

مهلت تحویل این تمرین ۰۸/۰۹/۱۴۰۱ است. شما در مجموع ترم ۲۰ روز تاخیر مجاز دارید که مدیریت آن با خودتان است. در ضمن برای هر تمرین شما تا سه روز بعد از ددلاین مجاز به ارسال پاسخ هستید و پس از آن به هیچ عنوان پاسخی از شما پذیرفته نخواهد شد. پس از ساعات مجاز تاخیر، به ازای هر روز تاخیر، ۳۰ درصد از نمره شما کسر خواهد شد.

سوال ۱.

جدول مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

x	0	1	2
$f(x)$	9.90	7.94	23.00

- الف) ابتدا چند جمله‌ای درونیاب $P_2(x)$ را برای داده‌های بالا محاسبه کنید، سپس از این چند جمله‌ای مشتق بگیرید. مقدار x برابر ۰ را در $P'_2(x)$ قرار دهید و به این ترتیب $f'(0)$ را تخمین بزنید.
- ب) مقدار $f'(0)$ را با استفاده از فرمولی که خطای آن از $O(h^2)$ است تخمین بزنید.
- ج) مقدار واقعی $f'(0)$ برابر $-3/5196$ است. خطای دو روش محاسبه مشتق را با یکدیگر مقایسه کنید.
- د) تعداد عملیات‌های ضرب، تقسیم، جمع و تفریق که هر کدام از این دو روش به آن نیازمند بودند را با هم مقایسه کنید.

سوال ۲.

جدول مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

x	0	1	2
$f(x)$	9.90	7.94	23.00

- الف) به کمک سری تیلور تقریبی از $f''(1)$ ارائه دهید.
- ب) حد بالای خطای این تقریب را به کمک خطای سری تیلور به دست آورید.

سوال ۳.

جدول مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

x	0	2	4
$f(x)$	9.90	7.94	23.00

الف) ابتدا به روش کمترین مربعات تخمینی از $f(x)$ به فرم $ax^2 + bx + c$ بزنید. سپس به کمک رابطه به دست آمده، مقدار $\int_{-1}^5 f(x) dx$ را تخمین بزنید.

ب) به کمک روش دوزنقه‌ای، مقدار $\int_{-1}^5 f(x) dx$ را تخمین بزنید.

سوال ۴.

مقادیر f در نقاط مختلف در جدول زیر آمده است:

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$f(x)$	0.1823216	0.2623642	0.3364722	0.4054651	0.4700036

الف) مقدار تقریبی $\int_{1/2}^{1/6} f(x) dx$ را به روش سیمپسون محاسبه کنید.

ب) خطای تقریب بالا را به دست آورید.

سوال ۵.

مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y' &= x^2 + y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

با فرض $h = 0.1$:

الف) مقدار تقریبی $y(0.2)$ را با روش اویلر محاسبه کنید.

ب) مقدار تقریبی $y(0.2)$ را با روش رانگ-کاتا از مرتبه‌ی دوم محاسبه کنید.

ج) مقدار تقریبی $y(0.2)$ و $y(0.3)$ را با روش آدامز-بشفورث سه گام محاسبه کنید.

سوال ۶.

مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

در روش آدامز-بشفورث دو گام،

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 y'_n + b_2 y'_{n-1})$$

مقدار b_1 و b_2 را به گونه‌ای بیابید که خطای موضعی $O(h^3)$ را داشته باشیم.

سوال ۷.

معادله دیفرانسیل $y' = e^{x^2} + xy^2$ با مقدار اولیه $y(0) = 1$ را در نظر بگیرید. با استفاده از روش تیلور مرتبه سوم، مقدار تقریبی $y(0.1)$ را با فرض $h = 0.1$ محاسبه کنید و تخمینی از خطای آن ارائه دهید.

سوال ۸.

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y'' - xy' + x^2y - x &= 0 \\ y(1) &= 1 \\ y'(1) &= 0.5 \end{cases}$$

با فرض $h = 0.1$ و با استفاده از روش رانگ-کاتا مرتبه دو، مقدار تقریبی $y(1.1)$ را به دست آورید.

موفق باشید.