
سوال ۱. معادله دیفرانسیل $y' = \lambda y$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید روش اویلر برای این معادله به ازای $\lambda < 0$ و مقدار ابتدایی $y(0) = 1$ برای طول گام $-z < \lambda h < 0$ پایدار است؛ یعنی $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

ب) نشان دهید در حل معادله بالا می‌توان روش رانگ - کوتای مرتبه چهارم را به صورت زیر نوشت:

$$y_{i+1} = (1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4)y_i$$

حل

الف)

$$y_1 = y_0 + h\underbrace{(\lambda y_0)}_{f(x_0,y_0)} = y_0(\lambda h + 1)$$

$$y_2 = y_1 + h\underbrace{(\lambda y_1)}_{f(x_1,y_1)} = y_1(\lambda h + 1) = y_0(\lambda h + 1)^2$$

$$\vdots$$

$$y_n = y_{n-1} + h\underbrace{(\lambda y_{n-1})}_{f(x_{n-1},y_{n-1})} = y_{n-1}(\lambda h + 1) = y_0(\lambda h + 1)^n$$

$$-2 < \lambda h < 0 \Rightarrow -1 < \lambda h + 1 < 1$$

و عددی بین ۱- و ۱ اگر به توان $n \to \infty$ برسد، عملا صفر می‌شود. پس

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_0(\lambda h + 1)^n = 0$$

ب) می‌دانیم در رانگ‌کوتای مرتبه ۴:

$$k_1 = hf(x_n, y_n) = h\lambda y_n$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) = h\lambda(y_n + \frac{h\lambda y_n}{2}) = h\lambda y_n(\frac{h\lambda}{2} + 1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) = h\lambda(y_n + \frac{k_2}{2}) = h\lambda(y_n + \frac{h\lambda y_n}{2}(\frac{h\lambda}{2} + 1)) = h\lambda y_n(1 + \frac{h^2\lambda^2}{4} + \frac{h\lambda}{2})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$k_4 = h\lambda(y_n + k_3) = h\lambda(y_n + h\lambda y_n(1 + \frac{h^2\lambda^2}{4} + \frac{h\lambda}{2})) = h\lambda y_n(1 + h\lambda + \frac{h^3\lambda^3}{4} + \frac{h^2\lambda^2}{2})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n \frac{1 + 2(\frac{h\lambda}{2} + 1) + 2(1 + \frac{h^2\lambda^2}{4} + \frac{h\lambda}{2}) + 1 + h\lambda + \frac{h^3\lambda^3}{4} + \frac{h^2\lambda^2}{2}}{6}$$

حال با جایگذاری i به جای n و سپس فاکتورگیری از y_i خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
y_{i+۱} &= y_i(۱ + h\lambda \frac{۱ + h\lambda + ۲ + ۲ + \frac{h^۲\lambda^۲}{۲} + h\lambda + ۱ + h\lambda + \frac{h^۳\lambda^۳}{۴} + \frac{h^۲\lambda^۲}{۲}}{۶}) \\
&= y_i(۱ + (h\lambda)\frac{۶}{۶} + (h\lambda)(\frac{۳h\lambda}{۶}) + (h\lambda)(\frac{h^۲\lambda^۲}{۶}) + (h\lambda)(\frac{h^۳\lambda^۳}{۴ \times ۶})) \\
&= y_i(۱ + h\lambda + \frac{(h\lambda)^۲}{۲} + \frac{(h\lambda)^۳}{۶} + \frac{(h\lambda)^۴}{۲۴})
\end{aligned}
$$

که همان صورت سوال است.

سوال ۲.
مقدار تقریبی $y(۰/۳)$ و $y'(۰/۳)$ را در معادله دیفرانسیل زیر با گام ۰/۱ با استفاده از روش رانگ - کوتای مرتبه چهارم محاسبه کنید:

$$
\begin{cases}
y'' - ۲y' + ۲y = \sinh(۲x)\sin(x) \\
y(۰) = -۰/۴ \\
y'(۰) = -۰/۶
\end{cases}
$$

حل
از روش تبدیل دستگاه به ۲ معادله:

$$
\begin{aligned}
&p = y^{'} \Rightarrow p(۰) = -۰/۶ \\
&p^{'} = y^{''} \Rightarrow p^{'} = ۲y^{'} - ۲y + \sin(x)\sinh(۲x) = ۲p - ۲y + \sin(x)\sinh(۲x)
\end{aligned}
$$

رانگ‌کوتای مرتبه ۴ : (دوبار در هر دور به ازای دو معادله)

$$
\begin{aligned}
k_۱ &= hf(x_n, y_n) \\
k_۲ &= hf(x_n + \frac{h}{۲}, y_n + \frac{k_۱}{۲}) \\
k_۳ &= hf(x_n + \frac{h}{۲}, y_n + \frac{k_۲}{۲}) \\
k_۴ &= hf(x_n + h, y_n + k_۳) \\
y_{n+۱} &= y_n + \frac{k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴}{۶}
\end{aligned}
$$

با حل دستگاه‌های بالا به جواب مقابل می‌رسیم:

$$
y(۰/۳) \approx -۰/۵۹۴۱ \quad y^{'}(۰/۳) \approx -۰/۶۷۲۶
$$

سوال ۳.
تقریبی از $y(۱/۲)$ را در معادله دیفرانسیل زیر با استفاده از روش اویلر و گام ۰/۱ بیابید:

$$\begin{cases} x^۲y'' + ۳xy' + ۲y = ۰ \\ y(۱) = ۲ \\ y'(۱) = ۳ \end{cases}$$

حل
مشابه سوال قبل،

$$p = y' \Rightarrow p(۱) = ۳$$
$$p' = y'' \Rightarrow p' = -\frac{۳}{x}y' - \frac{۲}{x^۲}y$$
$$y(۱/۱) = y(۱) + ۰/۱\,\underbrace{f(۱, ۲, ۳)}_{۳} = ۲ + ۰/۳ = ۲/۳$$
$$p(۱/۱) = p(۱) + ۰/۱f(۱, ۲, ۳) = ۳ - ۰/۱(۱۳) = ۱/۷$$
$$y(۱/۲) = y(۱/۱) + ۰/۱f(۱/۱, ۲/۳, ۱/۷) = ۲/۳ + ۰/۱(۱/۷) = ۲/۴۷$$
$$p(۱/۲) = p(۱/۱) + ۰/۱f(۱/۱, ۲/۳, ۳/۷) \approx ۱/۷ + ۰/۱(-۱۶/۲۱) = ۰/۰۷۹$$

موفق باشید.