۱. با استفاده از روش اویلر، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را حل کرده و با فرض $h = 0.05$ مقدار تقریبی y را در نقطه ۱.۱ به دست آورید. (۱۰ نمره)

$$\begin{cases} 2x^2y'' + 3xy' - 15y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

حل.

$$y'' = \frac{15y - 3xy'}{2x^2}, h = 0.05, x_0 = 1, x_1 = 1.05, y_0 = 0, y'_0 = 1$$

$$z := y' \Rightarrow \begin{cases} y' = z & \Rightarrow y_{i+1} = y_i + hy'_i = y_i + hz_i \\ z' = \frac{15y-3xz}{2x^2} & \Rightarrow z_{i+1} = z_i + hz'_i = z_i + h\frac{15y_i-3x_iz_i}{2x_i^2} \end{cases}$$

$$y_1 = 0 + 0.05 \times 1 = 0.05$$
$$z_1 = 1 + 0.05 \times \frac{15 \times 0 - 3 \times 1 \times 1}{2 \times 1} = 0.925$$

$$y_2 = 0.05 + 0.05 \times 0.925 = 0.09625$$

▷

۲. $y(0.4)$ را با استفاده از روش رانگ‌ــ کوتای مرتبه چهارم و گام 0.2 به دست آورید. همچنین این پاسخ را با پاسخ به دست آمده از روش‌های رانگ‌ــ کوتای مرتبه دو و سه مقایسه کنید (برای انتخاب روش رانگ‌ــ کوتا مختارید). (۱۵ نمره)

$$\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

حل.

$$y' = -2xy^2, h = 0.2, x_0 = 0, x_1 = 0.2, y_0 = 1$$

مرتبه دو با Modified Euler:

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) = -0.4x_i y_i^2$$
$$k_2^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_1^{(i)}) = -0.4(x_i + 0.2)\left(y_i + k_1^{(i)}\right)^2$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\left(k_1^{(i)} + k_2^{(i)}\right)$$

$$k_1^{(0)} = 0$$
$$k_2^{(0)} = -0.4 \times 0.2 \times 1 = -0.08$$
$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}(-0.08) = 0.96$$

$$k_1^{(1)} = -0.4 \times 0.2 \times 0.9216 = -0.0737$$
$$k_2^{(1)} = -0.4 \times 0.4 \times 0.7855 = -0.1257$$
$$y_2 = 0.96 + \frac{1}{2}(-0.08) = 0.8603$$

مرتبه سه:

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) = -0.4x_i y_i^2$$
$$k_2^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}) = -0.4(x_i + 0.1)\left(y_i + 0.5k_1^{(i)}\right)^2$$
$$k_3^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + 2k_2^{(i)} - k_1^{(i)}) = -0.4(x_i + 0.2)\left(y_i + 2k_2^{(i)} - k_1^{(i)}\right)^2$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 4k_2^{(i)} + k_3^{(i)}\right)$$

$$k_1^{(0)} = 0$$
$$k_2^{(0)} = -0.4 \times 0.1 \times 1 = -0.04$$
$$k_3^{(0)} = -0.4 \times 0.2 \times 0.8464 = -0.0677$$
$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(-0.2277) = 0.962$$

$$k_1^{(1)} = -0.4 \times 0.2 \times 0.9254 = -0.074$$
$$k_2^{(1)} = -0.4 \times 0.3 \times 0.8556 = -0.1027$$
$$k_3^{(1)} = -0.4 \times 0.4 \times 0.6899 = -0.1104$$
$$y_2 = 0.962 + \frac{1}{6}(-0.5952) = 0.8628$$

مرتبه چهار:

$$
\begin{aligned}
k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i) = -0.4x_iy_i^2 \\
k_2^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}) = -0.4(x_i+0.1)\left(y_i + 0.5k_1^{(i)}\right)^2 \\
k_3^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}) = -0.4(x_i+0.1)\left(y_i + 0.5k_2^{(i)}\right)^2 \\
k_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) = -0.4(x_i+0.2)\left(y_i + k_3^{(i)}\right)^2 \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_1^{(0)} &= 0 \\
k_2^{(0)} &= -0.4 \times 0.1 \times 1 = -0.04 \\
k_3^{(0)} &= -0.4 \times 0.1 \times 0.98^2 = -0.0384 \\
k_4^{(0)} &= -0.4 \times 0.2 \times 0.9615^2 = -0.074 \\
y_1 &= 1 + \frac{1}{6}(0 - 2 \times 0.04 - 2 \times 0.0384 - 0.074) = 0.9615
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_1^{(1)} &= -0.4 \times 0.2 \times 0.9615^2 = -0.074 \\
k_2^{(1)} &= -0.4 \times 0.3 \times 0.9246^2 = -0.1026 \\
k_3^{(1)} &= -0.4 \times 0.3 \times 0.9102^2 = -0.0994 \\
k_4^{(1)} &= -0.4 \times 0.4 \times 0.8621^2 = -0.1189 \\
y_2 &= 0.9615 + \frac{1}{6}(-0.074 - 2 \times 0.1026 - 2 \times 0.0994 - 0.1189) = 0.8621
\end{aligned}
$$

تابع y بطور دقیق عبارت است از:

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

لذا، $y(0.4) = 0.8621$ که نشان می‌دهد دقت روش مرتبه چهار بیشتر از دو روش دیگر است. $\triangleleft$

۳. پاسخ معادله را در بازه $t \in [0,1]$ با گام 0.5 و با استفاده از روش‌های ذکر شده به دست آورید.

$$
\begin{cases}
\frac{dy}{dt} = -2y + t^2 \\
y(0) = 1
\end{cases}
$$

(الف) با استفاده از روش اویلر بهسازی شده مرتبه دوم. (۵ نمره)

(ب) با استفاده از روش هیون. (۵ نمره)

(ج) با استفاده از روش نقطه میانی. (۵ نمره)

حل.

$$y' = -2y + x^2, h = 0.5, x_0 = 0, x_1 = 0.5, y_0 = 1$$
$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) = 0.5(-2y_i + x_i^2)$$

(الف)

$$\begin{aligned}
k_2^{(i)} &= hf(x_{i+1}, y_i + k_1^{(i)}) = 0.5f(x_i + 0.5, 0.5x_i^2) \\
&= 0.5\left(-x_i^2 + (x_i + 0.5)^2\right) \\
&= 0.5\left(x_i + 0.25\right) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}(k_1^{(i)} + k_2^{(i)}) \\
&= y_i + 0.25(x_i^2 + x_i - 2y_i + 0.25) \\
&= 0.25(x_i^2 + x_i + 2y_i + 0.25) \\
y_1 &= 0.25(2 + 0.25) = 0.5625 \\
y_2 &= 0.25(0.25 + 0.5 + 1.125 + 0.25) = 0.53125
\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
k_2^{(i)} &= hf(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k_1^{(i)}) = 0.5f(x_i + 0.3333, 0.3333(y_i + x_i^2)) \\
&= \frac{1}{6}\left(x_i^2 + 2x_i - 2y_i + \frac{1}{3}\right) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{4}(k_1^{(i)} + 3k_2^{(i)}) = \frac{1}{8}(2x_i^2 + 2x_i + 4y_i + 0.3333) \\
y_1 &= 0.125(4 + 0.3333) = 0.5417 \\
y_2 &= 0.125(0.5 + 1 + 2.1667 + 0.3333) = 0.5
\end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned}
k_2^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}) = 0.5f(x + 0.25, 0.25(x_i^2 + 2y_i)) \\
&= 0.25(x_i^2 + x_i - 2y_i + 0.125) \\
y_{i+1} &= y_i + k_2^{(i)} = 0.25(x_i^2 + x_i + 2y_i + 0.125) \\
y_1 &= 0.25(2 + 0.125) = 0.53125 \\
y_2 &= 0.25(0.25 + 0.5 + 1.0625 + 0.125) = 0.484375
\end{aligned}$$

$\triangleright$

۴. با استفاده از روش Predictor-Corrector آدامز ــ بشفورث مرتبه چهارم و مقادیر داده شده مقدار $y(0.4)$ را به دست آورید. (۱۰ نمره)

$$y' = y - x^3$$

x	y
0	1
0.1	1.1051
0.2	1.221
0.3	1.3477

حل.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-3} - 9y'_{i-4}\right)$$

$$y_4 = 1.3477 + \frac{0.1}{24}(55 \times (1.3477 - 0.027) - 59 \times (1.221 - 0.008) + 37 \times (1.1051 - 0.001) - 9 \times 1)$$

$$= 1.3477 + \frac{32.9565}{240} = 1.3477 + 0.1373 = 1.485$$

▷

۵. معادلات دیفرانسیل زیر را به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کنید.

(الف) $lny' + u = sinx$ (۵ نمره)

(ب) $y''y - xy' - 2y^2 = 0$ (۵ نمره)

(ج) $y^{(4)} - 4y''\sqrt{1-y^2} = 0$ (۵ نمره)

(د) $(y'')^2 = |32y'x - y^2|$ (۵ نمره)

حل.

(الف)

$$\ln y' + y = \sin x \Rightarrow y' = e^{\sin x - y}$$

(ب)

$$y''y - xy' - 2y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y' = z \\ z' = \dfrac{xz + 2y^2}{y} \end{cases}$$

(ج)

$$y^{(4)} - 4y^{(2)}\sqrt{1-y^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y' = z \\ z' = w \\ w' = u \\ u' = 4w\sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

(د)

$$\left(y''\right)^2 = \left|32y'x - y^2\right| \Rightarrow \begin{cases} y' = z \\ z' = \sqrt{|32zx - y^2|} \end{cases}$$

▷

۶. (برنامه نویسی) برای بخش عملی به فایل ژوپیتر نوت بوک مراجعه کنید. (۳۰ نمره)