سوال ۱. گزاره‌های زیر را اثبات کنید:

الف) در صورتی که $f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n]$ تفاضلات تابع دلخواه f در نقاط x_0 تا x_n باشد،

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)}$$

ب) فرض کنید f در بازه‌ی شامل $x_0, x_1, ...x_n$، n بار مشتق‌پذیر است. در این صورت به ازای ξ در بازه‌ی شامل نقاط $x_0, x_1, ..., x_n$ ثابت کنید:

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

حل

الف) می‌دانیم در روش Divided Difference:

$$\text{چندجمله‌ای درونیابی} = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \cdots + (x - x_0)\ldots(x - x_n)f[x_0, \ldots, x_n] \quad (1)$$

پس عبارت فوق چندجمله‌ای از درجه n است که ضریب x^n در آن برابر $f[x_0, \ldots, x_n]$ است.
اما اگر سوال را با لاگرانژ حل می‌کردیم:

$$f \text{ درونیابی شده} = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)f(x_i) = 2 \overset{L_i(x)=\prod_{j=0\neq i}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}}{=} \sum_{i=0}^{n}(\prod_{j=0\neq i}^{n}\frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)})f(x_i)$$

با توجه به این که پشت x ها عددی نیست، ضریب x^n برابر جمع ضرایبی است که به کل کسر اعمال می‌شود یعنی $\sum_{i=0}^{n}\prod_{j=0\neq i}^{n}\frac{1}{(x_i-x_j)}f(x_i)$. به عبارت دیگر در عبارت درون‌یابی شده، پشت x^n عدد فوق واقع است. از طرفی می‌دانیم جواب interpolation در این دو روش یکسان (یونیک) است، پس ضریب x^n در Divided Difference که برابر با $f[x_0, \ldots, x_n]$ است، با ضریب x^n در روش لاگرانژ باید برابر باشد وگرنه چندجمله‌ای یکی نخواهد بود. در نهایت داریم

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n}\prod_{j=0\neq i}^{n}\frac{1}{(x_i - x_j)}f(x_i) = \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\prod_{j=0\neq i}^{n}(x_i - x_j)}$$

ب) از رابطه ۱ بخش قبل اقدام می‌کنیم (روش Divided Difference). تابع اینترپولیشن روی نقاط x_0 تا x_n است، پس در این نقاط تابع f اصلی با اینترپولیشن خود (تعریف کنیم برابر با $(P_n(x)$ برابر است. پس تابع $P_n(x) - f(x)$، $n+1$ ریشه دارد. می‌دانیم بین هر دو ریشه چنین تابعی که مشتق‌پذیر و پیوسته است، مشتق صفر است. پس اگر در $n+1$ نقطه ریشه داشته باشد، بین هر دوتا در یکی مشتق صفر است پس در کل در n نقطه مشتق صفر است. مشابها از روی همین $(P_n(x) - f(x))'$ اگر مشتق بگیریم، در $n-1$ نقطه مشتق آن صفر است، و به همین شکل مشتق n ام $P_n(x) - f(x)$ در یک نقطه که آن را همان ξ فرض می‌کنیم صفر

است (مشخصا ξ در بین این نقاط است زیرا در هر مرحله جایی که مشتق صفر می‌شد بین همان نقاط قبلی بود). در این نقطه‌ی ξ، مقدار مشتق n ام f و P_n برابر است. یعنی

$$f^{(n)}(\xi) = \overbrace{n(n-۱)\dots(۱)}^{n!} f[x_۰, \dots, x_n] \xrightarrow{(n! \neq ۰)} f[x_۰, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

در حل این سوال از تمرین‌های قرار داده شده در سایت درس از سال‌های قبل آموخته شده است.

سوال ۲. فرض کنید چند جمله‌ای درجه‌ی دوم $P_۲(x)$ تابع $f(x)$ را در نقاط متمایز $x_۰, x_۱, x_۲$ درونیابی می‌کند نشان دهید:

$$det \begin{bmatrix} P_۲(x) & ۱ & x & x^۲ \\ f_۰ & ۱ & x_۰ & x_۰^۲ \\ f_۱ & ۱ & x_۱ & x_۱^۲ \\ f_۲ & ۱ & x_۲ & x_۲^۲ \end{bmatrix} = ۰$$

حل

می‌دانیم $P_۲(x_۲) = f_۲$ ،$P_۲(x_۱) = f_۱$ و $P_۲(x_۰) = f_۰$ (طبق درونیابی) پس اگر x مساوی هر یک از این ۳ مقدار متمایز x_i باشد، دو سطر ماتریس عینا تکراری می‌شود. (در $i = ۰$ با سطر دوم، در $i = ۱$ با سطر سوم، و در $i = ۲$ با سطر چهارم) و در این حالات از جبرخطی می‌دانیم که دترمینان صفر می‌شود (با عملیات کم کردن سطری ساده به راحتی یک سطر تمام صفر بدست آمده و مشخص است). پس این معادله ۳ ریشه دارد. اما از طرفی این معادله درجه ۲ است. زیرا اگر روی سطر اول باز کنیم تمام دترمینان‌های جزئی هیچ x ای درون خود ندارند و اعداد ثابت می‌شوند و حاصل دترمینان برابر $x^۲(\text{ثابت}) + x(\text{ثابت}) + ۱(\text{ثابت}) P_۲(x)(\text{ثابت})$ می‌شود که در آن $P_۲(x)$ نیز خود درجه ۲ است و باقی عبارت نیز درجه ۲ است. پس در کل عبارت det درجه ۲ است. پس حداکثر ۲ ریشه دارد، در حالیکه بالاتر ۳ ریشه‌ی متمایز برای آن یافتیم. تنها در صورتی این اتفاق ممکن است که تابع (یعنی این‌جا همان det) کاملا صفر باشد، پس حکم سوال ثابت می‌شود.

سوال ۳.

با در نظر گرفتن نقاط $x_۰ = ۱/۱$، $x_۱ = ۱/۲$ در تابع $f(x) = ln(x+۲)$، با استفاده از درون‌یابی خطی مقدار تقریبی $f(۱/۱۴)$ را محاسبه کنید و حد بالای خطا را بیابید. حل

می‌دانیم در درون‌یابی خطی

$$P_۱(x) = f(x_۰) + \frac{f(x_۱) - f(x_۰)}{x_۱ - x_۰}(x - x_۰)$$

در نتیجه

$$P_۱(x) = ln(۱/۱ + ۲) + \frac{ln(۱/۲ + ۲) - ln(۱/۱ + ۲)}{۱/۲ - ۱/۱}(x - ۱/۱)$$
$$\Rightarrow P_۱(۱/۱۴) = ln(۱/۱ + ۲) + \frac{ln(۱/۲ + ۲) - ln(۱/۱ + ۲)}{۱/۲ - ۱/۱}(۱/۱۴ - ۱/۱)$$

$$\text{جواب در interpolation} \approx ۱/۱۴۴۱۰۱۵۹۰۸$$
$$\text{جواب واقعی} \approx ۱/۱۴۴۲۲۲۷۹۹۹$$

جواب بسته به دقت محاسبات میانی می‌تواند کمی فرق کند.
* با توجه به صعودی بودن ln ، امکان ندارد حاصل از $f(۱/۲)$ بیش‌تر یا از $f(۱/۱)$ کم‌تر باشد. دو روش برای محاسبه خطا داریم.
روش ۱ (نادقیق‌تر):

$$f(۱/۲) = ln(۳/۲) \approx ۱/۱۶۳۱۵۰۸۰۹۸ \xrightarrow{\text{فاصله تا } f(۱/۱۴)} ۰/۰۱۸۹۲۸۰۰۹۸۹$$
$$f(۱/۱) = ln(۳/۱) \approx ۱/۱۳۱۴۰۲۱۱۱۵ \xrightarrow{\text{فاصله تا } f(۱/۱۴)} ۰/۰۱۲۸۲۰۶۸۸۴۳$$

خطا از این بیشتر نمی‌تواند باشد و این حداکثر است.
با مقایسه با مقادیر درون‌یابی شده هم اعداد $\begin{cases} ۰/۰۱۹۰۴۹۲۱۹۰۱ \\ ۰/۰۱۲۶۹۹۴۷۹۳۱ \end{cases}$ به دست می‌آیند که باز هم اولی بیشتر است.
روش دوم (استفاده از فرمول که دقیق‌تر است)

$$\text{خطا} \leq |\frac{f''(\mu_x}{۲}(x-x_۰)(x-x_۱)| \leq |\frac{-۱}{(۲+\mu_x)^۲ \times ۲}(x-۱/۱)(x-۱/۲)$$
$$\leq \frac{x^۲ - ۲/۲۳x + ۱/۳۲}{(۲+\mu_x)^۲ \times ۲} \leq |\frac{(۱/۱۵)^۲ - ۲/۳(۱/۱۵) + ۱/۳۲}{(۲+۱/۱)^۲ \times ۲}| \leq ۰/۰۰۰۱۳۰۰۷۲ \leftarrow \text{جواب}$$

برای ماکسیمم کردن $x^۲ - ۲/۲۳x + ۱/۳۲$ مشتق $۲x - ۲/۲۳$ باید برابر ۰ باشد یعنی $x = ۱/۱۵$ و مینیمم کردن کسر $۲ \times (۲+\mu_x)^۲$ (برای max شدن کل کسر) واضحا در $\mu_x = ۱/۱$ است.

جواب نهایی ممکن است با توجه به دقت محاسبات میانی تفاوت داشته باشد.

سوال ۴.

الف) با توجه به مقادیر داده شده مقدار تقریبی تابع را در $x = ۳$ محاسبه کنید.

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۱	۱	۲	۵

ب) فرض کنید داده‌ی $x_۴ = ۷$ و $f_۴ = ۹$ به جدول بالا اضافه شود. بین روش لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده کدام روش را برای محاسبه‌ی چند جمله‌ای درونیاب جدید انتخاب می‌کنید؟ چرا؟ با استفاده از روشی که انتخاب کردید چند جمله‌ای درونیاب را بیابید.

حل

الف)

x_i	f_i	مرتبه اول	مرتبه دوم	مرتبه سوم
۰	۱			
		$\frac{۱-۱}{۱-۰}=۰$		
۱	۱		$\frac{۱-۰}{۲-۰}=۰/۵$	
		$\frac{۲-۱}{۲-۱}=۱$		$\frac{\frac{۱}{۶}-۰/۵}{۴-۰}\approx -۰/۰۸۳۳$
۲	۲		$\frac{۱/۵-۱}{۴-۱}=\frac{۱}{۶}$	
		$\frac{۵-۲}{۴-۲}=۱/۵$		
۴	۵			

$$\Rightarrow P_n(x)=f(۰)+(x-۰)(۰)+(x-۱)(x-۰)۰/۵+(x-۲)(x-۱)(x-۰)(-۰/۰۸۳۳)$$

$\Rightarrow P_n(۳)=۱+۰+۳+۶(-۰/۰۸۳۳)\approx ۳/۵۰۰۲ \rightarrow$ جواب می‌تواند با توجه به خطای محاسبه $\frac{۱}{۶}$ مقداری فرق کند.

ب) تفاضلات تقسیم شده، زیرا نیازی به محاسبه اکثر اعداد از اول نداریم و تنها کافی است به جدول کشیده شده در فوق چند عدد اضافه نماییم و تا یک مرحله بیش‌تر پیش بریم. در حالی که در لاگرانژ باید مجددا ضرایب را از نو محاسبه می‌کردیم.

x_i	f_i	first	second	third	fourth
0	1				
		$\frac{1-1}{1-0}=0$			
1	1		$\frac{1-0}{2-0}=0.5$		
		$\frac{2-1}{2-1}=1$		$\frac{\frac{1}{6}-0.5}{4-0}\approx$ -0.0833	
2	2		$\frac{1.5-1}{4-1}=\frac{1}{6}$		$\frac{-0.033278+0.0833}{7-0}\approx 0.007146$
		$\frac{5-2}{4-2}=1.5$		$\frac{-0.033-\frac{1}{6}}{7-1}\approx -0.033278$	
4	5		$\frac{\frac{4}{3}-1.5}{7-2}=-0.033$		
		$\frac{9-5}{7-4}=\frac{4}{3}$			
7	9				

در نتیجه چندجمله‌ای می‌شود:

$$\begin{aligned}P_n(x)=&f(۰)+(x-۰)(۰)+(x-۱)(x-۰)(۰/۵)+(x-۲)(x-۱)(x-۰)(-۰/۰۸۳۳)+\\&(x-۴)(x-۲)(x-۱)(x-۰)(۰/۰۰۷۱۴۶)\end{aligned}$$

سوال ۵. بهترین منحنی به شکل $y=ax^۲$ که داده‌های زیر را برازش کند بدست آورید.

x	-۲	-۱	۲	۳
y	۱	۱	۳	۴

حل

فرض می‌کنیم منظور هر تابع درجه ۲ دل‌خواه نیست و صرفا به شکل $\underline{ax^۲}$ مدنظر است. در این حالت، به ازای یک a فرضی (متغیر) فاصله‌ی تابع اینترپولیشن را با مقدارهای واقعی بدست آورد. و در اینجا مثلا سعی می‌کنیم (MSE) Mean Squared Error را کمینه کنیم.

x	-2	-1	2	3
ax^2	$4a$	a	$4a$	$9a$
y	1	1	3	4

$$\begin{aligned}\text{MSE} &= (۴a-۱)^۲ + (a-۱)^۲ + (۴a-۳)^۲ + (۹a-۴)^۲ \\ &= ۱۶a^۲ - ۸a + ۱ + a^۲ - ۲a + ۱ + ۱۶a^۲ - ۲۴a + ۹ + ۸۱a^۲ - ۷۲a + ۱۶ \\ &= ۱۱۴a^۲ - ۱۰۶a + ۲۷\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{d(\text{MSE})}{da} = ۰ \Rightarrow ۲۲۸a - ۱۰۶ = ۰ \Rightarrow a \approx ۰/۴۶۴۹۱۲۲۸۰۷$$

$$\text{تابع جواب} \approx ۰/۴۶۴۹۱۲۲۸۰۷x^۲$$

موفق باشید.