محاسبات عددی **سری شمارهٔ ۳**

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ **موعد تحویل: ۲۷ آذر**

سوال ۱.

تعداد زیربازه‌هایی که نیاز است روش‌های قاعده‌ی ذوزنقه‌ای [1] و قاعده‌ی سیمپسون [2] اجرا شوند تا پاسخ انتگرال‌های زیر با دقت 10^{-6} محاسبه شوند، بدست آورید.

الف)

$$\int_0^{\pi} xcos(x)\, dx$$

ب)

$$\int_0^{4} \sqrt{4+x^2}\, dx$$

ج)

$$\int_1^{4} xln(x)\, dx$$

---

[1] Trapezoidal Rule

[2] Simpson's Rule

قاعده ذوزنقه‌ای :

$$E = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max f''_{(x)}$$

قاعده سیمپسون :

$$E = \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max f^{(4)}_{(x)}$$

(الف)

$$f = x\cos x \qquad f' = \cos x - x\sin x \qquad f'' = -2\sin x - x\cos x \qquad f^{(3)} = -3\cos x + x\sin x$$

$$f^{(4)} = 4\sin x + x\cos x \Rightarrow f'' \leqslant |2\sin x| + |x\cos x| \leqslant 2 + \pi$$

$$f^{(4)} \leqslant |4\sin x| + |x\cos x| \leqslant 4 + \pi$$

ذوزنقه‌ای

$$\Rightarrow \frac{\pi^3}{12n^2}(2+\pi) < 10^{-6} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{\pi^3 \times 10^6}{12}(2+\pi)} \approx 3645 \Rightarrow \boxed{n \geqslant 3645}$$

سیمسون

$$\frac{\pi^5}{180n^4}(4+\pi) < 10^{-6} \Rightarrow n > \sqrt[4]{\frac{\pi^5 \times 10^6}{180}(4+\pi)} \approx 59.02 \Rightarrow \boxed{n \geqslant 60}$$

(ب)

$$f = \sqrt{4+x^2} \qquad f' = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \qquad f'' = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{x^2}{(4+x^2)^{3/2}} = \frac{4}{(4+x^2)^{3/2}}$$

$$f^{(3)} = \frac{-12x}{(4+x^2)^{5/2}} \qquad f^{(4)} = \frac{-12}{(4+x^2)^{5/2}} + \frac{60x^2}{(4+x^2)^{7/2}} = -\frac{48+48x^2}{(4+x^2)^{7/2}}$$

$$|f''_{(x)}| \leqslant f''_{(0)} = \frac{1}{2}$$

$\max f^{(4)}$: we find where $f^{(5)}_{(x)} = 0 \Rightarrow f^{(5)} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{(4+x^2)^{7/2}} + \frac{(x^2-1)(-7x)}{(4+x^2)^{9/2}}$

$$\Rightarrow 2x(4+x^2) + (-7x)(x^2-1) = 0 \Rightarrow 5x^2 = 15 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \max f^{(4)} = \frac{-12}{7^{5/2}} \approx 0.106 \Rightarrow \boxed{f^{(4)}_{(x)} \leqslant 0.106}$$

یا $\left(|f^{(4)}_{(x)}| < f^{(4)}_{(0)} = 0.375\right)$

ذوزنقه‌ای

$$n_{\text{ذوزنقه}} > \sqrt{\frac{4^3 \times 10^6}{12} \times \frac{1}{2}} = 1633 \Rightarrow \boxed{n \geqslant 1633}$$

$$n_{simpson} > \left(\frac{4^5 \times 10^6}{180} \times 0.375\right)^{1/4} \Rightarrow \boxed{n \geqslant 39}$$

$f = x \ln x \qquad f' = \ln x + 1 \qquad f'' = \frac{1}{x} \qquad f^{(3)}_{(x)} = -1/x^2 \qquad f^{(4)}_{(x)} = +2/x^3$

(2

$f''_{(x)} \leqslant 1 \qquad f^{(4)}_{(x)} \leqslant 2 \implies$

ذوزنقه‌ای $n \geqslant \sqrt{\frac{27 \times 10^6}{12}} \geqslant \boxed{1500}$

Simpson $n \geqslant \left(\frac{3^5 \times 10^6}{180} \times 2\right)^{1/4} \geqslant 41$

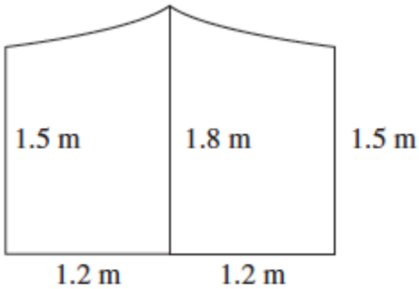
سوال ۲.

شکل زیر جلوی چادری را نشان می‌دهد که توسط سه تیرک ایستاده نگه داشته‌شده‌است. فاصله‌ی تیرک‌ها از یک‌دیگر ۱/۲ متر است. ارتفاع تیرک میانی ۱/۸ متر است و ارتفاع دو تیرک جانبی ۱/۵ متر است. فرض کنید مساحت جلوی چادر S است.

الف) مساحت S را با استفاده از روش قاعده‌ی ذوزنقه‌ای تقریب بزنید.

ب) مساحت S را با استفاده از روش قاعده‌ی سیمپسون تقریب بزنید.

ج) کدام یک از روش‌ها تقریب بهتری می‌دهد؟ چرا؟



۲) $f(x) \longrightarrow f(۰) = ۱/۵ \;,\; f(۱/۲) = ۱/۸ \;,\; f(۲/۴) = ۱/۵$

الف) $h = ۱/۲ - ۰ = ۱/۲$

$S \sim \frac{h}{۲}\left(f(۰) + ۲ f(۱/۲) + f(۲/۴) \right)$

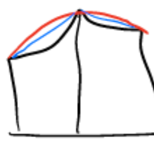
$= \frac{۳}{۵} \times \frac{۳۳}{۵} = \frac{۹۹}{۲۵} = ۳/۹۶$ $\boxed{S = ۳/۹۶}$

ب) $S \sim \frac{h}{۳}\left(f(۰) + ۴ f(۱/۲) + f(۲/۴) \right)$

$= \frac{۴}{۱۰}\left(\frac{۱۰۲}{۱۰}\right) = ۴/۰۸$ $\boxed{S = ۴/۰۸}$

ج) در قاعده سیمپسون بین این ۳ نقطه یک سهمی عبور داده‌ایم اما در قاعده‌ی ذوزنقه هر ۲ نقطه متوالی با یک خط وصل شده اند

و طبق شکل



سهمی رو به پایین است یعنی دقت وصل کردن با خط بهتر است پس روش ذوزنقه در این مثال روش بهتری است.

سوال ۳.

ثابت‌های c_1، c_2 و x_1 را به‌گونه‌ای محاسبه کنید که فرمول زیر برای چندجمله‌ای‌های با حداکثر درجه‌ی ممکن، دقیق باشد.

$$\int_0^4 f(x)dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$$

سوال ۴

$$\int_0^4 f(x)\,dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1) \quad (*)$$

فرض کنید تا چندجمله‌ای‌های درجه n را ساپورت کنیم.

$\deg(f) = d$

$d = 0 \rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow 4 = c_1 + c_0$

$d = 1 \rightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8 = c_1 x_1$

$d = 2 \rightarrow f(x) = x^2 \Leftrightarrow \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{64}{3} = c_1 x_1^2$

$\Rightarrow \frac{64}{3} = 8 x_1 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{8}{3},\ c_1 = 3,\ c_0 = 1}$

$d = 3 \rightarrow f(x) = x^3 \Rightarrow \frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = 64 = c_1 x_1^3 = \frac{512}{9}$

برقرار نیست! $\Leftarrow$ $\boxed{2 \geq n}$

هر چندجمله‌ای درجه حداکثر ۲، به فرمت $ax^2 + bx + c$ است. به وضوح اگر f و g در رابطه $(*)$ صدق کنند، هر ترکیب خطی آن‌ها نیز صدق می‌کند. پس چون ثابت گرفتیم، x و x^2 در $(*)$ صدق می‌کنند، پس $ax^2 + bx + c$ که ترکیب خطی آن‌ها است هم صدق می‌کند.

بنابراین جواب نهایی، $c_0 = 1$، $c_1 = 3$، $x_1 = \frac{8}{3}$ است.

سوال ۴.

الف) یک five-point formula از $O(h^۴)$ برای تقریب $f'(x_۰)$ با استفاده از $f(x_۰ - h), f(x_۰), f(x_۰ + h), f(x_۰ + ۲h), f(x_۰ + ۳h)$ ارائه دهید. (از سری تیلور مرتبه چهار استفاده کنید.)

ب) با استفاده از فرمولی که در مرحله قبل به آن دست یافتید مشتق تابع $f(x) = \sin x \cos x$ را در $x_۰ = ۱$ با $h = ۰/۱$ بدست آورید.

3.4.1 -

4^{th} order taylor series:

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) - \frac{1}{6}h^3 f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x_0) + O(h^5)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x_0) + O(h^5)$$

$$f(x_0+2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) + \frac{4h^3}{6} f^{(3)}(x_0) + \frac{2h^4}{3} f^{(4)}(x_0) + O(h^5)$$

$$f(x_0+3h) = f(x_0) + 3hf'(x_0) + \frac{9h^2}{2} f''(x_0) + \frac{9h^3}{2} f^{(3)}(x_0) + \frac{27}{8}h^4 f^{(4)}(x_0) + O(h^5)$$

$$Af(x_0-h) + Bf(x_0+h) + Cf(x_0+2h) + Df(x_0+3h) \Rightarrow$$

$$(A+B+C+D)f(x_0) + \overbrace{(-A+B+2C+3D)}^{\neq 0} hf'(x_0) +$$

$$\overbrace{\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + 2C + \frac{9}{2}D\right)}^{=0} h^2 f''(x_0) + \overbrace{\left(-\frac{A}{6} + \frac{B}{6} + \frac{4}{3}C + \frac{9}{2}D\right)}^{=0} h^3 f^{(3)}(x_0) +$$

$$\underbrace{\left(\frac{A}{24} + \frac{B}{24} + \frac{2C}{3} + \frac{27}{8}D\right)}_{=0} h^4 f^{(4)}(x_0) + O(h^5)$$

we will have 1 free variable
so consider $(-A+B+2C+3D) = 1$.

then $\{A = -\frac{1}{4}, B = \frac{3}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{12}\}$

$$-\frac{1}{4}f(x_0-h) + \frac{3}{2}f(x_0+h) - \frac{1}{2}f(x_0+2h) + \frac{1}{12}f(x_0+3h) = \frac{10}{12}f(x_0) + hf'(x_0) + O(h^5)$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{-1}{h}\left[\frac{10}{12}f(x_0) + \frac{1}{4}f(x_0-h) - \frac{3}{2}f(x_0+h) + \frac{1}{2}f(x_0+2h) - \frac{1}{12}f(x_0+3h)\right] + O(h^4)$$

سوال ۵.

الف) فرض کنید قصد داریم از رابطه three-point midpoint formula برای تخمین مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x.$ استفاده کنیم، اما در تخمین مقادیر $f(x.+h)$ و $f(x.-h)$ خطای رند کردن $e(x.+h)$ و $e(x.-h)$ داریم، با در نظر گرفتن این خطا ها یک کران بالای جدید برای خطای محاسبه مشتق به روش three-point midpoint formula بدهید.

ب) در صورتی که h خیلی بزرگ یا خیلی کوچیک باشد چه اتفاقی می‌افتد؟

ج) بازه مناسب برای انتخاب h را محاسبه کنید.

3.5.1-

recall three-point midpoint formula:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(f(x_0+h) - f(x_0-h)\right) - \frac{h^2}{6}M$$

* M is an upper bound for $f^{(3)}(x)$.

$$f(x_0+h) = \tilde{f}'(x_0+h) + e(x_0+h)$$
$$f(x_0-h) = \tilde{f}'(x_0-h) + e(x_0-h)$$

we are using these.

$$\tilde{f}'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)\right) - \frac{h^2}{6}M$$

$\Rightarrow$ new error : $f'(x_0) - \dfrac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h} = \dfrac{e(x_0+h) - e(x_0-h)}{2h}$

if $e(x)$ has upper bound α:

new error : $\dfrac{\alpha}{2h}$

$\longrightarrow$ total error : $\dfrac{\alpha}{2h} + \dfrac{h^2 M}{6}$

3.5.2- $\underbrace{\frac{\alpha}{2h}}_{A} + \underbrace{\frac{h^2 M}{6}}_{B}$ if h is so small A increases
if h is so large B increases

round off error dominancy.