دانشکده مهندسی کامپیوتر

به نام خدا

آزمون پایان ترم

محاسبات عددی

تاریخ آزمون: ۱ تیر ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه

(الف) بخش تستی

لطفاً پاسخ درست را در پاسخنامه با ذکر شماره سوال بنویسید. در صورتی‌که در پاسختان بیش از یک گزینه را انتخاب کنید به‌ازای پاسخ صحیح (در صورت انتخاب) یک امتیاز مثبت و به‌ازای هر پاسخ غلط ۱/۳ امتیاز منفی کسب خواهید کرد. (۱۰ نمره)

۱. در معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ مقدار $y(0.1)$ با استفاده از روش رانگه ـ کوتای مرتبه چهارم و $h = 0.1$ کدام است؟

(الف) ۱٫۱۱۵ (ب) ۱٫۱۳۵

(ج) ۱٫۱۲۰۵ (د) ۱٫۱۱۰۳۴

---

۲. مقدار $y(0.1)$ و $y(0.2)$ از معادله $y' = x + y$ با شرایط اولیه $y(0) = 0$ با استفاده از روش تیلور مرتبه دوم کدام است؟

(الف) $y(0.1) = 0.01,\ y(0.2) = 0.02$ (ب) $y(0.1) = 0.005,\ y(0.2) = 0.021$

(ج) $y(0.1) = 0.005,\ y(0.2) = 0.025$ (د) $y(0.1) = 0.005,\ y(0.2) = 1.005$

---

۳. خطای فرمول $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ کدام است؟

(الف) $\mathcal{O}(1)$ (ب) $\mathcal{O}(h)$

(ج) $\mathcal{O}(h^2)$ (د) $\mathcal{O}(h^3)$

---

۴. اگر مقدار تابع f در نقاط x_0 و x_1 به‌ترتیب برابر با f_0 و f_1 باشد، مقدار $f(\frac{x_0+x_1}{2})$ با استفاده از درونیابی f کدام است؟

(الف) $\frac{1}{2}(f_0 + f_1)$ (ب) $\dfrac{x_0 f_1 + x_1 f_0}{x_0 + x_1}$

(ج) $\dfrac{x_0 f_0 + x_1 f_1}{x_0 + x_1}$ (د) تعداد نقاط برای محاسبه کافی نیست.

---

۵. جدول مقادیر زیر مفروض است:

x	۰	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴
$f(x)$	۱	۱٫۱۰۵	۱٫۲۲	۱٫۳۴۴	۱٫۴۸۲

اگر به ازای هر $0 \le x \le 0.4$ داشته باشیم $|f''(x)| \le 3$، کدام عبارت در مورد $I = \int_0^{0.4} f(x)dx$ صحیح است؟

(الف) $0.490 < I < 0.492$ (ب) $0.488 < I < 0.490$

(ج) $0.492 < I < 0.494$ (د) $0.466 < I < 0.488$

---

۶. مقادیر تابع f در نقاط $x_0, \dots, x_5$ با فرض $x_{i+1} = x_i + h$ داده شده است. فرض کنید ماکزیمم مقدار $f^{(n+1)}(x)$ روی دامنه تابع برابر با M است. حداکثر مقدار خطای تخمین مقدار تابع در $x = x_0 + \alpha h$ با استفاده از درونیابی کدام است؟

(الف) $\left|\frac{h^5}{5!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-5)\right| M$ (ب) $\left|\frac{h^5}{5!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-5)\right| M^5$

(ج) $\left|\frac{h^6}{6!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-5)\right| M$ (د) $\frac{1}{5}hM$

---

۷. محاسبه انتگرال $I = \int_{2.2}^{3.4} e^x dx$ با استفاده از قاعده ذوزنقه مفروض است. اگر بخواهیم قدر مطلق ماکزیمم خطای حاصل از تخمین مقدار این انتگرال کمتر از 10^{-5} باشد، ماکزیمم مقدار گام h برابراست با

(الف) $e^{-3.2} \times 10^{-2}$ (ب) $e^{-1.7} \times 10^{-1}$

(ج) $e^{-3.4} \times 10^{-2}$ (د) $e^{-1.7} \times 10^{-2}$

۸. اگر برای درونیابی داده‌های زیر از چند جمله‌ای لاگرانژ، $P(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f_k$، استفاده کنیم، $L_1(x)$ کدام است؟

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-2	-1	0	7

(الف) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2}$

(ب) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{2}$

(ج) $\dfrac{x^3 - x}{6}$

(د) $\dfrac{x^3 - 1}{2}$

---

۹. با توجه به مقادیر داده شده، مقدار تقریبی تابع در $x = 2$، کدام است؟

x_i	0	3	4	7
$f(x_i)$	2	8	9	6

(الف) ۵

(ب) ۵٫۳

(ج) ۶٫۳

(د) صفر

---

۱۰. مقدار خطا در محاسبه $\sqrt{90}$ با استفاده از درونیابی لاگرانژ با در نظرگرفتن نقاط $x_0 = 81, x_1 = 100, x_2 = 121$ برای تابع $f(x) = \sqrt{x}$ حداکثر کدام است؟

(الف) 1.52×10^{-3} (ب) 1.75×10^{-3}

(ج) 2.95×10^{-3} (د) 4.2×10^{-3}

(ب) بخش تشریحی (۱۰ نمره)

۱. بهترین منحنی به شکل $c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ را به‌دست بیاورید که داده‌های زیر را برازش می‌کند.

x_i	10.0	10.2	10.4	10.6	10.8	11.0
$f(x_i)$	0.000	0.004	0.016	0.036	0.064	0.100

---

۲. الف) فرض کنید تابع f روی (a, b) به دفعات مشتق‌پذیر است. نشان دهید کران بالا برای خطای ایجاد شده با درونیابی خطی برای داده‌های $(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ برابر است با $|E_1(x)| \leq \frac{M}{8}(x_{i+1} - x_i)^2$ که در آن M بیشینه قدر مطلق $f^{(2)}(x)$ روی بازه $[x_i, x_{i+1}]$ است.

ب) فرض کنید می‌خواهیم جدولی از مقادیر تقریبی برای $\sqrt{x}$ را در بازه $[1, 2]$ با استفاده از درونیابی روی بازه‌های با فاصله‌های برابر درکنار هم تهیه کنیم. بازه $[1, 2]$ را به چند زیربازه برابر تقسیم کنیم تا خطای درونیابی روی بازه‌ها کمتر از 10^{-4} باشد؟

---

۳. فرض کنید $b > a$ و $I = \int_a^b f(x)dx$. فاصلهٔ $[a, b]$ را به زیربازه‌های برابر تقسیم کرده‌ایم. قرار دهید

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_0 = a, \qquad x_{i+1} = x_i + h \quad \textbf{for} \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

با استفاده از قاعده نقطه میانی مرکب تخمینی برای $\int_a^b f(x)dx$ معرفی کنید و سپس خطای آن را محاسبه کنید.

موفق باشید

سربازی‌آزاد و حسین‌قربان