محاسبات عددی **فعالیت کلاسی - مشتق**

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ **موعد تحویل: ۱۲ بهمن**

سوال ۱.

فرض کنید تابع f در بازه $[a,b]$ دو بار مشتق‌پذیر است و x_i، $i = 0, 1, \dots, n$، نقاط هم‌فاصله در این بازه هستند که $x_0 = a$ و $x_n = b$ می‌باشد. اگر $p(x)$ چندجمله‌ای درون‌یاب [1] پیشروی $f(x)$ باشد، آنگاه $f''(x)$ را با مقدار $p''(x)$ تخمین می‌زنیم.

الف) با فرض $s = \frac{x-x_0}{h}$ و $P(s) = f_0 + \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$ را محاسبه کنید. $p''(x)$

ب) تخمینی برای $f'(x_0)$ در حالت کلی، با استفاده از جمله اول محاسبه (الف) و با استفاده از دو جمله اول آن ارائه کنید.

جواب سوال ۱.

محاسبه مشتق با استفاده از فرمول تیلور [2] :

فرض کنید تابع f روی $[a,b]$ به قدر لازم مشتق‌پذیر است و x_i، $i = 0, 1, \dots, n$، نقاط هم‌فاصله در این بازه باشند با قیود $x_0 = a$ و $x_n = b$. بنابراین $x_{i+1} = x_i + h$ به ازای $h > 0$. طبق قضیه تیلور داریم:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi), \quad x_i < \xi < x_{i+1}$$

بنابراین

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + O(h^3)$$

به طریق مشابه

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + O(h^3)$$

در نتیجه

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

یعنی $\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$ تخمینی برای $f'(x_i)$ با خطای برشی $O(h^2)$ است.

---

[1] Polynomial interpolation

[2] Taylor

سوال ۲.

نشان دهید $\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2}$ تخمینی برای $f''(x_i)$ با خطای برشی $O(h^2)$ است.

سوال ۳.

نشان دهید

$$f'''(x_i) = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} + O(h^2)$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{h^4} + O(h^2)$$

سوال ۴.

با استفاده از قضیه تیلور نشان دهید تقریب از مرتبه $O(h^4)$ برای مشتقات اول تا سوم $f(x)$ وجود دارد و همچنین

$$f'(x_i) \approx \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2}$$

$$f'''(x_i) \approx \frac{-f_{i+3} + 8f_{i+2} - 13f_{i+1} + 13f_{i-1} - 8f_{i-2} + f_{i-3}}{8h^3}$$

خطای برشی هر یک از تقریب‌های بالا $O(h^4)$ است.

موفق باشید.