

سوال ۱.

فرض کنید تابع f در بازه $[a, b]$ دو بار مشتق پذیر است و $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ ، نقاط هم فاصله در این بازه هستند که $x_0 = a$ و $x_n = b$ می باشد. اگر $p(x)$ چند جمله ای درون یاب 1 پیشروی $f(x)$ باشد، آنگاه $f''(x)$ را با مقدار $p''(x)$ تخمین می زنیم.

الف) با فرض $s = \frac{x-x_0}{h}$ و $P(s) = f_0 + \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$ محاسبه کنید.

ب) تخمینی برای $f''(x_0)$ در حالت کلی، با استفاده از جمله اول محاسبه (الف) و با استفاده از دو جمله اول آن ارائه کنید.

جواب سوال ۱.

محاسبه مشتق با استفاده از فرمول تیلور 2 :

فرض کنید تابع f روی $[a, b]$ به قدر لازم مشتق پذیر است و $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ ، نقاط هم فاصله در این بازه باشند با قیود $a = x_0$ و $b = x_n$. بنابراین $x_{i+1} = x_i + h$ به ازای $h > 0$. طبق قضیه تیلور داریم:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi), \quad x_i < \xi < x_{i+1}$$

بنابراین

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + O(h^3)$$

به طریق مشابه

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + O(h^3)$$

در نتیجه

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2)$$

یعنی $\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$ تخمینی برای $f'(x_i)$ با خطای برشی $O(h^2)$ است.

سوال ۲.

نشان دهید $\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$ تخمینی برای $f''(x_i)$ با خطای برشی $O(h^2)$ است.

سوال ۳.

نشان دهید

$$f'''(x_i) = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} + O(h^2)$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{h^4} + O(h^2)$$

سوال ۴ (اختیاری).

با استفاده از قضیه تیلور نشان دهید تقریب از مرتبه $O(h^4)$ برای مشتقات اول تا سوم $f(x)$ وجود دارد و همچنین

$$f'(x_i) \approx \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2}$$

$$f'''(x_i) \approx \frac{-f_{i+3} + 8f_{i+2} - 13f_{i+1} + 13f_{i-1} - 8f_{i-2} + f_{i-3}}{8h^3}$$

خطای برشی هر یک از تقریب‌های بالا $O(h^4)$ است.

موفق باشید.