محاسبات عددی | **فعالیت کلاسی - مشتق**

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ | **موعد تحویل: ۱۲ بهمن**

سوال ۱.

فرض کنید تابع f در بازه $[a, b]$ دوبار مشتق پذیر است و x_i، $i = ۰, ۱, \ldots, n$، نقاط هم فاصله در این بازه هستند که $a = x_۰$ و $x_n = b$ می‌باشد. اگر $p(x)$ چندجمله‌ای درون یاب [۱] پیشروی $f(x)$ باشد، آنگاه $f''(x)$ را با مقدار $p''(x)$ تخمین میزنیم.

الف) با فرض $s = \frac{x-x_۰}{h}$ و $P(s) = f_۰ + \Delta f_۰ + \frac{s(s-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_۰ + \ldots + \frac{s(s-۱)\ldots(s-n+۱)}{n!}\Delta^n f_۰$ را محاسبه کنید. $p''(x)$

ب) تخمینی برای $f''(x_۰)$ در حالت کلی، با استفاده از جمله اول محاسبه (الف) و با استفاده از دو جمله اول آن ارائه کنید.

جواب سوال ۱.

محاسبه مشتق با استفاده از فرمول تیلور [۲] :

فرض کنید تابع f روی $[a, b]$ به قدر لازم مشتق پذیر است و x_i، $i = ۰, ۱, \ldots, n$، نقاط هم فاصله در این بازه باشند با قیود $a = x_۰$ و $b = x_n$. بنابراین $x_{i+۱} = x_i + h$ به ازای $h > ۰$. طبق قضیه تیلور داریم:

$$f(x_{i+۱}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^۲}{۲!}f''(x_i) + \frac{h^۳}{۳!}f'''(\xi), \quad x_i < \xi < x_{i+۱}$$

بنابراین

$$f(x_{i+۱}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^۲}{۲!}f''(x_i) + O(h^۳)$$

به طریق مشابه

$$f(x_{i-۱}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^۲}{۲!}f''(x_i) + O(h^۳)$$

در نتیجه

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+۱}) - f(x_{i-۱})}{۲h} + O(h^۲)$$

یعنی $\frac{f_{i+۱} - f_{i-۱}}{۲h}$ تخمینی برای $f'(x_i)$ با خطای برشی $O(h^۲)$ است.

---

[۱] Polynomial interpolation

[۲] Taylor

سوال ۲.

نشان دهید $\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2}$ تخمینی برای $f''(x_i)$ با خطای برشی $O(h^2)$ است.

سوال ۳.

نشان دهید

$$f'''(x_i) = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} + O(h^2)$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{h^4} + O(h^2)$$

سوال ۴ (اختیاری).

با استفاده از قضیه تیلور نشان دهید تقریب از مرتبه $O(h^4)$ برای مشتقات اول تا سوم $f(x)$ وجود دارد و همچنین

$$f'(x_i) \approx \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2}$$

$$f'''(x_i) \approx \frac{-f_{i+3} + 8f_{i+2} - 13f_{i+1} + 13f_{i-1} - 8f_{i-2} + f_{i-3}}{8h^3}$$

خطای برشی هر یک از تقریب‌های بالا $O(h^4)$ است.

موفق باشید.