**محاسبات عددی** — **سری شمارهٔ ۱**

**نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳** — **موعد تحویل: ۸ آبان**

---

**سوال ۱.** بسط تیلور تابع $tan^{-1}(x)$ را حول $x_0 = 0$ بیابید. شما باید جمله کلی برای $P_n(x)$ پیدا کنید، بازه همگرایی آن را مشخص کنید و حد بالای مناسبی برای $|R_n(x)|$ برحسب n ارائه دهید. (فرض کنید که می‌دانید که این تابع روی اعداد حقیقی تحلیلی است)

پاسخ:

ابتدا بست مک‌لورن تابع را حساب می‌کنیم. برای بدست آوردن بست مک‌لورن وارون تانژانت، دو روش قابل قبول وجود دارد. یا میتوانید از تابع داده شده، متوالیا مشتق بگیرید و به کمک استقرا سری کامل را بسازید.

راه دیگر این است که از بسط مک‌لورن تابع $\frac{1}{1-x}$ استفاده کنید:

$$-1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = tan^{-1}(x)$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}dt$$

$$tan^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^{2k}dt$$

$$tan^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

حال با دانستن این که تابع تحلیلی است، طبق قضیه باقی‌مانده تیلور میدانیم که بسط تیلور این تابع حول صفر وجود دارد به طوری که

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(k+1)!}x^{n+1}$$

از بسط مکلورن به دست آمده در بالا به این نتیجه می‌رسیم که

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{even is k} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}}(k-1)! & \text{odd is k} \end{cases}$$

فرم کلی $P_n$ به صورت canonical

$$P_n(x) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{f^{(k)}(۰)}{k!} x^k$$

فرم کلی $P_n(x)$ به صورت کوتاه

$$P_{۲n+۱}(x) = \sum_{k=۰}^{n} (-۱)^k \frac{x^{۲k+۱}}{۲k+۱}$$

هر کدام از این دو صورت را نوشته باشید قبول است.

بازه همگرایی تابع نمیتواند از $(-۱, ۱)$ بیشتر باشد زیرا ما از بسط مکلورن $\frac{۱}{۱-x}$ استفاده کردیم که در این بازه همگرا است. همچنین با توجه به بسط مکلورن به دست آمده برای $tan^{-۱}(x)$ میتوان دید که سری alternating هست و در صورتی که x در بازه $(-۱, ۱)$ باشد، آنگاه تک تک جملات در حد بی نهایت k به صفر میل می‌کنند و قدر مطلق هر جمله از جمله قبلی کوچکتر است پس این سری در این بازه مطلقا همگراست. از عکس این مشاهده می‌توان واگرا بودن سری در خارج بازه را هم نتیجه گرفت.

برای بدست آوردن حد بالای خطای این سری. به این موضوع دقت می‌کنیم که این دنباله، همگرا و alternating است و به همین‌خاطر خطای آن همیشه کمتر از جمله ی بعدی دنباله است

$$|R_{۲n+۱}(x)| \leq |P_{۲n+۳}(x) - P_{۲n+۱}(x)| = \left| \frac{x^{۲n+۳}}{۲n+۳} \right|$$

---

**سوال ۲.** فرض کنید می‌خواهیم تابع $f(x)$ را با استفاده از سری مک‌لورن توابع $sin(x)$، $cos(x)$ و $tan^{-۱}(x)$ روی بازه‌ی $[\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۶}]$ حساب کنیم. محاسبه کنید که هر کدام از این سه سری را حداقل باید تا چه مرتبه ای بسط دهیم تا خطایِ کلِ محاسبه‌یِ مقدارِ تابع روی کل بازه، از $۱۰^{-۵}$ کمتر شود.

$$f(x) = \frac{۴sin^{۲}(x) - cos(x)}{۳tan^{-۱}(\frac{۲x}{\pi\sqrt{۳}})}$$

پاسخ:

ابتدا تابع k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$k(a, b, c) = \frac{۴a^{۲} - b}{۳c}$$

حال مشاهده می‌کنیم که

$$f(x) = k(sin(x), cos(x), tan^{-۱}(\frac{۲x}{\pi\sqrt{۳}}))$$

حال با استفاده از فرمول خطای چند متغیر داریم:

$$\Delta k = \frac{\partial k}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial k}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial k}{\partial c}\Delta c$$

$$\frac{\partial k}{\partial a} = \frac{۸a}{۳c}$$

$$\frac{\partial k}{\partial b} = \frac{-b}{۳c}$$
$$\frac{\partial k}{\partial c} = \frac{-۴a + b}{۳c^۲}$$

حال حد بالایی برای مقادیر ماکسیمم این ضریب خطاها را روی بازه‌ی داده شده می‌یابیم: برای سادگی ماکسیمم سینوس و کسینوس را ۱ درنظر می‌گیریم. همچنین دقت می‌کنیم که تابع وارون تانژانت صعودی است پس مقدار کمینه آن روی بازه، در نقطه $x = \pi/۲$ اتفاق می‌افتد.

$$\left|\frac{\partial k}{\partial a}\right| \leq \frac{۸}{۳(\frac{\pi}{۶})}$$
$$\left|\frac{\partial k}{\partial b}\right| \leq \frac{۱}{۳(\frac{\pi}{۶})}$$
$$\left|\frac{\partial k}{\partial c}\right| \leq \frac{۵}{۳(\frac{\pi}{۶})^۲}$$

حال داریم:

$$|\Delta k| \leq \left|\frac{\partial k}{\partial a}\Delta a\right| + \left|\frac{\partial k}{\partial b}\Delta b\right| + \left|\frac{\partial k}{\partial c}\Delta c\right|$$

$$|\Delta k| \leq \left|\frac{۸}{۳(\frac{\pi}{۶})}\Delta a\right| + \left|\frac{۱}{۳(\frac{\pi}{۶})}\Delta b\right| + \left|\frac{۵}{۳(\frac{\pi}{۶})^۲}\Delta c\right|$$

حال داریم:

$$\frac{۸}{۳(\frac{\pi}{۶})} \approx ۵/۰۹۲$$
$$\frac{۱}{۳(\frac{\pi}{۶})} \approx ۰/۶۳۶$$
$$\frac{۵}{۳(\frac{\pi}{۶})^۲} \approx ۶/۰۷۹$$

و میبینیم که

$$۱۰^{-۲} \times ۵/۰۹۲ + ۱۰^{-۱} \times ۰/۶۳۶ + ۱۰^{-۱} \times ۶/۰۷۹ \approx ۱$$

درواقع برای اینکه تضمین کنیم که خطای کل عبارت از $۱۰^{-۵}$ کمتر است. باید حتما خطای هر سه جمله کمتر از $۱۰^{-۶}$ باشد. اما خطای یکی از جملات باید کمتر از $۱۰^{-۷}$ باشد.

در حقیقت هر ترکیبی از خطاها که معادله زیر را ارضا کند می‌تواند جواب مساله باشد و بسته به توان محاسبانی می‌توانیم هر کدام را انتخاب کنیم.

$$۵/۰۹۲\Delta a + ۰/۶۳۶\Delta b + ۶/۰۷۹\Delta c \leq ۱۰^{-۵}$$

برای مثال حالت زیر را انتخاب می‌کنیم.

$$\Delta a = ۱۰^{-۷}$$

$$\Delta b = ۱۰^{-۶}$$
$$\Delta c = ۱۰^{-۶}$$

و با استفاده از حد بالای خطای سری هر کدام تعداد جملات مورد نیاز را حساب می‌کنیم:

برای $\sin(.)$ :

$$|\Delta sin(x)| \leq \left| \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \right| \leq ۱۰^{-۷}$$

$$\frac{(\frac{۵\pi}{۶})^{۲n+۱}}{(\frac{۲n+۱}{e})^{۲n+۱}} \leq ۱۰^{-۷}$$

$$(\frac{۵e\pi}{۶(۲n+۱)})^{۲n+۱} \leq ۱۰^{-۷}$$

$$n = ۹ \Rightarrow (\frac{۵ \times ۸/۵۴}{۶ \times ۱۹})^{۱۹} < (\frac{۲}{۵})^{۱۹} < ۱۰^{-۷}$$

برای $\cos(.)$ :

$$|\Delta cos(x)| \leq \left| \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} \right| \leq ۱۰^{-۶}$$

$$\frac{(\frac{۵\pi}{۶})^{۲n}}{(\frac{۲n}{e})^{۲n}} \leq ۱۰^{-۶}$$

$$(\frac{۵e\pi}{۲n})^{۶(۲n)} \leq ۱۰^{-۶}$$

$$n = ۹ \Rightarrow (\frac{۵ \times ۸/۵۴}{۶ \times ۱۸})^{۱۸} < (\frac{۲}{۵})^{۱۸} < ۱۰^{-۶}$$

برای $tan^{-۱}(.)$ :

$$|\Delta tan^{-۱}(\frac{۲x}{\pi\sqrt{۳}})| \leq \left| \frac{(\frac{۵}{۳\sqrt{۳}})^{۲n+۳}}{(۲n+۳)} \right| \leq ۱۰^{-۶}$$

$$\frac{(۰/۹۶۲)^{۲n+۳}}{۲n+۳} \leq ۱۰^{-۶}$$

با لگاریتم گیری بدست می‌آید

$$n = ۱۰۸$$

به دلیل عدم وجود فاکتوریل در مخرج جملات این سری، سری بسیار کند همگرا می‌شود. این کندی در تعداد عبارات مورد نیاز برای بدست آوردن دقت مورد نیاز کاملا مشهود است.

---

**سوال ۳.** بسط تیلور تابع زیر را تا چه مرتبه ای حساب کنیم که خطای محاسبه در $x = \frac{\pi}{۴}$ کمتر از $۱۰^{-۵}$ شود؟

$$f(x) = \frac{sin(x)}{x}$$

پاسخ:

راه مستقیم و قابل قبول این است که مرتبا مشتق تابع را در یک نقطه غیر صفر حساب کنیم و بسط تیلور و خطای آن را حساب کنیم. راه ساده تر این است که از بسط مک‌لورن تابع سینوس استفاده کنیم:

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\frac{sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

حال با توجه به اینکه سری داده شده alternating است و قدر مطلق هر جمله آن کمتر از جمله قبل است و در حد بینهایت k تمام جملات به صفر میل میکنند (سرعت رشد مخرج به صورت فاکتوریل و سرعت رشد صورت به صورت نمایی است) پس خطای قطع سری در هر k از جمله بعدی کمتر است. به عبارت دیگر:

$$\left|\frac{sin(x)}{x} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\right| \leq \left|\frac{x^{2k+2}}{(2k+3)!}\right|$$
$$\frac{(\frac{\pi}{3})^{2n+2}}{(\frac{2n+3}{e})^{2n+3}} \leq 10^{-5}$$
$$\frac{e}{2n+3}(\frac{e\pi}{3(2n+3)})^{2n+2} \leq 10^{-5}$$
$$n = 4 \Rightarrow \frac{2/7}{11}(\frac{8/54}{33})^{10} \leq 10^{-5}$$

---

**سوال ۴.** می‌دانیم که فرمول کلی سری مکلورن به شکل

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$$

می‌باشد. بنابراین، سری مکلورن $\frac{1}{2+x}$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}$$
$$= 2(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8}) + ...$$

---

**سوال ۵.**

## الف

برای یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $f$، با استفاده از فرمول‌های تقریب مرکزی، معادله زیر را نشان دهید:

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h}$$

و بررسی کنید که خطای تقریب از مرتبه $O(h^2)$ است.

## ب

با توجه به توسعه سری تیلور برای تابع کوسینوس، تایید کنید:

$$\cos(h) + \frac{۱}{۲}h^{۲} \approx ۱$$

و نشان دهید که این تقریب یک خطای از مرتبه $O(h^{۴})$ دارد.

پاسخ:

## الف

از بسط تیلور حول نقطه‌ی $x$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{x+h-x}{۱!}f'(x) + \frac{(x+h-x)^{۲}}{۲!}f''(x) + \frac{(x+h-x)^{۳}}{۳!}f^{۳}(x) + ...$$

$$= f(x) + \frac{h}{۱!}f'(x) + \frac{h^{۲}}{۲!}f''(x) + \frac{h^{۳}}{۳!}f^{۳}(x) + ...$$

می‌دانیم:

$$\frac{h^{۳}}{۳!}f^{۳}(x) + ... = O(h^{۳})$$

در نتیجه:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^{۲}}{۲}f''(x) + O(h^{۳}), (۱)$$

اگر همین کار را برای $f(x+۲h)$ انجام دهیم داریم:

$$f(x+۲h) = f(x) + ۲hf'(x) + ۲h^{۲}f''(x) + O(h^{۳}), (۲)$$

حال از دو معادله ۱ و ۲ می‌توان نوشت:

$$\frac{۴(f(x) + hf'(x) + \frac{h^{۲}}{۲}f''(x)) + O(h^{۳})}{۲h} + \frac{-(f(x) + ۲hf'(x) + ۲h^{۲}f''(x)) + O(h^{۳})}{۲h} - \frac{۳f(x)}{۲h}$$

$$= \frac{۲hf'(x) + ۳O(h^{۳})}{۲h} = f'(x) + O(h^{۲})$$

$$f'(x) + O(h^{۲}) = \frac{-f(x+۲h) + ۴f(x+h) - ۳f(x)}{۲h}$$

**ب**

در این قسمت از بسط مکلورن استفاده می‌کنیم:

$$cos(h) = ۱ - \frac{h^۲}{۲!} + \frac{h^۴}{۴!} - \frac{h^۶}{۶!} + ...$$
$$cos(h) + \frac{h^۲}{۲!} = ۱ + O(h^۴)$$

---

**سوال ۶.** فرض کنید یک جدول باید برای تابع $f(x) = e^x$ آماده شود، برای حالتی که $x$ در بازه $[۰، ۱]$ است. فرض کنید تعداد اعشاراتی که باید برای هر ورودی آمده باشد، $d \geq ۸$ است، یعنی هر مقدار حداقل به هشت رقم اعشار نمایش داده می‌شود. همچنین تفاوت بین مقادیر $x$ مجاور، یعنی اندازه گام، $h$ است. اندازه گام $h$ چقدر باید باشد تا تضمین شود که درون‌یابی خطی، خطای مطلق حداکثر $۱۰^{-۶}$ برای همه مقادیر $x$ در بازه $[۰، ۱]$ دارد؟

پاسخ:

قرار دهید $x_۰, x_۱, ...$ نقاطی که در $f$ در آن محاسبه شده است. همچنین $۱ \leq x \leq ۰$ و فرض کنید $x_j \leq x \leq x_{j+۱}$. معادله زیر نشان می‌دهد که خطا در درون‌یابی خطی برابر است با:

$$|f(x) - P(x)| = \left|\frac{f^{(۲)}(\xi)}{۲!}(x - x_j)(x - x_{j+۱})\right| = \frac{\left|f^{(۲)}(\xi)\right|}{۲}|(x - x_j)||(x - x_{j+۱})|$$

که گام حرکت برابر است با h ،بنابراین $x_j = jh, x_{j+۱} = (j + ۱)h$ و

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\left|f^{(۲)}(\xi)\right|}{۲}|(x - jh)(x - (j + ۱)h)|$$

بنابراین

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [۰,۱]} e^{\xi}}{۲} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+۱}} |(x - jh)(x - (j + ۱)h)| \leq$$

$$\frac{e}{۲} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+۱}} |(x - jh)(x - (j + ۱)h)|$$

تابع $g(x) = (x - jh)(x - (j + ۱)h)$ را برای $jh \leq x \leq (j + ۱)h$ در نظر بگیرید. چون

$$g'(x) = (x - (j + ۱)h) + (x - jh) = ۲(x - jh - \frac{h}{۲}),$$

نقطه‌ی اکسترمم تابع g برابر است با $x = jh + \frac{h}{۲}$ و $g(jh + \frac{h}{۲}) = \frac{h^۲}{۴}$.

از آنجایی که $g(jh) = ۰, g((j+۱)h) = ۰$ حداکثر مقدار $|g'(x)|$ در بازه‌ی $[jh, (j+۱)h]$ در نقطه‌ی اکسترمم باید باشد که نشان می‌دهد:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{e}{۲} \max_{x_j \leq x \leq x_{x+۱}} |g(x)| \leq \frac{e}{۲}.\frac{h^۲}{۴} = \frac{eh^۲}{۸}$$

.

حال داریم:

$$\frac{eh^{۲}}{۸} \leq ۱۰^{-۶}$$

$$h < ۱٫۷۲ \times ۱۰^{-۳}$$

در نهایت چون $n = \frac{(۱-۰)}{h}$ باید یک عدد صحیح باشد، یک گزینه‌ی قابل‌قبول طول گام می‌تواند $h = ۰٫۰۰۱$ باشد.

---

**موفق باشید.**