



دانشکده مهندسی کامپیوتر

به نام خدا

آزمون پایان ترم

محاسبات عددی

تاریخ آزمون: ۲۳ دی ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۵۰+۳۰ دقیقه

صفحه ۱ از ۲

- همه پاسخ‌هایتان را خوانا، با توضیح دقیق و کامل و مستدل بنویسید.
- پاسخ هر سؤال را در برگه مستقل بنویسید.
- جمع نمره‌ها برابر ۲۰ است، و نمره ۱۰۰ کامل محسوب می‌شود.

۱. الف) چند جمله درونیاب پیشرو نیوتن مرتبه دوم رابنویسید و با مشتق گرفتن از آن تخمین زیر را به دست آورید:

$$f'(x_0) \simeq \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

(۱۰ نمره)

ب) خطای تخمین را محاسبه کنید.

یادآوری: چند جمله درونیاب پیشرو نیوتن

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0$$

(۱۰ نمره)

۲. فرض کنید $h = b - a$ و $c_1, c_2 \neq 0$ مقادیر ثابتی هستند به طوری که $c_1 \neq c_2$. فرض کنید به ازای $p > 1$ دو روش $F_1(h)$ و $F_2(h)$ برای تخمین انتگرال به صورت زیر در دست هستند:

$$I = \int_a^b f(x) dx = F_1(h) + c_1 h^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$
$$I = \int_a^b f(x) dx = F_2(h) + c_2 h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

الف) یک ترکیب خطی از مقادیر $F_1(h)$ و $F_2(h)$ را تعیین کنید به طوری که تخمین بهتری برای I باشد (دارای خطای برشی بالاتر از مرتبه p باشد).

ب) نتیجه به دست آمده در (الف) را در خصوص روش‌های دوزنقه‌ای و مستطیلی به کار بگیرید و فرمول جدید را بر حسب این دو روش تعیین کنید.

پ) روش سیمسون را از فرمول به دست آمده در (ب) به ازای چه فرضی می‌توان به دست آورد؟

۳. فرض کنید x^* نقطه ثابت تابع g است. دنباله $\{x^k\}$ همگرا به x^* از x^* با شروع از تولید شده است. فرض کنید

$$g'(x^*) = \dots = g^{(p-1)}(x^*) = 0$$


و $g^p(x)$ به ازای همه x در همسایگی x^* به شعاع ϵ یعنی در بازه $(x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$ پیوسته است. در این صورت نشان دهید مرتبه همگرایی دنباله p است.

یادآوری: تعریف همگرایی مرتبه p ام: فرض کنید دنباله $\{x^k\}$ به x^* همگراست. اگر به ازای مقدار ثابت \bar{c} و عدد صحیح $p \geq 1$ داشته باشیم:

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \bar{c} \|x^k - x^*\|^p$$

آنگاه گوئیم همگرایی دنباله $\{x^k\}$ به x^* از مرتبه p ام است.

راهنمایی: استفاده از قضیه تیلور و پیوستگی تابع مشتق مرتبه p ام در همسایگی x^* .

<p>تاریخ آزمون: ۲۳ دی ۱۴۰۲</p> <p>مدت آزمون: ۱۵۰+۳۰ دقیقه</p> <p>صفحه ۲ از ۲</p>	<p>به نام خدا</p> <p>آزمون پایان ترم</p> <p>محاسبات عددی</p>	 <p>دانشکده مهندسی کامپیوتر</p>
<p>۴. قرار دهید</p> $K(A) = \ A^{-1}\ \ A\ $ <p>الف) فرض کنید A وارون پذیر است. \bar{x} را جواب دقیق دستگاه $Ax = b$ و $\bar{x} + d$ را جواب دقیق دستگاه $Ax = b + r$ در نظر بگیرید. نشان دهید</p> $\frac{\ d\ }{\ \bar{x}\ } \leq K(A) \frac{\ r\ }{\ b\ }.$ <p>ب) فرض کنید \tilde{x} تقریبی برای جواب دستگاه خطی $Ax = b$ است. قرار دهید:</p> $e = x - \tilde{x},$ $r = b - A\tilde{x}.$ <p>نشان دهید:</p> $\frac{1}{K(A)} \frac{\ r\ }{\ b\ } \leq \frac{\ e\ }{\ x\ } \leq K(A) \frac{\ r\ }{\ b\ }$ <p>یادآوری:</p> $\ A\ = \max_{\ x\ =1} \ Ax\ .$ <hr/> <p>۵. فرض کنید</p> $y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0$ $y'(0) = 1,$ $y(0) = 0.$ <p>با استفاده از روش هوین مقدار $y(0.1)$ را تخمین بزنید.</p>		
<hr/> <p>موفق باشید</p> <p>حسین قربان</p>		