \xrightarrow{\text{از بالایی ها}} x_۳ = ۰/۷۹۸۸۲۸۱۲۵$$

---

[۳] Jacobi
[۴] Gauss-Seidel

دور سوم:

$$۴x_۱ + ۰/۵۳۹۰۶۲۵ - ۲(۰/۷۹۸۸۲۸۱۲۵) = ۴ \rightarrow x_۱ = ۱/۲۶۴۶۴۸۴۳۷۵$$

$$-x_۱ + ۴x_۲ - ۰/۷۹۸۸۲۸۱۲۵ = ۰ \xrightarrow{\text{از بالایی}} x_۲ = ۰/۵۱۵۸۶۹۱۴۰۶$$

$$x_۱ - x_۲ + ۴x_۳ = ۴ \xrightarrow{\text{از بالایی ها}} x_۳ = ۰/۸۱۲۸۰۵۱۷۵۸$$

ج) جواب واقعی (بدست امده از ولفرام)

$$\begin{cases} x_۱ = ۱/۲۷۵۳۶۲۳۱۸۸ \\ x_۲ = ۰/۵۲۱۷۳۹۱۳۰۴ \\ x_۳ = ۰/۸۱۱۵۹۴۲۰۲۹ \end{cases}$$

حال اختلاف جواب‌های روش‌های بخش الف و ب را مقایسه می‌کنیم
اختلاف روش گاوس سایدل:

$$\begin{cases} \Delta x_۱^A = ۰/۰۱۰۷۱۳۸۷۴۳ \\ \Delta x_۲^A = ۰/۰۰۵۸۶۹۹۸۹۸ \\ \Delta x_۳^A = ۰/۰۰۱۲۱۰۹۷۲۹ \end{cases}$$

اختلاف روش ژاکوبی:

$$\begin{cases} \Delta x_۱^B = ۰/۰۲۵۳۶۲۳۱۸۸ > \Delta x_۱^A \\ \Delta x_۲^B = ۰/۰۴۰۷۶۰۸۶۹۶ > \Delta x_۲^A \\ \Delta x_۳^B = ۰/۰۶۱۵۹۴۲۰۲۹ > \Delta x_۳^A \end{cases}$$

به وضوح جواب‌های بدست آمده از (ب) نزدیکتر هستند، پس گاوس سایدل تقریب بهتری از جواب‌ها می‌دهد.

سوال ۴.

دستگاه زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_۱ - x_۳ = ۰/۲ \\ -۱/۲x_۱ + x_۲ + ۱/۴x_۳ = -۱/۴۲۵ \\ x_۱ - ۱/۲x_۲ + x_۳ = ۲ \end{cases}$$

پاسخ این دستگاه به‌صورت $(۰/۹, ۰/۸, ۰/۷)^t$ است.

الف) از تقریب اولیه‌ی $x^{(۰)}$ و روش گاوس_سایدل استفاده کنید و پاسخ را با خطای $۱۰^{-۲}$ و در حداکثر ۳۰۰ تکرار به‌دست آورید.

ب) درصورتی‌که دستگاه را به شکل زیر تغییر دهیم، پاسخ بخش الف چه خواهد شد؟

$$\begin{cases} x_۱ - ۲x_۳ = ۰/۲ \\ -۱/۲x_۱ + x_۲ - ۱/۴x_۳ = -۱/۴۲۵ \\ x_۱ - ۱/۲x_۲ + x_۳ = ۲ \end{cases}$$

حل

Part A

Giving x-z=0.2,-0.5x+y+0.25z=-1.425,x-0.5y+z=2 to Wolfram leads to:

$x \approx 0.806667, y \approx -1.17333, z \approx 0.606667$

And with our code:

In [3]:
```
def gauss_seidel(A, b):
    solution = [0, 0, 0]
    previous_solution = [0, 0, 0]
    for _ in range(300):
        for k in range(3):
            sum_of_other_side = b[k]
            for j in range(3):
                if k != j:
                    sum_of_other_side -= solution[j] * A[k][j]
            previous_solution[k] = solution[k]
            solution[k] = sum_of_other_side / A[k][k] # dividing by the coefficient
    return solution
```

In [4]:
```
gauss_seidel([[1, 0, -1], [-0.5, 1, 0.25], [1, -0.5, 1]], [0.2, -1.425, 2])
```

Out[4]:
```
[0.8066666666666673, -1.1733333333333333, 0.606666666666666]
```

So, the result for part (a) is around $x = 0.81, y = -1.17, z = 0.61$.

Part B

Giving x-2z=0.2,-0.5x+y-0.25z=-1.425,x-0.5y+z=2 to Wolfram leads to:

$x \approx 1.15789, y \approx -0.726316, z \approx 0.478947$

And with our code:

In [5]:
```
gauss_seidel([[1, 0, -2], [-0.5, 1, -0.25], [1, -0.5, 1]], [0.2, -1.425, 2])
```

Out[5]:
```
[2.1568728252933877e+41, 1.3480455158083672e+41, -1.482850067389204e+41]
```

As this matrix is not diagonally dominant (for the first row, $1 > 0 + |-2|$ is wrong) so there is the possibility that it can diverge.

سوال ۵.

الف) دستگاه زیر را با روش گاوس_سیدل [۵] حل کنید.

$$\begin{cases} x - ۲y = ۴ \\ ۲x + y = ۳ \end{cases}$$

ب) دستگاه زیر را با روش گاوس_سیدل حل کنید

$$\begin{cases} ۲x + y = ۳ \\ x - ۲y = ۴ \end{cases}$$

ج) چرا با آن که دستگاه‌های (الف) و (ب) جواب‌های یکسان دارند ولی همگرایی روش تکرار گاوس_سیدل در (الف) و (ب) متفاوت است؟

* در (الف) و (ب) تقریب اولیه را $x^{(۰)} = y^{(۰)} = ۰$ در نظر بگیرید.

حل

[۵] Gauss-Seidel

In [1]:
```
def gauss_seidel(A, b):
    solution = [0, 0]
    for _ in range(100):
        for k in range(2):
            sum_of_other_side = b[k]
            for j in range(2):
                if k != j:
                    sum_of_other_side -= solution[j] * A[k][j]
            solution[k] = sum_of_other_side / A[k][k] # dividing by the coefficient
    return solution
```

Part A

Giving x-2y=4,2x+y=3 to Wolfram leads to:

$x \approx 2, y \approx -1$

And with our code:

In [2]:
```
gauss_seidel([[1, -2], [2, 1]], [4, 3])
```

Out[2]:
```
[-8.0346902212949505e+59, 1.6069380442589901e+60]
```

We will describe the reason of the wrong answer in part C.

Part B

Giving 2x+y=3,x-2y=4 to Wolfram leads to:

$x \approx 2, y \approx -1$

And with our code:

In [3]:
```
gauss_seidel([[2, 1], [1, -2]], [3, 4])
```

Out[3]:
```
[2.0, -1.0]
```

So we get the same results: x = 2 and y = -1.

Part C

The results from part A are wrong, because the matrix is not diagonally dominant (for example, $1 < |2|$ in the first row). So the Gauss Seidel method can diverge (and in this case, it doesn't converge, based on what we found from running the code above). But for part B it is diagonally dominant, so the method converges.

The matrix from part A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

The matrix from part B:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

سوال ۶.

الف) نشان دهید روش گاوس_سیدل در مورد دستگاه

$$\begin{cases} ۵x_۱ + ۳x_۲ + ۴x_۳ = ۱۲ \\ ۳x_۱ + ۶x_۲ + ۴x_۳ = ۱۳ \\ ۴x_۱ + ۴x_۲ + ۵x_۳ = ۱۳ \end{cases}$$

برای بردار اولیه $x^{(۰)} = ۰$ همگراست، در حالی که روش ژاکوبی واگراست.

ب) آیا ماتریس ضرایب دستگاه فوق غالب قطری است؟

ج) آیا شرط غالب قطری بودن ماتریس ضرایب در یک دستگاه شرط لازم است؟

حل

الف) مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۵ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۶ & ۴ \\ ۴ & ۴ & ۵ \end{pmatrix}$ برابرند با $\begin{cases} \lambda_۱ \approx ۱۲/۶۸۷۳ \\ \lambda_۲ \approx ۲/۵۳۵۶ \\ \lambda_۳ \approx ۰/۷۷۷۱ \end{cases}$

که هر سه مثبت‌اند ضمنا ماتریس متقارن است $(A^T = A)$. در نتیجه مثبت معین (Positive definite) است و در نتیجه در روش گاوس سیدل همگرا است. اما روش ژاکوبی واگراست و با اجرای کد نیز به این نتیجه می‌رسیم که برخلاف گاوس سایدل جواب درستی نمی‌دهد. (شروط مثبت معین بودن برای گاوس سیدل است نه ژاکوبی و چون قطری غالب هم نیست امکان diverge هم طبعا دارد)
ضمنا برای اثبات واگرا بودن در ژاکوبی می‌توان مقادیر ویژه $D^{-۱}(L+U)$ را حساب کرد:

$$\begin{pmatrix} ۵ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۶ & ۴ \\ ۴ & ۴ & ۵ \end{pmatrix} = L + D + V = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۴ & ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D^{-۱}(L+U) = \begin{pmatrix} ۰ & \frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵} \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۲}{۳} \\ \frac{۴}{۵} & \frac{۴}{۵} & ۰ \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{مقادیر ویژه}} (۱/۳۹۰۵۴, -۰/۸۴۷۳۹۴, -۰/۵۴۳۱۴۱)$$

ماکسیمم قدرمطلق‌شان ۱/۳۹۰۵۴ است که > ۱ است. در نتیجه واگرا می‌شود.
اما برای گاوس سایدل $(L+D)^{-۱}U$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} ۰ & \frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵} \\ ۰ & -\frac{۳}{۱۰} & \frac{۴}{۱۵} \\ ۰ & -\frac{۶}{۲۵} & -\frac{۶۴}{۷۵} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{مقادیر ویژه}} (۰, -۰/۶۸۸۶۶۹, -۰/۴۶۴۶۶۵)$$

که ماکسیمم قدرمطلق‌شان $۰/۶۸۸۶۶۹ < ۱$ است. که با همگرا بودن گاوس سایدل سازگار است.
پس گاوس سایدل همگرا و ژاکوبی واگراست.

ب) خیر زیرا به عنوان مثال در سطر اول $۴ + ۳ \not> ۵$ است. (و $۴ + ۳ \not> ۶$ و $۴ + ۴ \not> ۵$)

ج) خیر زیرا اگر شرط لازم بود، چون A در گاوس سایدل همگرا بود، باید ماتریس غالب قطری می‌شد، ولی نشده است. در نتیجه شرط لازم نمی‌تواند باشد. (در حقیقت غالب قطری بودن یا متقارن مثبت معین بودن شرط کافی است)

سوال ۷.

جواب دستگاه زیر را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}cos(y) \\ y = \frac{۱}{۲}sin(y) \end{cases}$$

حل

روش نیوتون:

$$f \to x - \frac{۱}{۲}\cos y = ۰ \to \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = ۱ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{۱}{۲}\sin y \end{cases}$$

$$g \to y - \frac{۱}{۲}\sin x = ۰ \to \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{۱}{۲}\cos x \\ \frac{\partial g}{\partial y} = ۱ \end{cases}$$

با داشتن اطلاعات بالا ماتریس ژاکوبین را به صورت مقابل تشکیل می‌دهیم

$$J = \begin{pmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲}\sin y \\ -۰/۵\cos x & ۱ \end{pmatrix}$$

با فرض اعداد اولیه $\begin{cases} x = ۰/۵ \\ y = ۰/۵ \end{cases}$ داریم:

$$\begin{array}{ccccccccc} \vec{x} & & J & & f(\vec{x}) & & \\ \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۰/۵ \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۲۴ = \frac{۱}{۲}\sin ۰/۵ \\ -۰/۴۴ = -\frac{۱}{۲}\cos ۰/۵ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} & \times & \begin{bmatrix} ۰/۰۶ = \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۰/۵ \\ ۰/۲۶ = \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\sin ۰/۵ \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۰/۲۴ \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۰/۲۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۱۲ = \frac{۱}{۲}\sin ۰/۲۴ \\ -۰/۴۴ = -\frac{۱}{۲}\cos ۰/۵ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \times \begin{bmatrix} ۰/۰۱ = \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۰/۲۴ \\ ۰/۰۰ = ۰/۲۴-\frac{۱}{۲}\sin ۰/۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۴۹ \\ ۰/۲۴ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۰/۴۹ \\ ۰/۲۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۱۲ = \frac{۱}{۲}\sin ۰/۲۴ \\ -۰/۴۴ = -\frac{۱}{۲}\cos ۰/۴۹ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \times \begin{bmatrix} ۰/۰۱ = ۰/۴۹-\frac{۱}{۲}\cos ۰/۲۴ \\ ۰/۰۰ = ۰/۲۴-\frac{۱}{۲}\sin ۰/۴۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۴۹ \\ ۰/۲۴ \end{bmatrix}$$

با جای‌گذاری در رابطه اصلی نتیجه می‌شود که پاسخ درست است (نزدیک به برقراری کامل معادلات است)

سوال ۸. تقریبی از جواب دستگاه

$$\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} = ۲۵ \\ x^{۲} - y^{۲} = ۵ \end{cases}$$

بدست آورید که $|x_{n+۱} - x_n| < ۱۰^{-۳}$ و $|y_{n+۱} - y_n| < ۱۰^{-۳}$.

حل

روش نیوتون:

$$f \to x^{۲} + y^{۲} - ۲۵ = ۰ \to \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = ۲x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = ۲y \end{cases}$$

$$g \to x^{۲} - y^{۲} - ۵ = ۰ \to \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = ۲x \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -۲y \end{cases}$$

با داشتن اطلاعات بالا ماتریس ژاکوبین را به صورت مقابل تشکیل می‌دهیم

$$J = \begin{pmatrix} ۲x & ۲y \\ ۲x & -۲y \end{pmatrix}$$

با فرض اعداد اولیه $\begin{cases} x = ۴ \\ y = ۳ \end{cases}$ داریم: (دلیل حدس : $۴^{۲} + ۳^{۲} = ۲۵$ و $۴^{۲} - ۳^{۲} = ۷$ (نزدیک به ۵) پس زیاد نباید از جواب دور باشد)

$$\begin{array}{ccccccc} \overrightarrow{x} & & J & & f(\overrightarrow{x}) & & \\ \begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} ۸ & ۶ \\ ۸ & -۶ \end{bmatrix}^{-۱} & \times & \begin{bmatrix} ۰ = ۱۶ + ۹ - ۲۵ \\ ۲ = ۱۶ - ۹ - ۵ \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} ۳/۸۷۵ \\ ۳/۱۶۷ \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} ۳/۸۷۵ \\ ۳/۱۶۷ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۷/۷۵۰ & ۶/۳۳۴ \\ ۷/۷۵۰ & -۶/۳۳۴ \end{bmatrix}^{-۱} \times \begin{bmatrix} ۰/۰۴۶ \\ -۰/۰۱۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۸۷۳ \\ ۳/۱۶۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۳/۸۷۳ \\ ۳/۱۶۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۷/۷۴۶ & ۶/۳۲۴ \\ ۷/۷۴۶ & -۶/۳۲۴ \end{bmatrix}^{-۱} \times \begin{bmatrix} -۰/۰۰۲ \\ ۰/۰۰۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۸۷۳ \\ ۳/۱۶۲ \end{bmatrix}$$

اختلاف با قبلی‌ها کمتر از $۱۰^{-۳}$ است (در تمام محاسبات تا ۳ رقم گرده کرده‌ایم) با جای‌گذاری در رابطه اصلی نتیجه می‌شود که پاسخ درست است (نزدیک به برقراری کامل معادلات است)

سوال ۹. دستگاه غیرخطی زیر را حل کنید. (جواب را تا ۷ رقم اعشار بدست آورید)

$$\begin{cases} x^{۲} - ۱۰x + y^{۲} = -۸ \\ xy^{۲} + x - ۱۰y = -۸ \end{cases}$$

حل

f -> $x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0$

--> $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 10$ --> $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

g -> $xy^2 + x - 10y + 8 = 0$

--> $\frac{\partial g}{\partial x} = y^2 + 1$ --> $\frac{\partial g}{\partial y} = 2xy - 10$

Jacobian matrix:

$$J = \begin{bmatrix} 2x - 10 & 2y \\ y^2 + 1 & 2xy - 10 \end{bmatrix}$$

In [11]:
```
import numpy as np
```

In [12]:
```
def jacobian_matrix(x, y):
    return np.array([[2 * x - 10, 2 * y], [y * y + 1, 2 * x * y - 10]])

initial_x = [[4], [4]] # chosen because 4^2-10(4)+4^2 = -8 and at close to solution (at 
previous_x = initial_x

for i in range(10):
    x_1 = initial_x[0][0]
    x_2 = initial_x[1][0]
    jacobian = jacobian_matrix(x_1, x_2)
    initial_x = initial_x - np.matmul(np.linalg.inv(jacobian), np.array([[x_1 * x_1 - 10
    if abs(initial_x[0][0] - previous_x[0][0]) < 0.0000001 and abs(initial_x[1][0] - pre
        break
    previous_x = initial_x

print(initial_x)
```

```
[[2.19343942]
 [3.02046647]]
```

So $x_1 = 2.1934394$ and $x_2 = 3.0204665$

Checking in the original equations to see if they are close enough to zero:

In [13]:
```
# Check

x_1 = initial_x[0][0]
x_2 = initial_x[1][0]
print(x_1 * x_1 - 10 * x_1 + x_2 * x_2 + 8)
print(x_1 * x_2 * x_2 + x_1 - 10 * x_2 + 8)
```

```
-3.552713678800501e-15
3.552713678800501e-15
```

Close to 0 ==> So the solution is correct

موفق باشید.