

سوال ۱.

جدول مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

x	0	1	2
$f(x)$	9.90	7.94	23.00

- الف) ابتدا چندجمله‌ای درون‌یاب $P_2(x)$ را برای داده‌های بالا محاسبه کنید، سپس از این چندجمله‌ای مشتق بگیرید. مقدار x برابر ۰ را در $P'_2(x)$ قرار دهید و به این ترتیب $f'(0)$ را تخمین بزنید.
- ب) مقدار $f'(0)$ را با استفاده از فرمولی که خطای آن از $O(h^2)$ است تخمین بزنید.
- ج) مقدار واقعی $f'(0)$ برابر $-3/5196$ است. خطای دو روش محاسبه مشتق را با یکدیگر مقایسه کنید.
- د) تعداد عملیات‌های ضرب، تقسیم، جمع و تفریق که هرکدام از این دو روش به آن نیازمند بودند را با هم مقایسه کنید.

حل

(الف)

x	$f(x)$	مرتبه اول	مرتبه دوم
۰	۹/۹		
		$-1/96$	
۱	۷/۹۴		$8/51$
		$15/06$	
۲	۲۳		

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= 9/9 - 1/96(x - 0) + 8/51(x - 0)(x - 1) \\
 \Rightarrow P'_2(x) &= -1/96 + 2(8/51)x - 8/51 \\
 \Rightarrow f'(0) &\approx P'_2(0) = -1/96 - 8/51 = -10/47
 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &\approx \frac{1}{2h}(-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)) \\
 &= \frac{1}{2(1)}(-3(9/9) + 4(7/94) - 23) = -10/47
 \end{aligned}$$

ج) هر دو روش به عدد یکسان $-10/47$ رسیدند پس خطای یکسانی دارند: $|-3/5196 - (-10/47)|$

د) • روش اول: حداقل ۱۰ محاسبه

• روش دوم ۶ محاسبه

با توجه به نتایج بالا مشخص است روش دوم بهتر است.

سوال ۲.

جدول مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

x	0	1	2
$f(x)$	9.90	7.94	23.00

(الف) به کمک سری تیلور تقریبی از $f''(1)$ ارائه دهید.

(ب) حد بالای خطای این تقریب را به کمک خطای سری تیلور به دست آورید.

حل

(الف) عملاً فرمولی که با سری تیلور به آن می‌رسیم همان فرمول نقطه میانی‌ای است که به شکل زیر است:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$= \frac{23 - 2(7.94) + 9.9}{1^2} = 17.02$$

(ب)

جملات توان زوج $f(x_i + h) + f(x_i - h) = h$

$$= 2f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \frac{h^4}{4!} \times 2f^{(4)}(\zeta) \xrightarrow{h=1} \frac{1}{12} f^{(4)}(\zeta)$$

کران بالای بدست آمده به ازای ζ در بازه $[x_i, x_i + h]$ برقرار است.

سوال ۳.

جدول مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

x	0	2	4
$f(x)$	9.90	7.94	23.00

(الف) ابتدا به روش کمترین مربعات تخمینی از $f(x)$ به فرم $ax^2 + bx + c$ بزنید. سپس به کمک رابطه به دست آمده،

مقدار $\int_{-1}^5 f(x) dx$ را تخمین بزنید.

(ب) به کمک روش دوزنقه‌ای، مقدار $\int_{-1}^5 f(x) dx$ را تخمین بزنید.

حل

(الف)

$$\begin{bmatrix} 3 & 0+2+4 & 0+4+16 \\ 0+2+4 & 0+4+16 & 0+8+64 \\ 0+4+16 & 0+8+64 & 0+16+256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/9 + 7/94 + 23 \\ 9/9(0) + 7/94(2) + 23(4) \\ 9/9(0) + 7/94(4) + 23(4^2) \end{bmatrix}$$

با دادن دستگاه بالا به ولفرام خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a \approx 2/1275 \\ b \approx -5/235 \\ c \approx 9/9 \end{cases}$$

پس تخمین نهایی به صورت $2/1275x^2 - 5/235x + 9/9$ خواهد بود. حال با انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$I = \left(x^3 \frac{2/1275}{3} - 5/235 \frac{x^2}{2} + 9/9x \right) \Big|_{-1}^5 = 85/935$$

(ب)

$$\text{جواب} \approx h \times (9/9 + 7/94 + 23) \stackrel{h=1}{=} 81/68$$

سوال ۴.

مقادیر f در نقاط مختلف در جدول زیر آمده است:

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$f(x)$	0.1823216	0.2623642	0.3364722	0.4054651	0.4700036

(الف) مقدار تقریبی $\int_{1/2}^{1/6} f(x)dx$ را به روش سیمپسون محاسبه کنید.

(ب) خطای تقریب بالا را به دست آورید.

حل

(الف)

$$\begin{aligned} \text{جواب} &\approx \frac{h}{3} (y_0 + y_{2m} + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_2 + \dots + y_{2m-1})) \\ &= \frac{0/1}{3} (0/1823216 + 0/4700036 + 2(0/3364722) \\ &\quad + 4(0/2623642 + 0/4054651)) = 0/13321956 \end{aligned}$$

ب) طبق اسلاید ۲۵ لکچر انتگرال:

$$\left| \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\zeta) \right| = \left| \frac{(\frac{1}{6} - \frac{1}{2})(\frac{1}{6})^4}{180} f^{(4)}(\zeta) \right| = \left| \frac{0.00004}{180} f^{(4)}(\zeta) \right|$$

به ازای $\frac{1}{2} < \zeta < \frac{1}{6}$

سوال ۶.

مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

در روش آدامز-بشفورث دو گام،

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 y'_n + b_2 y'_{n-1})$$

مقدار b_1 و b_2 را به گونه‌ای بیابید که خطای موضعی $O(h^3)$ را داشته باشیم.

حل

$$y_{n+1} = y_n + (hb_1)y'_n + (hb_2)y'_{n-1} \quad (1)$$

از طرفی طبق تیلور اگر $y_{n+1} = y(x_{n+1}) = y(x_n + h)$ را در نظر بگیریم:

$$y_{n+1} = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3) \quad (2)$$

حال اگر y'_{n-1} را بیابیم می‌توان در اولی جای‌گذاری کرد:

$$y_{n-1} \approx y(x_n - h) = y(x_n) - hy'(x_n)$$

$$y'_{n-1} \approx y'_n - hy''_n$$

با جای‌گذاری در (۱) داریم

$$y_{n+1} = y_n + (hb_1)y'_n + (hb_2)(y'_n - hy''_n)$$

از طرفی با توجه به (۲) داریم:

$$y_{n+1} \approx y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''(x_n)$$

با برابر قرار دادن ضرایب h و h^2 در دو رابطه بالا به دستگاه مقابل می‌رسیم:

$$\begin{cases} \frac{h^2}{2} = -h^2 b_2 h = hb_1 + hb_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1/5 \\ b_2 = -0.5 \end{cases}$$