

سوال ۱.

جواب دستگاه خطی زیر را با استفاده از روش کرامر^۱ به دست آورید.

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

حل

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{7}{7} = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{7}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \rightarrow x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{6}{7}$$

سوال ۲.

جواب دستگاه خطی زیر را با استفاده از روش حذفی گاوس^۲ به دست آورید.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 12x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 12x_3 = -6 \end{cases}$$

^۱Cramer^۲Gaussian Elimination

حل

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -12 & 9 \\ 1 & -2 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 12 & -6 \end{array} \right)$$

افزودن منفی سطر اول به سطر دوم:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -12 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 2 & 4 & 12 & -6 \end{array} \right)$$

افزودن منفی دو برابر سطر اول به سطر سوم:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -12 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 12 & 36 & -24 \end{array} \right)$$

افزودن منفی شش برابر سطر دوم به سطر سوم:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -12 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

تقسیم سطر دوم بر ۲:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -12 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

افزودن ۴ برابر سطر دوم به سطر اول:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = -2 \rightarrow (I) \end{cases}$$

هر x_2 و x_3 ای که در معادله‌ی I صدق کنند به همراه $x_1 = 1$ جواب دستگاه هستند.

سوال ۳.

معادله‌ی خطی $Ax = b$ را با مقادیر زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ و } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- الف) با تقریب اولیه $x^{(0)} = 0$ و سه تکرار از روش ژاکوبی^۳ مقادیر $x^{(1)}$ ، $x^{(2)}$ و $x^{(3)}$ را محاسبه کنید.
- ب) با تقریب اولیه $x^{(0)} = 0$ و سه تکرار از روش گاوس-سایدل^۴ مقادیر $x^{(1)}$ ، $x^{(2)}$ و $x^{(3)}$ را محاسبه کنید.
- ج) کدام یک از روش‌های بالا تقریب بهتری از جواب‌ها می‌دهد؟

حل

الف) دور اول:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0 - 2(0) = 4 \\ -(0) + 4x_2 - (0) = 0 \\ 0 - (0) + 4x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

دور دوم:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0 - 2(1) = 4 \\ -1 + 4x_2 - 1 = 0 \\ 1 - 0 + 4x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/5 \\ x_2 = 0/5 \\ x_3 = 0/75 \end{cases}$$

دور سوم:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0/5 - 2(0/75) = 4 \\ -1/5 + 4x_2 - 0/75 = 0 \\ 1/5 - 0/5 + 4x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/25 \\ x_2 = 0/5625 \\ x_3 = 0/75 \end{cases}$$

ب) دور اول:

$$4x_1 + 1(0) - 2(0) = 4 \rightarrow x_1 = 1$$

$$-1(x_1) + 4x_2 - 1(0) = 0 \rightarrow 4x_2 = x_1 \xrightarrow{x_1=1} x_2 = 0/25$$

$$x_1 - 1(x_2) + 4x_3 = 4 \xrightarrow{(x_1, x_2)=(1, 0/25)} 1 - 0/25 + 4x_3 = 4 \rightarrow x_3 = 0/8125$$

دور دوم:

$$4x_1 + 0/25 - 2(0/8125) = 4 \rightarrow x_1 = 1/34375$$

$$-x_1 + 4x_2 - 0/8125 = 0 \xrightarrow{\text{از بالایی}} x_2 = 0/5390625$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \xrightarrow{\text{از بالایی ها}} x_3 = 0/798828125$$

دور سوم:

$$4x_1 + 0.5390625 - 2(0.798828125) = 4 \rightarrow x_1 = 1/2646484375$$

$$-x_1 + 4x_2 - 0.798828125 = 0 \xrightarrow{\text{از بالایی}} x_2 = 0.5158691406$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \xrightarrow{\text{از بالایی ها}} x_3 = 0.8128051758$$

(ج) جواب واقعی (بدست آمده از ولفرام)

$$\begin{cases} x_1 = 1/2753623188 \\ x_2 = 0.5217391304 \\ x_3 = 0.8115942029 \end{cases}$$

حال اختلاف جواب‌های روش‌های بخش الف و ب را مقایسه می‌کنیم
اختلاف روش گاوس سایدل:

$$\begin{cases} \Delta x_1^A = 0.0107138743 \\ \Delta x_2^A = 0.0058699898 \\ \Delta x_3^A = 0.0012109729 \end{cases}$$

اختلاف روش ژاکوبی:

$$\begin{cases} \Delta x_1^B = 0.0253623188 > \Delta x_1^A \\ \Delta x_2^B = 0.0407608696 > \Delta x_2^A \\ \Delta x_3^B = 0.0615942029 > \Delta x_3^A \end{cases}$$

به وضوح جواب‌های بدست آمده از (ب) نزدیکتر هستند، پس گاوس سایدل تقریب بهتری از جواب‌ها می‌دهد.

سوال ۴.

دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0/2 \\ -1/2x_1 + x_2 + 1/4x_3 = -1/425 \\ x_1 - 1/2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

پاسخ این دستگاه به صورت $(0/9, 0/8, 0/7)^t$ است.

الف) از تقریب اولیه $x^{(0)}$ و روش گاوس-سایدل استفاده کنید و پاسخ را با خطای 10^{-2} و در حداکثر ۳۰۰ تکرار به دست آورید.

ب) در صورتی که دستگاه را به شکل زیر تغییر دهیم، پاسخ بخش الف چه خواهد شد؟

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0/2 \\ -1/2x_1 + x_2 - 1/4x_3 = -1/425 \\ x_1 - 1/2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

حل

Part A

Giving $x-z=0.2, -0.5x+y+0.25z=-1.425, x-0.5y+z=2$ to Wolfram leads to:

$$x \approx 0.806667, y \approx -1.17333, z \approx 0.606667$$

And with our code:

```
In [3]: def gauss_seidel(A, b):  
        solution = [0, 0, 0]  
        previous_solution = [0, 0, 0]  
        for _ in range(300):  
            for k in range(3):  
                sum_of_other_side = b[k]  
                for j in range(3):  
                    if k != j:  
                        sum_of_other_side -= solution[j] * A[k][j]  
                previous_solution[k] = solution[k]  
                solution[k] = sum_of_other_side / A[k][k] # dividing by the coefficient  
        return solution
```

```
In [4]: gauss_seidel([[1, 0, -1], [-0.5, 1, 0.25], [1, -0.5, 1]], [0.2, -1.425, 2])
```

```
Out[4]: [0.8066666666666667, -1.1733333333333333, 0.6066666666666666]
```

So, the result for part (a) is around $x = 0.81, y = -1.17, z = 0.61$.

Part B

Giving $x-2z=0.2, -0.5x+y-0.25z=-1.425, x-0.5y+z=2$ to Wolfram leads to:

$$x \approx 1.15789, y \approx -0.726316, z \approx 0.478947$$

And with our code:

```
In [5]: gauss_seidel([[1, 0, -2], [-0.5, 1, -0.25], [1, -0.5, 1]], [0.2, -1.425, 2])
```

```
Out[5]: [2.1568728252933877e+41, 1.3480455158083672e+41, -1.482850067389204e+41]
```

As this matrix is not diagonally dominant (for the first row, $1 > 0 + |-2|$ is wrong) so there is the possibility that it can diverge.

سوال ۵.

الف) دستگاه زیر را با روش گاوس-سیدل^۵ حل کنید.

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

ب) دستگاه زیر را با روش گاوس-سیدل حل کنید

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

ج) چرا با آن که دستگاه‌های (الف) و (ب) جواب‌های یکسان دارند ولی همگرایی روش تکرار گاوس-سیدل در (الف) و (ب) متفاوت است؟

* در (الف) و (ب) تقریب اولیه را $x^{(0)} = y^{(0)} = 0$ در نظر بگیرید.

حل

```
In [1]: def gauss_seidel(A, b):
        solution = [0, 0]
        for _ in range(100):
            for k in range(2):
                sum_of_other_side = b[k]
                for j in range(2):
                    if k != j:
                        sum_of_other_side -= solution[j] * A[k][j]
                solution[k] = sum_of_other_side / A[k][k] # dividing by the coefficient
        return solution
```

Part A

Giving $x-2y=4, 2x+y=3$ to Wolfram leads to:

$$x \approx 2, y \approx -1$$

And with our code:

```
In [2]: gauss_seidel([[1, -2], [2, 1]], [4, 3])
Out[2]: [-8.0346902212949505e+59, 1.6069380442589901e+60]
```

We will describe the reason of the wrong answer in part C.

Part B

Giving $2x+y=3, x-2y=4$ to Wolfram leads to:

$$x \approx 2, y \approx -1$$

And with our code:

```
In [3]: gauss_seidel([[2, 1], [1, -2]], [3, 4])
Out[3]: [2.0, -1.0]
```

So we get the same results: $x = 2$ and $y = -1$.

Part C

The results from part A are wrong, because the matrix is not diagonally dominant (for example, $1 < |2|$ in the first row). So the Gauss Seidel method can diverge (and in this case, it doesn't converge, based on what we found from running the code above). But for part B it is diagonally dominant, so the method converges.

The matrix from part A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

The matrix from part B:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

سوال ۶.

الف) نشان دهید روش گاوس-سیدل در مورد دستگاه

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 13 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 13 \end{cases}$$

برای بردار اولیه $x^{(0)} = 0$ همگراست، در حالی که روش ژاکوبی واگراست.

ب) آیا ماتریس ضرایب دستگاه فوق غالب قطری است؟

ج) آیا شرط غالب قطری بودن ماتریس ضرایب در یک دستگاه شرط لازم است؟

حل

$$\text{الف) مقادیر ویژه‌ی ماتریس } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ برابرند با } \begin{cases} \lambda_1 \approx 12/6873 \\ \lambda_2 \approx 2/5356 \\ \lambda_3 \approx 0/7771 \end{cases}$$

که هر سه مثبت‌اند ضمناً ماتریس متقارن است ($A^T = A$). در نتیجه مثبت معین (Positive definite) است و در نتیجه در روش گاوس سیدل همگرا است. اما روش ژاکوبی واگراست و با اجرای کد نیز به این نتیجه می‌رسیم که برخلاف گاوس سایدل جواب درستی نمی‌دهد. (شرط مثبت معین بودن برای گاوس سیدل است نه ژاکوبی و چون قطری غالب هم نیست امکان diverge هم طبعاً دارد)

ضمناً برای اثبات واگرا بودن در ژاکوبی می‌توان مقادیر ویژه $D^{-1}(L + U)$ را حساب کرد:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} = L + D + V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{مقادیر ویژه}} (1/39054, -0/847394, -0/543141)$$

ماکسیمم قدرمطلق‌شان $1/39054$ است که $1 <$ است. در نتیجه واگرا می‌شود.
اما برای گاوس سایدل $U(L + D)^{-1}$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{3}{10} & \frac{4}{15} \\ 0 & -\frac{6}{25} & -\frac{64}{75} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{مقادیر ویژه}} (0, -0/688669, -0/464665)$$

که ماکسیمم قدرمطلق‌شان $0/688669 > 1$ است. که با همگرا بودن گاوس سایدل سازگار است.
پس گاوس سایدل همگرا و ژاکوبی واگراست.

ب) خیر زیرا به عنوان مثال در سطر اول $3 + 4 \neq 5$ است. (و $4 + 3 \neq 6$ و $4 + 4 \neq 5$)

ج) خیر زیرا اگر شرط لازم بود، چون A در گاوس سایدل همگرا بود، باید ماتریس غالب قطری می شد، ولی نشده است. در نتیجه شرط لازم نمی تواند باشد. (در حقیقت غالب قطری بودن یا متقارن مثبت معین بودن شرط کافی است)

سوال ۷.

جواب دستگاه زیر را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \cos(y) \\ y = \frac{1}{4} \sin(x) \end{cases}$$

حل

روش نیوتون:

$$\begin{aligned} f \rightarrow x - \frac{1}{4} \cos y = 0 &\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{4} \sin y \end{cases} \\ g \rightarrow y - \frac{1}{4} \sin x = 0 &\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{4} \cos x \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

با داشتن اطلاعات بالا ماتریس ژاکوبین را به صورت مقابل تشکیل می دهیم

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \sin y \\ -\frac{1}{4} \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

با فرض اعداد اولیه داریم: $\begin{cases} x = 0.5 \\ y = 0.5 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.24 = \frac{1}{4} \sin 0.5 \\ -0.44 = -\frac{1}{4} \cos 0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} f(\vec{x}) \\ g(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.12 = \frac{1}{4} \sin 0.24 \\ -0.44 = -\frac{1}{4} \cos 0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0.01 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 0.24 \\ 0.00 = 0.24 - \frac{1}{4} \sin 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.49 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.49 \\ 0.24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.12 = \frac{1}{4} \sin 0.24 \\ -0.44 = -\frac{1}{4} \cos 0.49 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0.01 = 0.49 - \frac{1}{4} \cos 0.24 \\ 0.00 = 0.24 - \frac{1}{4} \sin 0.49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.49 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

با جای گذاری در رابطه اصلی نتیجه می شود که پاسخ درست است (نزدیک به برقراری کامل معادلات است)

سوال ۸. تقریبی از جواب دستگاه

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

بدست آورید که $|y_{n+1} - y_n| < 10^{-3}$ و $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-3}$.

حل

روش نیوتون:

$$f \rightarrow x^2 + y^2 - 25 = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \end{cases}$$

$$g \rightarrow x^2 - y^2 - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -2y \end{cases}$$

با داشتن اطلاعات بالا ماتریس ژاکوبین را به صورت مقابل تشکیل می دهیم

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

با فرض اعداد اولیه $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ داریم: (دلیل حدس: $4^2 + 3^2 = 25$ و $4^2 - 3^2 = 7$ (نزدیک به ۵) پس زیاد نباید از جواب دور باشد)

$$\begin{bmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} f(\vec{x}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/875 \\ 3/167 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3/875 \\ 3/167 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/750 & 6/334 \\ 7/750 & -6/334 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0.046 \\ -0.014 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/873 \\ 3/162 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3/873 \\ 3/162 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/746 & 6/324 \\ 7/746 & -6/324 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -0.002 \\ 0.002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/873 \\ 3/162 \end{bmatrix}$$

اختلاف با قبلی ها کمتر از 10^{-3} است (در تمام محاسبات تا ۳ رقم گرد کرده ایم) با جای گذاری در رابطه اصلی نتیجه می شود که پاسخ درست است (نزدیک به برقراری کامل معادلات است)

سوال ۹. دستگاه غیرخطی زیر را حل کنید. (جواب را تا ۷ رقم اعشار بدست آورید)

$$\begin{cases} x^2 - 10x + y^2 = -8 \\ xy^2 + x - 10y = -8 \end{cases}$$

حل

$$f \rightarrow x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 10 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$g \rightarrow xy^2 + x - 10y + 8 = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = y^2 + 1 \rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 2xy - 10$$

Jacobian matrix:

$$J = \begin{bmatrix} 2x - 10 & 2y \\ y^2 + 1 & 2xy - 10 \end{bmatrix}$$

In [11]: `import numpy as np`

In [12]:

```
def jacobian_matrix(x, y):
    return np.array([[2 * x - 10, 2 * y], [y * y + 1, 2 * x * y - 10]])

initial_x = [[4], [4]] # chosen because 4^2-10(4)+4^2 = -8 and at close to solution (at
previous_x = initial_x

for i in range(10):
    x_1 = initial_x[0][0]
    x_2 = initial_x[1][0]
    jacobian = jacobian_matrix(x_1, x_2)
    initial_x = initial_x - np.matmul(np.linalg.inv(jacobian), np.array([[x_1 * x_1 - 10
    if abs(initial_x[0][0] - previous_x[0][0]) < 0.0000001 and abs(initial_x[1][0] - pre
        break
    previous_x = initial_x

print(initial_x)

[[2.19343942]
 [3.02046647]]
```

So $x_1 = 2.1934394$ and $x_2 = 3.0204665$

Checking in the original equations to see if they are close enough to zero:

In [13]:

```
# Check

x_1 = initial_x[0][0]
x_2 = initial_x[1][0]
print(x_1 * x_1 - 10 * x_1 + x_2 * x_2 + 8)
print(x_1 * x_2 * x_2 + x_1 - 10 * x_2 + 8)

-3.552713678800501e-15
3.552713678800501e-15
```

Close to 0 ==> So the solution is correct

موفق باشید.