پاسخ سوال اول

$$m_i := \frac{P''_{3i}(x_i)}{6}$$

الف از فرمول های مربوط به دست نوشته های استاد استفاده می کنیم یعنی

$$P_{3i}(x) = \frac{-m_i}{x_{i+1}-x_i}(x-x_{i+1})^3 + \frac{m_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)^3 + C_i(x-x_i) + d_i$$

$$d_i = f_i - m_i(x_{i+1}-x_i)^2 \quad \text{I}$$

$$C_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i} + (m_i - m_{i+1})(x_{i+1}-x_i) \quad \text{II}$$

x_i	$\frac{1}{2}$	1	2
f_i	2	1	$\frac{1}{2}$

$$2\big((x_{i+1}-x_i)+(x_i-x_{i-1})\big)m_i + m_{i+1}(x_{i+1}-x_i) + m_{i-1}(x_i-x_{i-1}) = \frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f_i-f_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \quad \text{III}$$

ویژگی های اسپلاین طبیعی $\left\{ \begin{array}{l} m_0 = 0 \\ m_2 = 0 \end{array} \right.$

$$\xrightarrow{i=1} 2\left((2-1)+\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\right)m_1 + m_2(2-1) + m_0\left(1-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}-1}{2-1} - \frac{1-2}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{m_1 = \frac{1}{2}}$$

$$\text{I}\ i=0 \rightarrow \boxed{d_0 = 2} \qquad \text{II}\ i=0 \rightarrow C_0 = \frac{1-2}{1-\frac{1}{2}} + \left(0-\tfrac{1}{2}\right)\left(1-\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{C_0 = \frac{-9}{4}}$$

$$\text{I}\ i=1 \rightarrow d_1 = 1 - \tfrac{1}{2}(2-1)^2 \Rightarrow \boxed{d_1 = \frac{1}{2}} \qquad \text{II}\ i=1 \rightarrow C_1 = \frac{\frac{1}{2}-1}{2-1} + \left(\tfrac{1}{2}-0\right)(2-1) \Rightarrow \boxed{C_1 = 0} \Rightarrow$$

$$S(x) = \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{9}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right) + 2 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 3 & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{-1}{2}(x-2)^3 + \frac{1}{2} = -\frac{x^3}{2} + 3x^2 - 6x + \frac{9}{2} & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

ب

$$\text{III}\ i=1 \rightarrow 2\left((2-1)+\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\right)m_1 + m_2(2-1) + m_0\left(1-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}-1}{2-1} - \frac{1-2}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow 3m_1 + m_2 + \frac{m_0}{2} = \frac{3}{2}$$

$$P'_{3i}(x) = \frac{-3m_i}{x_{i+1}-x_i}(x-x_{i+1})^2 + \frac{3m_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)^2 + C_i$$

$$\xrightarrow[i=0]{x=x_0} -4 = \frac{-3m_0}{1-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}-1\right)^2 + C_0 \Rightarrow -4 = \frac{-3}{2}m_0 + C_0$$

$$\xrightarrow[i=1]{x=x_2} -\frac{1}{4} = \frac{3m_2}{2-1}(2-1)^2 + C_1 \Rightarrow \frac{-1}{4} = 3m_2 + C_1$$

$$\text{II}\ i=0 \rightarrow C_0 = \frac{1-2}{1-\frac{1}{2}} + (m_0 - m_1)\left(1-\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow C_0 = -2 + \frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{2}$$

$$\text{II}\ i=1 \rightarrow C_1 = \frac{\frac{1}{2}-1}{2-1} + (m_1 - m_2)(2-1) \Rightarrow C_1 = m_1 - m_2 - \frac{1}{2}$$

$$\approx\!\!\Rightarrow \quad m_2 = \frac{1}{24} \quad m_1 = \frac{1}{6} \quad m_0 = \frac{23}{12} \qquad C_0 = \frac{-27}{24} \quad C_1 = \frac{-3}{8}$$

$$\text{I}\ i=0 \rightarrow d_0 = 2 - m_0\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{73}{48}$$

$$\text{I}\ i=1 \rightarrow d_1 = 1 - m_1(2-1)^2 = \frac{5}{6}$$

$$S(x) = \begin{cases} \frac{-23}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{27}{24}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{73}{48} & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{-1}{6}(x-2)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^3 - \frac{3}{8}(x-1) + \frac{5}{6} & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

ج

$$S_{\text{الف}}\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} = \frac{9}{16} = \boxed{0.5625}$$

$$S_{\text{ب}}\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{-1}{6}\left(\frac{-1}{2}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \boxed{0.671875}$$

حل سوال ۲.

$$y = ae^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln\left(ae^{bx}\right) = \ln a + bx$$

x	۱	۳	۴	۵
y	۱	۱/۵	۲/۵	۴
$\ln y$	۰	۰/۴۰۵۴۷	۰/۹۱۶۲۹	۱/۳۸۶۲۹

حال با در نظر گرفتن $\hat{a} = \ln a$ رابطه خطی بدست آمده را تقریب می‌زنیم.

$$\min_{\hat{a},b} E(\hat{a},b) = \min_{\hat{a},b} \sum_{i=۱}^{۴} (\ln y_i - bx_i - \hat{a})^۲$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sum_{i=۱}^{۴} ۱ & \sum_{i=۱}^{۴} x_i \\ \sum_{i=۱}^{۴} x_i & \sum_{i=۱}^{۴} x_i^۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=۱}^{۴} \ln y_i \\ \sum_{i=۱}^{۴} x_i \ln y_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۴ & ۱۳ \\ ۱۳ & ۵۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲/۷۰۸۰۵ \\ ۱۱/۸۱۳۰۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{a} \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۴۵۷۱۴ & -۰/۳۷۱۴۳ \\ -۰/۳۷۱۴۳ & ۰/۱۱۴۲۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲/۷۰۸۰۵ \\ ۱۱/۸۱۳۰۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۴۴۱۶۸ \\ ۰/۳۴۴۲۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{a} = \ln a = -۰/۴۴۱۶۸ \Rightarrow a = e^{-۰/۴۴۱۶۸} \approx ۰/۶۴۲۹۶$$

$$\Rightarrow y = ۰/۶۴۲۹۶ e^{۰/۳۴۴۲۱x}$$

حل سوال ۳.

الف) به دنبال پیدا کردن a و b به روش کم ترین مربعات هستیم:

$$\min_{a,b} E(a,b) = \min_{a,b} \sum_{i=۱}^{۳} (y_i - ax_i - b)^۲$$

با مشتق گرفتن از $E(a,b)$ نسبت به a و b و مساوی ۰ قرار دادن آن ها به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم که با حل آن a و b مینیمم کننده $E(a,b)$ بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=۱}^{۳} ۱ & \sum_{i=۱}^{۳} x_i \\ \sum_{i=۱}^{۳} x_i & \sum_{i=۱}^{۳} x_i^۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=۱}^{۳} y_i \\ \sum_{i=۱}^{۳} x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۹ \\ ۹ & ۳۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ + y_۱ + y_۲ \\ ۲ + ۳y_۱ + ۵y_۲ \end{bmatrix}$$

با محاسبه ماتریس وارون ماتریس ضرایب و از چپ ضرب کردن آن در تساوی بالا داریم:

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۴۵۸۳۳ & -۰/۳۷۵ \\ -۰/۳۷۵ & ۰/۱۲۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ + y_۱ + y_۲ \\ ۲ + ۳y_۱ + ۵y_۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = ۲/۱۶۶۶۷ + ۰/۳۳۳۳۳ y_۱ - ۰/۴۱۶۶۷ y_۲ \\ a = -۰/۵ + ۰/۲۵ y_۲ \end{cases}$$

ب) حالت ۱:

$$\begin{cases} y_۱ = ۵ \\ y_۲ = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -۰/۷۵ \\ a = ۲/۲۵ \end{cases} \Rightarrow y = ۲/۲۵x - ۰/۷۵$$

حالت ۲:

$$\begin{cases} y_۱ = ۱۰ \\ y_۲ = ۵/۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = ۳/۲۰۸۳۳ \\ a = ۰/۸۷۵ \end{cases} \Rightarrow y = ۰/۸۷۵x + ۳/۲۰۸۳۳$$

برای پیدا کردن زاویه بین دو خط، یک بردار در راستای هر خط ایجاد کرده و از ضرب داخلی آن ها زاویه بینشان را می‌یابیم. برای تولید بردار کافی است دو نقطه دلخواه روی یک خط را از یک دیگر کم کنیم که متناسب با شیب خط است؛ ما در این جا نقاط با $x = ۰, ۱$ را در نظر گرفته‌ایم:

$$\begin{cases} v_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱/۵ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰/۷۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲/۲۵ \end{bmatrix} \\ \\ v_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴/۰۸۳۳۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ \\ ۳/۲۰۸۳۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰/۸۷۵ \end{bmatrix} \end{cases}$$

در رابطه ضرب داخلی داریم :

$$\langle v_۱, v_۲ \rangle = v_۱^T v_۲ = \|v_۱\| \cdot \|v_۲\| \cdot \cos(\alpha)$$

در نتیجه:

$$\cos(\alpha) = \frac{v_۱^T v_۲}{\|v_۱\| \cdot \|v_۲\|} = \frac{۱ + ۱/۹۶۸۷۵}{\sqrt{۱^۲ + ۲/۲۵^۲} \cdot \sqrt{۱^۲ + ۰/۸۷۵^۲}} = \frac{۲/۹۶۸۷۵}{۳/۲۷۱۷۱} = ۰/۹۰۷۴$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-} ۱(۰/۹۰۷۴) = ۲۴/۸۵۱۵۱^\circ \approx ۲۵^\circ$$

سؤال 4. الف) $L(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_k(x)$, $l_k(x)=\prod_{i\neq k}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$

می دانیم اگر $f(x)$ را به صورت $f(x)=1$ انتخاب کنیم، از آنجایی که $f(x)$

یک تابع چندجمله‌ای درجه صفر است،

$$L(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_k(x) = f(x)$$

$$\rightarrow \sum_{i=0}^{n} l_k(x) = 1 .$$

ب) اگر درونیابی لاگرانژ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} P(x_i)\, \frac{f_i(x)}{f_i(x_i)}$$

می دانیم هر دو طرف معادله بالا، یک چندجمله‌ای درجه (حداکثر) n است و در نقاط $x_0, \dots,$

x_n با هم برابرند، در نتیجه دو چندجمله‌ای با هم برابرند. با مقایسه کردن ضریب x^n در دو طرف داریم:

$$1 = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)\, \frac{f_i(x)}{f_i(x_i)} = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)\, \frac{1\times 1\times \cdots \times 1}{f_i(x_i)}$$

$$\rightarrow 1 = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)\, \frac{1}{f_i(x_i)} .$$

از آنجایی که x_0 تا x_n، اعداد صحیح متمایز هستند، داریم:

$$|f_i(x_i)| = \prod_{j=0}^{i-1} |x_j - x_i| \prod_{j=i+1}^{n} |x_j - x_i| \geq i!\,(n-i)!$$

اگر فرض کنیم بزرگترین مقدار $|P(x_0)|$ ، ... $|P(x_n)|$ برابر $|P(x_k)|$ باشد:

$$\max_i |P(x_i)| = |P(x_k)|$$

طبق triangle inequality داریم:

$$1 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|P(x_i)|}{|f(x_i)|} \leq \sum_{i=0}^{n} |P(x_i)| \frac{1}{i!\,(n-i)!} \leq |P(x_k)| \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!\,(n-i)!}$$

$$\rightarrow 1 \leq |P(x_k)| \frac{2^n}{n!} \longrightarrow |P(x_k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

سؤال 5 ← f_0 ، f_n را مطابق زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_k(k) = (-1)^{n-k}\, k!\,(n-k)!$$

سؤال 5 ← اگر درونیابی لاگرانژ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) \frac{f_k(x)}{f_k(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!\,(n+1-k)!}{(n+1)!} \frac{f_k(x)}{f_k(x_k)}$$

$$\to \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!\,(n+1-k)!}{(n+1)!} \frac{f_k(x)}{f_k(k)}.$$

اگر $f_k(k)$ را به صورت زیر تعریف کنیم، داریم:

$$f_k(k) = (-1)^{n-k}\, k!\,(n-k)!$$

درونیابی لاگرانژ برای شرط ذکر شده به ازای f_k صدق می‌کند. در نتیجه برای $k=n+1$ داریم:

$$f_k(n+1) = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} \quad \to \quad P(n+1) = \sum_{k=0}^{n} P(k) \frac{f_k(n+1)}{f_k(k)}$$

$$\to \quad P(n+1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-k}.$$

سوال ۶ — ابتدا برای $n=1$ اثبات می‌کنیم:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{x_1 - x_0}\left[\frac{1}{x_1 + c} - \frac{1}{x_0 + c}\right]$$

$$= \frac{-1}{(x_1 + c)(x_0 + c)}.$$

حال گام استقرا را اثبات می‌کنیم. اگر فرض کنیم برای $n=k$ برقرار باشد:

$$f[x_0, \dots, x_{k+1}] = \frac{f[x_1, \dots, x_{k+1}] - f[x_0, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x_0}$$

$$= \frac{1}{x_{k+1} - x_0}\left[\frac{(-1)^k}{(x_1+c)\cdots(x_{k+1}+c)} - \frac{(-1)^k}{(x_0+c)\cdots(x_k+c)}\right]$$

$$= \frac{(-1)^k}{x_{k+1} - x_0}\left[\frac{(x_0+c) - (x_{k+1}+c)}{(x_0+c)\cdots(x_{k+1}+c)}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{x_{k+1} - x_0}\left[\frac{x_{k+1} - x_0}{(x_0+c)\cdots(x_{k+1}+c)}\right].$$