سوال ۱.
جواب دستگاه خطی زیر را با استفاده از روش کرامر [1] به دست آورید.

$$\begin{cases} ۲x_۱ - ۶x_۲ + x_۳ = ۲ \\ x_۱ - x_۲ - x_۳ = ۰ \\ x_۲ + x_۳ = ۱ \end{cases}$$

سؤال ۱

$$\begin{cases} ۲x_۱ - ۶x_۲ + x_۳ = ۲ \\ x_۱ - x_۲ - x_۳ = ۰ \\ x_۲ + x_۳ = ۱ \end{cases} \quad D = \begin{bmatrix} ۲ & -۶ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad \det(D) = ۷$$

$$D_۱ = \begin{bmatrix} ۲ & -۶ & ۱ \\ ۰ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \quad D_۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \quad D_۳ = \begin{bmatrix} ۲ & -۶ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\det(D) = ۷, \quad \det(D_۱) = ۷, \quad \det(D_۲) = ۱, \quad \det(D_۳) = ۶$$

$$x_i = \frac{\det(D_i)}{\det(D)} \Rightarrow \boxed{x_۱ = ۱, \quad x_۲ = \frac{۱}{۷}, \quad x_۳ = \frac{۶}{۷}}$$

[1] Cramer

سوال ۲.

معادله‌ی خطی $Ax = b$ را با مقادیر زیر درنظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} ۴ & ۱ & -۲ \\ -۱ & ۴ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{pmatrix} \text{ و } b = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۰ \\ ۴ \end{pmatrix}$$

الف) با تقریب اولیه‌ی $x^{(۰)} = ۰$ و سه تکرار از روش ژاکوبی[2] مقادیر $x^{(۱)}$، $x^{(۲)}$ و $x^{(۳)}$ را محاسبه کنید.

ب) با تقریب اولیه‌ی $x^{(۰)} = ۰$ و سه تکرار از روش گاوس‌ـسایدل[3] مقادیر $x^{(۱)}$، $x^{(۲)}$ و $x^{(۳)}$ را محاسبه کنید.

ج) کدام یک از روش‌های بالا تقریب بهتری از جواب‌ها می‌دهد؟

سوال ۲

$$A = \begin{pmatrix} ۴ & ۱ & -۲ \\ -۱ & ۴ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{pmatrix} \text{ و } b = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۰ \\ ۴ \end{pmatrix}$$

$$x^{(t)} = \begin{bmatrix} x_1^{(t)} \\ x_2^{(t)} \\ x_3^{(t)} \end{bmatrix} \qquad x^{(0)} = 0$$

الف) ژاکوبی:

$$A = L + D + U, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow Dx = b - Lx - Ux \Rightarrow x = D^{-1}(b - Lx - Ux)$$

ژاکوبی

$$x^{(t+1)} = D^{-1}\left(b - (L+U)\,x^{(t)}\right)$$

---

[2] Jacobi

[3] Gauss-Seidel

$$\Rightarrow x^{(1)} = D^{-1}\left(\begin{bmatrix}4\\0\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\-1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^{(2)} = D^{-1}\left(\begin{bmatrix}4\\0\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\-1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3/2\\1/2\\3/4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^{(3)} = D^{-1}\left(\begin{bmatrix}4\\0\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\-1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/2\\1/2\\3/4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}5/4\\9/16\\3/4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^{(3)} = \begin{bmatrix}1.25\\0.5625\\0.75\end{bmatrix}$$

ب) گاوس - سایدل :

$$x_1^{(t+1)} = \frac{1}{4}\left(4 - x_2^{(t)} + 2x_3^{(t)}\right)$$

$$x_2^{(t+1)} = \frac{1}{4}\left(0 + x_1^{(t+1)} + x_3^{(t)}\right)$$

$$x_3^{(t+1)} = \frac{1}{4}\left(4 - x_1^{(t+1)} + x_2^{(t+1)}\right)$$

t	0	1	2	3
x_1	0	1	1.344	1.265
x_2	0	0.25	0.539	0.516
x_3	0	0.8125	0.799	0.812

$$\Rightarrow x^{(3)} = \begin{bmatrix}1.265\\0.516\\0.812\end{bmatrix}$$

ج) اگر دستگاه را حل کنیم (مثلاً با روش cramer) جواب دقیق را بدست آوریم، به صورت

$x = \begin{bmatrix}1.275\\0.522\\0.812\end{bmatrix}$ خواهد بود. بنابراین روش گاوس-سیدل جواب دقیق‌تری دارد.

سوال ۳.

الف) دستگاه زیر را با روش گاوس–سیدل [۴] حل کنید.

$$\begin{cases} x - ۲y = ۴ \\ ۲x + y = ۳ \end{cases}$$

ب) دستگاه زیر را با روش گاوس–سیدل حل کنید

$$\begin{cases} ۲x + y = ۳ \\ x - ۲y = ۴ \end{cases}$$

ج) چرا با آن که دستگاه‌های (الف) و (ب) جواب‌های یکسان دارند ولی همگرایی روش تکرار گاوس–سیدل در (الف) و (ب) متفاوت است؟

* در (الف) و (ب) تقریب اولیه را $x^{(۰)} = y^{(۰)} = ۰$ در نظر بگیرید.

سؤال ۳ – الف)

$$\begin{cases} x - ۲y = ۴ \\ ۲x + y = ۳ \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{(t+1)} = ۴ + ۲y^{(t)} \\ y^{(t+1)} = ۳ - ۲x^{(t+1)} \end{cases}$$

t	۰	۱	۲	۳	۴
x	۰	۴	−۶	۳۴	۱۳۴
y	۰	−۵	۱۵	−۶۵	−۲۶۵

ب)

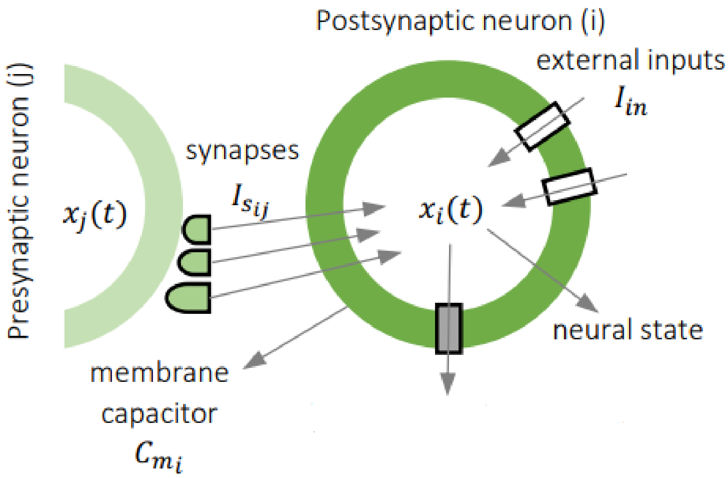
$$\begin{cases} ۲x + y = ۳ \\ x - ۲y = ۴ \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{(t+1)} = (۳ - y^{(t)})/۲ \\ y^{(t+1)} = (x^{(t+1)} - ۴)/۲ \end{cases}$$

t	۰	۱	۲	۳	۴
x	۰	۳/۲	۱۷/۸	۶۳/۳۲	۲۵۷/۱۲۸
y	۰	−۵/۴	−۱۵/۱۶	−۶۵/۶۴	−۱۲۹/۱۲۸

ج) در این روش برخلاف روش ژاکوبی، ترتیب اعمال معادله‌ها بر روی خروجی تاثیر دارد. چون متغیر دوم بر اساس مقدار متغیر اول در همان لحظه تعیین می‌شود. بنابراین خروجی الف و ب و در واقع چیزی که به آن همگرا می‌شوند می‌تواند متفاوت باشد.

[۴] Gauss–Seidel

سوال ۴. شبکه عصبی زمان پیوسته به شبکه ای گفته می شود که حالت های مخفی [۵] آن حاصل یک مدل دینامیکی پیوسته باشد. به عبارتی در شبکه های عصبی زمان گسسته ساده هر لایه با یک سری وزن W به لایه بعد متصل بوده و حالت [۶] بعدی با ضرب حالت قبلی در وزن های W بدست می آید. اما در شبکه عصبی زمان پیوسته تنها یک فرمول دینامیکی موجود است که با استفاده از آن حالت بعدی ساخته می شود. به عبارتی شبکه مورد نظر می تواند از تعداد مشخصی نورون تشکیل شده باشد که این نورون ها یک فرمول مشخص به عنوان رفتار دینامیکی خود دارند. یکی از انواع این شبکه ها، شبکه ی Liquid Time-constant Networks است. در شکل ۱ دو نورون از این شبکه و در شکل ۲ مدل دینامیکی آن را مشاهده می کنید.



شکل ۱: دو نورون i و j در Liquid Time-constant Networks

$$\dot{x}_i = -\left(\frac{1}{\tau_i} + \frac{w_{ij}}{C_{m_i}}\sigma_i(x_j)\right)x_i + \left(\frac{x_{leak_i}}{\tau_i} + \frac{w_{ij}}{C_{m_i}}\sigma_i(x_j)E_{ij}\right)$$

شکل ۲: مدل دینامیکی Liquid Time-constant Networks

برای سادگی شبکه ای با دو نورون در نظر گرفته شده است. همانطور که مشاهده می کنید مدل مورد نظر یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می باشد. در این معادله مقدار نورون دیگر به صورت غیر خطی در معادله نورون یک نورون ظاهر می شود. متغیرهای موجود در معادله توسط روش هایی نظیر BPTT آموزش داده می شود اما برای سادگی محاسبات تمامی متغیر ها را یک در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) با استفاده از روش مشتق گیری پی در پی [۷]، دینامیک نورون i ام را با یک چندجمله ای تخمین بزنید. مقدار نورون ها در لحظه صفر را صفر در نظر بگیرید. (حداقل درجه چندجمله ای: ۲)

ب) با روش ضرایب نامعین [۸] می توانید چندجمله ای برای این نورون بدست آورید؟ توضیح دهید. در صورتی که این امکان وجود ندارد دینامیک نورون را به طرز دلخواه تغییر داده و با روش ضرایب نامعین یک چندجمله ای برای دینامیک خود ارائه کنید.

---

[۵] Hidden State
[۶] State
[۷] Successive differentiation
[۸] Indefinite coefficients

ج) فرض کنید قصد داریم با استفاده از روش تقریب پی در پی [۹] حالت بعدی نورون مورد نظر را بدست آوریم. فرمول مورد نظر را بنویسید. (حل کامل معادله نمره امتیازی دارد)

د) فرض کنید تابع اصلی برای دینامیک نورون i لیپشیتز [۱۰] باشد، در این صورت خطای مورد نظر برای پاسخ بخش قبل را برای یک بازه دلخواه و به صورت پارامتریک بنویسید. بیشینه مقدار مشتق نورون و ثابت لیپشیتز را ۱۰ فرض کنید.

ه) دو نورون i و j وجود دارد و هرکدام مدل دینامیکی خود مشابه شکل ۲ را دارند. این دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول موجود را به دو روش اویلر و هوین حل کنید. حالت ابتدایی نورون i و j را به ترتیب ۰ و ۱ در نظر بگیرید.

جواب سوال ۴.

$$x_i' = (۱ + \sigma_i(x_j))x_i + (۱ + \sigma_i(x_j))$$

الف)

$$x_i' = (\frac{۳}{۲})x_i + \frac{۳}{۲} \to x_i' = \frac{۳}{۲}$$

$$x_i'' = (\frac{۳}{۲})x_i' \to x_i'' = \frac{۹}{۴}$$

$$x_i = x_i(۰) + \frac{x_i'(۰)}{۱!}x_j + \frac{x_i''(۰)}{۲!}x_j^۲ + \dots$$

$$x_i = \frac{۳}{۲}x_j + \frac{۹}{۸}x_j^۲ + \dots$$

ب) پس از بازکردن تابع سیگموید، تابع نمایی e^{-x_j} در مخرج ظاهر می شود. در صورتی که آن را با بسط تیلور باز کنید، مولفه های x در مخرج ظاهر می شود و با این روش قابل حل نخواهد بود. حال به جای تابع سیگموید e^{-x_j} گذاشته، بسط تیلور آن را گرفته و مسئله را حل می کنیم.

$$x_i = \sum_{n=۱}^{\infty} c_n x_j^n, x_i' = \sum_{n=۱}^{\infty} n c_n x_j^{n-۱}$$

$$x_i' = \sum_{n=۱}^{\infty} n c_n x_j^{n-۱} = -(۲ - x_j + \frac{x_j^۲}{۲!} - \frac{x_j^۳}{۳!}) \sum_{n=۱}^{\infty} c_n x_j^n + (۲ - x_j + \frac{x_j^۲}{۲!} - \frac{x_j^۳}{۳!})$$

n معادله و n مجهول وجود دارد که با برابر هم قراردادن ضریب سمت راست و چپ معادله به ترتیب بدست می آیند.

[۹] Successive approximation
[۱۰] Lipschitz

$$x_i = \sum_{n=۱}^{\infty} c_n x_j^n, x_i' = \sum_{n=۱}^{\infty} n c_n x_j^{n-۱}$$

$$c_۱ = ۲$$

$$۲c_۲ x_j = ۲c_۱ x_j - x_j \to c_۲ = \frac{۳}{۲}$$

$$\dots$$

ج)

$$x_i^{'} = (۱ + \sigma_i(x_j))x_i + (۱ + \sigma_i(x_j))$$

$$x_i(t) = x_i(۰) + \int_۰^t x_i' dt$$

د)

$$\epsilon = |x_i - y_i| <= \frac{MN^n(t-۰)^{n+۱}}{(n+۱)!} = \frac{۱۰(۱۰)^n t^{n+۱}}{(n+۱)!} = \frac{(۱۰t)^{n+۱}}{(n+۱)!}$$

ه) دستگاه به صورت زیر می باشد.

$$\begin{cases} x_i^{'} &= (۱ + \sigma_i(x_j))x_i + (۱ + \sigma_i(x_j)) = f_۱(x_i, x_j) \\ x_j^{'} &= (۱ + \sigma_j(x_i))x_j + (۱ + \sigma_j(x_i)) = f_۲(x_i, x_j) \end{cases}$$

روش اویلر:

$$x_i(۰ + ۰/۱) = x_{i,۱} = x_{i,۰} + hf_۱(x_{i,۰}, x_{j,۰}) = \frac{۲ + e^{-۱}}{۱۰(۱ + e^{-۱})}$$

$$x_j(۰ + ۰/۱) = x_{j,۱} = x_{j,۰} + hf_۲(x_{i,۰}, x_{j,۰}) = ۱ + \frac{۳}{۱۰} = \frac{۱۳}{۱۰}$$

روش هوین (رانگه کاتا مرتبه دوم):

$$x_i(۰ + ۰/۱) = x_{i,۱} = x_{i,۰} + \frac{h}{۲}[f_۱(x_{i,۰}, x_{j,۰}) + f_۱(x_{i,۰} + hf_۱(x_{i,۰}, x_{j,۰}), x_{j,۱})]$$

$$= \frac{۱}{۲۰}[\frac{۲ + e^{-۱}}{۱ + e^{-۱}} + f_۱(\frac{۲ + e^{-۱}}{۱۰(۱ + e^{-۱})}, x_{j,۱})]$$

$$x_j(۰ + ۰/۱) = x_{j,۱} = x_{j,۰} + \frac{h}{۲}[f_۲(x_{i,۰}, x_{j,۰}) + f_۲(x_{i,۱}, x_{j,۰} + hf_۲(x_{i,۰}, x_{j,۰}))]$$

$$= ۱ + \frac{۱}{۲۰}[۳ + f_۲(x_{i,۱}, \frac{۱۳}{۱۰})]$$

معادله بالا دو معادله دو مجهول بوده و قابل حل می باشد. با استفاده از نرم افزارهای حل معادلات می توان پاسخ آن را بدست آورد.

سوال ۵. مساله مقدار اولیه [11] زیر را حل کنید:

$$y' = ۳e^x + x^۲ - ۴, y(۰) = ۵$$

جواب سوال ۵. ابتدا یک پادمشتق از دو طرف معادله دیفرانسیل پیدا می کنیم:

$$\int y'dx = \int \left(۳e^x + x^۲ - ۴\right) dx$$

حال y را داریم ولی باید مقادیر $C_۱$ ، $C_۲$ را به دست آوریم:

$$y + C_۱ = ۳e^x + \frac{۱}{۳}x^۳ - ۴x + C_۲$$

$$y = ۳e^x + \frac{۱}{۳}x^۳ - ۴x + C_۲ - C_۱$$

$$y = ۳e^x + \frac{۱}{۳}x^۳ - ۴x + C$$

$$۳e^۰ + \frac{۱}{۳}۰^۳ - ۴(۰) + C$$

$$C = ۲$$

مقدار ۲ را برای C جایگزین کرده و جواب IVP را پیدا کردیم.

$$y = ۳e^x + \frac{۱}{۳}x^۳ - ۴x + ۲$$

---

[11] Initial Value Problem (IVP)

سوال ۶. با استفاده از روش اویلر جواب معادله دیفرانسیل زیر را در نقطه $x = ۱$ با شرط اولیه $y(۰) = ۰$ و اندازه گام $h = ۰/۲۵$ به دست آورید.

$$\frac{dy}{dx} = ۳x + ۴y$$

جواب سوال ۶. طبق روش اویلر:

$$x_{n+۱} = x_n + h$$
$$y_{n+۱} = y_n + h \times f(x_n, y_n)$$
$$f(x, y) = \frac{dy}{dx} = ۳x + ۴y$$
$$h = ۰/۲۵$$

ابتدا از نقطه $(x_{۰}, y_{۰}) = (۰, ۰)$ شروع کرده:

$$x_{۱} = x_{۰} + h = ۰ + ۰/۲۵ = ۰/۲۵$$
$$y_{۱} = y_{۰} + h \times f(x_{۰}, y_{۰}) = ۰ + ۰/۲۵ \times (۳ \times ۰ + ۴ \times ۰) = ۰$$
$$(x_{۱}, y_{۱}) = (۰/۲۵, ۰)$$

$$x_{۲} = x_{۱} + h = ۰/۲۵ + ۰/۲۵ = ۰/۵$$
$$y_{۲} = y_{۱} + h \times f(x_{۱}, y_{۱}) = ۰ + ۰/۲۵ \times (۳ \times ۰/۲۵ + ۴ \times ۰) = ۰/۱۸۷۵$$
$$(x_{۲}, y_{۲}) = (۰/۵, ۰/۱۸۷۵)$$

به همین شکل ادامه داده تا $x = ۱$

$$(x_{۴}, y_{۴}) = (۱, ۲/۰۶۲۵)$$

سوال ۷. با استفاده از روش رونگه کوتا مرتبه دوم مقدار $y(۰/۵)$ را برای معادله زیر با شرط اولیه $x_{۰} = ۰$ ، $y_{۰} = -۱$ و اندازه گام ۰/۱ به دست آورید.

$$y' = -۲x - y$$

جواب سوال ۷.

$$k_{۲} = hf(x_{۰} + h, y_{۰} + k_{۱})$$

$$k_{۱} = hf(x_{۰}, y_{۰}) = (۰/۱)f(۰, -۱) = (۰/۱) * (۱) = ۰/۱$$

$$k_{۲} = hf(x_{۰} + h, y_{۰} + k_{۱}) = (۰/۱)f(۰/۱, -۰/۹) = (۰/۱) * (۰/۷) = ۰/۰۷$$

$$y_۱ = y_. + (k_۱ + k_۲)/۲ = -۱ + ۰/۰۸۵ = -۰/۹۱۵$$

$$y(۰/۱) = -۰/۹۱۵$$

به همین ترتیب

$$k_۱ = hf(x_۴, y_۴) = (۰/۱)f(۰/۴, -۰/۸۱۲۴۱) = (۰/۱) * (۰/۰۱۲۴۱) = ۰/۰۰۱۲۴$$

$$k_۲ = hf(x_۴ + h, y_۴ + k_۱) = (۰/۱)f(۰/۵, -۰/۸۱۱۱۷) = (۰/۱) * (-۰/۱۸۸۸۳) = -۰/۰۱۸۸۸$$

$$y_۵ = y_۴ + (k_۱ + k_۲)/۲ = -۰/۸۱۲۴۱ - ۰/۰۰۸۸۲ = -۰/۸۲۱۲۳$$

$$y(۰/۵) = -۰/۸۲۱۲۳$$

موفق باشید.