سوال ١.

فرض کنید تابع f در بازه [a,b] دو بار مشتق پذیر است و $i=\bullet,1,\ldots,n$ نقاط هم فاصله در این بازه هستند که $x_n=b$ و $x_n=a$ می باشد. اگر $x_n=b$ چندجمله ای درون یاب ^۱ پیشروی $x_n=b$ باشد، آنگاه $x_n=a$ را با مقدار $x_n=a$ تخمین می زنیم.

$$P(s) = f. + \Delta f. + \frac{s(s-1)}{1!} \Delta^{1} f. + \ldots + \frac{s(s-1)...(s-n+1)}{n!} \Delta^{n} f.$$
 و $s = \frac{x-x}{h}$ و $p''(x)$ را محاسبه کنید.

ب) تخمینی برای f'(x) در حالت کلی، با استفاده از جمله اول محاسبه (الف) و با استفاده از دو جمله اول آن ارائه کنید.

جواب سوال ١.

محاسبه مشتق با استفاده از فرمول تیلور ۲:

فرض کنید تابع f روی [a,b] به قدر لازم مشتق پذیر است و $i=\bullet,1,\ldots,n,$ نقاط همفاصله در این بازه باشند با قیود a=a,b و a=a بنابراین a=a بنابراین a=a به ازای a=a. طبق قضیه تیلور داریم:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^{\mathsf{r}}}{\mathsf{r}!}f''(x_i) + \frac{h^{\mathsf{r}}}{\mathsf{r}!}f'''(\xi), \quad x_i < \xi < x_{i+1}$$
بنابراین

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^{r}}{r!}f''(x_i) + O(h^{r})$$

به طریق مشابه

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^{r}}{r!}f''(x_i) + O(h^{r})$$

در نتیجه

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{Yh} + O(h^{Y})$$

. يعنى $O(h^{\mathsf{Y}})$ تخمينى براى $f'(x_i)$ با خطاى برشى تخمينى براى يعنى

Polynomial interpolation'

سوال ٢.

.نشان دهید $O(h^{\mathsf{T}})$ تخمینی برای $f''(x_i)$ با خطای برشی $\frac{f_{i+1} - \mathsf{T} f_i + f_{i-1}}{h^{\mathsf{T}}}$ است.

سوال ٣.

نشان دهید

$$f'''(x_i) = \frac{f_{i+1} - Yf_{i+1} + Yf_{i-1} - f_{i-1}}{Yh^{\Upsilon}} + O(h^{\Upsilon})$$

$$f^{(\dagger)}(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i+1} + f_{i-1} + f_{i-1} + f_{i-1}}{h^{\dagger}} + O(h^{\dagger})$$

سوال ۴.

با استفاده از قضیه تیلور نشان دهید تقریب از مرتبه $O(h^*)$ برای مشتقات اول تا سوم f(x) وجود دارد و همچنین

$$f'(x_i) \approx \frac{-f_{i+1} + \Lambda f_{i+1} - \Lambda f_{i-1} + f_{i-1}}{\Lambda Y h}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{-f_{i+1} + \gamma f_{i+1} - \gamma f_i + \gamma f_{i-1} - f_{i-1}}{\gamma \gamma h^{\gamma}}$$

$$f'''(x_i) \approx \frac{-f_{i+\mathbf{r}} + \mathbf{\Lambda} f_{i+\mathbf{r}} - \mathbf{1} \mathbf{r} f_{i+\mathbf{1}} + \mathbf{1} \mathbf{r} f_{i-\mathbf{1}} - \mathbf{\Lambda} f_{i-\mathbf{r}} + f_{i-\mathbf{r}}}{\mathbf{\Lambda} h^{\mathbf{r}}}$$

خطای برشی هر یک از تقریبهای بالا $O(h^{\mathfrak k})$ است.

موفق باشيد.